INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

Neste tipo de cenário teremos uma desigualdade em que o termo desconhecido estará relacionado a uma expressão contendo o cálculo de um logarítmico.

É muito importante lembrar que as bases destes logaritmos são números positivos e diferentes de 1. Desta forma, podemos pensar que existem inequações logarítmicas com bases maiores do que 1 e outras com bases com valor entre 0 e 1. Lembre-se de que a curva será crescente para as funções com base maior do que 1 e será decrescente quando estivermos em uma condição de base com valor entre 0 e 1. Assim, ao apontar o que ocorre com os logaritmandos, mantenha o sinal de desigualdade quando a base for maior do que 1 e faça a inversão do mesmo nas situações em que a base for um número entre 0 e 1. Além disso, é importante sempre se lembrar da condição de existência proveniente das expressões que estão nos logaritmandos, visto que os mesmos devem ser sempre números positivos. Observe os exemplos abaixo:

Exemplo:

Resolva, dentro do conjunto dos números reais, as inequações abaixo:

a) $\log_2 x > \log_2 5$

Devemos começar fazendo a condição de existência. Neste caso, temos: $x > 0$

Como a base é um número superior a 1, mantemos o sinal de desigualdade para a comparação entre os logaritmandos. Assim, teremos: $x > 5$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]5, +\infty[$

b) $\log (x - 3) < 2$

começaremos a resolução deste exemplo com a condição de existência do logaritmando:

$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

Como temos um logaritmo decimal, ou seja, na base 10, que é um número superior a 1, devemos fazer uso da definição do logaritmo para resolver a inequação:

$x - 3 < 10^2$

$x - 3 < 100$

$x < 97$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]3, 97[$

c) $\log_{0,1} (10 - x) > \log_{0,1} (3 + x)$

Começaremos pelas condições de existência:

$10 - x > 0 \rightarrow -x > -10 \rightarrow x < 10$

$3 + x > 0 \rightarrow x > -3$

Assim, temos que a condição de existência será: $-3 < x < 10$

Como temos uma mesma base com valor entre 0 e 1, devemos fazer a comparação dos logaritmando invertendo o sinal de desigualdade encontrado na inequação. Assim, teremos:

$10 - x < 3 + x$

$-2x < -7$

Multiplicando esta inequação por -1, teremos:

$2x > 7 \rightarrow x > \frac{7}{2}$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S = \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$

d) $\log_{0,5} (2x - 8) > \log_{0,5} 6$

Começaremos pela condição de existência:

$2x - 8 > 0 \rightarrow 2x > 8 \rightarrow x > 4$

Como temos uma mesma base com valor entre 0 e 1, devemos fazer a comparação dos logaritmando invertendo o sinal de desigualdade encontrado na inequação. Assim, teremos:

$2x - 8 < 6 \rightarrow 2x < 14 \rightarrow x < 7$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]4, 7[$

e) $\log_2 (x^2 - 1) \geq \log_2 3$

Começaremos pela condição de existência:

$x^2 - 1 > 0$

As raízes deste polinômio de 2º grau serão -1 e 1. Como temos um coeficiente a positivo, a parábola que representa esta expressão terá sua concavidade voltada para cima e, por este motivo, a condição de existência será: $x < -1$ ou $x > 1$.

Como a base dos logaritmos da inequação são maiores do que 1, mantemos o sinal de desigualdade para comparar ao logaritmandos. Observe:

$x^2 - 1 \geq 3$

$x^2 - 4 \geq 0$

As raízes deste polinômio de 2º grau serão -2 e 2. Como temos um coeficiente a positivo, a parábola que representa esta expressão terá sua concavidade voltada para cima e, por este motivo, a solução será: $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

f) $\log_3 (4x - 1) > -2$

Começaremos pela condição de existência:

$4x - 1 > 0 \rightarrow 4x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{4}$

Como a base do logaritmo é um número maior do que 1, mantemos o sinal de desigualdade para aplicar a definição do logaritmo. Desta, forma, teremos:

$4x - 1 > 3^{-2}$

$4x - 1 > \frac{1}{9}$

Multiplicando esta inequação por 9, teremos;

$36x - 9 > 1$

$36x > 10$

$x > \frac{5}{18}$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]\frac{5}{18}, +\infty[$

g) $\log_2 (x + 1) + \log_2 3 > \log_2 4$

Começaremos pela condição de existência:

$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

Voltando para a inequação, utilizaremos a propriedade de soma de logaritmos para que tenhamos no lado esquerdo da inequação um único logaritmo:

