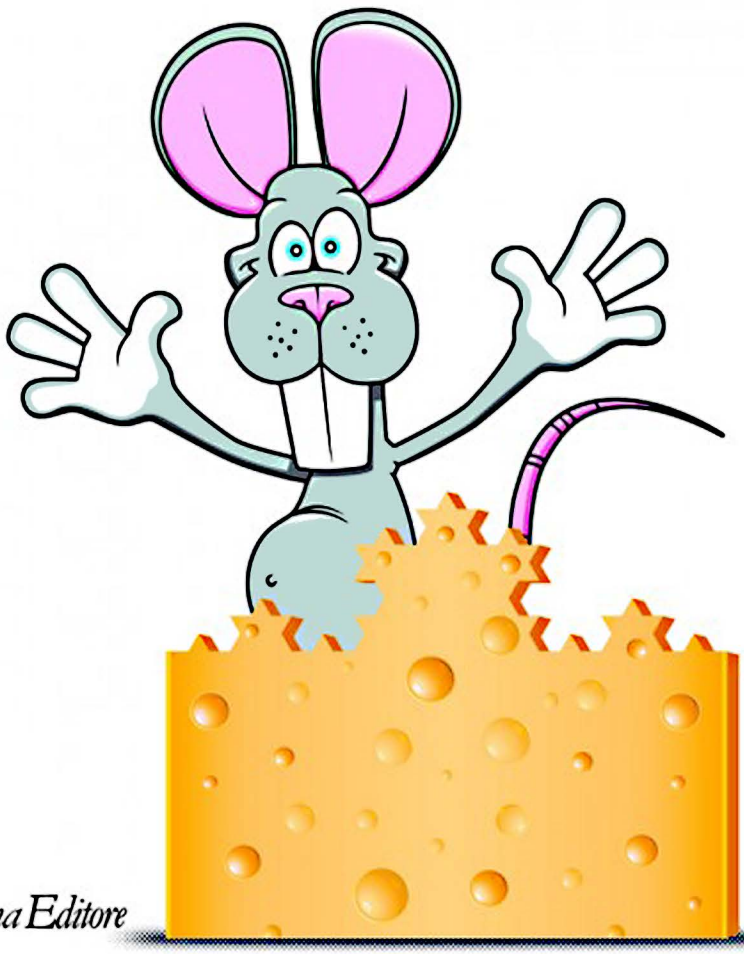
N. Lesmoir-Gordon,
W. Rood, R. Edney

I FRATTALI A FUMETTI



Raffaello Cortina Editore

Dal catalogo

Bruce Bassett, Ralph Edney
La relatività a fumetti

Dylan Evans, Howard Selina
L'evoluzione a fumetti

Craig Callender, Ralph Edney
Il tempo a fumetti

Dan Cryan, Sharron Shatil, Bill Mayblin
La logica a fumetti

Nigel Lesmoir-Gordon
Will Rood Ralph Edney

I FRATELLI A FUMETTI

a cura di
Richard Appignanesi



Raffaello Cortina Editore

www.raffaellocortina.it

Titolo originale
Introducing Fractal Geometry
Text copyright © 2000 Nigel Lesmoir-Gordon and Will Rood
Illustrations copyright © 2000 Ralph Edney

Traduzione
Gianbruno Guerrerio

Copertina
Studio CReE
Illustrazione di Natalie Picco

ISBN 978-88-6030-355-4
© 2010 Raffaello Cortina Editore
Milano, via Rossini 4

Prima edizione: 2010
Stampato da
Consorzio Artigiano LVG, Azzate (Varese)
per conto di Raffaello Cortina Editore

Ristampe

0	1	2	3	4	5
2010	2011	2012	2013	2014	

I FRATTALI A FUMETTI

Ringraziamenti

Gli autori sono infinitamente grati in particolare a Ian Stewart e a Michael Barnsley, ma anche a Arthur C. Clarke e Roger Penrose per l'assistenza, l'incoraggiamento e il sostegno nella realizzazione di questo libro. Il nostro più caloroso grazie va anche, ovviamente, a Benoît Mandelbrot per il coraggio, la perseveranza, la buona volontà e per la sua brillante scoperta.

Perché i frattali sono importanti?

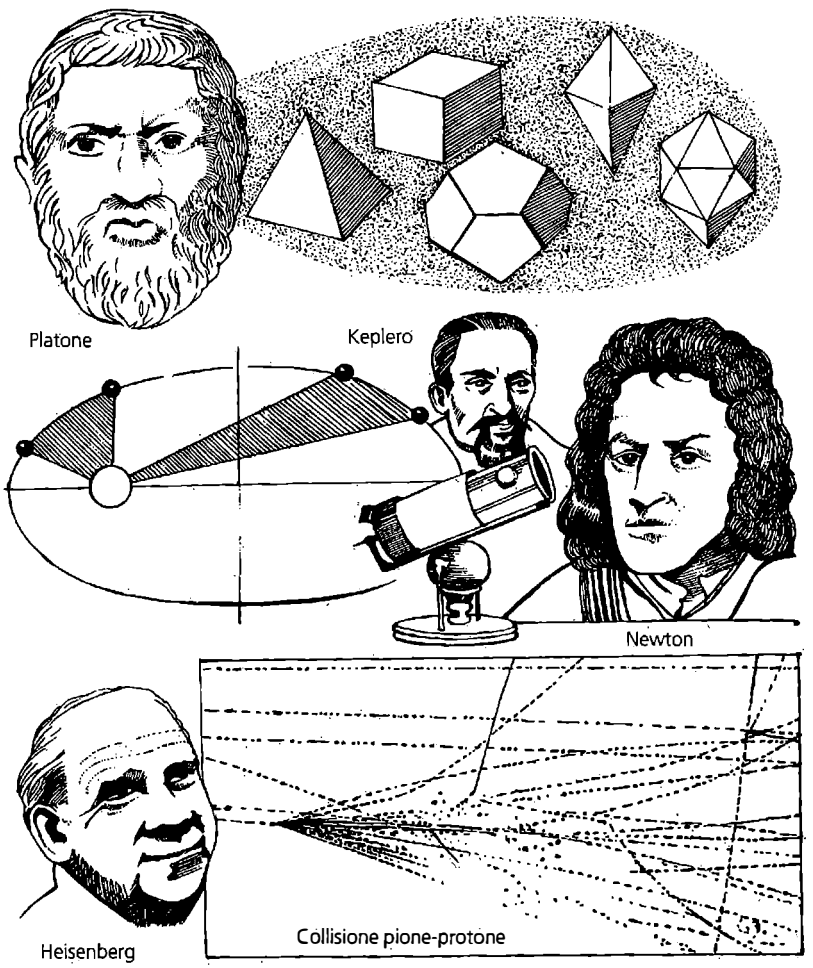
John Archibald Wheeler (1911-2008) – allievo del pioniere della meccanica quantistica Niels Bohr, amico di Albert Einstein e protagonista delle svolte che, nel XX secolo, hanno interessato fisica, cosmologia e teoria dei quanti – e **Ian Stewart**, stimato professore di Matematica all'Università di Warwick, sono solo due dei molti scienziati che vedono nella geometria frattale una conquista rivoluzionaria per la nostra comprensione della realtà.



Un mondo liscio o rugoso?

Platone riteneva di poter spiegare la natura con cinque forme solide regolari. Newton e Keplero deformarono il cerchio in ellisse. La scienza odierna ha scomposto le forme platoniche in particelle e onde; ha generalizzato le curve di Newton e Keplero a probabilità relative, eppure totalmente prive di "rugosità". Ora, oltre due millenni dopo Platone, e quasi trecento anni dopo Newton, Benoît Mandelbrot ha fatto una scoperta non meno importante di quella delle leggi che descrivono il moto uniforme.

Eugene Stanley, docente presso il Centro di ricerca sui polimeri del dipartimento di Fisica dell'Università di Boston

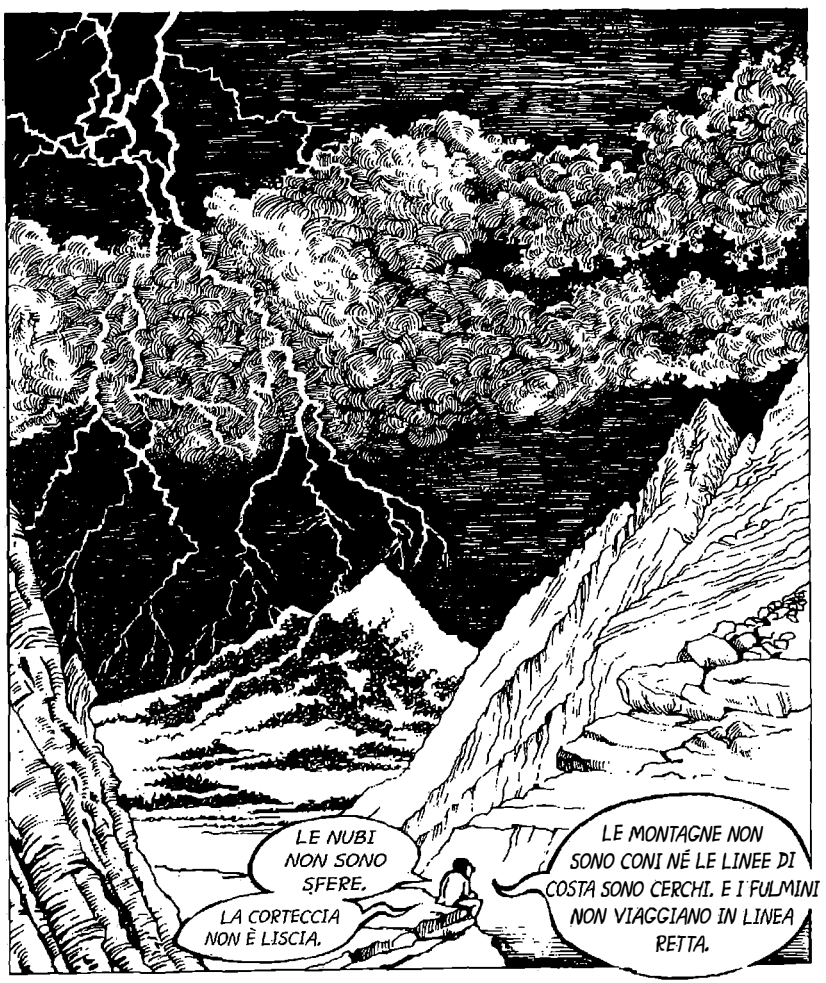




In natura, nel mondo in cui viviamo, non sono presenti bordi lisci. Il mondo reale è caratterizzato da spigolosità e rugosità irregolari. Le superfici lisce sono un'eccezione in natura. Ma finora abbiamo accettato una geometria che descrive solo forme che ben di rado, se non mai, si trovano nel mondo reale. La geometria di Euclide descrive forme ideali: la sfera, il cerchio, il quadrato. Certo, nella vita incontriamo queste forme, ma esse sono per lo più frutto dell'opera degli uomini e non della natura.

La trama della realtà

La natura si dispiega in forme non uniformi e con bordi ruvidi. Prendiamo la forma stessa di *Homo sapiens*. Vi troviamo una certa simmetria, ma non si è mai riusciti a renderla nei termini della geometria euclidea. Questo è il problema. Ciò che fino a tempi recentissimi è mancato nel repertorio della scienza è stato un modo per descrivere le forme e gli oggetti del mondo reale.



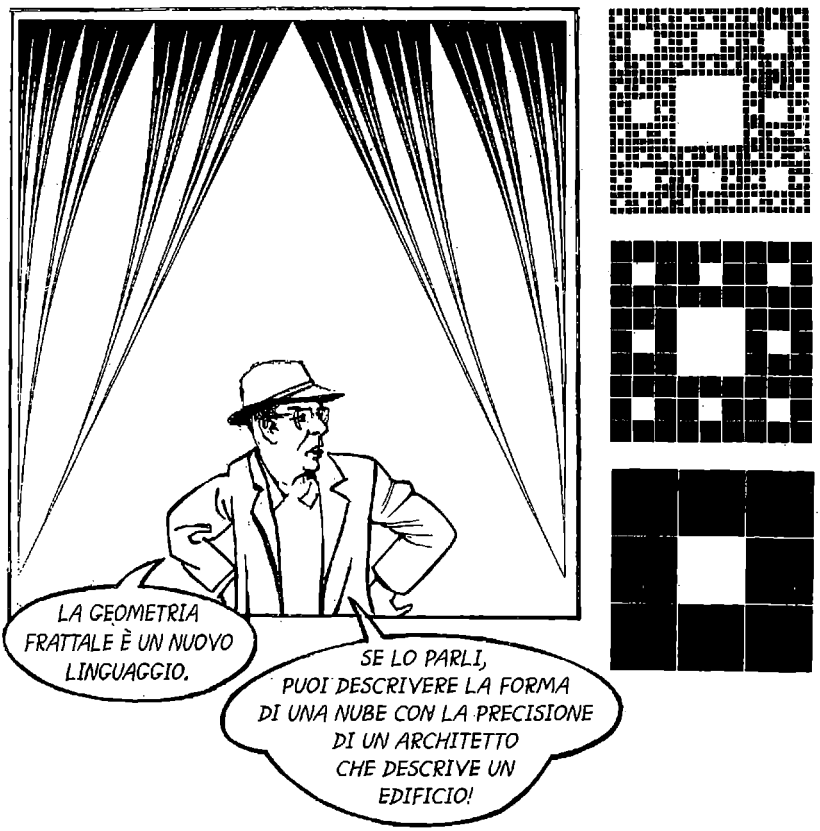


La parola "frattale" è stata coniata nel 1975 dal matematico polacco-franco-americano **Benoît Mandelbrot** per descrivere le forme dotate di dettagli a tutte le scale. La radice della parola deriva dal latino **fractus**, che suggerisce l'idea di frammentato, rotto, discontinuo.

La geometria frattale è la geometria delle forme irregolari che troviamo in natura e, in generale, i frattali sono caratterizzati da dettaglio infinito, infinita lunghezza e dall'assenza di "liscezza" o **derivata**.

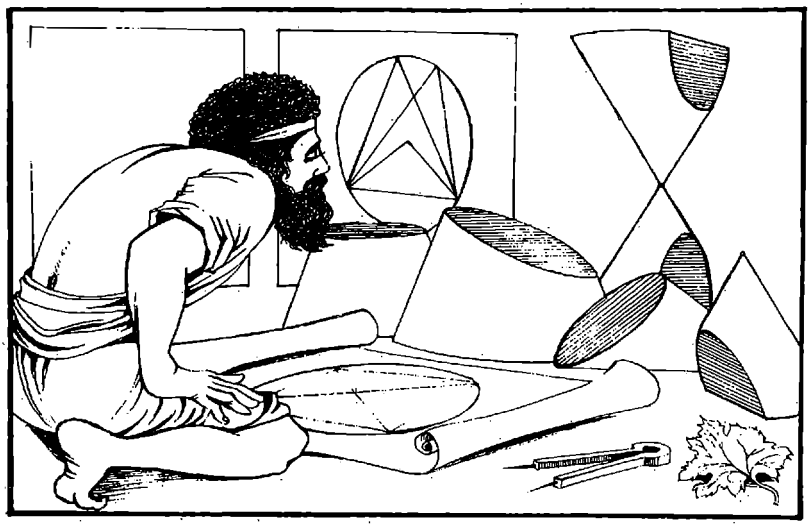
Le origini dei frattali

La geometria frattale è un'estensione della geometria classica. Non la rimpiazza, ma la arricchisce e ne incrementa la potenza. Con l'aiuto dei computer, la geometria frattale può rendere più precisi i modelli delle strutture fisiche, dalle conchiglie alle galassie.

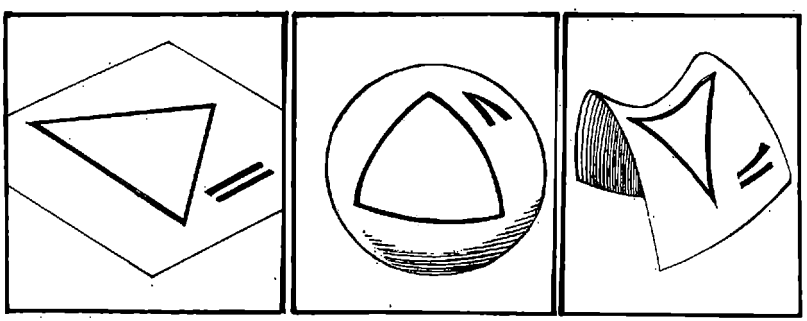


Ora tracceremo lo sviluppo storico di questa disciplina matematica, e ne esploreremo la capacità descrittiva per quanto riguarda il mondo naturale, per poi passare alle sue applicazioni in campo scientifico e tecnologico; infine, discuteremo le implicazioni della scoperta.

La geometria classica



Euclide di Alessandria (300 a.C. circa) stabilì le regole che avrebbero definito l'oggetto della geometria nei millenni a venire. Le forme studiate da Euclide – rette e cerchi – si dimostrarono così efficaci nella spiegazione dell'Universo che gli scienziati divennero tanto ciechi ai loro limiti da definire le strutture che non si adeguavano allo schema euclideo come "controintuitive" o "patologiche"



Grazie alle scoperte di **Karl Weierstrass** (1815-1897), **Georg Cantor** (1845-1918) e **Jules-Henri Poincaré** (1854-1912), nel XIX secolo una corrente di pensiero rimasta fino ad allora sotterranea condusse inesorabilmente alla creazione di un tipo di geometria completamente nuovo, capace di dar conto di aspetti del mondo inesprimibili nel linguaggio elementare di Euclide.

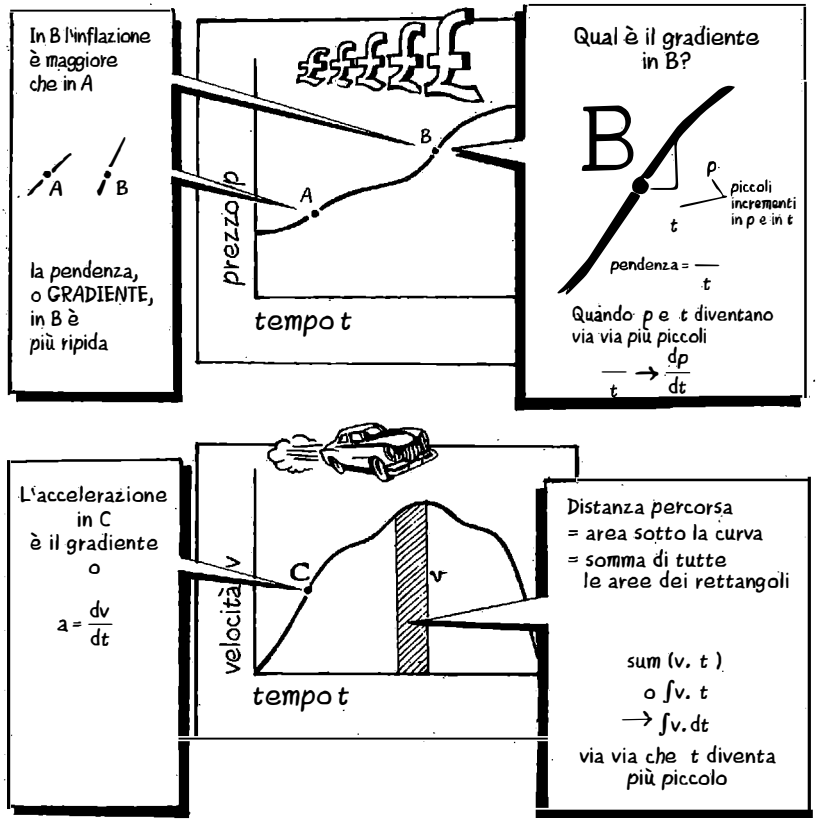
Il Calcolo

Giovanni Keplero (1571-1630) fu il primo a comprendere che i pianeti seguono orbite ellittiche e non perfettamente circolari. **Edmond Halley** (1656-1742) ipotizzò che le orbite ellittiche potessero essere spiegate con la legge dell'inverso del quadrato della distanza.



Isaac Newton (1642-1727), sviluppando un nuovo metodo di ragionamento basato sull'idea di quantità piccole all'infinito, o **infinitesimi**, per dare conto del movimento complesso di proiettili e pianeti, giunse infine alla formulazione della sua famosa teoria della gravitazione universale. Il calcolo infinitesimale fu sviluppato contemporaneamente da Newton e da **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716). A Leibniz si deve la formulazione più chiara del calcolo infinitesimale e anche la notazione che ancor oggi utilizziamo.

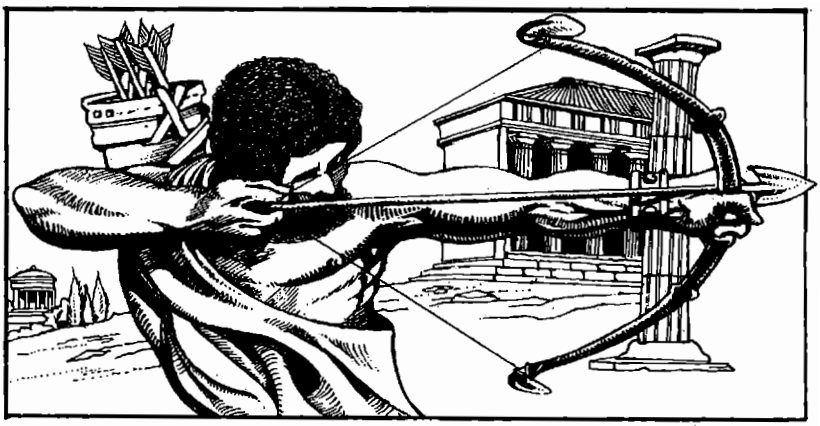
I due strumenti del calcolo infinitesimale sono la **differenziazione** e l'**integrazione**. La prima ci dà la derivata, o tasso di variazione, di una variabile. Il tasso di variazione è l'elemento cardine del calcolo infinitesimale. Per esempio, l'inflazione è il tasso di variazione dei prezzi: la derivata prima dei prezzi medi. La velocità è il tasso di variazione della posizione nel tempo: la derivata prima della posizione. La derivata seconda della posizione, il tasso di variazione della velocità, è l'accelerazione.



