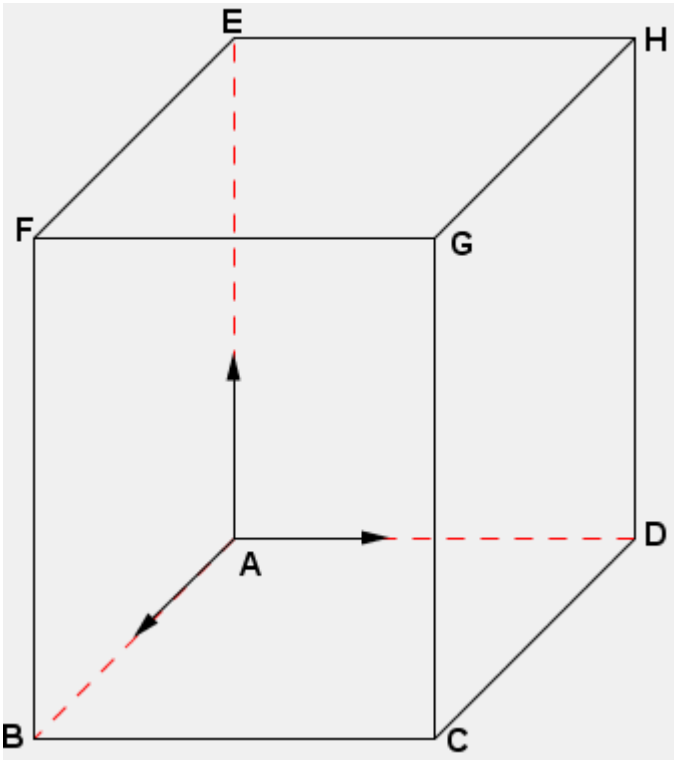
MINSEC
COLLEGE IPONI
Département de Mathématiques

ANNEE SCOLAIRE : 2018 /2019
CLASSE : Tle C
DUREE : 04H00MIN
COEFF : 6

EVALUATION DE LA DEUXIEME SEQUENCE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : (04,00 POINTS)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et $ABCDEFGH$ est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.



1. a)Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.
   b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs; $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
2. Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha\ ;\ 4\alpha\ ;\ 3\alpha)$.
   a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.
3. Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).
4. Soit V le volume du tétraèdre $MEBG$.
   a) Exprimer V en fonction de α.
   b) Calculer le volume du tétraèdre $AEBG$.
   c) Pour quelles valeurs de α, V est-il égal au volume du parallélépipède $ABCDEFGH$

EXERCICE 2 : (06,00 POINTS)

A- Pour tout entier naturel n on considère les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin(x)\,dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin(x)\,dx$

1. Calculer I_0 et J_0. 0,5pt
2. On suppose que $n \geq 1$
   a) En intégrant par partie I_n et J_n montrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$ 1pt
   b) Déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n. 0,5pt
3. Déterminer les limites des suites (I_n) et (J_n). 0,5pt

B- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par : $\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ pour tout entier n. $0 < a < b$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n = ab$. 0,25pt
2. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 < u_n < v_n$. 0,75pt
3. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. 1pt

https://t.me/KamerHighSchool

4. Démontrer que pour tout entier naturel $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. 0,75pt
5. Déduire-en que : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$, et la limite de $(v_n - u_n)$. 0,5pt
6. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. 0,25pt
7. Soit l la limite des deux suites. Prouver que $l = \sqrt{ab}$. 0,25pt

PROBLEME : (10,00 POINTS)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphique étant égale à 2cm.



PARTIE A

1. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition et déduire les asymptotes à courbe de f. 0,75pt
2. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f. 1pt
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'affixe 0. 0,5pt
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T). 1pt

PARTIE B

On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique.

1. Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0; 1]$. 0,75pt
2. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$. 0,5pt
3. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une solution unique α tel que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$.

   Soit (u_n)la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$. 0,75pt
5. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$
   a) $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$. 0,5pt
   b) $|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ 0,5pt
6. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déduire sa limite. 0,75pt
7. Déterminer un entier n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$. 0,5pt

PARTIE C

Ne connaissant pas de primitive de la fonction f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

1. Justifier l'existence de I et donner une interprétation graphique. 0,75pt
2. On pose : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)e^x dx$ et $K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$.
   a) Vérifie que $4I = J + K$. 0,5pt
   b) Calculer J. 0,5pt
3. En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera. 1pt
4. A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I. 0,5pt

https://t.me/KamerHighSchool