Ministère des Enseignements Secondaires | **Année Scolaire 2019/2020**
LYCEE BILINGUE DE FOKOUE | **Evaluation séquentielle N°4**
B.P : 05 FOKOUE | **Classe : Tle D**
Département de Mathématiques | **Durée : 4h ; Coef : 04**

Examinateurs : TEDJOU BIENVENU (PLEG)

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

NB : la clarté, la lisibilité et toutes les étapes de calculs seront prises en compte. L'épreuve est numérotée sur deux pages

EXERCICE 1 : 6,5pts

Partie A : 3,5Pts

On considère les suites $(U_n)_{n\in N}$ et $(V_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = (\frac{3}{2}U_n)^2 \end{cases}$ $et\ V_n = ln(\frac{3}{2}U_n)$

1- Calculer V_0 $[0,25pts]$

2- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2 $[0,5pts]$

3- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n $[0,75pts]$

4- Calculer la limite de V_n puis en déduire celle de U_n $[0,5pts]$

5- Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ $et\ T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$

a- Démontrer que : $S_n = (1-2^n)ln2$ $[0,5pts]$

b- Justifier que : $T_n = (\frac{2}{3})^n e^{S_n}$ $[0,5pts]$

6- Exprimer T_n en fonction de n $[0,5pts]$

Partie B : 3pts

1- Soit l'intégrale $K = \int_0^{\pi} e^x cos(2x)dx$. a l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que : $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$ $[1pts]$

2- Soient $I = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x\, dx$ $et\ J = \int_0^{\pi} e^x sin^2 x\, dx$

a- Démontrer que $I + J = e^{\pi} - 1$ $[0,5pts]$

b- Démontrer que $I - J = \frac{e^{\pi}-1}{5}$ $[0,5pts]$

c- En déduire les valeurs de I et J $[1pts]$

EXERCICE 2 : 5pts

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(0,i,j).(unité : 2cm)$.on considère l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = 0$

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$ $[1pts]$

2- Vérifier que -2 est une racine de (E) $[0,25pts]$

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $[0,75pts]$

4- Soient A, B et C les points respectives -2 ; $4i$; $2-2i$

t.me/KamerHighSchool

a- Faire une figure $[0,75pts]$

b- Soit K le milieu de $[BC]$. On considère la similitude directe s de centre A qui transforme B en K. déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre $[BC]$ par la similitude s. $[0,75pts]$

c- Déterminer l'écriture complexe de s $[0,5pts]$

d- Déterminer les éléments caractéristiques de s $[0,5pts]$

5- Déterminer l'expression analytique de s $[0,5pts]$

PROBLEME : 8pts

Partie A

Soit g la foncions définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x + lnx$

1- Dresser le tableau de variation de g $[0,75pts]$

2- Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$ $[0,5pts]$

3- En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$ $[0,5pts]$

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{xlnx}{1+x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique 5cm)

1- Montrer que f est continue en O puis sur $]0;+\infty[$ $[0,5pts]$

2- Etudier la dérivabilité de f en O. interpréter graphiquement le résultat $[0,5pts]$

3- Déterminer la limite de f en $+\infty$ $[0,5pts]$

4- Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ $[0,5pts]$

5- Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ $[0,25pts]$

6- Dresser le tableau de variation de f $[0,5pts]$

7- Construire (C_f) (on prendra $\alpha = 0,3$) $[0,75pts]$

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1;+\infty[$

1- Montrer que h réalise une bijection de I vers l'intervalle J à préciser $[0,5pts]$

2- Soit $h^{-1}(x)$ la bijection réciproque de h. étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J $[0,5pts]$

3- Calculer $h(2)$, et $(h^{-1})'(\frac{2ln2}{3})$ $[0,5pts]$

4- Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(0,i,j)$ $[0,5pts]$

Partie D

1- A laide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e xlnx\,dx$ $[0,5pts]$

2- Montrer que pour tout $x \in [1;e]$, $\frac{xlnx}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{xlnx}{2}$ $[0,5pts]$

3- Montrer que $\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x) \leq \frac{e^2+1}{8}$ $[0,5pts]$

t.me/KamerHighSchool