MINESEC **ANNEE SCOLAIRE : 2017/2018**
LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA **CLASSE : T_D**
Département de Mathématiques **Durée : 4h coefficient : 4**
Date : 13/01/2017

Épreuve de Mathématiques (troisième séquence)

Proposée par : *M. NOUMSSI*

NB : *le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.*



Exercice 1 : 6.5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **0.75×2=1.5pt**
   a) $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$;
   b) $\ln(x+2) + 1 = \ln(x-1) + ln2$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **0.75×2=1.5pt**
   $a)$ $2\,ln(2x-1) - ln(3x-2x^2) \geq \ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$; b) $(lnx)^3 \geq 4lnx$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S)\begin{cases}\ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 0\\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4\end{cases}$ **1pt**
4. a) Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle K : **1.5pt**
   $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ et $K =]2;+\infty[$; $g(x) = \frac{xcosx-sinx}{x^2}$ et $K = \mathbb{R}^*$; $h(x) = \cos^4 x$ et $K = \mathbb{R}$;
   $t(x) = \frac{2-(lnx)^2}{x}$ et $K =]0;+\infty[$.
   (on pourra remarquer que $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$*)*
   b) Calculer les limites suivantes : **0.25×=1pt**
   (i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$; (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2}\ln(x^2+1)$; (iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(2x-3)}{lnx}$;
   (iv) $\lim_{x\to0}(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}})$

Exercice 2: 4.25 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 4cm). Soit A le point d'affixe $Z_A = i$ et B le point d'affixe $Z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   a) Déterminer une écriture complexe de r. **0.25pt**
   b) Montrer que l'affixe de C est $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$. **0.25pt**
   c) Écrire Z_B et Z_C sous forme algébrique. **0.5pt**
   d) Placer les points A, B et C. **0.75pt**
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   a) Déterminer l'affixe de D et placer le point D. **0.5pt**
   b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle. **0.75pt**
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   a) Déterminer une écriture complexe de h. **0.25pt**
   b) On appelle E l'image de D par h. Déterminer Z_E. **0.25pt**
   c) Calculer $\frac{Z_D-Z_C}{Z_E-Z_C}$ et en déduire la nature du triangle CDE. **0.75pt**
4. Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point $M'(z')$ tel que $S = h \circ r$.

t.me/KamerHighSchool

a) Quelle est la nature de S ? **0.25pt**

b) Déterminer l'écriture complexe de S. **0.5pt**

c) En déduire ses éléments caractéristiques. **0.75pt**

Problème: 9.25points

Les parties A, B et C sont dépendantes.

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$: on prendra 2cm comme unité sur les deux axes.

Partie A : Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative (C).

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\frac{1}{x})(lnx-2)$ et (C) sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0. **0.5pt**

2) Calculer $f'(x)$. **0.5pt**

3) Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=lnx+x-3$.

a) Étudier les variations de u. **0.5pt**

b) Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2;3]. **0.5pt**

En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. **0.5pt**

c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0;+\infty[$. **0.5pt**

4. a) Étudier les variations de f. **0.5pt**

b) Montrer que $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. **0.5pt**

5. a) Étudier le signe de $f(x)$. **0.5pt**

b) Tracer (C). **0.75pt**

Partie B : Étude d'une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$. On appelle (Γ) la courbe représentative de F dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$. **0.5pt**

b) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ? **0.5pt**

2. Calcul de $F(x)$.

a) x étant un réel strictement positif, calculer la dérivée première de la fonction $x\longmapsto xlnx-x$. **0.25pt**

b) Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x)=lnx-\frac{lnx}{x}+\frac{2}{x}-2$. **0.25pt**

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x. **0.5pt**

3. a) Calculer la limite de F en 0. **0.25pt**

b) Montrer que pour $x>1$, $F(x)=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{lnx}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{lnx}\right)xlnx+3$. **0.25pt**

En déduire la limite de F en $+\infty$. **0.25pt**

c) Dresser le tableau de variation de F. **0.5pt**

d) Tracer (Γ) sur le même graphique que (C). **0.75pt**

t.me/KamerHighSchool