EPREUVE DE MATHEMATIQUES

LYCÉE BILINGUE DE FOKOUÉ

Quatrième séquence

Proposé par : M. Kouankam Aubin

Classe : 1ère C, Durée : 3h

La rédaction, la clarté et la rigueur seront des éléments importants d'appréciation des copies

A- ÉVALUATION DES RESSOURCES (15.5 points)

Exercice 1. (3.5 pts)

1. Soit l'équation bicarrée (E) : $x^4 - 3mx^2 + m^2 - 1 = 0$, où m est un paramètre réel.
   (a) Résoudre cette équation pour $m = 1$ puis pour $m = 3$. [1 pt]
   (b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E) possède :
   (i) Trois solutions distinctes (ii) Quatre solutions distinctes. [1 pt]
2. Le code secret d'un compte de votre père est constitué de cinq chiffres. Après avoir fait un essai, il se rend compte qu'il a oublié son code secret. Il se rappelle néanmoins que son code ne contient pas les chiffres 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 et 7.
   (a) Déterminer le nombre de codes susceptibles d'ouvrir ce compte. [0.5 pt]
   (b) Il se rappelle aussi que le premier chiffre du code est 4 et que le dernier est 9. Quel est le nombre de codes susceptibles d'ouvrier ce compte, en considérant cette autre information ? [0.25pt]
   (c) Après avoir effectué un essai comme mentionné plus haut, votre père vous contacte pour que vous l'aidez à ouvrir son compte, de peur de le bloquer. En effet, il n'y a que 10 essais (vous précise t-il) possibles, au delà desquels son compte sera bloqué. Il se rappelle en outre que le deuxième chiffre de son code est 4 et que le chiffre 4 ne figure que deux fois dans le code. Expliquer comment vous pouvez procéder pour aider votre père à ouvrir sont compte. [0.75 pt]

Exercice 2. (3.25 pts)

1. Soit ABCDEFGH un cube d'arête 3 cm. Soit I le centre de gravité du carré ABCD.
   (a) Faire la figure. [0.25 pt]
   (b) Justifier sans calculer les distances que le triangle IFB est rectangle (On précisera le sommet de l'angle droit). [0.5 pt]
   (c) Déterminer la longueur de chaque coté du triangle IFB, puis retrouver, en utilisant la propriété réciproque de Pythagore, le résultat de la question précédente. [0.75pt]
2. Soit h la transformation du plan dont l'expression analytique est donnée par le système :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

   (a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points invariants par h. [0.25 pt]
   (b) Soient $A(a;b)$ un point du plan et $A'(a';b')$ l'image de A par h.
      i. On désigne par J le milieu du segment $[AA']$. Justifier que $J \in (\mathcal{D})$. [0.5 pt]
      ii. Démontrer que les droites (AA') et $(\mathcal{D})$ sont perpendiculaires. [0.5 pt]
   (c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h. [0.5 pt]

Problème : (8.75 pts) On considère la fonction f numérique à variable réelle, définie par $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J), d'unité 1 cm pour 1 sur l'axe (OI) et 0.5 cm pour 1 sur l'axe (OJ).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites aux bornes de cet ensemble et interpréter géométriquement les résultats. [1.75 pts]
2. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition puis montrer que, pour tout x appartenant à cet ensemble, on a :
   $f'(x) = \frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x^2-x-2)^2}$. [0.75 pt]
3. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variations. [1.5 pts]
4. Préciser en justifiant la nature du point d'abscisse 0. [0.5 pt]
5. Montrer que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f, on a $f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$, puis en déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. [1 pt]
6. Tracer soigneusement dans le même repère la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que toutes ses asymptotes. [1.5 pts]
7. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation $x^3 - mx^2 + mx + 2m = 0$. [1 pt]
8. On désigne par g la fonction numérique à variable réelle définie par $g(x) = \frac{|x|^3}{x^2-|x|-2}$.
   (a) Étudier la parité de g. [0.25 pt]
   (b) Montrer que pour tout $x \in]0;2[\cup]2;+\infty[$, $g(x) = f(x)$. [0.25 pt]
   (c) En déduire un programme de construction de la courbe de g à partir de celle de f. [0.25pt]

A- ÉVALUATION DES RESSOURCES (4.5 points)

Compétences visées : Résoudre une situation problème à l'aide du langage mathématiques dans les situations de vie où interviennent les équations, les pourcentages et l'optimisation.