L'integrazione è, in un certo senso, l'operazione inversa della differenziazione. I valori futuri di una variabile possono essere trovati integrando, o sommando, il suo tasso di variazione in ogni istante nel tempo. I sistemi controllati da forze fisiche come la gravità possono essere analizzati nei termini del loro tasso di variazione. La combinazione di queste variazioni definisce l'evoluzione del sistema.

Il paradosso degli infinitesimi

La teoria di Newton è minacciata dai paradossi. La questione dell'infinita divisibilità dello spazio, infatti, aveva lasciato perplessi i filosofi da migliaia di anni.



Zenone di Elea (490-425 a.C. circa) immaginò una freccia nel suo volo verso un bersaglio.

Prima di arrivare a destinazione, deve raggiungere il punto a metà strada.

Ma prima di arrivare lì, deve raggiungere il punto che è a metà strada di questo tratto...

e così via. Questo ragionamento può essere ripetuto all'infinito.

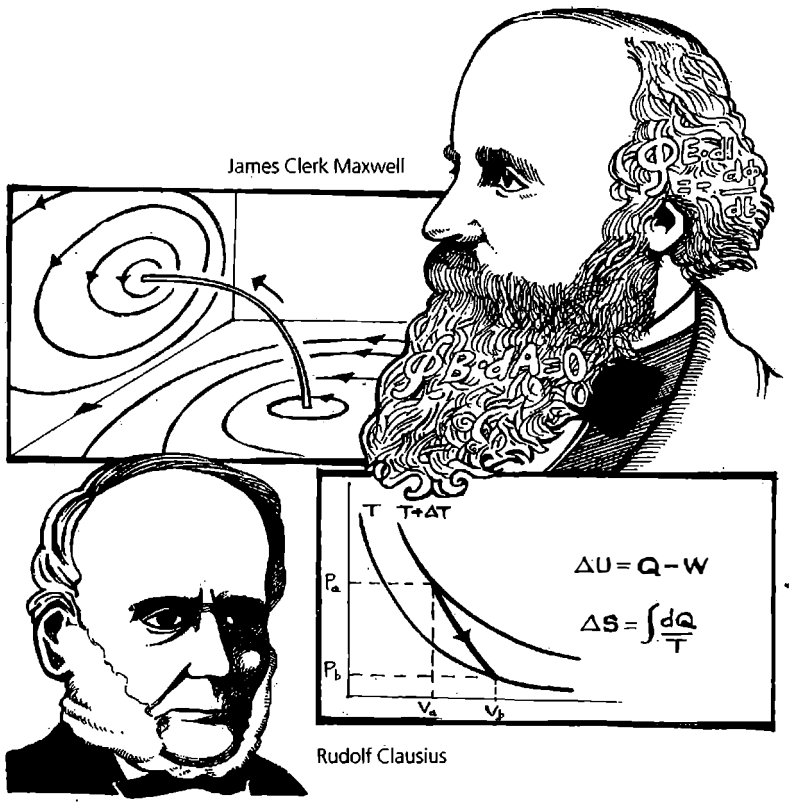
Ciò sembrerebbe implicare che la freccia non possa mai abbandonare il punto di partenza.

Zenone ne inferì la natura paradossale del movimento.

Ci vollero gli sforzi di **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) e del suo allievo Karl Weierstrass per "bandire" pressoché del tutto gli infinitesimi. Fino a quel momento era perfettamente possibile che l'intero edificio della matematica applicata si fondasse su una contraddizione.

Le conseguenze del Calcolo

Nonostante la mancanza di una solida giustificazione teorica, il calcolo infinitesimale ebbe un incredibile successo. Le tre leggi del moto di Newton e le equazioni dell'elettromagnetismo di **James Clerk Maxwell** (1831-1879) furono il frutto di questa potente scoperta. Tutte le scienze fisiche ne vennero trasformate. Si ritenne addirittura che tutti i fenomeni fisici potessero essere descritti nei termini di questa nuova tecnica. **Pierre-Simon de Laplace** (1749-1827) affermò che conoscendo la posizione di tutte le particelle dell'Universo e la loro velocità di spostamento, avremmo potuto predire in ogni dettaglio il futuro.



I metodi del calcolo infinitesimale si applicano a qualsiasi curva che sia **liscia**. E si riteneva che una curva che mostrasse pieghe o annodamenti potesse essere risolta in curve lisce distinte, per poi studiarle con gli strumenti dell'analisi. Che una curva potesse avere solo punti spigolosi isolati non era mai stato preso in considerazione.

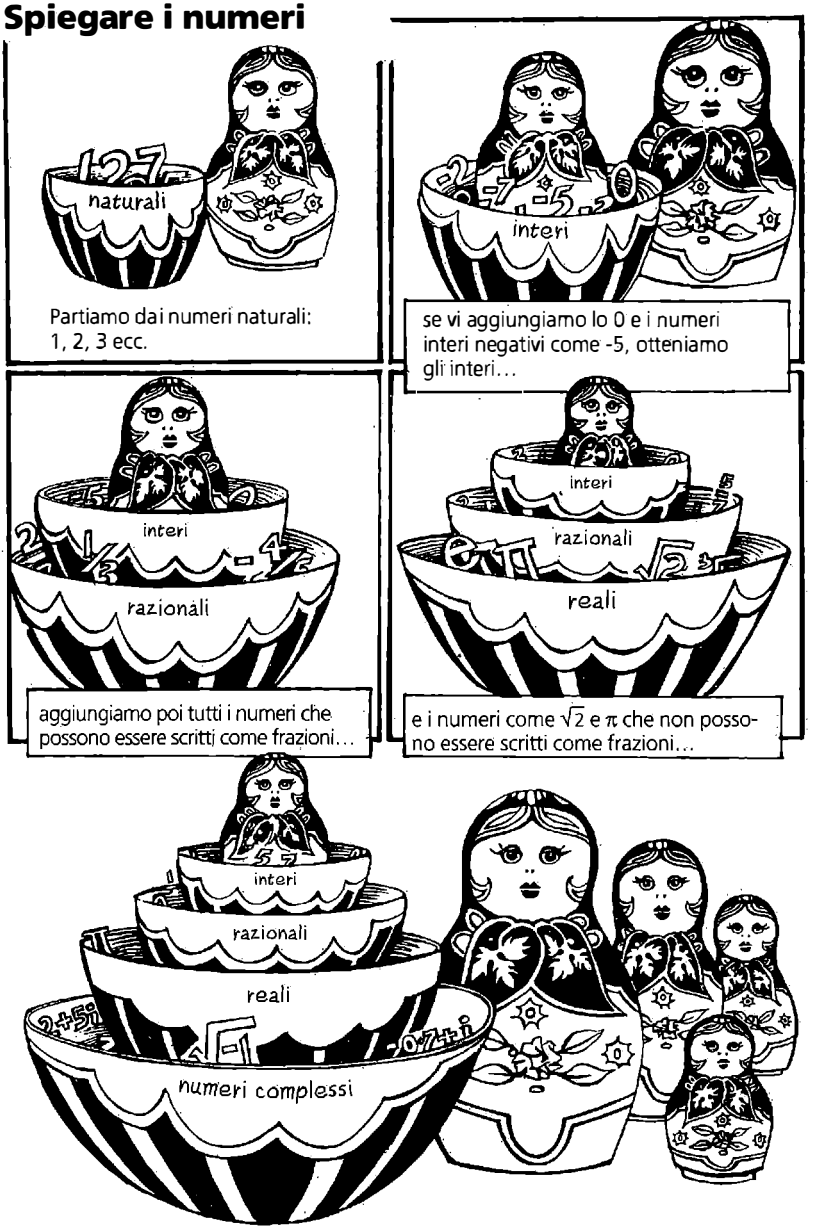
Il primo frattale

Il primo frattale matematico fu scoperto nel 1861. Karl Weierstrass si dilettava a trovare fallacie nei ragionamenti di altri matematici. La sua esigenza di rigore assoluto lo portò alla scoperta di una funzione continua ma, ovunque, non differenziabile: una curva completamente costituita da spigoli. In questo modo non era possibile definire il suo tasso di variazione in alcun punto. In altri termini, non era liscia in alcun punto. Per gli scienziati del tempo fu uno shock.



Si pensava che la funzione di Weierstrass fosse un'aberrazione, un prodotto "patologico" della mente umana e che non somigliava a nulla di ciò che si sarebbe potuto trovare in natura. Weierstrass e Cauchy avevano sviluppato una nuova branca della matematica chiamata *analisi*. L'analisi costituiva il tentativo di dare un nuovo rigore alla matematica mediante definizioni precise di numero e di continuità.

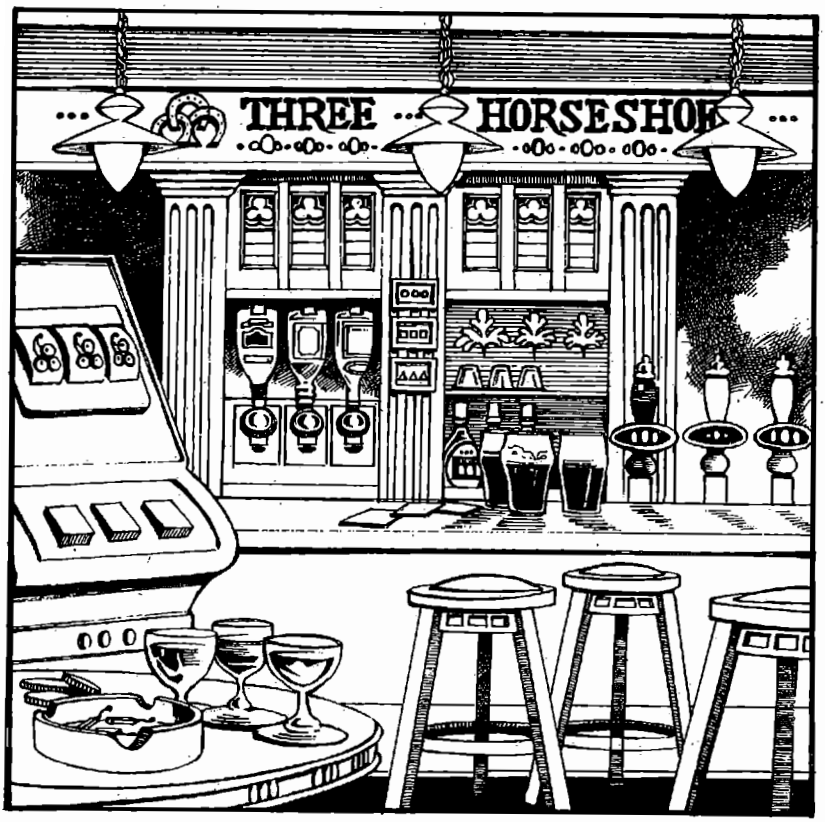
Spiegare i numeri



se infine aggiungiamo i numeri che includono combinazioni di $\sqrt{-1}$, arriviamo all'insieme più ampio, quello dei numeri complessi.

Fondamenti sicuri e insiemi

I matematici avevano sempre pensato che la loro disciplina si fondasse su basi solide. L'analisi sembrava suggerire che tutta la matematica potesse essere fondata a partire dai semplici numeri interi. Questi numeri potevano a loro volta essere ridotti alla pura logica? Furono fatti diversi tentativi, basati sull'idea di insieme.



Tutta la matematica può essere definita in termini insiemistici. Così, i numeri possono essere visti semplicemente come proprietà di insiemi. Per esempio, tre è la caratteristica comune a tutti gli insiemi con tre elementi. La circolarità viene eliminata definendo un insieme con tre elementi sulla base dell'idea di corrispondenza uno a uno.

Che cosa sono gli insiemi?

Un insieme è una collezione di cose che può essere pensata come un singolo oggetto. Questa definizione, fra l'altro, esclude idee autocontraddittorie come quella di "insieme di tutti gli insiemi"! Insiemi che possono contenere altri insiemi ma che non possono contenere se stessi possono portare alla follia. Con il suo famoso paradosso, **Bertrand Russell** (1872-1970) mostrò le insidie che derivano dal considerare gli insiemi che possono contenere se stessi.



È interessante notare che in inglese la parola "set", insieme, ha più significati di ogni altra. L'*Oxford English Dictionary* elenca ben 126 differenti accezioni, molte riguardanti gruppi o collezioni di oggetti. ("Mandelbrot" ha un solo significato in qualsiasi lingua lo si traduca: "pasta di mandorle".)

Cantor e il continuo

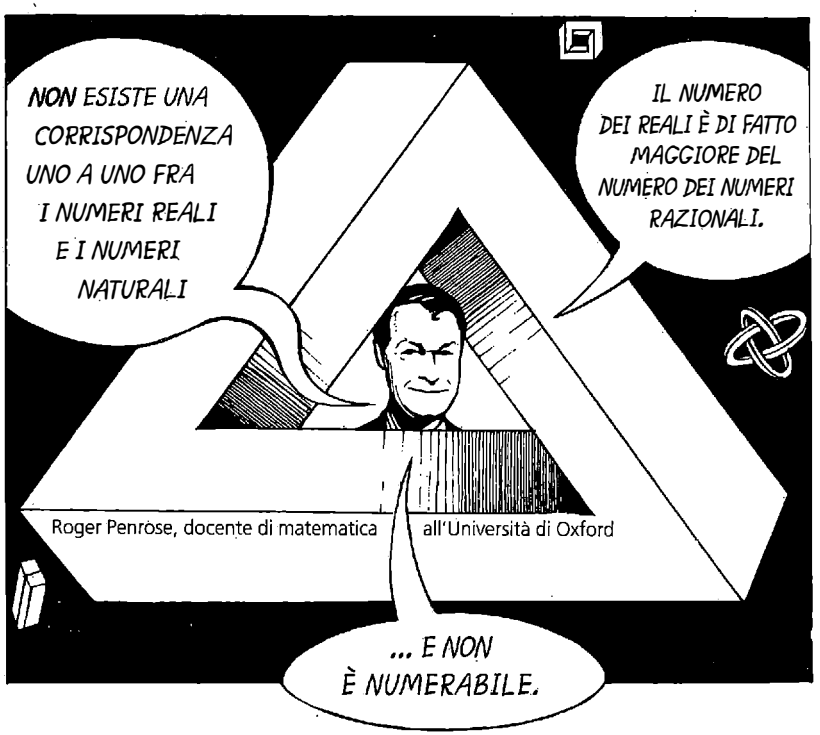
Un grosso ostacolo era rappresentato dal concetto di infinito, perché richiedeva un atto di fede che molti matematici non erano disposti a compiere. Georg Cantor, uno dei pionieri dell'odierna teoria degli insiemi, prese le mosse da un problema che continuò a tormentarlo per tutta la vita: la natura del **continuo**. Il continuo è lo spazio idealmente suddivisibile all'infinito, concetto necessario per una teoria del cambiamento continuo.



Ci sono più numeri reali o interi? È possibile che preso un numero reale a piacere sul lato destro non si riesca a trovare un numero intero nell'insieme opposto, visto che c'è un'infinità di interi?
Bene, consideriamo il numero sulla diagonale.
È il numero 0,1704826...

Ora modifichiamolo sottraendo 1 da ciascuna delle sue cifre decimali. Si ottiene 0,0693715...
Questo numero non apparirà mai nella tabella, dato che differisce per almeno una delle cifre decimali da qualsiasi altro numero che vi compare. Dunque ci sono più reali che interi.

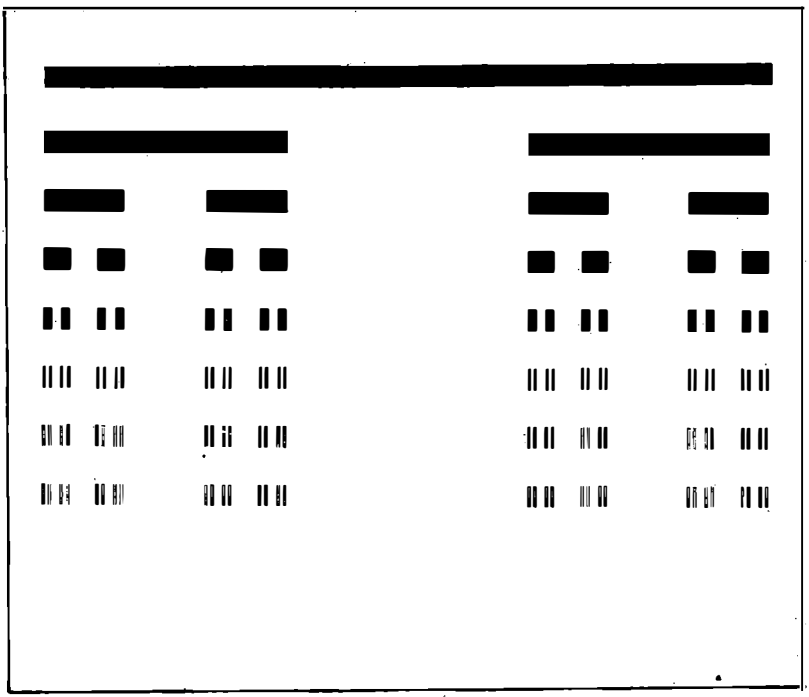
L'argomentazione di Cantor implica che esistono *differenti tipi di infinito*. Egli si dedicò così a sviluppare una teoria interamente nuova della cosiddetta aritmetica transfinita, convinto di aver scoperto un nuovo potente principio della realtà con profonde implicazioni fisiche e spirituali.



L'insieme di Cantor

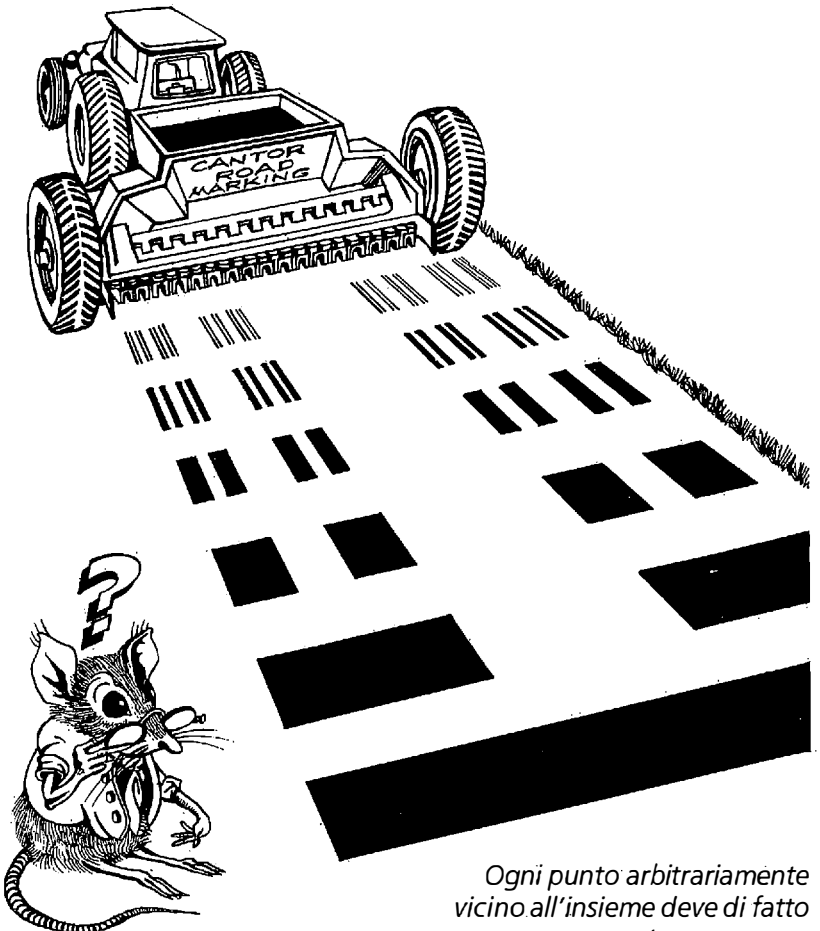
La ricerca di Cantor sul significato della continuità lo condusse, nel 1883, alla definizione dell'insieme che oggi porta il suo nome, uno dei primi frattali a essere studiato dal punto di vista matematico. In realtà era già stato scoperto da Henry Smith, un professore di geometria di Oxford, nel 1875.

Si consideri un segmento e se ne rimuova il terzo centrale, così da ottenere due segmenti uguali. Ora si elimini, allo stesso modo, il terzo centrale da ciascuno di questi due segmenti. Ripetendo l'operazione un numero infinito di volte, si ottiene l'insieme di Cantor.



L'insieme di Cantor non ha né una lunghezza né un interno. In termini tecnici ha "misura zero" Tirando una freccetta sarebbe infinitamente improbabile colpirlo. È "ovunque non denso", e in ogni sua parte consiste quasi completamente di lacune.

