EPREUVE DE MATHEMATIQUES

LYCÉE BILINGUE DE FOKOUÉ

Quatrième séquence

Proposé par : M. Kouankam Aubin et M. Tedjou Bienvenu

Classe : Tle C , Durée : 4h

La rédaction, la clarté et la rigueur seront des éléments importants d'appréciation des copies

Exercice 1. (2.25 points)

1. On donne le polynôme complexe $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{3})z^3 + (2+\sqrt{3})z^2 - (1+\sqrt{3})z + 1$.
   (a) vérifier que 0 n'est pas racine de P puis exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$. [0.5 pt]
   (b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. [1 pt]
2. Calculer $J = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)dx$. (On pourra effectuer une double intégration par parties) [0.75 pt]

Exercice 2. (2.5 points)

1. Soient n et m deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Montrer que $n+m$ et nm sont premiers entre eux. [0.75 pt]
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $\delta = PGCD(a;b)$ et on pose $a = \delta n$ et $b = \delta m$, où n et m sont des entiers naturels non nuls.
   (a) Justifier l'existence de n et de m puis montrer qu'ils sont premiers entre eux. [0.5 pt]
   (b) Exprimer $PPCM(a;b)$ et $a+b$ en fonction de n, m et δ puis démontrer que : $PGCD(PPCM(a;b);a+b) = PGCD(a;b)$. [0.75 pt]
3. (***Application***)
   Lors d'un chalenge dans un lycée, une partie de jeu aux questions réponses oppose une classe de Terminale C à une classe de Première C. Les deux classes comptes au total 57 élèves, les élèves de la Première étant plus nombreux que ceux de la Terminale. La classe qui remportera la partie recevra des paquets à partager équitablement entre ses membres. Pour qu'un tel partage soit possible quelque soit la classe gagnante, il a fallut prévoir au minimum 252 paquets.
   Combien d'élèves compte chaque classe ? [1 pt]

Exercice 3. (3.25 points)

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. À tout point M de $\mathcal{D}$, on associe le point M' tel que le triangle AMM' soit un triangle isocèle direct et rectangle en A.
   (a) Faire une figure avec deux position distinctes de M. [0.5 pt]
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation ainsi décrite (qui échange M en M'). [0.5 pt]
   (c) Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point M' lorsque M décrit $\mathcal{D}$. [0.5 pt]
2. Soit ABC un triangle de sens direct. soient les points D, E et F tels que les triangles BCD, AEB et ACF soient équilatéraux directs. On désigne par r la rotation centrée en B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r' la rotation centrée en A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On pose $t = r \circ r'$.
   (a) Faire la figure et déterminer la nature et les éléments caractéristiques de t. [0.75 pt]
   (b) Montrer que le quadrilatère AEDF est un parallélogramme. [0.5 pt]
3. Soient ABC un triangle, K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et G le barycentre du système $\{(A;3),(B;2),(C;1)\}$.
   L'ensemble des points M de l'espace tels que $||3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|| = ||3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}||$ est :
   (a) Un plan (b) Une droite (c) Une sphère (d) Un point [0.5 pt]

Exercice 4. (4 points)

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathfrak{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{n}$ de E définis par $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ qui à un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de E associe le vecteur $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E. [0.5 pt]
2. Montrer que $f(\overrightarrow{u}) = (-y-z)\overrightarrow{i} + (x+2y+z)\overrightarrow{j} + (-x-y)\overrightarrow{k}$, puis en déduire la matrice M_f de f dans la base $\mathfrak{B}$. [0.75 pt]
3. Démontrer que le noyau $Kerf$ de f est une droite vectorielle et que son image Imf est un plan vectoriel dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}$. Préciser la dimension de chacun . [1 pt]
4. Montrer que f est une projection vectorielle. [0.5 pt]
5. Montrer que $Kerf \cap Imf = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, puis en déduire que $Kerf$ et Imf sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. [0.75 pt]
6. Montrer que si $\overrightarrow{u} \in Imf$, alors $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, puis en déduire les éléments caractéristiques de f. [0.5 pt]

Problème : (8 points)

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x + lnx$.

1. Dresser le tableau de variation de g [0.75 pt]
2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$. [0.5pt]
3. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$. [0.5 pt]

Partie B : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{1+x}, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. (Unité graphique 5 cm).

1. Montrer que f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$. [0.5 pt]
2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat. [0.5 pt] [0.5 pt]
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. [0.25 pt]
4. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$. [0.5 pt]
5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$. [0.25 pt]
6. Dresser le tableau de variation de f. [0.25 pt]
7. Construire (C_f) (on prendra $\alpha = 0,3$). [0.75 pt]

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1;+\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers l'intervalle J à préciser. [0.5 pt]
2. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J. [0.5 pt]
3. Calculer $h^{-1}(\frac{2\ln 2}{3})$. [0.25 pt]
4. Construire (C_h^{-1}) dans le repère. [0.5 pt]

Partie D :

1. A l'aide dune intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e x\ln x dx$. [0.5 pt]
2. Montrer que pour tout $x \in [1;e]$, $\frac{x\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{x\ln x}{2}$. [0.5 pt]
3. Montrer que $\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x) \leq \frac{e^2+1}{8}$. [0.5 pt]

≪ Sans travail acharné, rien ne pousse sauf les mauvaises herbes.≫