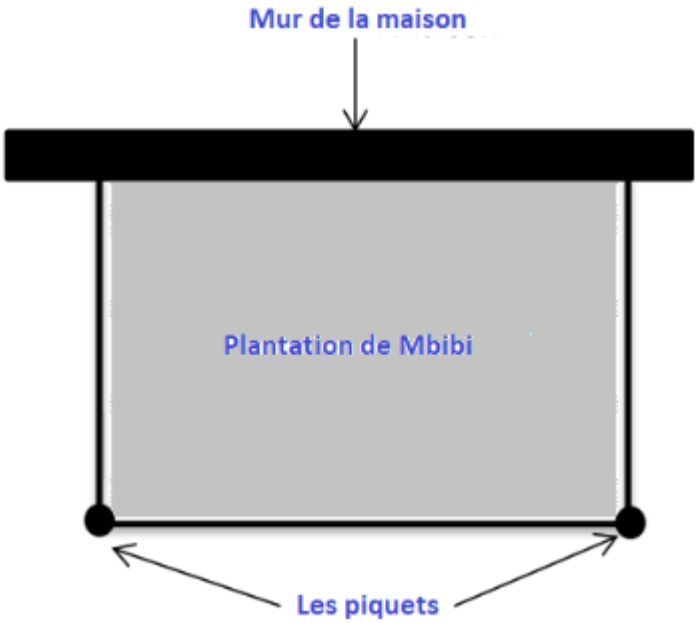
Situation :

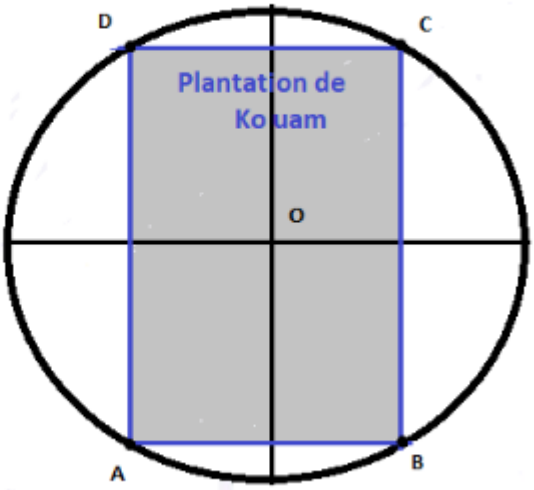
Mbibi et Kouam sont deux agriculteurs qui font la culture du manioc.

La plantation de Mbibi a la forme d'un rectangle. Il dispose de 75 mètres de grillage pour clôturer trois côtés de sa plantation, en effet l'un des côtés de la plantation est le mur de sa maison. Mbibi plante ses piquets de telle sorte que la surface englobée soit maximale.

La plantation de Kouam a la forme d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique de rayon 20 mètres, dont les sommets sont les points images des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation trigonométrique $4\cos^2 x - 1 = 0$. (On prendra $\sqrt{3} = 1.732$).

Mme Wamba est une grande commerçante, elle prend du manioc chez Mbibi et Kouam directement à la plantation et paye 1000 francs le mètre carré. Elle revend toute sa marchandise dans une ville voisine et obtient un bénéfice égal à un cinquième de sa dépense totale (prix d'achat + dépenses supplémentaires relatives au transport, $\cdots$). Pour ne pas faire le chemin du retour avec sa recette sur elle, Mme Wamba fait un dépôt de toute sa recette dans le compte d'un particulier. Ce particulier va lui prélever 4% de la somme disponible dans le compte chaque semaine. Arrivée dans sa ville, Mme Wamba retire exactement la somme de 1567005.72 francs après deux semaines.





Tâches :

1. Déterminer le prix de vente de la production de Mbibi à Mme Wamba. [1.5 pts]
2. Déterminer le prix de vente de la production de Kouam à Mme Wamba. [1.5 pts]
3. Déterminer le prix de vente de toute la marchandise de Mme Wamba. [1.5 pts]

≪ Sans travail acharné, rien ne pousse sauf les mauvaises herbes.≫