Tuttavia, pur essendo formato da punti totalmente sconnessi, è *più che numerabile*. In effetti contiene tanti punti quanti sono quelli dell'intero segmento da cui è ricavato. Ogni punto è un "punto di accumulazione" o "limite": ciò significa che nell'insieme che forma un suo intorno, per quanto piccolo esso sia, c'è un'infinità di altri punti. Peraltro, l'insieme di Cantor contiene tutti i propri punti limite.

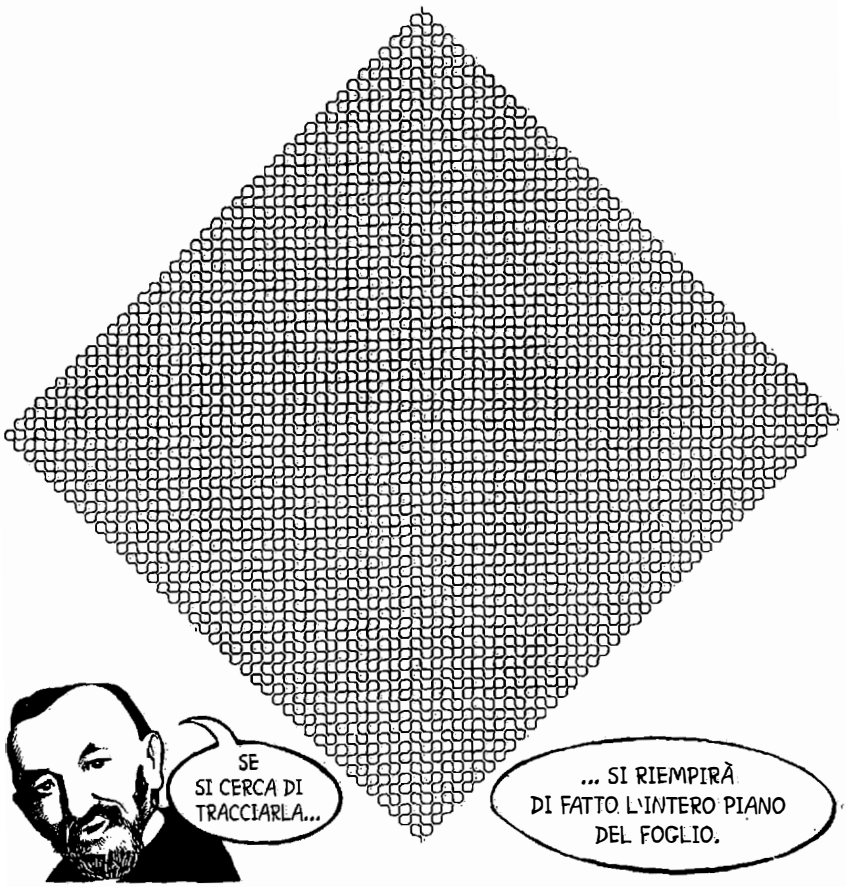


Ogni punto arbitrariamente vicino all'insieme deve di fatto appartenere a esso.

È ciò che Cantor chiamava insieme "perfetto", un insieme equipotente all'insieme dei propri punti limite. Per altro, l'esistenza di un simile insieme, infinitamente divisibile ma del tutto discontinuo, costrinse Cantor a raffinare la sua nozione di continuità.

La curva di Peano che riempie lo spazio

I matematici erano alla ricerca di una definizione di dimensione. Un fatto eclatante avvenne intorno al 1890, quando **Giuseppe Peano** (1858-1932) scoprì quella che fu chiamata una "curva che riempie lo spazio" Peano aveva costruito una curva ideale che si attorcigliava in un modo così complesso da toccare ogni punto dell'intero piano.



Non c'era alcun punto del piano che la curva di Peano non "coprisse"

Ciò creò una situazione alquanto spiacevole per i matematici: qualcosa di simile a quanto accadde ai biologi che dovettero ammettere di essere incapaci di definire la vita o ai filosofi innanzi alla definizione di coscienza. La natura autenticamente bidimensionale del piano si trovava in quell'insieme di punti.



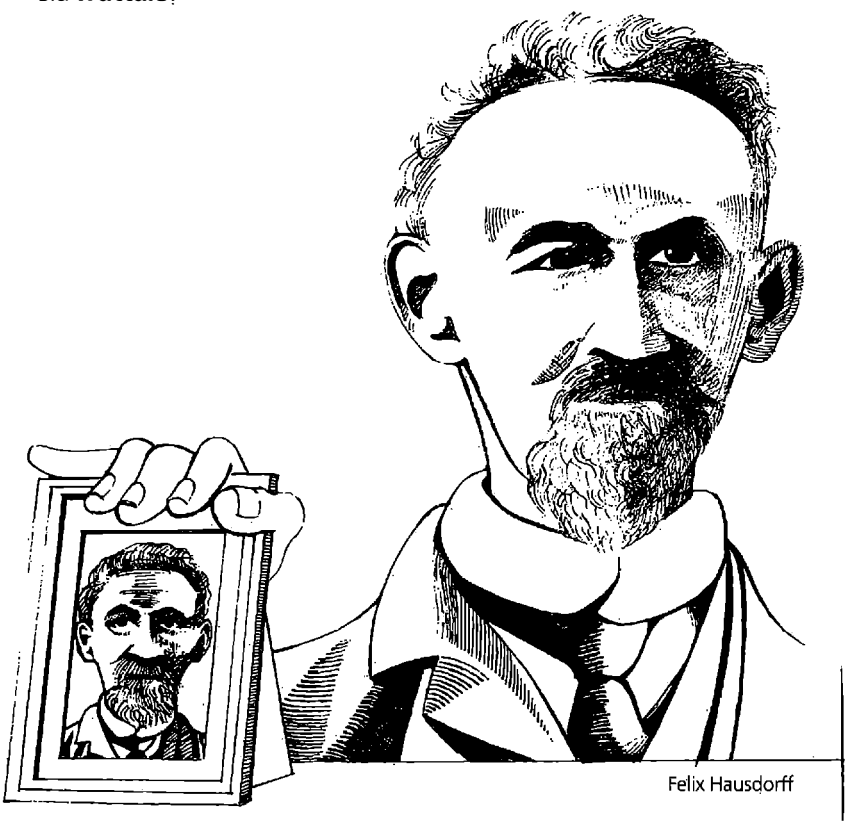
Esisteva una rappresentazione che fosse sia continua sia uno a uno? In tal caso, il concetto di dimensione non avrebbe avuto alcun significato **topologico**. La **topologia** è lo studio matematico delle proprietà geometriche e delle relazioni spaziali invarianti rispetto a stiramenti, piegature e torsioni continui.

Dimensione topologica e frattale

Nel 1911 **Luitzen Brouwer** (1881-1966) dimostrò che una simile rappresentazione non esisteva. La dimensione è un invariante topologico, non può essere alterata da deformazioni continue.

Ciò fornisce una definizione della dimensione di una figura o di uno spazio: la dimensione topologica. Seguendo un altro tipo di ragionamento, **Felix Hausdorff** (1869-1942) colse un ulteriore aspetto dell'idea di dimensione. Focalizzando l'attenzione sul modo in cui una figura riempie lo spazio, Hausdorff ricavò una misura che estende la nostra idea intuitiva di dimensionalità. Per figure molto più complesse dei normali oggetti euclidei, l'approccio di Hausdorff contempla dimensioni frazionarie. Ciò permette l'affascinante possibilità di considerare oggetti di **dimensione uno e mezzo**.

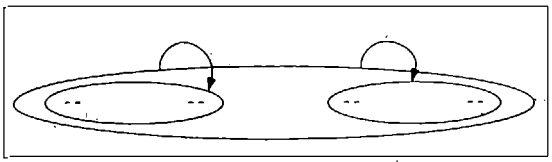
Come può una figura trovarsi a cavallo di due dimensioni? Basta che sia **frattale**.



Felix Hausdorff

Autosimilarità

Visivamente, è chiaro che l'insieme di Cantor è formato semplicemente da due piccole copie di se stesso. Questa proprietà è detta **autosimilarità**.



Autosimilarità dell'insieme di Cantor L'insieme di Cantor è una collezione di due copie esatte dell'intero insieme di Cantor su una scala ridotta di un fattore 1/3.

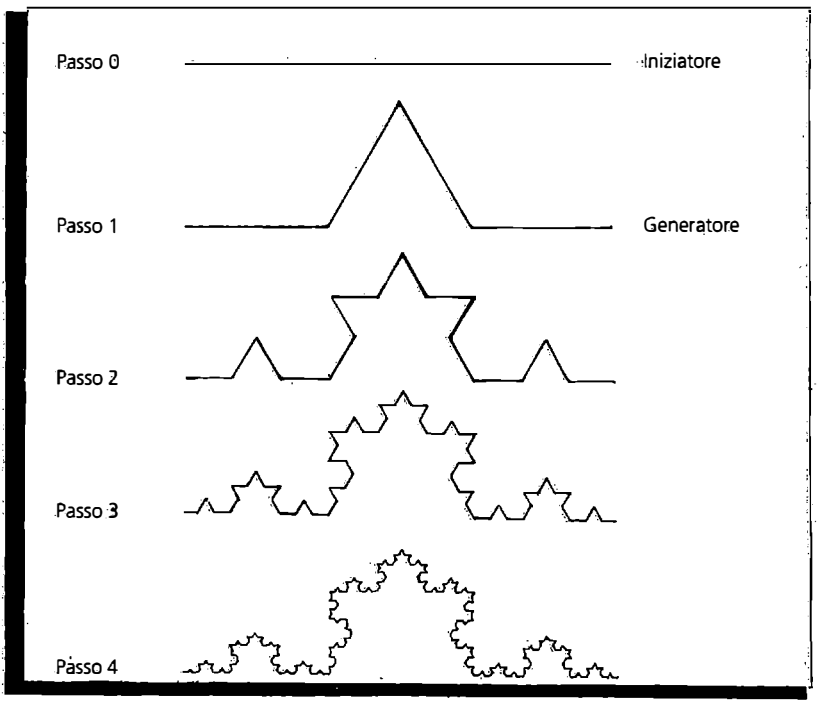
Qualsiasi parte di un segmento è essa stessa un segmento, identico al segmento intero, fatta eccezione per un fattore di scala. La maggior parte delle figure euclidee non possiede questa proprietà.



Queste figure sono incredibilmente complicate, quasi indescrivibili in termini euclidei, ma mostrano un'affinità con le cosiddette figure "patologiche" della matematica moderna, perché esibiscono una serie senza fine di motivi entro motivi che si ripetono a tutte le scale.

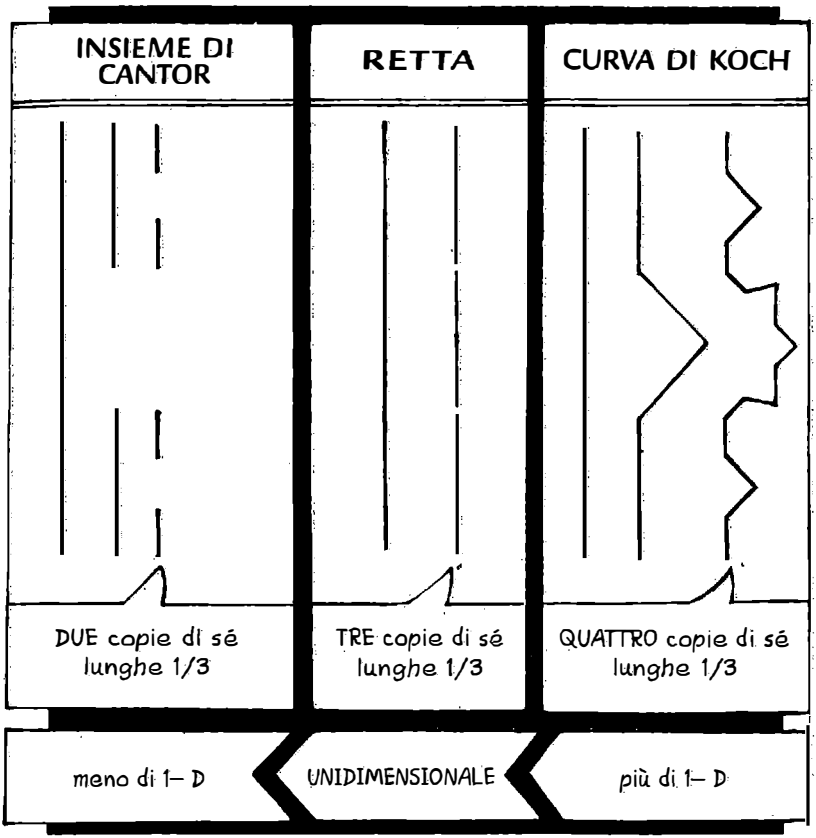
La curva di Koch

Una di queste figure "patologiche" è la curva "fiocco di neve" ideata da **Helge von Koch** (1870-1924) nel 1904. Egli definì tale curva come il limite di una sequenza infinita di curve sempre più grinzose. La curva finale è infinitamente lunga, per quanto sia contenuta in un'area finita. Sezionando la curva secondo certi angoli, si nota che contiene un'infinità di insiemi di Cantor.



Ciò che Koch non comprese era che queste curve di lunghezza infinita sarebbero state il modello ideale per descrivere alcune forme del mondo reale, come le linee di costa e le arterie.

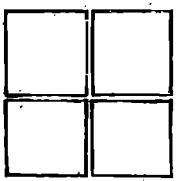
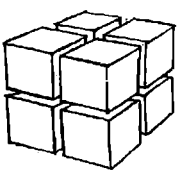
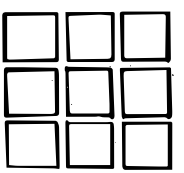
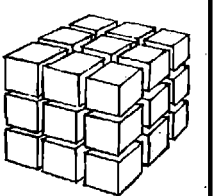
Dimensione di similarità



Un insieme di Cantor contiene due copie di sé lunghe un terzo. Un segmento può essere tagliato in tre copie di sé lunghe un terzo. Una curva di Koch consiste di quattro copie di sé lunghe un terzo. Un quadrato è costituito di nove copie di sé di taglia un terzo. In un certo senso l'insieme di Cantor e la curva di Koch si trovano agli estremi opposti rispetto al segmento. La curva di Koch si trova fra il segmento e il quadrato. Si trova in qualche modo *fra* la prima e la seconda dimensione! Questo può essere descritto con precisione con il concetto di **dimensione di similarità**, come potrete vedere alla pagina seguente.

Dimensione di similarità e frattale

Un cubo, che è tridimensionale, può essere tagliato in otto (due alla terza potenza) cubi di taglia un mezzo. Se conosciamo la dimensione di un oggetto, le potenze o gli esponenti ci permettono di ottenere il numero di copie di sé più piccole che contiene, per ogni particolare taglia. Una figura a n dimensioni è composta da m^n copie di sé di taglia $1/m$. Ciò suggerisce una generalizzazione del concetto di dimensione, che consente valori frazionari.

	SEGMENTO	QUADRATO	CUBO
DIVISIONE PER 2			
NUMERO DI COPIE DI SÉ	2	4	8
	2^1	2^2	2^3
DIVISIONE PER 3			
NUMERO DI COPIE DI SÉ	3	9	27
	3^1	3^2	3^3

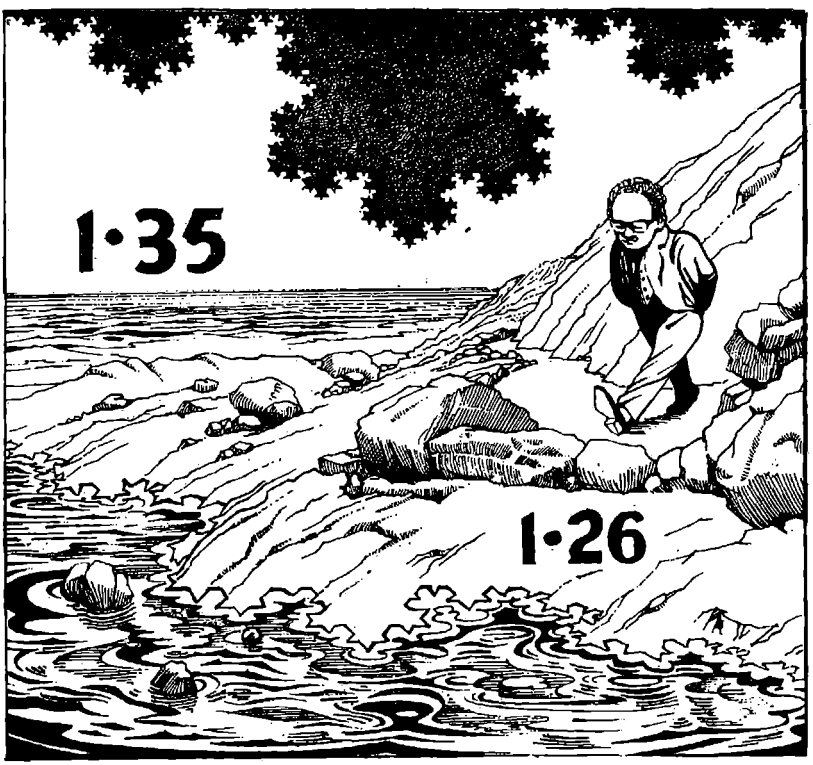
I logaritmi sono l'inverso degli esponenti. Se sappiamo quante copie di sé più piccole contiene un oggetto, e se conosciamo la rispettiva lunghezza, i logaritmi ci consentono di calcolare la dimensione dell'oggetto: non è detto che sia un numero intero.

La curva di Koch, per esempio, contiene quattro curve di Koch di lunghezza un terzo. La sua dimensione è quindi log4/log3, ossia circa 1,26.

L'insieme di Cantor contiene due insiemi di Cantor di lunghezza un terzo, e ha dimensione log2/log3, ossia circa 0,63.

Nel 1919, Felix Hausdorff estese la nozione di dimensione di similarità in modo da renderla applicabile a tutte le figure, non solo a quelle autosimili. In generale le forme frattali hanno una dimensione di Hausdorff frazionaria. Dato che la definizione di Hausdorff distingue fra forme frattali e non frattali, è spesso chiamata dimensione frattale.

La dimensione frattale descrive la complessità frattale di un oggetto. Per esempio, la linea di costa della Gran Bretagna ha una dimensione frattale approssimativamente pari a 1,26; circa la stessa della curva di Koch, ma leggermente inferiore di quella del contorno tipico di una nube (circa 1,35). Su questa scala, la dimensione 1 descrive una curva liscia, mentre l'incremento della dimensione tendente a 2 implica una crescente complessità frattale dell'oggetto.

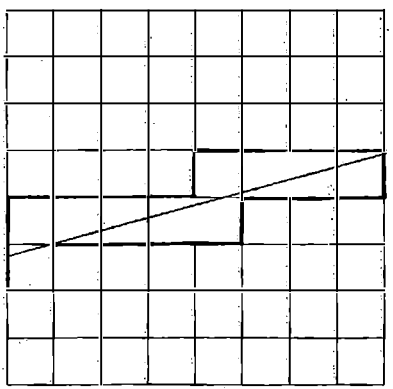


La dimensione di Hausdorff non era altro che una costruzione teorica, finché Mandelbrot non la riscoprì rendendola utilizzabile in ambiti applicativi. Mandelbrot intendeva, infatti, realizzare uno strumento perfetto per descrivere le irregolarità della natura.

