L'épreuve comporte 03 exercices et 01 problème tous obligatoires.

Exercice 1 : 03 points

x et y désignent deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$. Soit S l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que $p\gcd(x;y) = y - x$.

1. Le couple (363 ;484) appartient-il à S ? justifier votre réponse. **0.5pt**
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S ? justifier votre réponse. **0.5pt**
3. a) Montrer que le couple $(x;y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k, non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$. **0.5pt**
   b) En déduire que pour tout couple $(x;y)$ de S, on a $ppcm(x;y) = k(k+1)(y-x)$. **0.5pt**
4. a) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 228. **0.5pt**
   b) En déduire l'ensemble des couples $(x;y)$ de S tels que $ppcm(x;y) = 228$. **0.5pt**

Exercice 2 : 04 points

L'espace vectoriel W des vecteurs de l'espace est orienté.

1. Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de W, alors $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 .\vec{v}$ **0.5pt**
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormé directe de l'espace W. φ est l'application de W dans W qui à tout vecteur $\vec{u}$ de W associe le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \vec{e_1} \wedge \vec{u}$ où $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.
   a) Démontrer que l'application φ est un endomorphisme de W. **0.5pt**
   b) Exprimer $\varphi(\vec{u})$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$. **0.5pt**
   c) Démontrer que $Ker\varphi$ est une droite vectorielle de W. **0.5pt**
   d) Démontrer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un plan vectoriel de W. **0.5pt**
3. L'espace ε est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. On considère les points $A(3;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(0;0;3)$ et $D(2;1;1)$.
   a) Démontrer que l'ensemble (P) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}) = 0$ est un plan dont on précisera un point et un vecteur normal. **0.5pt**
   b) En déduire qu'une équation cartésienne de (P) est $x - y - z + 1 = 0$. **0.25pt**
   c) Soit (S) la sphère de centre C passant par D. Démontrer $(S) \cap (P)$ que est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **0.75pt**

Exercice 3 : 03.5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

1. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$.
   a) Exprimer $f \circ f(z)$ en fonction de z. **0.25pt**
   b) Déterminer une rotation r et une symétrie orthogonale s telle que : $f = r \circ s$. **0.5pt**
   c) Décomposer r à l'aide de deux symétries orthogonales et en déduire que f est symétrie orthogonale dont on précisera l'axe D_1. **0.75pt**
2. On considère l'application g qui à tout point $M(z)$ associe le point $M''(z'')$ telle que : $z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

t.me/KamerHighSchool

a) Déterminer l'ensemble décrit par les points invariants par g lorsque M parcourt le plan. **0.5pt**

b) Montrer que $g = t \circ f$ où t est une translation dont on précisera le vecteur. **0.5pt**

c) Décomposer t en deux symétries orthogonales et en déduire que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe D_2. **0.75pt**

d) Quelle est l'image du point $A\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ par g ? **0.25pt**

PROBLÈME 09.5 points

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{1-xe^{-x}}$ et dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de $I=\int_0^1 f(x)dx$. (C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J). unité graphique : 3cm.



Partie A

1. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=x-e^{x-1}$.

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **0.75pt**

b) Donner pour tout réel x, le signe de g(x). **0.25pt**

c) En déduire que pour tout réel x, $xe^{-x}\le e^{-1}$, puis que $1-xe^{-x}>0$. **0,5pt**

2. On désigne par f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{1-xe^{-x}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble. **0.75pt**

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation. **1pt**

c) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. **0,25pt**

d) Tracer (T) puis (C) (on admettra que (C) est au-dessus de (T) pour x < 0 et au-dessous pour x > 0) **1pt**

3. a) Déterminer les images par f des intervalles [0, 1] et [1, +∞[. **0,5pt**

b) En déduire que pour tout réel $x\ge 0$, on a $1\le f(x)\le\frac{e}{e-1}$. **0,25pt**

Partie B

1. Donner une interprétation géométrique du nombre $I=\int_0^1 f(x)dx$. **0,25pt**

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $J_n=\int_0^1 x^n e^{-nx}dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_1=1-2e^{-1}$. **0,5pt**

b) On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties :

i. Déterminer les coefficients a , b et c tels que la fonction H définie par $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-2x}$ soit une primitive de la fonction h définie par : $h(x)=x^2e^{-2x}$. **0,75pt**

ii. En déduire que $J_2=-\frac{1}{4}\left(-1+5e^{-2}\right)$. **0,25pt**

3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n=1+J_1+J_2+\cdots+J_n$.

a) Montrer que : $1+xe^{-x}+x^2e^{-2x}+\cdots+x^ne^{-nx}=\frac{1+x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}$. **0,5pt**

b) En déduire que : $I-U_n=\int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx$. **0.5pt**

c) En utilisant la question A) 1.c), montrer que pour tout x > 0, $0\le x^{n+1}e^{-(n+1)x}\le\frac{1}{e^{n+1}}$. **0,25pt**

d) En déduire un encadrement de I - U_n , puis étudier la convergence de la suite de terme général U_n. **0.5pt**

4. a) Montrer que $U_2\le I\le U_2+\frac{1}{(e-1)e^2}$. **0,25pt**

b) Sachant que $U_2=1+J_1+J_2$, trouver deux nombres décimaux d_1 et d_2 tels que $0<d_2-d_1<10^{-1}$ et $d_1<I<d_2$. **0,5pt**

t.me/KamerHighSchool