LYCÉE BILINGUE DE BERTOUA
2002/2003

5e SÉQUENCE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE : *5 points*

On considère l'équation différentielle (1) : $y'' + ay' + by = 0$ et la fonction f définie par $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$

1pt 1°) Déterminer a et b pour que f soit solution de l'équation (1).

1,5pt 2°) On pose (2) : $y'' + 2y' + y = 0$.
Vérifier que f et ses dérivées sont solutions de (2) et en déduire une primitive de f.

2,5pts 3°) On pose : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, …, $f^{(n)}$ dérivée n-ième de f.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $f^{(n)} = a_n f' + b_n f$, où les ternes a_n et b_n vérifient $a_{n+1} = -2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$.

PROBLÈME : *15 points*

On considère un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Dans la représentation graphique et les figures, on prendra pour unité de longueur 2 cm.
On désigne par (E_m) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation : $y^2 = m(x^2-1) + 2x$ où m est un paramètre réel.

4pts 1°) a) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.
Étudier la fonction f et construire sa courbe (Z) dans le plan.
Démontrer que (Z) admet un axe de symétrie.

b) Montrer que (E_1) est l'union de (Z) et d'une courbe (Z′) dont on donnera une équation dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Construire (E_1) et montrer que (E_1) a un centre de symétrie.

4pts 2°) a) Quelle est la nature de (E_{-1}) ? Le construire dans le plan.

b) On considère l'application T du plan dans lui-même qui, à tout M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M′ d'affixe $z' = x' + iy'$ définie par $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes fixes que l'on calculera sachant que le point $I(0, 1)$ est invariant par T et que l'ensemble (E_{-1}) précédent est transformé par T en le cercle (C) de centre O et de rayon 1.
On caractérisera alors l'application T.

c) Donner l'expression analytique de T. En déduire l'équation de l'ensemble (E_1'), transformé de (E_1) par T. Préciser la nature de (E_1').
Démontrer qu'aucun point de (E_1') n'a pour coordonnées un couple d'entiers relatifs.

4pts 3°) a) Montrer que, quel que soit le réel m, l'ensemble (E_m) passe par deux points fixes A et B, dont on donnera les coordonnées.
Écrire les équations des tangentes à (E_m) en ces points A et B.

b) Démontrer que l'ensemble (E_0) admet en A et B des tangentes dont les coefficients directeurs valent respectivement $+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- Construire (E_0).
- Calculer l'aire de la portion du plan limitée par l'ensemble (E_0) et la droite d'équation : $x = 1$.

3pts 4°) Démontrer que, quel que soit le réel non nul m, l'ensemble (E_m) admet un centre de symétrie.
Quel est l'ensemble R_1 des valeurs de m pour lesquelles l'ensemble (E_m) est une ellipse ?
Exprimer alors en fonction du réel m de R_1 la longueur des axes de l'ellipse.