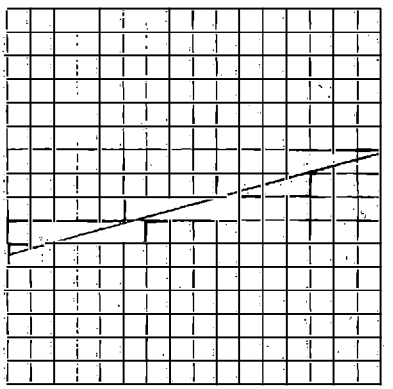
Misurare la dimensione frattale

Per quanto esprima un concetto di portata generale, la dimensione di Hausdorff è molto difficile da calcolare. Un modo semplice di misurare la dimensione frattale di una curva è il cosiddetto metodo del conteggio dei riquadri o *box counting*. Si ricopre la curva con una griglia di piccoli quadrati e si conta quanti ne attraversa. Si ripete la procedura con quadrati via via più piccoli. Il limite per una curva frattale, la velocità con cui la proporzione di quadrati riempiti diminuisce, dà la dimensione frattale.

retta



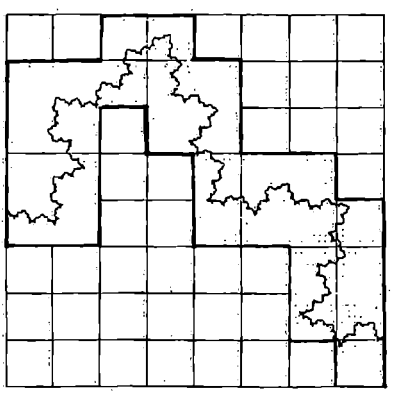
10 quadrati



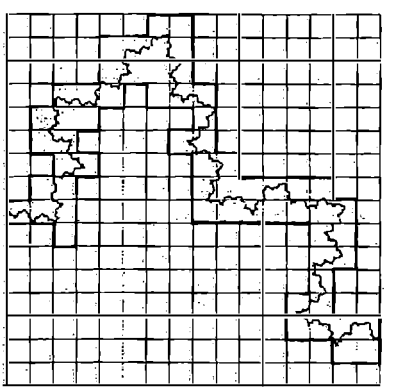
20 quadrati

dimensione frattale = log(20/10)/log(2) = 1

insieme di Julia



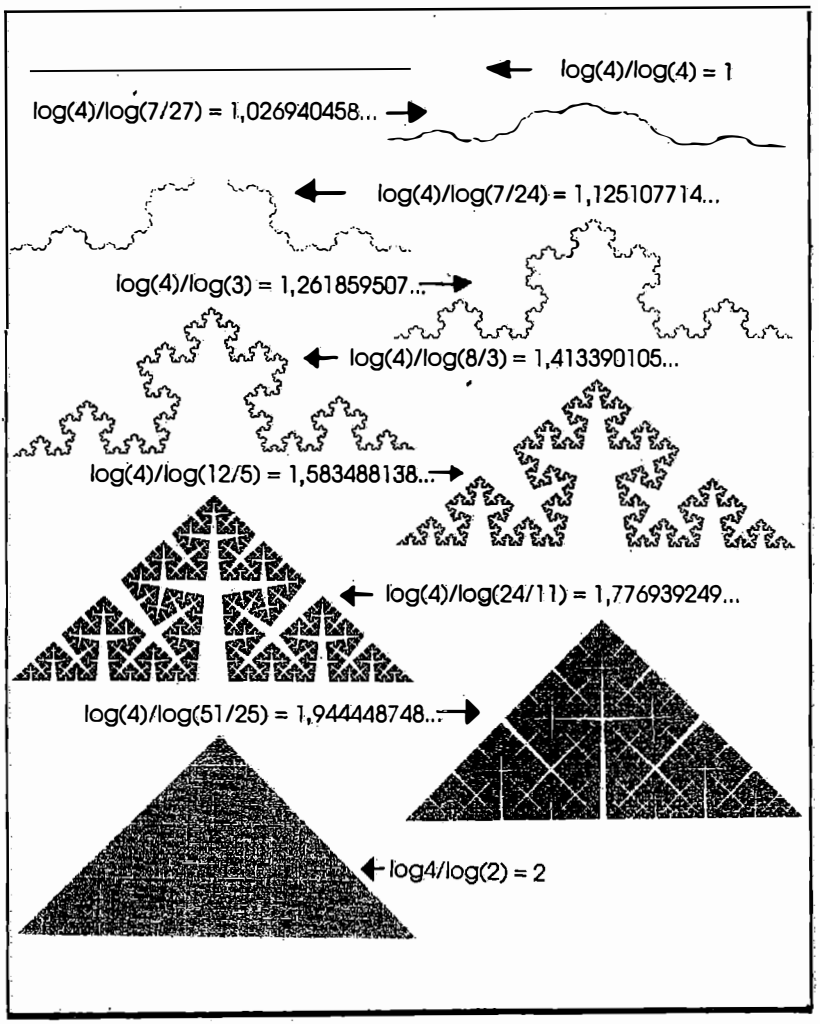
27 quadrati



60 quadrati

dimensione frattale = log(60/27)/log(2) = 1,152...

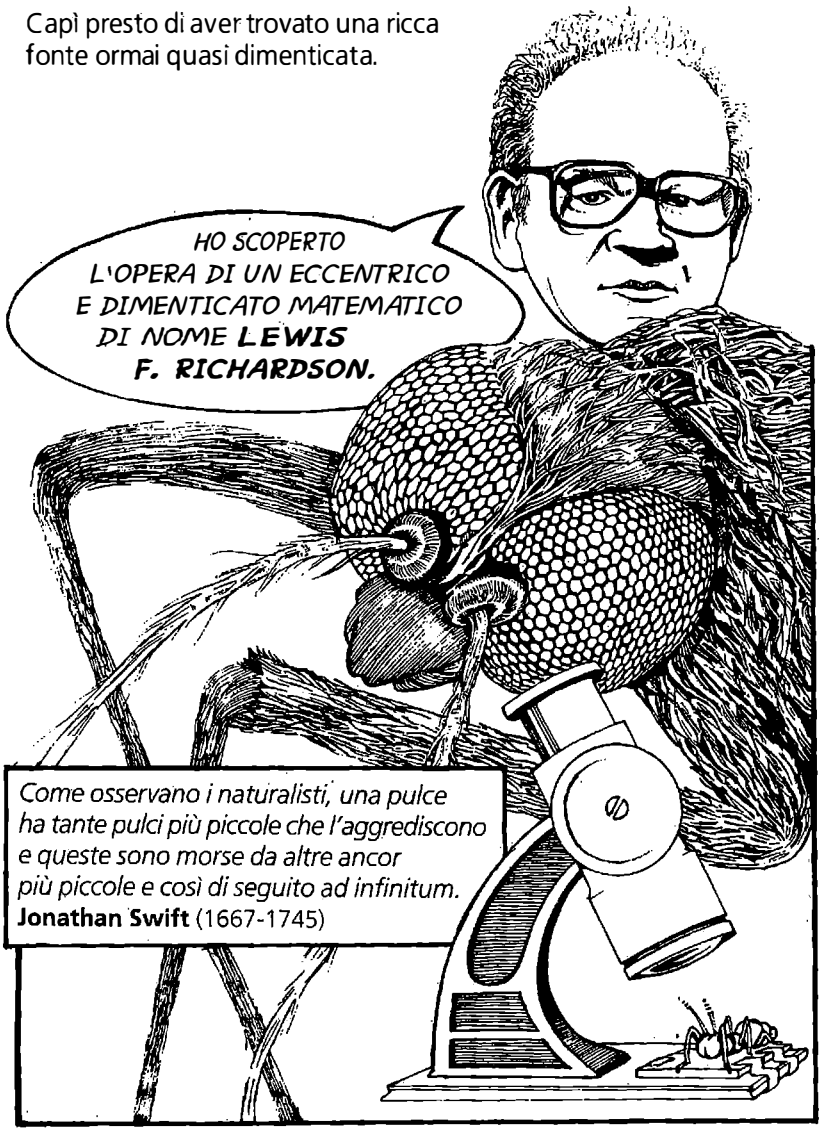
Nel caso di un segmento retto, se si dimezza la lunghezza del lato dei quadrati, è necessario il doppio dei quadrati per ricoprirlo. Tuttavia, per un frattale ne servono più del doppio. Una figura bidimensionale richiede, invece, il quadruplo dei quadrati. Così, una curva frattale si trova, dal punto di vista dimensionale, nel mezzo, richiedendone più del doppio, ma meno del quadruplo.



Lewis Richardson

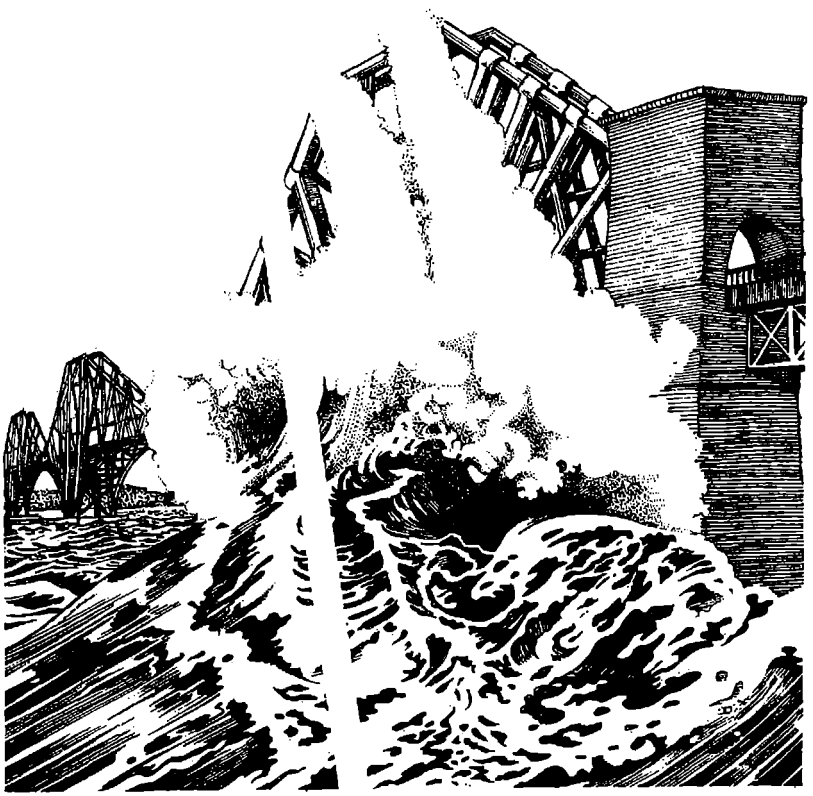
Comportandosi come un naturalista del XIX secolo, Mandelbrot si mise a leggere oscure e dimenticate riviste in cerca di ispirazione.

Capì presto di aver trovato una ricca fonte ormai quasi dimenticata.



Richardson si dilettava a porre questioni che nessun altro, fino a quel momento, aveva considerato meritevoli di attenzione. Uno dei suoi scritti, intitolato "Il vento possiede una velocità?", anticipò l'opera di **Edward Lorenz** (1917-2008) e di altri fondatori della teoria del caos.

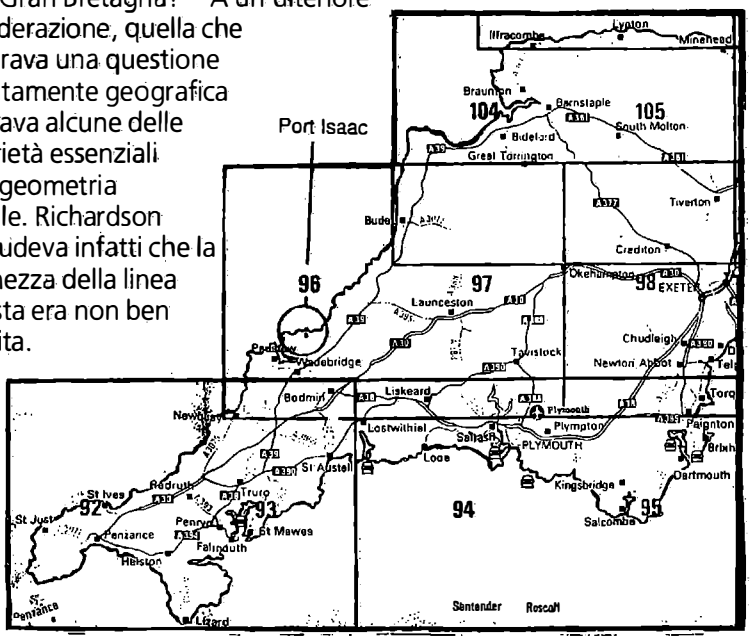
Una delle sue intuizioni più notevoli fu un modello che descriveva la turbolenza come una collezione di mulinelli sempre più piccoli. Un'idea che accompagnò con versi poetici nello stile di Swift.



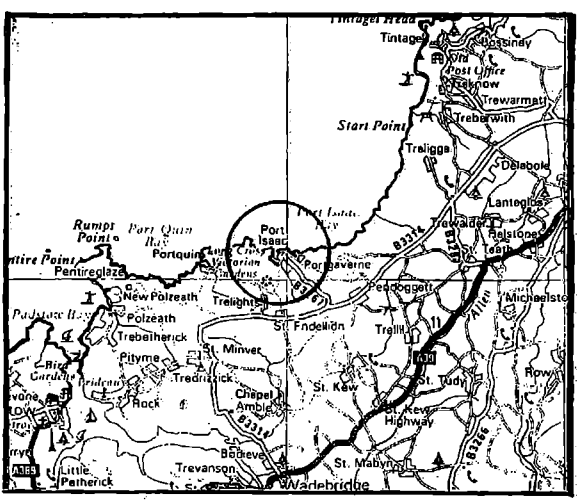
I grandi vortici hanno vortici piccoli
e questo ne alimenta la velocità;
e i piccoli ne hanno di ancor più piccoli
e così via a trovar la viscosità.

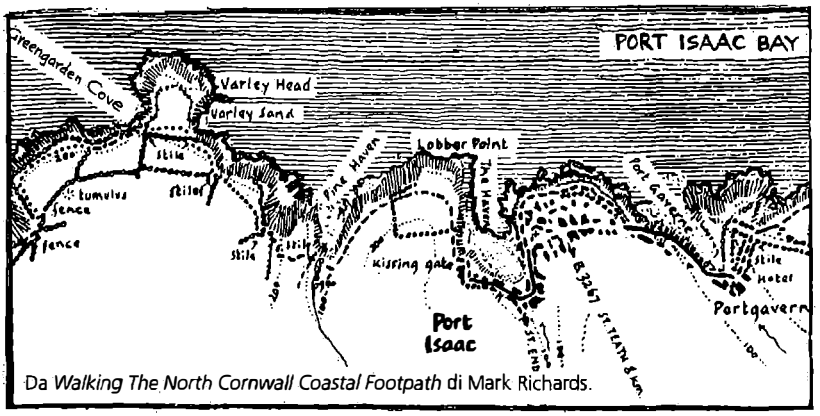
Quanto è lunga una linea di costa?

Ciò che colpì profondamente Mandelbrot fu un articolo di Richardson del 1861 intitolato "Quanto è lunga la linea di costa della Gran Bretagna?" A un'ulteriore considerazione, quella che sembrava una questione squisitamente geografica illustrava alcune delle proprietà essenziali della geometria frattale. Richardson concludeva infatti che la lunghezza della linea di costa era non ben definita.



Se si segue la costa e se ne prende la misura...





Da *Walking The North Cornwall Coastal Footpath* di Mark Richards.

... e poi la si confronta con quella ottenuta passeggiando lungo il sentiero costiero...

La lunghezza della linea di costa misurata dipende dalla dimensione del righello.

*Al limite, via via che la misurazione si fa più accurata, la lunghezza della linea di costa si approssima all'**infinito**.*

In altre parole, la linea di costa della Gran Bretagna e di qualsiasi altra formazione geologica è frattale.

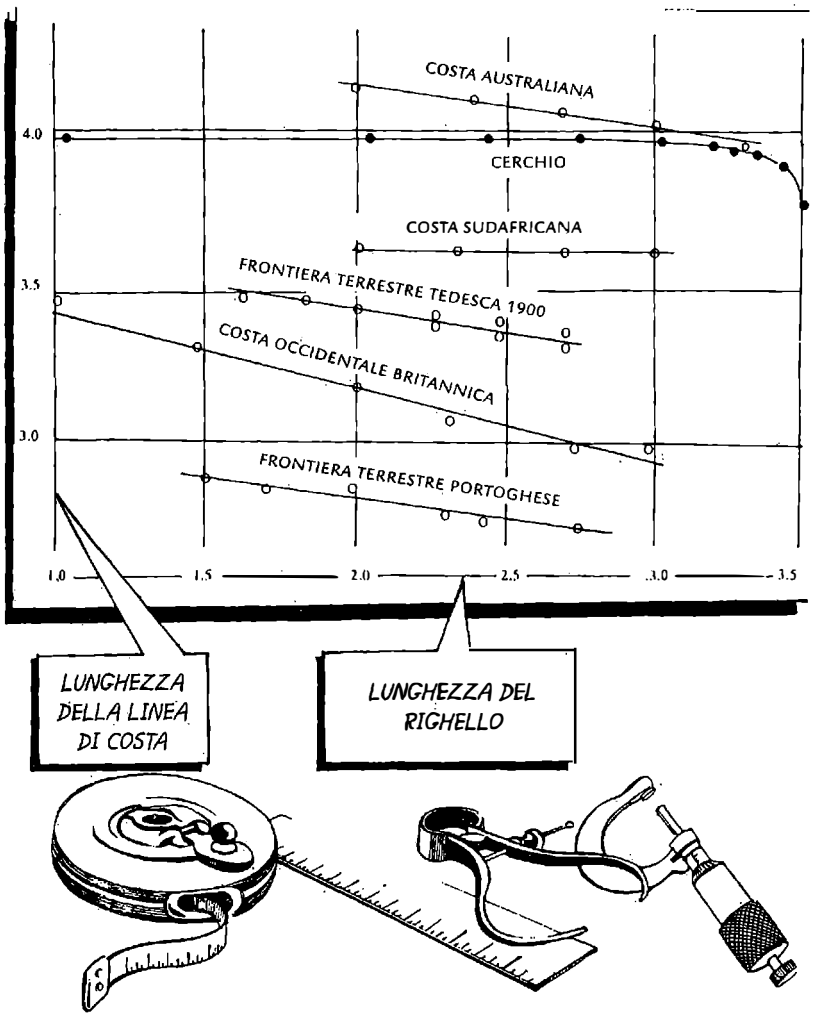
seguendo ogni recesso e insenatura della spiaggia...

... si scoprirà che i risultati non convergono.

Vanno sempre più divergendo.

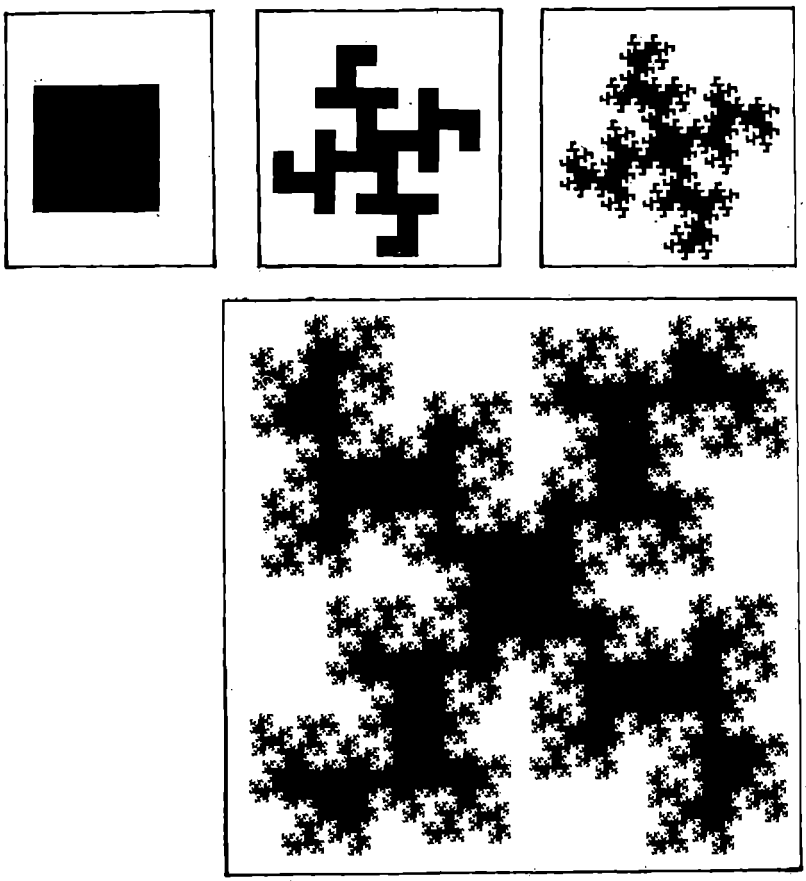


Dopo un'esaustiva analisi di tutti i dati cartografici di cui disponeva, Richardson tracciò un grafico dei suoi risultati rispetto al logaritmo della lunghezza del righello di misura. Mandelbrot si accorse che il grafico di Richardson non era altro che la rappresentazione della dimensione di Hausdorff della linea di costa.



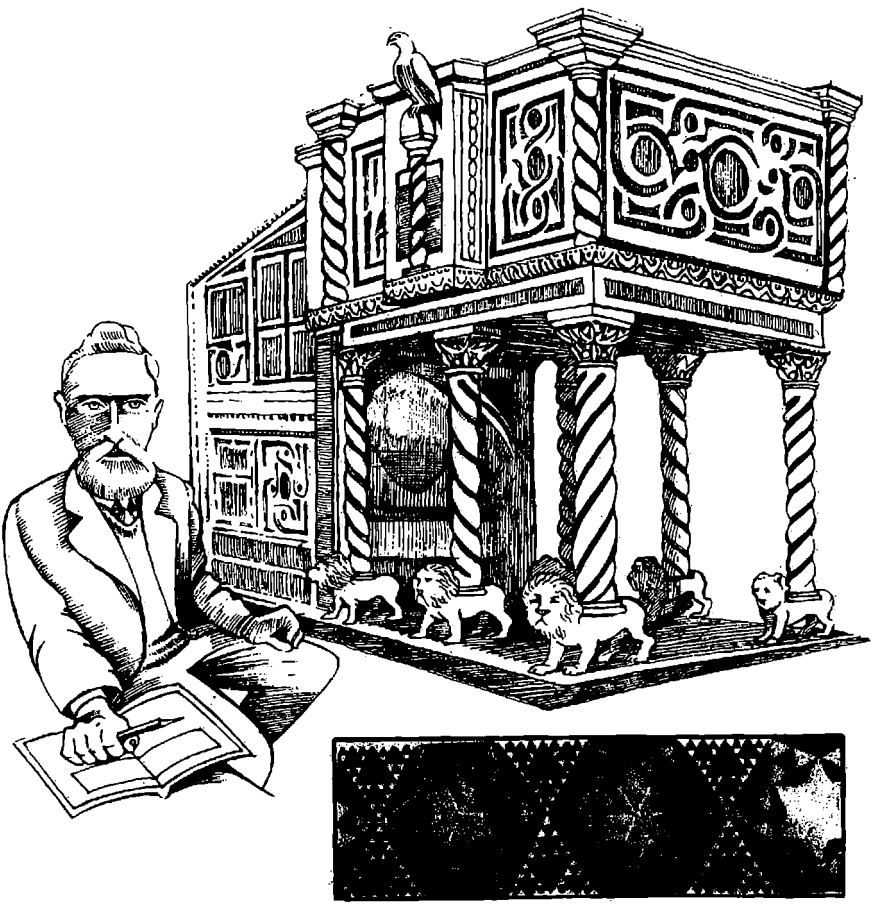


Questa è la misura della frastagliatura della linea di costa. Dunque, la domanda originale di Richardson poteva ora essere così riformulata: "Quanto è frastagliata la linea di costa della Gran Bretagna?" Alla domanda si può oggi rispondere in termini di dimensione frattale.