$\log_2 [(x + 1) \cdot 3] > \log_2 4$

$\log_2 (3x + 3) > \log_2 4$

Como a base do logaritmo é um número maior do que 1, mantemos o sinal de desigualdade para aplicar a definição do logaritmo. Desta, forma, teremos:

$3x + 3 > 4$

$3x > -1$

$x > \frac{-1}{3}$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]\frac{-1}{3}, +\infty[$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (FUVEST) O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$ é o intervalo:

a) $]-\infty, -5/2[$
b) $]7/4, \infty[$
c) $]-5/2, 0[$
d) $]1/3, 7/4[$
e) $]0, 1/3[$

Resolução: D

Temos a inequação:

$\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$

Começaremos pelas condições de existência:

$2x + 5 > 0 \rightarrow 2x > -5 \rightarrow x > \frac{-5}{2}$

$3x - 1 > 0 \rightarrow 3x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{3}$

Assim, temos que a condição de existência será: $x > \frac{1}{3}$

Voltando à inequação, teremos:

$\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$

$\log_2 \left(\frac{2x+5}{3x-1}\right) > 1$

Aplicando a definição de logaritmo, manteremos o sinal de desigualdade, visto que a base do logaritmo é um número maior do que 1. Assim, teremos:

$\frac{2x+5}{3x-1} > 2^1$

$\frac{2x+5}{3x-1} > 2$

$\frac{2x+5}{3x-1} - 2 > 0$

$\frac{2x+5-6x+2}{3x-1} > 0$

$\frac{-4x+7}{3x-1} > 0$

A solução desta inequação quociente será: $\frac{1}{3} < x < \frac{7}{4}$

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}[$

02. (UFOP – MG) Resolva a inequação $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1$.

Resolução:

Temos a seguinte inequação logarítmica:

$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1$

Começaremos pelas condições de existência:

$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

Assim, temos que a condição de existência será: $x > 3$

Voltando à inequação, teremos:

$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1$

$\log_2 [(x - 3) \cdot (x - 2)] < 1$

Aplicando a definição de logaritmo, manteremos o sinal de desigualdade, visto que a base do logaritmo é um número maior do que 1. Assim, teremos:

$(x - 3) \cdot (x - 2) < 2^1$

$x^2 - 5x + 6 < 2$

$x^2 - 5x + 4 < 0$

As raízes deste polinômio de 2º grau serão 1 e 4. Como temos um coeficiente a positivo, a parábola que representa esta expressão terá sua concavidade voltada para cima e, por este motivo, a solução será: $1 < x < 4$.

Fazendo a interseção entre a solução encontrada e a condição de existência, teremos:

$S =]3, 4[$

03. (ENEM) A água comercializada em garrafões pode ser classificada como muito ácida, ácida, neutra, alcalina ou muito alcalina, dependendo de seu pH, dado pela expressão:

$$pH = \log_{10} \frac{1}{H}$$

em que H é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico. A classificação da água de acordo com seu pH é mostrada no quadro.

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7,5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7,5$	Neutra
$3,5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3,5$	Muito ácida

Para o cálculo da concentração H, uma distribuidora mede dois parâmetros A e B, em cada fonte, e adota H como sendo o quociente de A por B. Em análise realizada em uma fonte, obteve $A = 10^{-7}$ a água dessa fonte foi classificada como neutra. O parâmetro B, então, encontrava-se no intervalo:

a) $(-10^{14,5}, -10^{13}]$
b) $[10^{-6/7}, 10^{-1})$
c) $[10^{-1}, 10^{1/2})$
d) $[10^{13}, 10^{14,5})$
e) $[10^{6 \times 10^7}, 10^{7,5 \times 10^7})$

Resolução: C

Temos que $H = \frac{A}{B}$. Assim: $\frac{1}{H} = \frac{B}{A}$

$6 \leq \log_{10}\left(\frac{8}{10^{-7}}\right) < 7,5 \rightarrow 10^6 \leq 10^{\log\left(\frac{B}{10^{-7}}\right)} < 10^{7,5} \rightarrow 10^6 \leq \frac{B}{10^{-7}} < 10^{7,5}$

Logo: $10^{-1} < B < 10^{0,5}$

04. (ENEM) A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a Hydrangea cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+). Para produzir a Hydrangea cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma:

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
c) valores maiores que 7 e menores que 8.
d) valores maiores que 70 e menores que 80.
e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Resolução: E

Como $pH = -\log_{10} x$, teremos:

$7 < -\log_{10} x < 8 \rightarrow -7 > \log_{10} x > -8 \rightarrow 10^{-7} > x > 10^{-8}$

ANOTAÇÕES