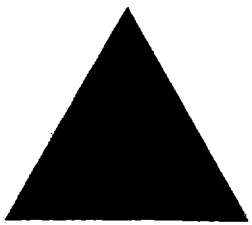


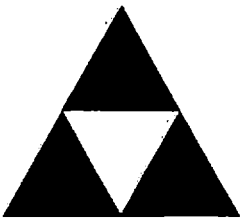
Il triangolo di Sierpinski

Il matematico polacco **Vaclav Sierpinski** (1882-1969) introdusse il suo frattale nel 1916, ma i principi soggiacenti erano noti agli artisti già da millenni. I primi prototipi del triangolo di Sierpinski fecero la loro comparsa nel XII secolo sul pulpito della cattedrale di Ravello, disegnato da Nicola di Bartolomeo da Foggia. Anche il famoso "enigmista grafico" **Maurits Escher** (1898-1972) ne fece degli schizzi.

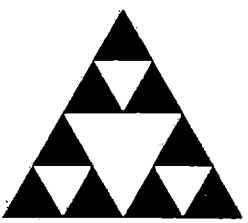


Il triangolo di Sierpinski si ottiene a partire da un triangolo equilatero pieno che viene diviso in quattro triangoli equilateri più piccoli; quello centrale viene poi rimosso lasciando un buco di forma triangolare.

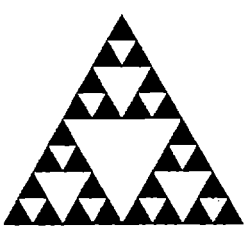


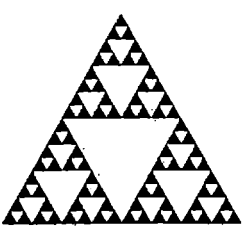


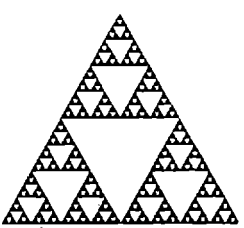
I tre triangoli equilateri rimasti vengono quindi divisi allo stesso modo, così che appaiano tre buchi triangolari più piccoli.



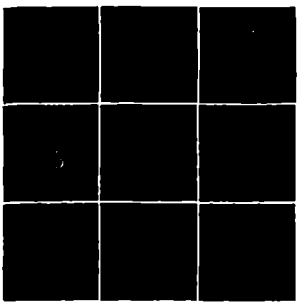
Possiamo ripetere questa procedura infinite volte, a scale sempre più piccole raggiungendo, al limite, il triangolo di Sierpinski, una figura composta da tre copie di se stessa, ciascuna di lato pari alla metà dell'originale.



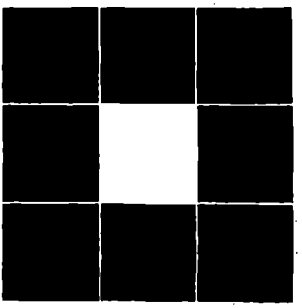




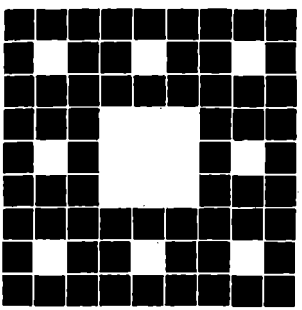
La stessa cosa può essere fatta con quadrati, pentagoni e ogni altro poligono. Tecniche analoghe sono applicabili anche ai cerchi. Queste strutture, ottenute ritagliando successivamente tre cerchi da cerchi sempre più piccoli, richiamano alla mente le decorazioni dell'arte celtica.



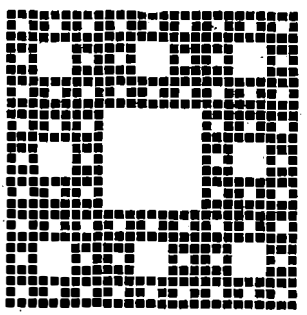
Passo 0



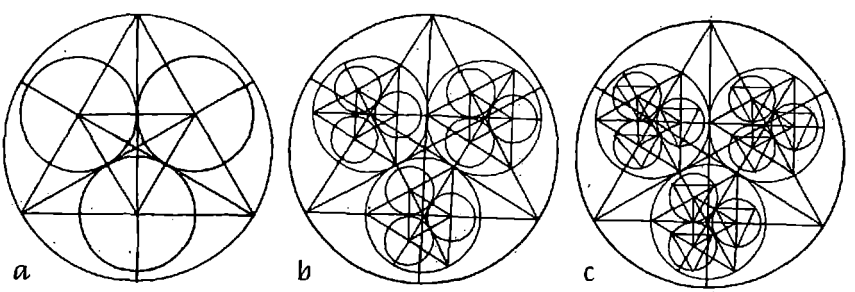
Passo 1



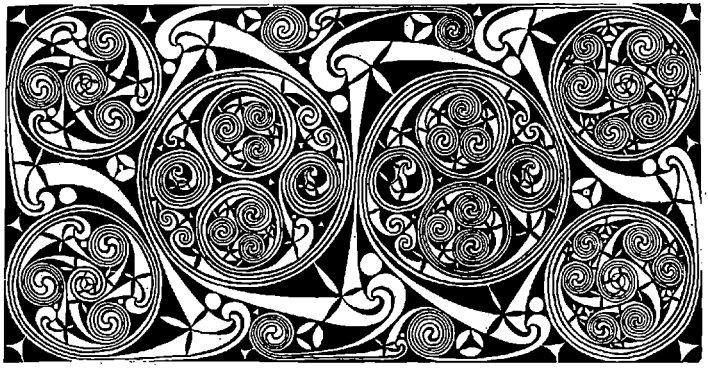
Passo 2



Passo 3

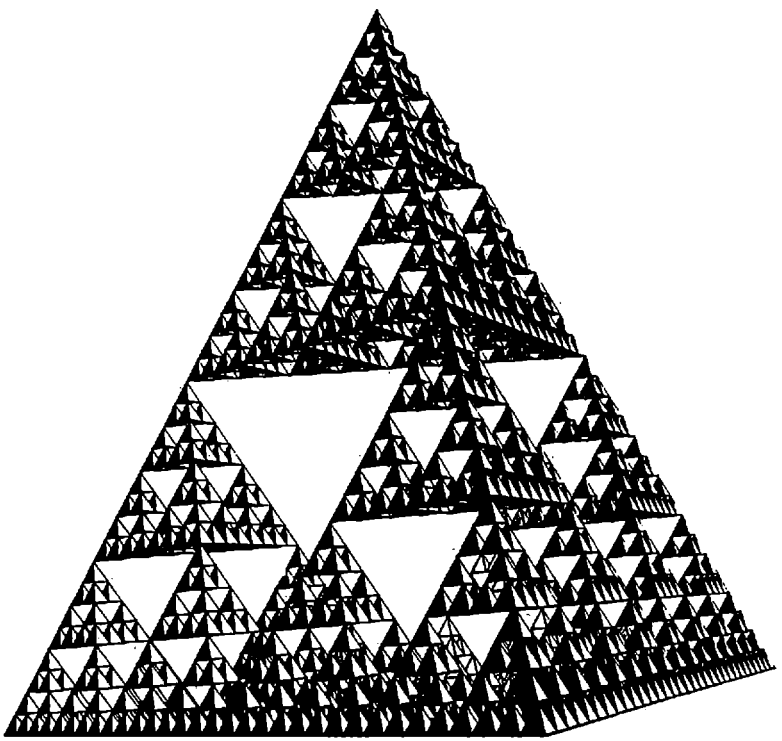


a b c

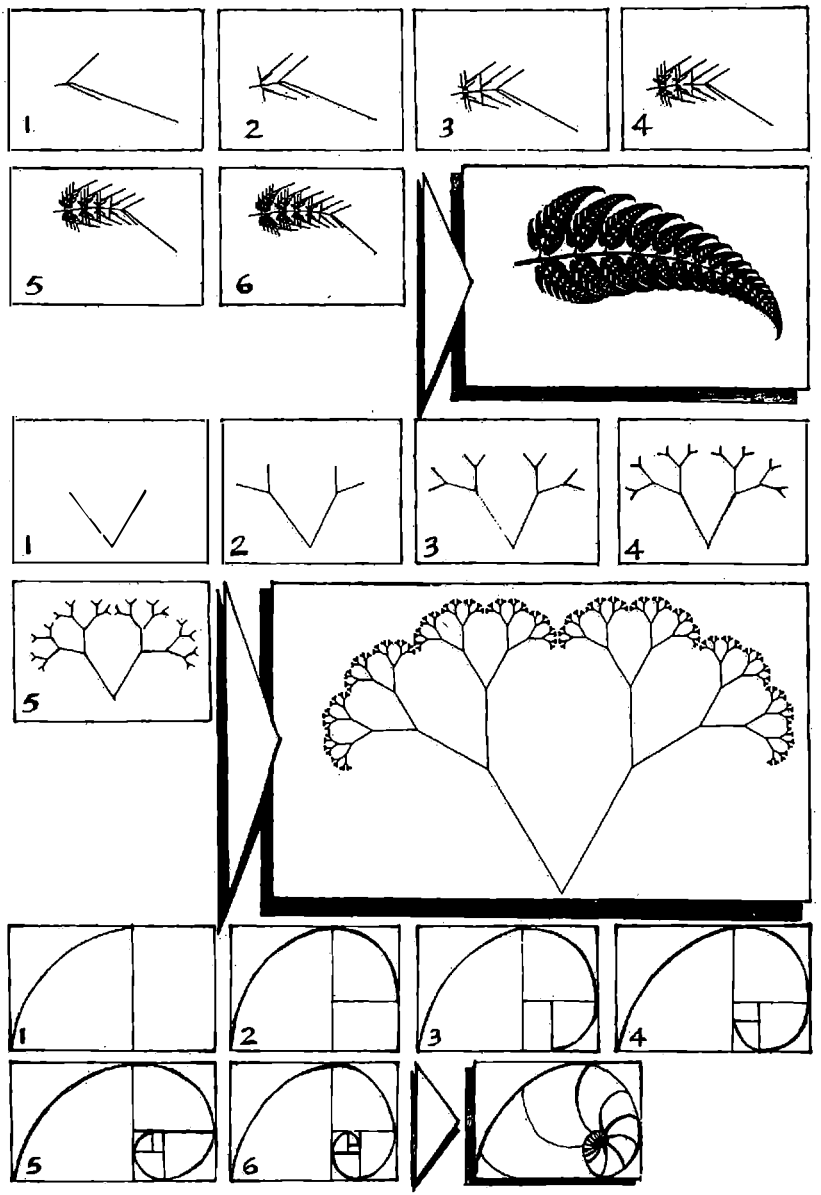


Book of Dunrow
Ireland, c. 650 AD

Lo stesso metodo può essere adattato anche a figure tridimensionali, generando piramidi e cubi frattali.

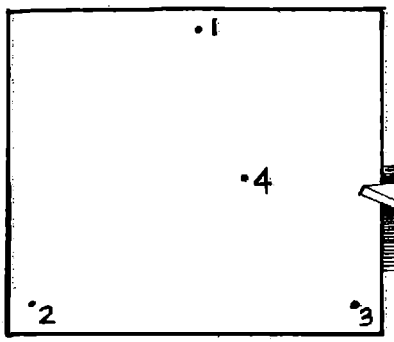


Il triangolo di Sierpinski è un prodotto della mente, un esercizio di matematica pura. Ma strutture con notevoli analogie si ritrovano nelle conchiglie marine. E le forme frattali emergono spesso come risultato dell'evoluzione cellulare.

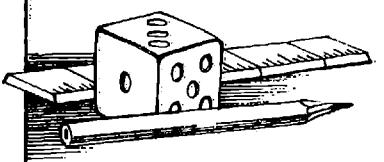


Il gioco del caos

Negli anni Ottanta del XX secolo, Michael Barnsley scoprì un altro modo per generare un frattale. Il metodo assomiglia un po' al gioco dei punti, solo che non li si unisce con una linea. Si segna un punto dopo l'altro in base ad alcune semplici regole.



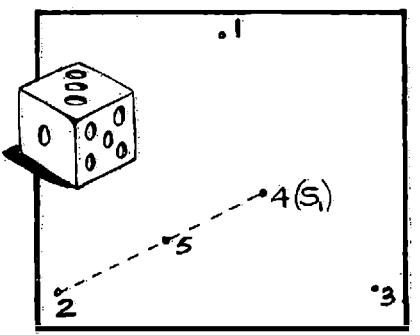
Per esempio: si segnano tre punti a triangolo e un quarto punto a caso all'interno del triangolo, che rappresenta il punto di partenza.



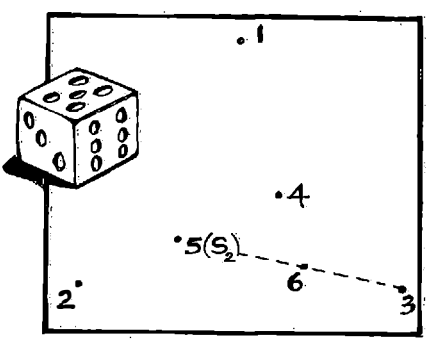
Ora si proceda come segue.

Passo 1 Si tiri un dado.

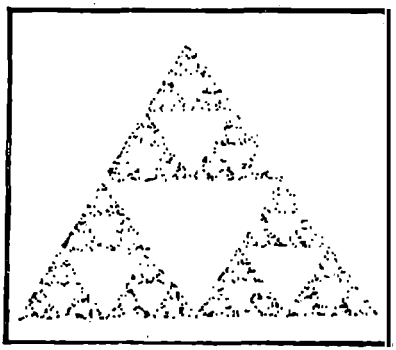
Passo 2. Se la faccia superiore mostra 1 o 2, si segni un altro punto a metà strada fra il punto di partenza e il primo punto. Se mostra 3 o 4 si segni un altro punto a metà strada fra il punto di partenza e il secondo punto.

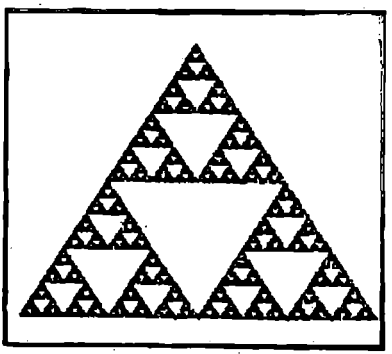


Se la faccia superiore mostra 5 o 6, si segni un altro punto a metà strada fra il punto di partenza e il terzo. Il nuovo punto diventa ora il nuovo punto di partenza. Si ripeta la procedura dal Passo 1.



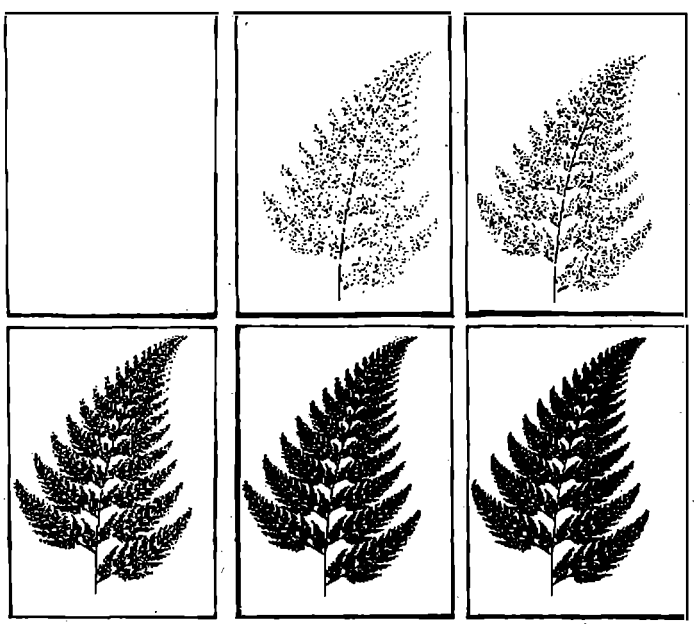
Dopo aver reiterato la procedura un certo numero di volte, inizia a emergere uno schema familiare: il triangolo di Sierpinski.





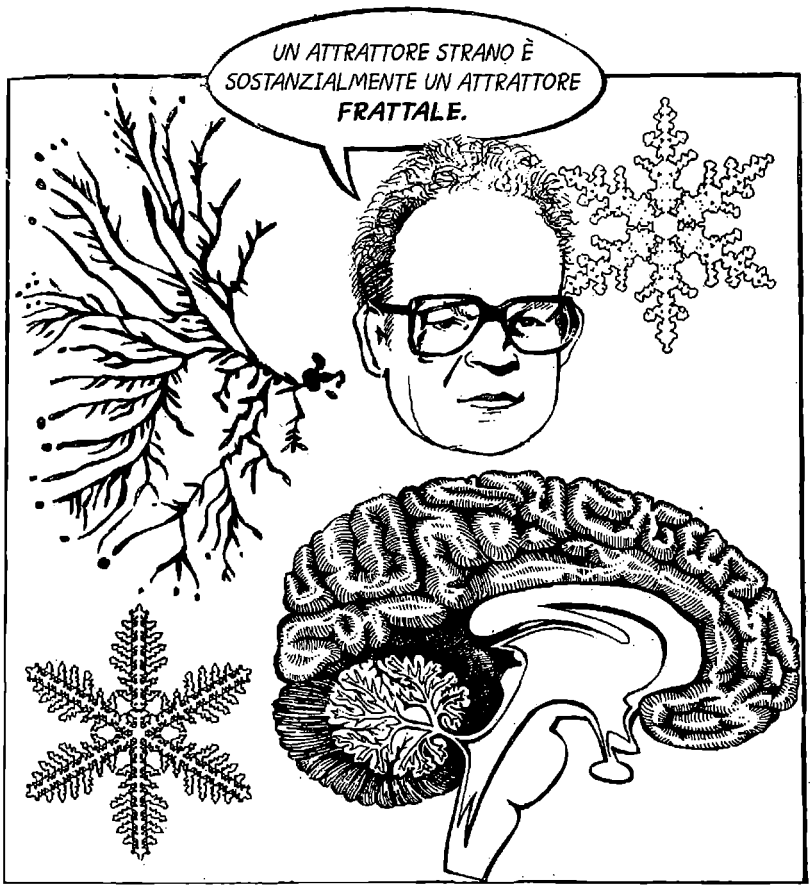
Non è un granché come gioco. Con un solo giocatore non c'è molta possibilità di scelta: si ha solo una mossa. Una volta scelto il punto iniziale, il futuro del gioco è deciso.

Ma come ha scoperto Michael Barnsley, se si possono scegliere punti differenti, possiamo generare una felce, o qualsiasi altra forma frattale, e non solo. Ogni figura, in effetti, può essere codificata con una formula frattale come questa.



Attrattore strano

Ciò che non è così ovvio è che, alla fin fine, la decisione iniziale non conta poi tanto. Ciò che di fatto avviene è che i punti sono "spinti" verso quello che è conosciuto con il nome di "attrattore", in questo caso un attrattore **strano**!
Benoît Mandelbrot ha contestato l'opportunità di questo nome, preferendogli quello di "attrattore frattale", per il semplice fatto che, essendo il tipo di attrattore più comune in natura, non può essere considerato così strano.



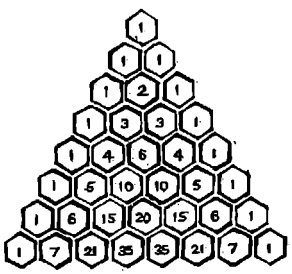
Il triangolo di Pascal

Un altro fatto curioso è rappresentato dalla scoperta del triangolo di Sierpinski all'interno del triangolo di Pascal.

Dall'algebra imparata a scuola ricordiamo che:

$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$
$(1 + x)^3 = (1 + x)(1 + x)^2 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$
$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

Se ignoriamo le x e osserviamo soltanto i coefficienti, riconosciamo uno schema.



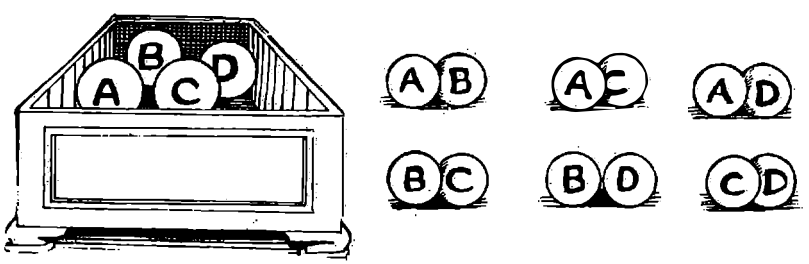
Triangolo
di Pascal

Questa rappresentazione grafica era già nota ad antiche culture in tutto il mondo.

Questi numeri sono fondamentali in matematica.

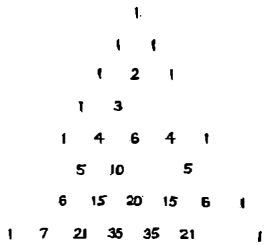
I numeri del triangolo di Pascal rappresentano il numero di possibili scelte di un certo numero di oggetti in un altro numero di oggetti.

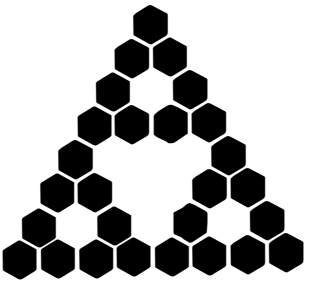
Per esempio, il 6 nella quarta riga ci dà il numero dei modi di scegliere due oggetti identici fra quattro...

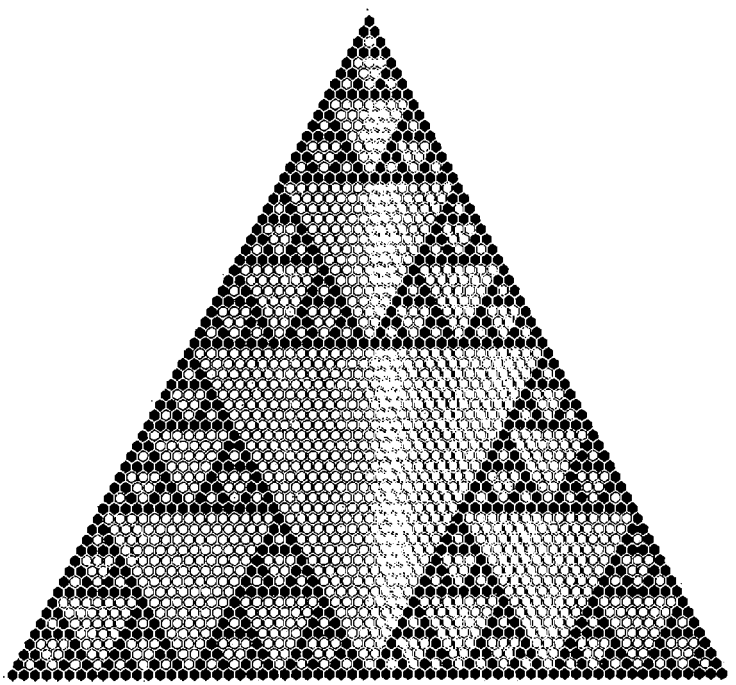


Che cosa succede se coloriamo di nero i numeri dispari del triangolo e lasciamo bianchi quelli pari?

Appare una forma familiare.

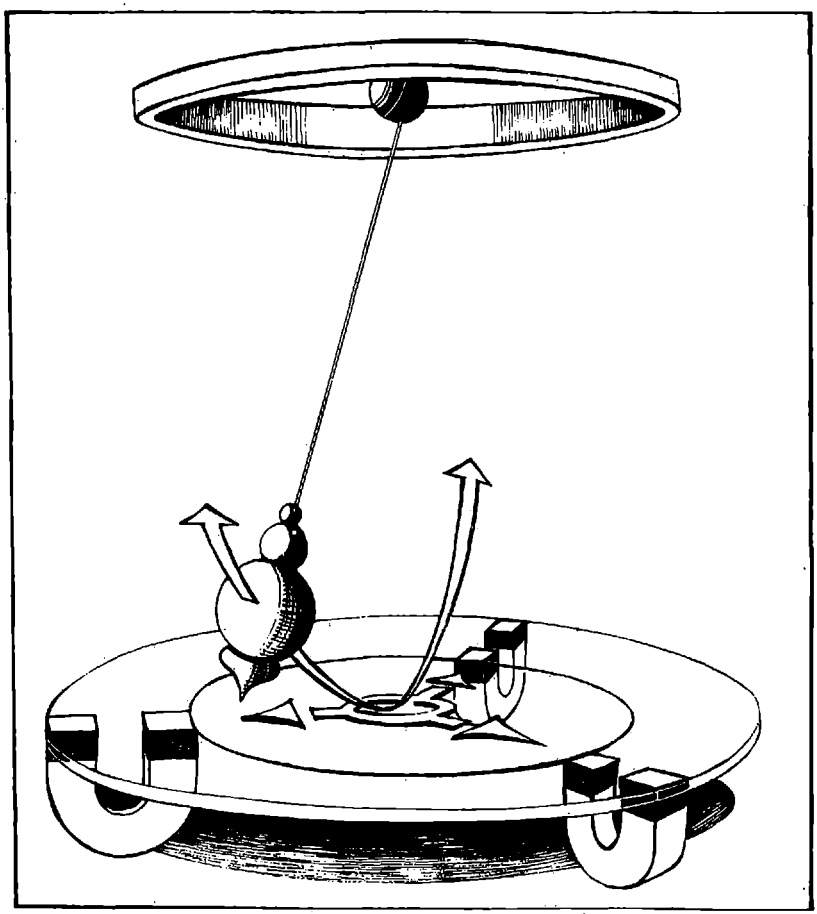






Il bacino di attrazione

I frattali appaiono spesso al confine fra differenti zone di attrazione. Immaginiamo di avere tre magneti fissati, disposti in modo da attrarre una sfera metallica che oscilla al di sopra di essi su un pendolo. La sfera sospesa oscillerà intorno per un po' prima di arrivare in una posizione di riposo al di sopra di uno dei magneti fissati. A volte si sposterà quasi subito verso una posizione stabile di riposo, altre volte prima di arrivarvi oscillerà molte volte da una zona all'altra.



Se coloriamo le zone di attrazione in nero, grigio e bianco, possiamo fare le seguenti osservazioni.

Fra il bianco e il nero c'è sempre il grigio.
Fra il nero e il grigio c'è sempre il bianco.
Fra il grigio e il bianco c'è sempre il nero.



In questo caso l'attrazione è di tipo fisico. Il pendolo è letteralmente attratto verso uno dei magneti. Esistono però molti attrattori di tipo più astratto. Quando la popolazione di una specie raggiunge un livello stabile, questo stato può essere pensato come un attrattore per quell'**ecosistema**. Ci sono molti altri attrattori, anche più strani, che competono per il controllo di spazi astratti.

Poincaré e la non linearità

Jules-Henri Poincaré, matematico, fisico e filosofo della scienza, mostrò come sia possibile raggiungere una comprensione più profonda del comportamento complesso dei sistemi dinamici grazie a modelli matematici semplici.

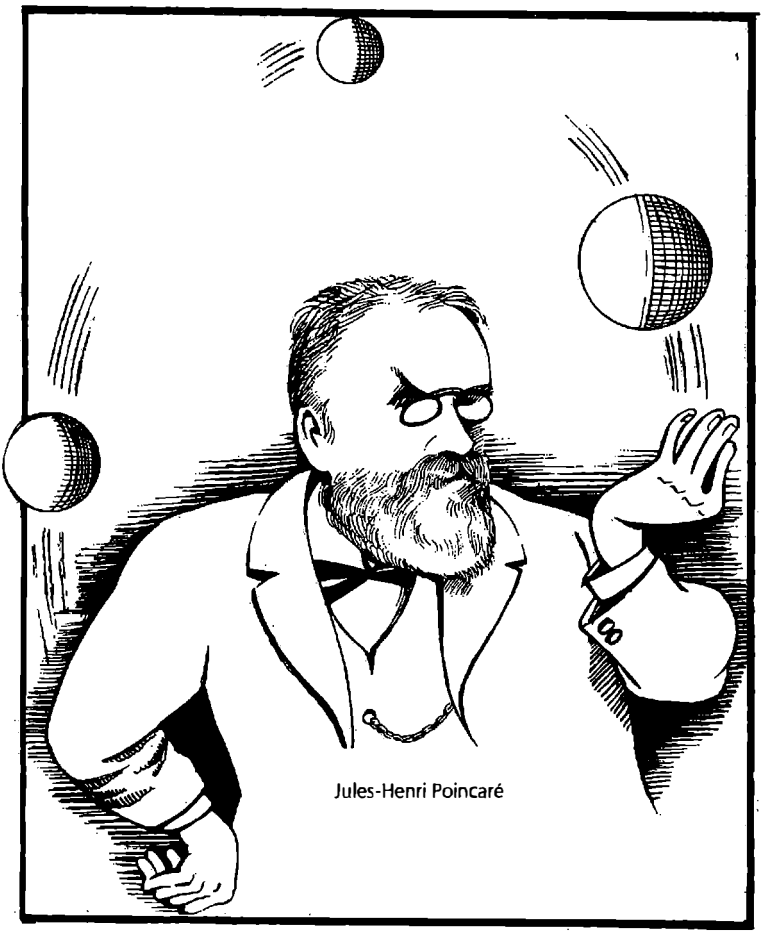
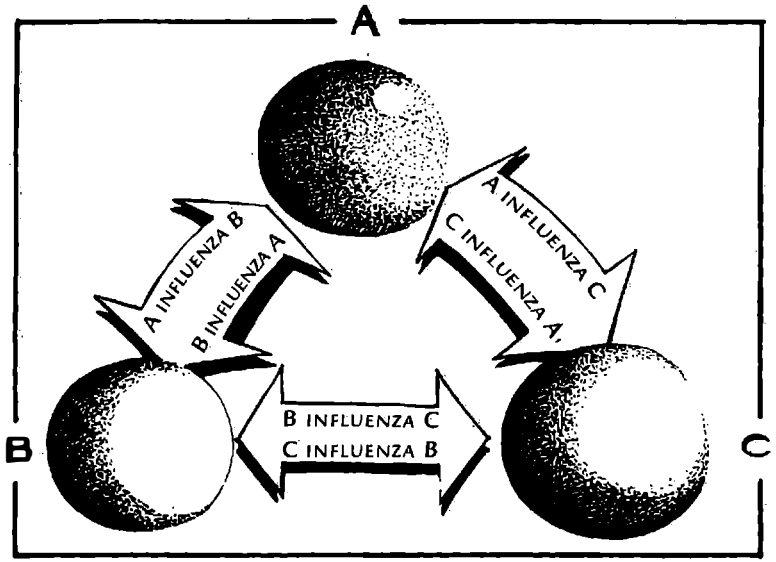
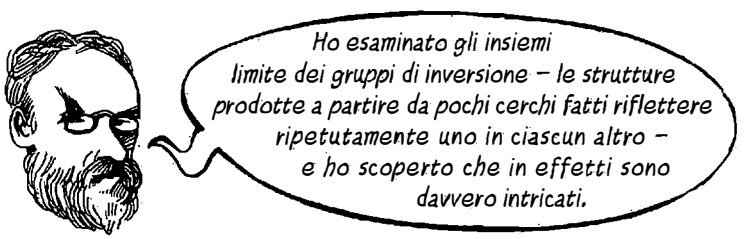


Figure come la curva di Koch e il triangolo di Sierpinski sono costruite analiticamente e intenzionalmente per ottenere le loro strane proprietà. Ciò che, invece, scoprì Poincaré all'inizio del XX secolo è che una classe di frattali emerge spontaneamente e inaspettatamente dalle equazioni non lineari.

Doveva però passare oltre mezzo secolo prima che la tecnologia facesse abbastanza progressi per rendere visibili questi frattali sullo schermo di un computer.

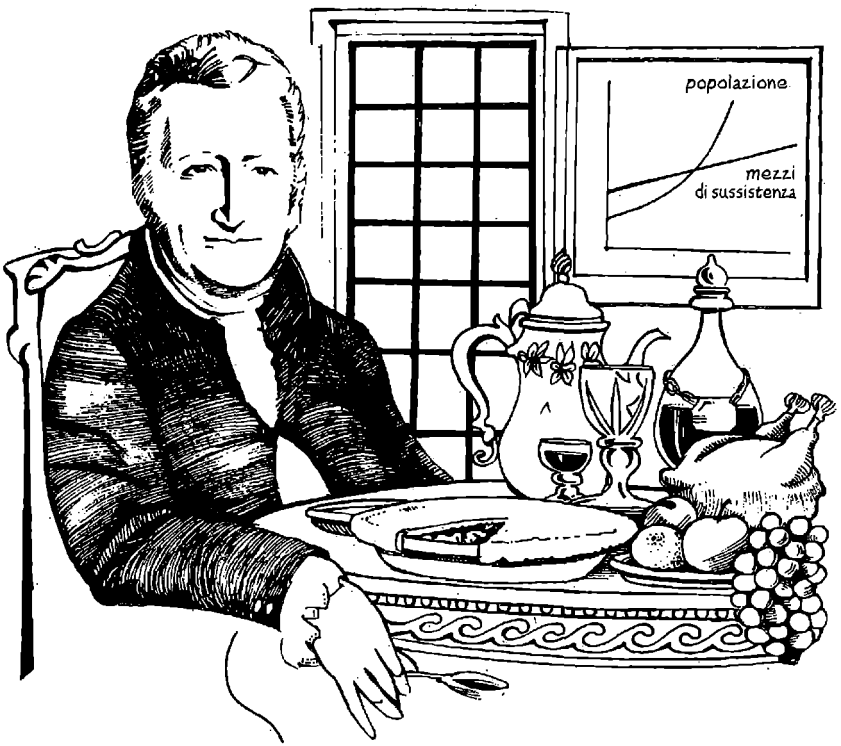
Poincaré guardava al mondo astratto delle "mappature", ma le sue possibilità di ricerca erano limitate dai mezzi tecnici a sua disposizione. Anni dopo, con un gran lavoro sulle calcolatrici tascabili, gli sforzi degli studiosi di ecologia e degli economisti per realizzare modelli dei sistemi reali portarono a queste stesse rappresentazioni.





Malthus e la crescita demografica

L'economista inglese **Thomas Malthus** (1766-1834) osservò che la popolazione umana cresceva con un tasso esponenziale, mentre la produzione alimentare cresceva solo in modo lineare.



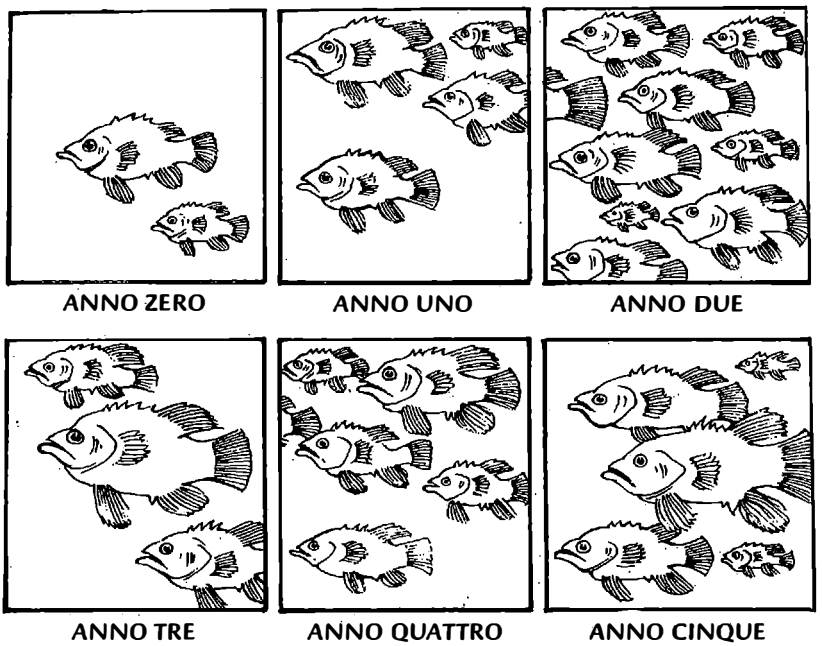
Ho previsto che il crescente divario fra la domanda e le risorse disponibili avrebbe condotto alla morte per inedia l'intero pianeta.

Questo modello demografico presenta molti punti deboli: in particolare, presuppone un tasso di crescita della popolazione costante e non contempla feedback negativi. In realtà, una volta che la popolazione ha raggiunto un certo livello, il tasso di crescita diminuisce e la crescita resta sotto controllo.

Feedback negativi

Negli anni Quaranta del XIX secolo, il matematico belga **Pierre-François Verhulst** (1804-1849) raffinò il modello di Malthus includendo un feedback negativo. Egli ipotizzò che la popolazione di una specie in un certo anno fosse una funzione semplice della popolazione nell'anno precedente.

Assumendo che il tasso di variazione fosse proporzionale alla differenza rispetto al massimo della popolazione, Verhulst ottenne un modello molto più realistico della crescita della popolazione. Questo modello prevede che, nelle giuste circostanze, essa arriverebbe a stabilizzarsi in uno stato di equilibrio.



Se la popolazione cala sotto un certo livello, tenderà ad aumentare l'anno successivo.

Invece, se aumenta troppo, la competizione per lo spazio e per le risorse tende a ridurla.

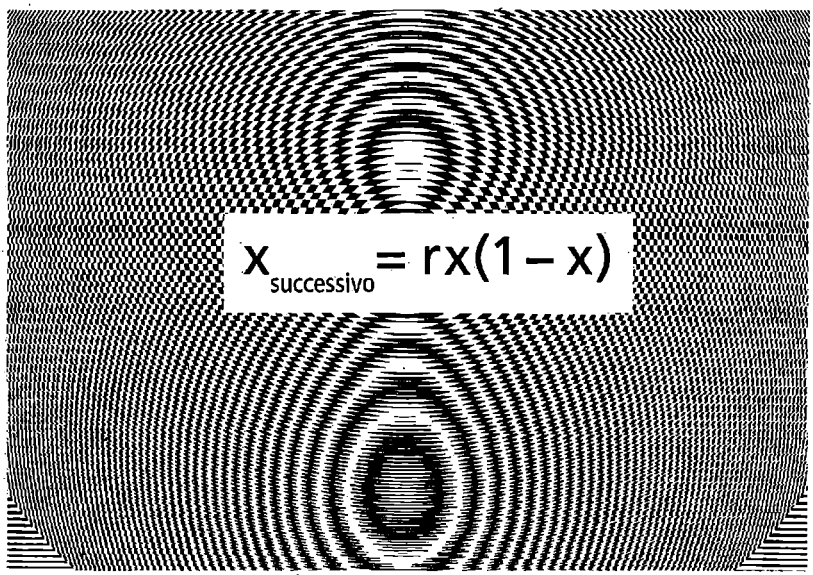
L'equazione logistica

La formula derivata da Verhulst è oggi conosciuta come equazione logistica. Il rinnovato interesse per questa equazione, negli anni Settanta del XX secolo, portò a una delle più belle scoperte di quella disciplina, allora allo stato embrionale, che sarebbe stata poi chiamata *teoria del caos*.

In effetti lo studio di semplici modelli di feedback aveva fatto pochi passi avanti dal tempo di Verhulst soprattutto perché, senza l'aiuto dell'elettronica, i calcoli necessari per sviluppare i modelli erano troppo lunghi e noiosi.

In sé, la formula di Verhulst è semplicissima, ma dato che bisogna continuamente ripetere il processo, alla fine, diventa estremamente complicata.

Se x è la popolazione attuale, la popolazione del prossimo anno è data da



dove r è una costante che può essere calibrata in base alla particolare popolazione di cui si vuole ottenere un modello di crescita.

Come abbiamo indicato, possiamo stimare la popolazione di una specie in un anno come funzione della densità di popolazione nell'anno precedente. Se siamo interessati, come lo sono gli ecologi, al comportamento dei sistemi a lungo termine, dobbiamo continuare a ripetere questa formula per vedere che cosa avviene via via. Questo processo è detto **iterazione**.

Iterazione

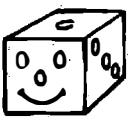
Iterare significa ripetere l'applicazione di una regola o di un passo di un **algoritmo**.

Un algoritmo è un insieme di regole per eseguire un calcolo complesso attraverso una sequenza di calcoli semplici, per esempio la moltiplicazione cifra per cifra. I programmi dei computer usano algoritmi.

È come un cane che si morde la coda. L'output di un'operazione diventa l'input di un'altra, e così via.

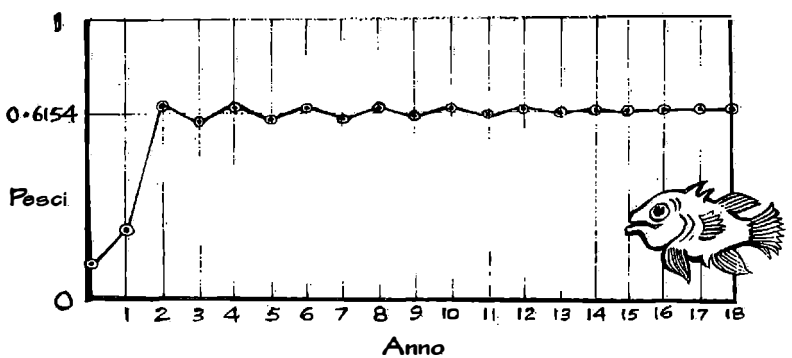
L'evoluzione è caos con feedback. Dio gioca a dadi con l'Universo, ma i dadi sono truccati. L'obiettivo della matematica e della fisica oggigiorno è scoprire quali sono le regole con cui i dadi sono stati truccati.

Joseph Ford, Georgia Institute of Technology



La cosa è più semplice se prendiamo valori di x compresi fra 0 e 1, in modo che 1 sia la popolazione massima dei pesci in uno stagno e 0 ne indichi l'estinzione.

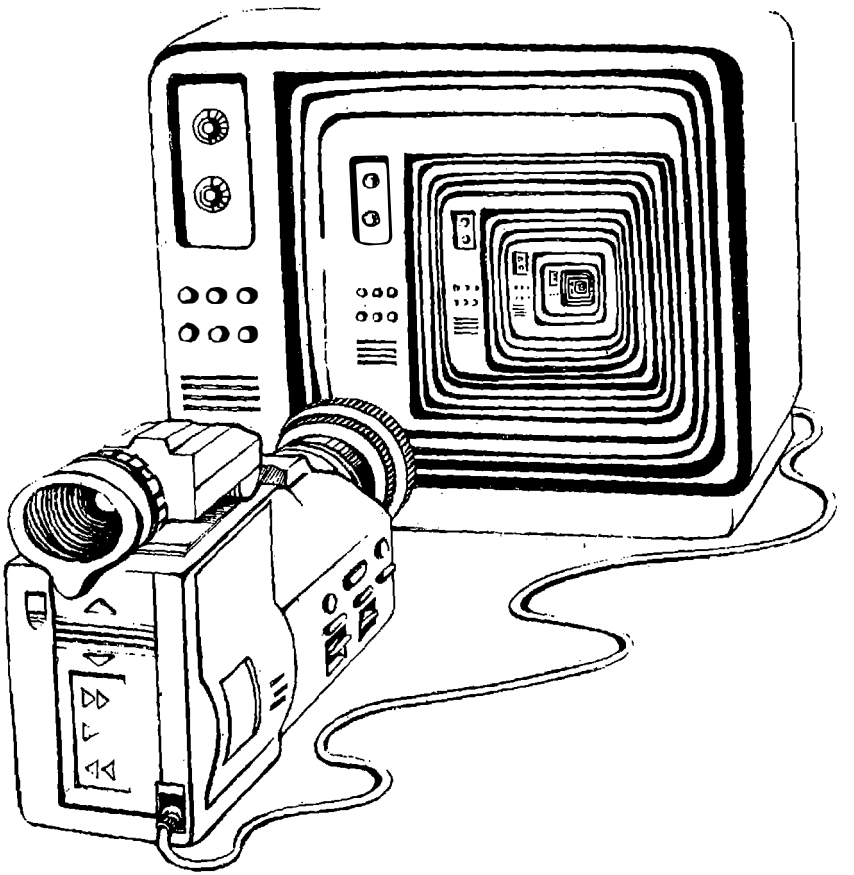
Supponiamo che $x = 0{,}2$. Allora $1 - x = 0{,}8$ e $x(1 - x) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$. Moltiplicando per 2,6 otteniamo 0,416.
Ora ripetiamo la procedura. Partendo con $x = 0{,}416$, otteniamo 0,6317: la popolazione dei pesci è in aumento.
Partiamo con $x = 0{,}6317$ e otteniamo 0,6049. La popolazione cala.
Partiamo con $x = 0{,}6049$ e otteniamo 0,6214. La popolazione è di nuovo in crescita.
Poi 0,6117; 0,6176; 0,6141; 0,6162; 0,6150; 0,6156; 0,6152; 0,6155; 0,6153; 0,6154; 0,6153; 0,6154; 0,6154; 0,6154.



La popolazione cresce e diminuisce, mantenendosi però attorno a un valore fisso.

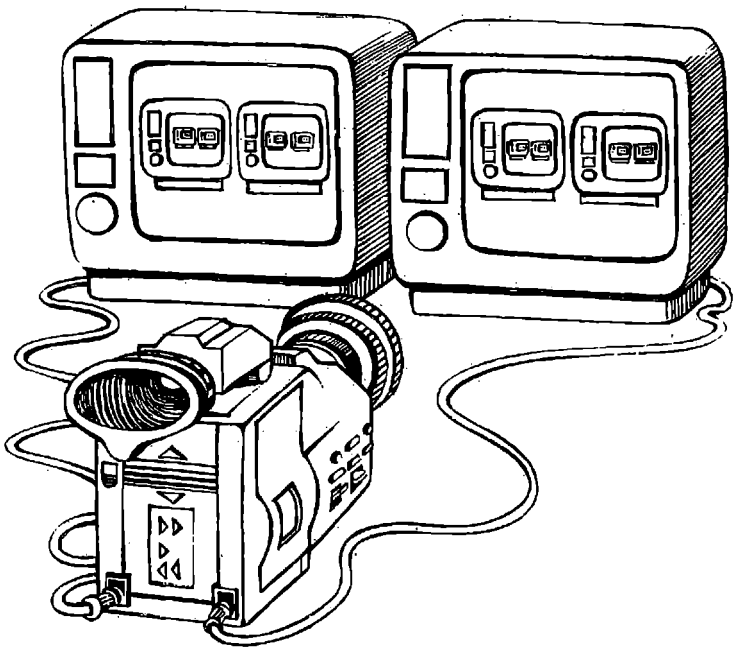
Video-feedback

Ecco un classico esempio di iterazione. Una telecamera punta verso lo schermo a cui è collegata, producendo l'immagine di una serie senza fine di schermi all'interno di altri schermi. Se ognuno è più piccolo di quello che lo precede, queste immagini alla fine svaniscono in un punto.



Questo punto è un **attrattore** per il sistema.

Come ha mostrato Barnsley, se si aggiunge un secondo schermo, ogni schermo ora ne mostra altri due, ciascuno dei quali ne mostra ancora altri due e così via. Gli schermi non sono più tutti uno nell'altro: l'insieme limite è ora molto più complicato.



Si tratta in effetti di un ***attrattore strano*** *che può racchiudere un'ampia varietà di forme frattali, incluso l'insieme di Cantor.*

Con più schermi, è possibile una varietà ancora maggiore: per esempio, il triangolo di Sierpinski ne richiede tre.

Robert May e il modello di Verhulst

Negli anni Settanta del XX secolo, **Robert May** fu uno degli intrepidi ecologi che, nei suoi tentativi di svelarne il mistero, tornò a rivolgere l'attenzione al modello di Verhulst. I matematici pensarono che fosse matto.



Per i matematici c'erano in serbo molte sorprese, che iniziarono a sgorgare da questo semplice iteratore quadratico.

Grazie a esso Robert May scoprì un'ampia varietà di differenti tipi di comportamento demografico. Il più semplice di tutti era l'**equilibrio stabile**. Come abbiamo visto nell'esempio a pagina 55, prendendo r = 2,6 la popolazione sarebbe rimasta in un equilibrio stabile a un livello fissato.

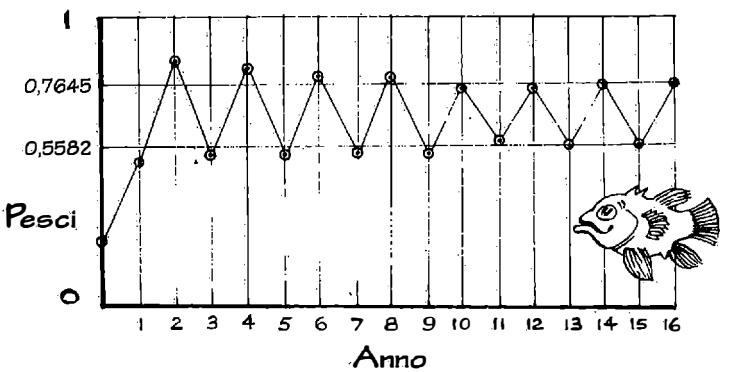
Punti di biforcazione

Ma May osservò poi che, se aumentiamo la sensibilità del sistema, succede qualcosa di strano: si hanno delle **oscillazioni**. Il sovrappopolamento in un anno è sovracompensato l'anno successivo, portando a una popolazione più bassa, che a sua volta prepara un boom a livelli superiori l'anno seguente, e così via.

Lo schema si ripete poi ogni due anni.



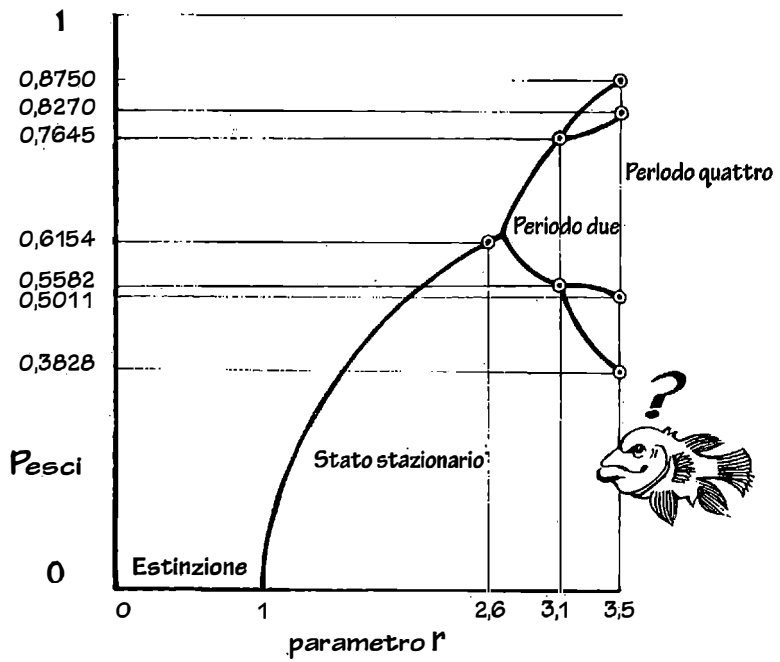
Si prenda r = 3,1 e si calcoli la popolazione ittica come abbiamo fatto in precedenza. Partiamo da x = 0,2. Il valore successivo è 3,1 × 0,2 × 0,8 = 0,496. Partendo da 0,496 otteniamo 0,7750 e quindi 0,5407; 0,7699; 0,5492; 0,7675; 0,5531, 0,7662; 0,5532; 0,7626; 0,5612; 0,7633; 0,5600; 0,7639; 0,5592; 0,7641; 0,5587; 0,7643; 0,5585; 0,7644; 0,5582; 0,7645; 0,5582; 0,7645. Lo schema non si stabilizza su un valore, ma su **due**. Si ripete ogni **due anni**.



Questa tendenza delle orbite stabili a scindersi in due in certi "punti di biforcazione" critici che rappresentano parametri di cambiamento di un sistema è nota come **raddoppio del periodo**. Un attrattore singolo si biforca e dà luogo a un ciclo di attrazione di periodo due.

La cascata del raddoppio del periodo

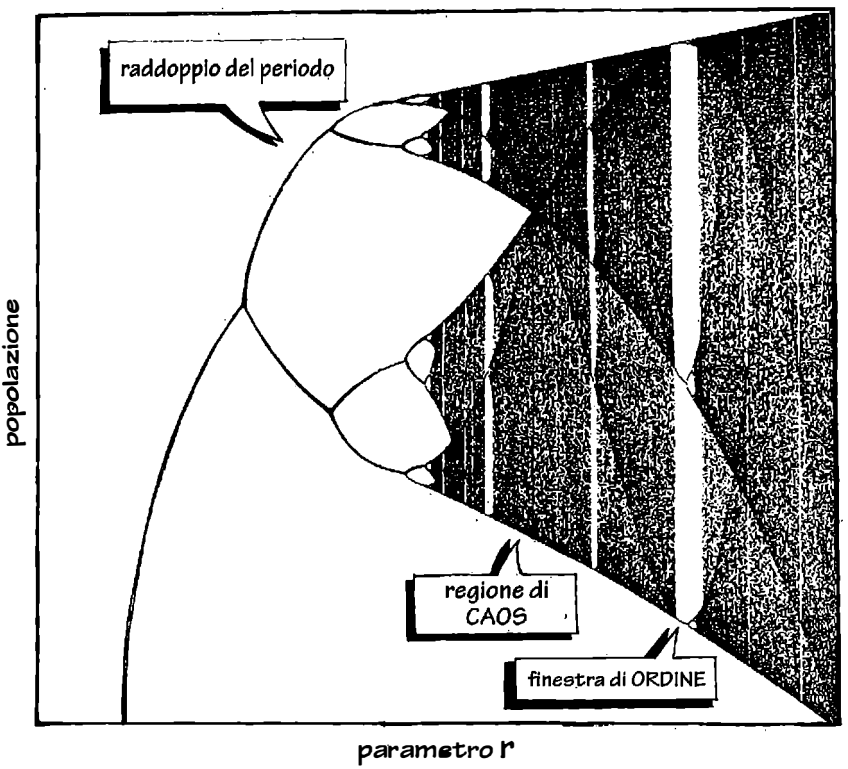
Finora abbiamo considerato r = 2,6 che dà un solo valore pari a 0,6154, e r = 3,1 che dà due valori: 0,5582 e 0,7645.
Proviamo ora con r = 3,5.
Partiamo, come prima, da x = 0,2.
Otteniamo: 0,56; 0,8624; 0,4153; 0,8499; 0,4465; 0,8649; 0,4088; 0,8459; 0,4562; 0,8675; 0,4026; 0,8418; 0,4661; 0,8710; 0,3933; 0,8352; 0,4817; 0,8738; 0,3860; 0,8296; 0,4948; 0,8750; 0,3830; 0,8271; 0,5004; 0,8750; 0,3828; 0,8270; 0,5011; 0,8750; 0,3828; 0,8270; 0,5011.



Ma la cosa non finisce qui. Aumentando ancora la risposta del sistema, si ottengono ulteriori biforcazioni. Il ciclo di periodo due cambia bruscamente in uno di periodo quattro. Ogni "ramo" della curva si dirama in altri due. Queste successive biforcazioni si verificano con velocità crescente, portando rapidamente a cicli di periodo otto, sedici, trentadue e così via...

L'albero dei fichi

Come per la freccia di Zenone, tali biforcazioni si avvicinano sempre più una all'altra, fino ad accumularsi in un punto detto "punto di Feigenbaum". Lì il sistema converge verso un ciclo infinito: non si ripete mai. Questo è ciò che i matematici chiamano orbita caotica. Questa struttura notevole è nota anche come "fig tree", o albero dei fichi, con un gioco di parole sul nome del suo scopritore Feigenbaum (in tedesco, *Baum* è albero e *Feigen* significa fichi).

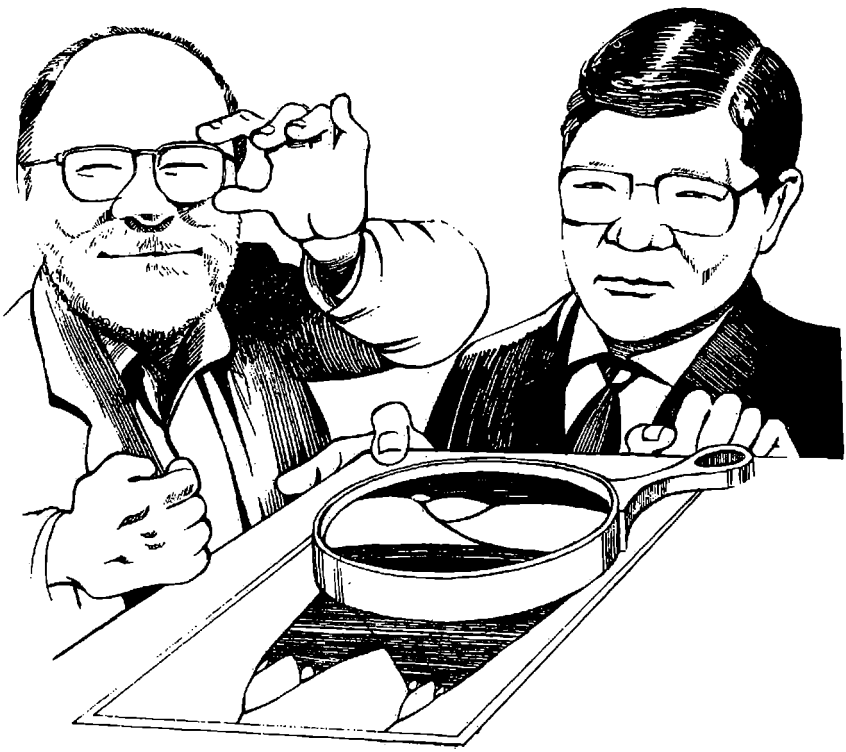


Questo ripetuto raddoppiamento è detto **cascata del raddoppio del periodo** e conduce al caos. Ma si è scoperto che nel caos si trovano i "semi" dell'ordine, perché si è dimostrata l'esistenza di finestre di comportamento periodico stabile nel "muro" del caos. La più ampia di queste finestre è rappresentata da un ciclo di periodo tre.

Possiamo mostrare una finestra di stabilità? Sì, ed è facile farlo utilizzando il diagramma di Feigenbaum.

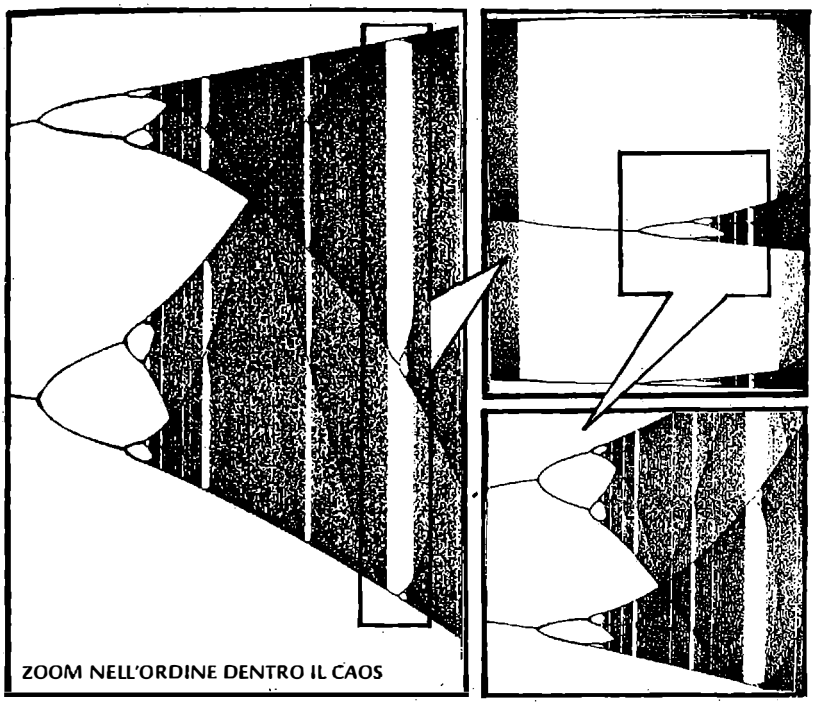
La teoria del caos e i frattali

L'articolo del 1975 di **Tien Yien Li** e **James Yorke** intitolato "Il periodo tre implica il caos" è il primo esempio di questo utilizzo del caos nella letteratura scientifica, e condusse poi alla creazione di una nuova disciplina, appunto la **teoria del caos**.



I risultati di Li e Yorke erano stupefacenti. Mostravano che qualsiasi sistema dinamico con un ciclo di periodo tre contiene anche cicli di tutti gli altri periodi. **Alexei Sarkowski** aveva già dimostrato il risultato principale in una forma più forte, ma dato che scriveva in russo il suo lavoro non aveva ricevuto la dovuta attenzione dalla comunità internazionale. Di fatto, Sarkowski aveva dimostrato l'esistenza di una sequenza magica, che è, in effetti, l'ordine in cui i differenti periodi si presentano sull'albero dei fichi.

Nacque così una nuova concezione del caos. Come la relatività, il principio di indeterminazione e il teorema di incompletezza di **Kurt Gödel**, la teoria del caos pone dei limiti alla nostra conoscenza. Dice che ci sono molte cose che non possiamo conoscere.

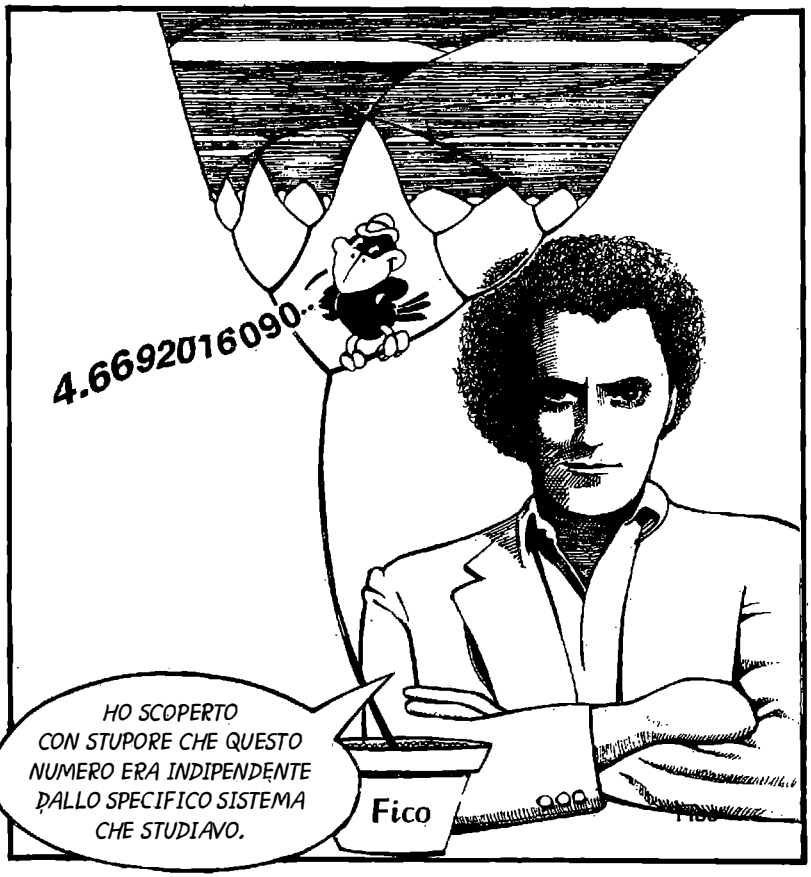


Tuttavia, la teoria evidenzia diversi aspetti positivi: implica, per esempio, che si possano ottenere cambiamenti enormi con uno sforzo minimo. I veicoli spaziali possono essere spinti nella direzione corretta applicando solo forze modeste. E perfino la vostra vita può essere radicalmente modificata da un piccolo sforzo di volontà al momento giusto.



La costante di Feigenbaum

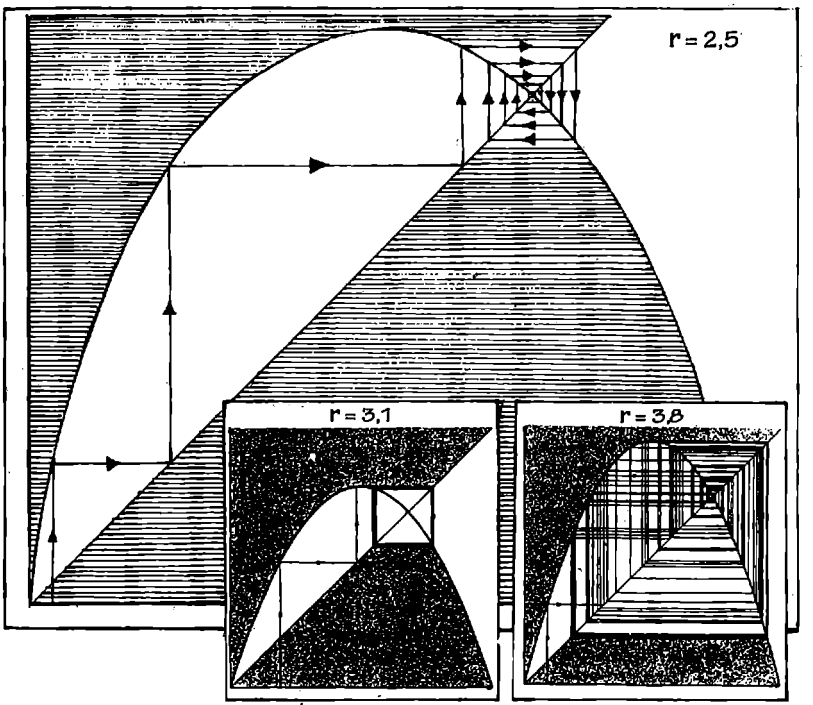
Studiando i problemi dell'iterazione e delle biforcazioni, nel 1977 **Mitchell Feigenbaum** mostrò che il rapporto delle distanze fra biforcazioni successive convergeva rapidamente a una costante: 4,66920160910...



Una significativa prova dell'importanza di questo risultato venne dal riscontro dello stesso preciso valore in diversi esperimenti fisici di laboratorio. L'universalità della cascata del raddoppio del periodo in matematica portò alcuni scienziati a predirne la presenza anche in natura. Molti, però, rimasero stupefatti quando la cascata iniziò a comparire in sistemi fisici differenti, dal feedback acustico al gocciolamento dei rubinetti che perdono. Il raddoppio del periodo iniziò a essere considerato un principio generale della natura.

Esempi di tali comportamenti nei fenomeni fisici erano stati trovati nei laboratori di tutto il mondo, e quando il tasso di raddoppio venne misurato, si osservò, esperimento dopo esperimento, un notevole accordo numerico con la costante di Feigenbaum: 4,6692016...

Il numero di Feigenbaum è un'autentica costante universale, altrettanto fondamentale quanto π (il rapporto fra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro: 3,141592654...). E si applica sia al mondo reale sia alle simulazioni al computer.



Compare in tutti i fenomeni naturali governati da un processo con feedback unimodale, cioè con una sola "gobba"

Nell'insieme di Mandelbrot è il rapporto fra i raggi di cerchi successivi sulla retta reale.

Numeri reali e altri numeri



Come ha detto Ian Stewart:
"La scoperta di Feigenbaum dell'universalità è un'arma a doppio taglio. Rende relativamente semplice testare una specifica classe di modelli caotici con un esperimento, ma non distingue fra i differenti modelli presenti in quella classe"

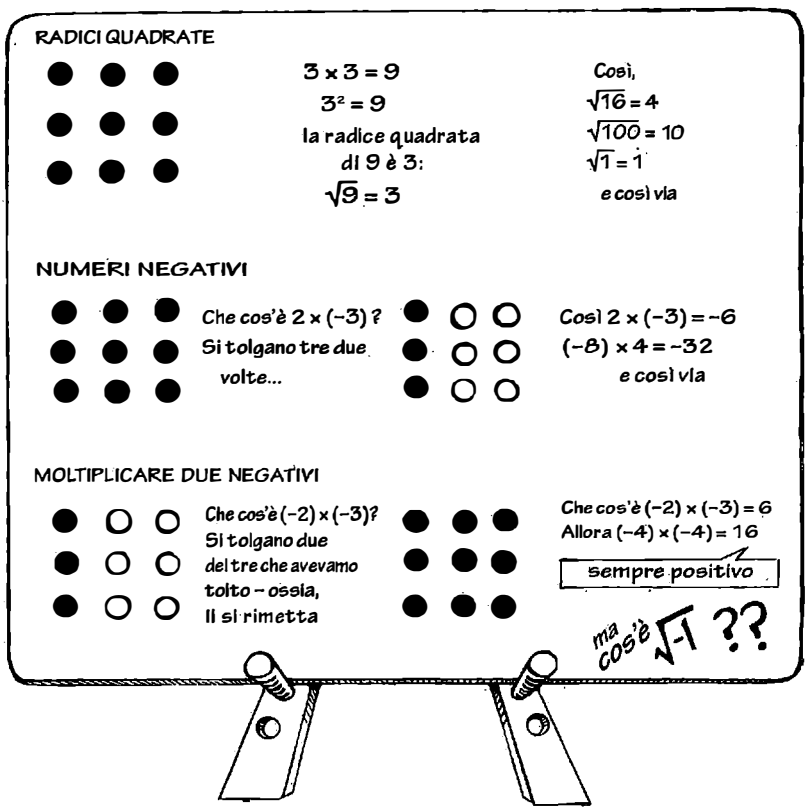
La scoperta di Feigenbaum si è rivelata solo un piccolo frammento di un quadro ben più ampio. Feigenbaum aveva considerato solo iterazioni dell'equazione logistica nel campo dei numeri reali.



Quando Mandelbrot estese il lavoro di Feigenbaum a questo dominio più vasto, apparve uno schema di straordinaria bellezza.

I numeri complessi

I numeri complessi sono generati considerando le radici quadrate dei numeri negativi. Non si tratta di qualcosa che incontriamo nella vita di tutti i giorni, non ci sono oggetti negativi nel mondo in cui viviamo. A meno di non pensare alla materia oscura! E non è possibile calcolare *realmente* la radice quadrata di un'entità negativa. O no?

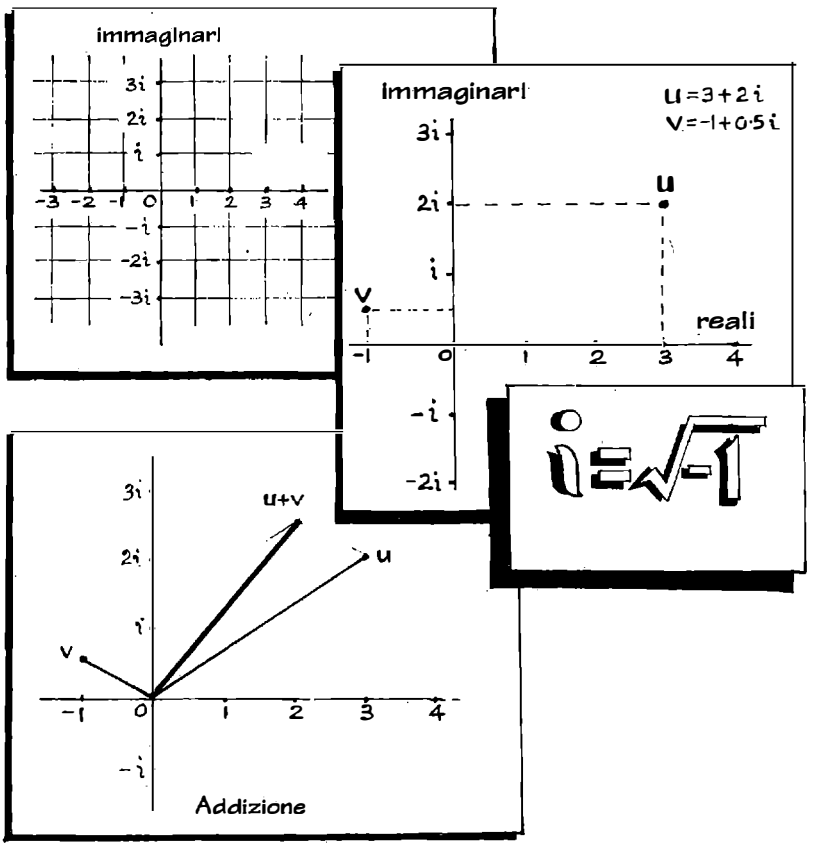


Bene, in matematica mentalmente lo si può fare considerando i numeri immaginari! La radice quadrata di –1 è rappresentata dalla lettera *i*. I numeri complessi sono stati concepiti come strumento per risolvere le equazioni cubiche ma forniscono, senza alcun ulteriore sforzo, soluzioni a qualsiasi equazione di qualsiasi ordine.

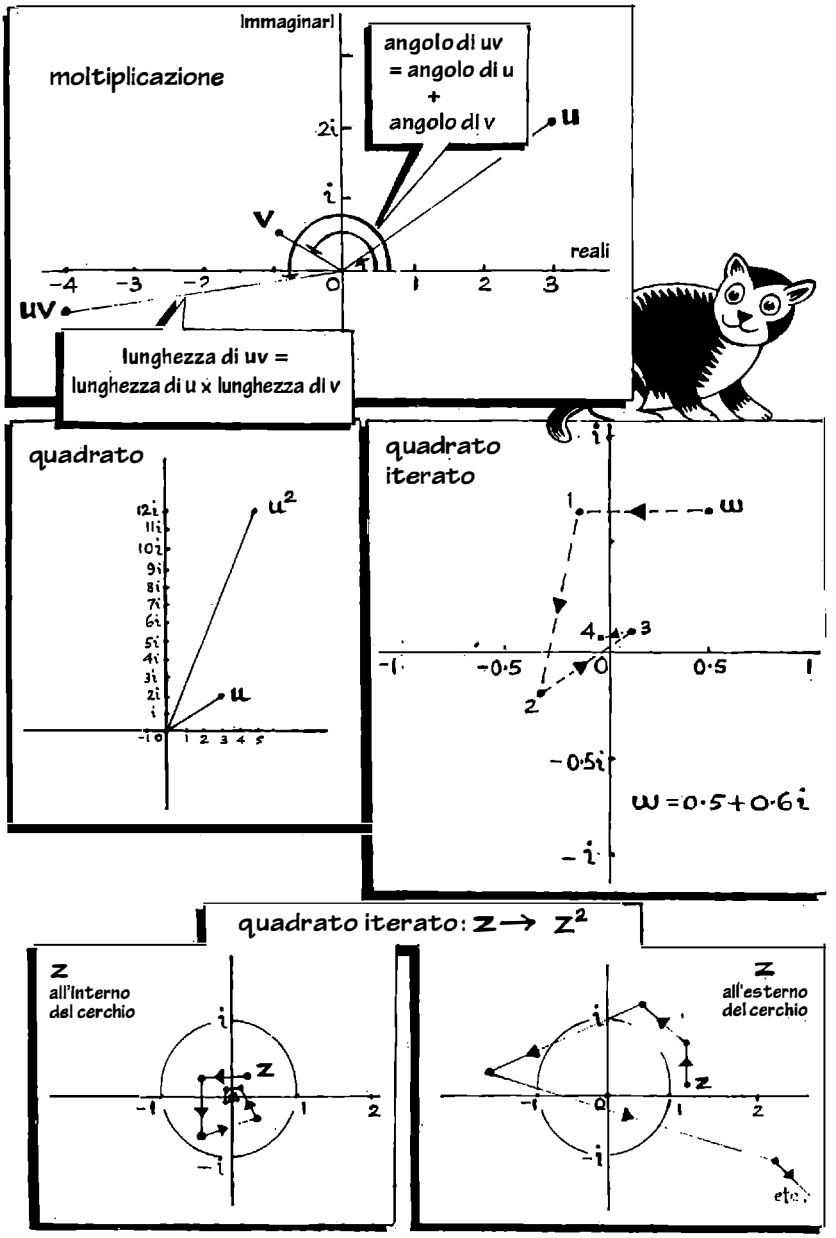
Essi esprimono schemi della realtà più profondi rispetto ai cosiddetti numeri "reali" I numeri complessi sono essenziali per la formulazione della meccanica quantistica e per la descrizione dei sistemi oscillanti. Vediamo ora come i numeri complessi sono collegati ai frattali.

Il piano complesso

Nel 1685 il matematico inglese **John Wallis** (1616-1703) escogitò un modo per rappresentare su un grafico i numeri complessi. I numeri immaginari erano disposti lungo una retta ortogonale alla retta dei reali, la "retta reale" Se rappresentiamo i numeri reali sull'asse ovest-est, gli immaginari giacciono sull'asse perpendicolare sud-nord passante per lo zero. In questo modo, si crea un sistema di coordinate, nel quale tutti i numeri reali si trovano su un asse e tutti i numeri immaginari sull'altro: un qualsiasi punto del piano è definito da una parte reale e a una immaginaria.



Le operazioni aritmetiche sui numeri complessi corrispondono alle trasformazioni geometriche nel piano complesso. L'addizione corrisponde alla traslazione, la moltiplicazione a una rotazione con un fattore di scala.



Se le equazioni nel piano complesso vengono iterate su un computer, appaiono forme degne di nota, come l'insieme di Mandelbrot.

Gaston Julia e Pierre Fatou

Durante la Prima guerra mondiale due matematici francesi **Gaston Julia** (1893-1978), un allievo di Jules-Henri Poincaré, e **Pierre Fatou** (1878-1929) studiarono la rappresentazione razionale del piano complesso.



Una trasformazione, o rappresentazione, del piano è una regola che, dato un punto del piano, fornisce un altro punto.

Può essere pensata come se si agisse contemporaneamente sull'intero piano…

sollevandolo, stirandolo, rigirandolo o torcendolo per poi appiattirlo di nuovo.

Julia e Fatou si concentrarono in particolare sul processo di iterazione. Il loro lavoro rimase sconosciuto a gran parte dei matematici dato che, senza i mezzi della moderna computer grafica, era quasi impossibile comunicare idee così astratte.

L'autosimilarità, per esempio, era ben nota a Julia e Fatou. Anche se le rappresentazioni studiate da Julia erano discrete, diverse analogie con i sistemi dinamici continui nascevano spontaneamente.



I repulsori creano bacini di attrazione. Per farsi un'idea di cosa sia un bacino di attrazione, si potrebbe pensare alla pioggia che, cadendo, trova la propria via dirigendosi verso un fiume o l'altro. Il confine fra i bacini idrografici può esser pensato come se fosse costituito da repulsori, che spingono via le gocce di pioggia. Questi confini, che si rivelarono molto complessi, sono oggi noti come "insiemi di Julia"

Julia e Fatou non videro mai effettivamente un insieme di Julia. La prima visualizzazione apparve in un articolo pubblicato nel 1925. Fu questa la cosa più simile agli oggetti matematici su cui così splendidamente lavorarono che ebbero mai occasione di vedere.

Wir gehen von zwei gleichseitigen Dreiecken $\Delta A_1 A_2 A_3$ und $\Delta A_1 A_4 A_5$ mit der Seite a aus, die an der Ecke A_1 aneinanderstoßen (Fig. 2). Sie bilden zusammen den geschlossenen polygonalen Zug $p_1 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, der die Ebene in 3 Bereiche teilt:

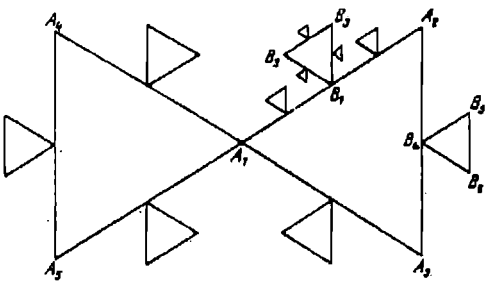


Fig. 2.

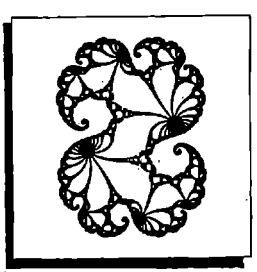
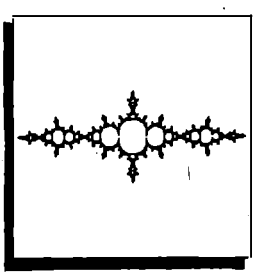
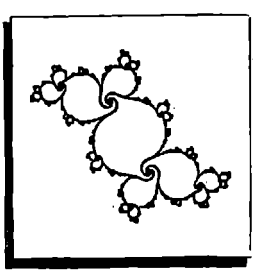
1. Das Innere von $\Delta A_1 A_2 A_3$: $\mathfrak{B}_1$.

2. Das Innere von $\Delta A_1 A_4 A_5$: $\mathfrak{B}_1'$.

3. Den Bereich $\mathfrak{B}_1''$, der den unendlich fernen Punkt enthält und vom ganzen polygonalen Zug p_1 begrenzt wird.

Ma fu solo con l'avvento degli odierni computer che gli insiemi di Julia poterono essere visti in tutta la loro magnifica complessità e in tutti i dettagli.

Tuttavia, dietro l'apparente diversità degli insiemi di Julia, si nascondeva un potente principio unificatore che aspettava solo di essere scoperto. Una chiave che avrebbe aperto porte che custodivano misteri mai rivelati. Un drago dormiente. Solo una persona era abbastanza spregiudicata per scoprirlo.

Benoît Mandelbrot

Mandelbrot era nato a Varsavia nel 1924 da una famiglia relativamente benestante. Il padre era un affermato commerciante di abiti e la madre un'apprezzata dentista. Erano ebrei lituani. Quando Benoît aveva dodici anni, la famiglia aveva avuto l'accortezza di abbandonare la Polonia: tetra e opprimente, la persecuzione incombeva su di loro. Parigi divenne dunque la loro meta.



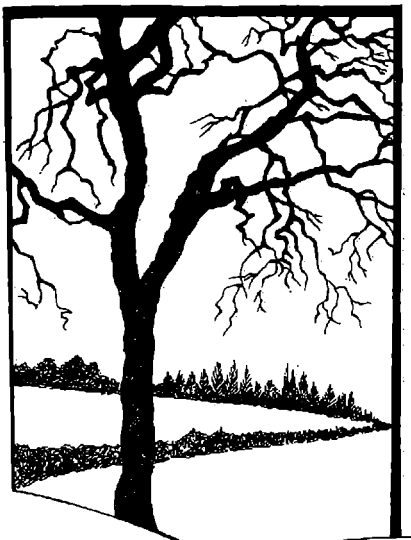
A Parigi avevano parenti e amici che li aiutarono a trovare casa e lavoro.

Zio Szolem

A Parigi c'era anche lo zio di Benoît, Szolem Mandelbrot, fratello minore del padre. Per quanto difficile e doloroso, il trasferimento ebbe conseguenze durature e positive su Benoît. Lo zio, matematico, lo prese sotto la propria ala protettiva. "La matematica è un organismo vivente che mi venne rivelato da bambino da mio zio Szolem. Si può dire che mio zio e mio padre combatterono per la mia anima", ricorda Mandelbrot.

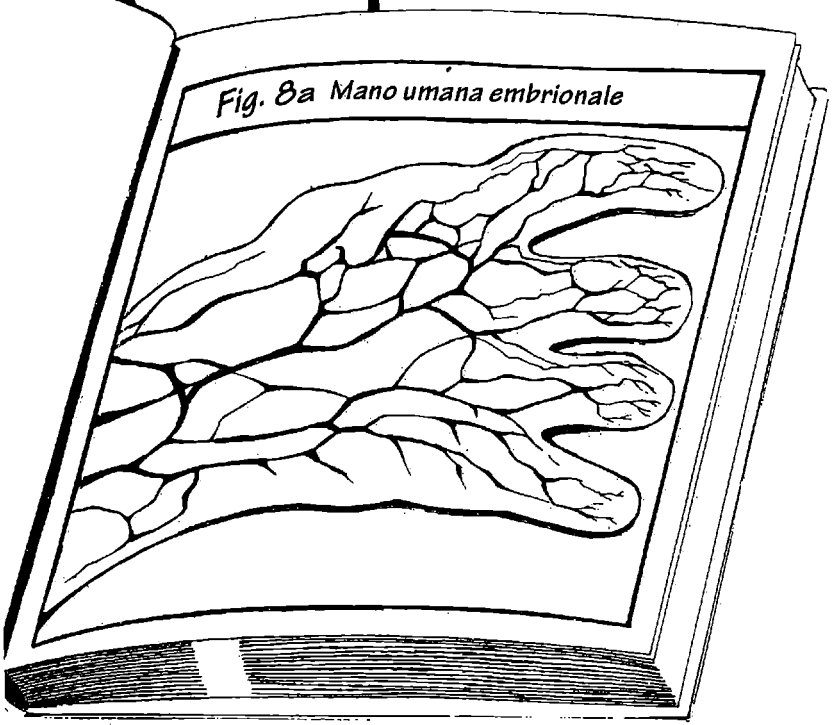


Un'educazione pratica



Quando Parigi cadde in mano ai nazisti nel 1940, i Mandelbrot fuggirono a sud. Benoît divenne apprendista presso un fabbricante di utensili, seguendo la scuola in modo irregolare e discontinuo. Non padroneggiava bene né l'alfabeto né le tabelline, ma la sua educazione pratica gli consentì di apprezzare le forme che si incontrano nel mondo reale.

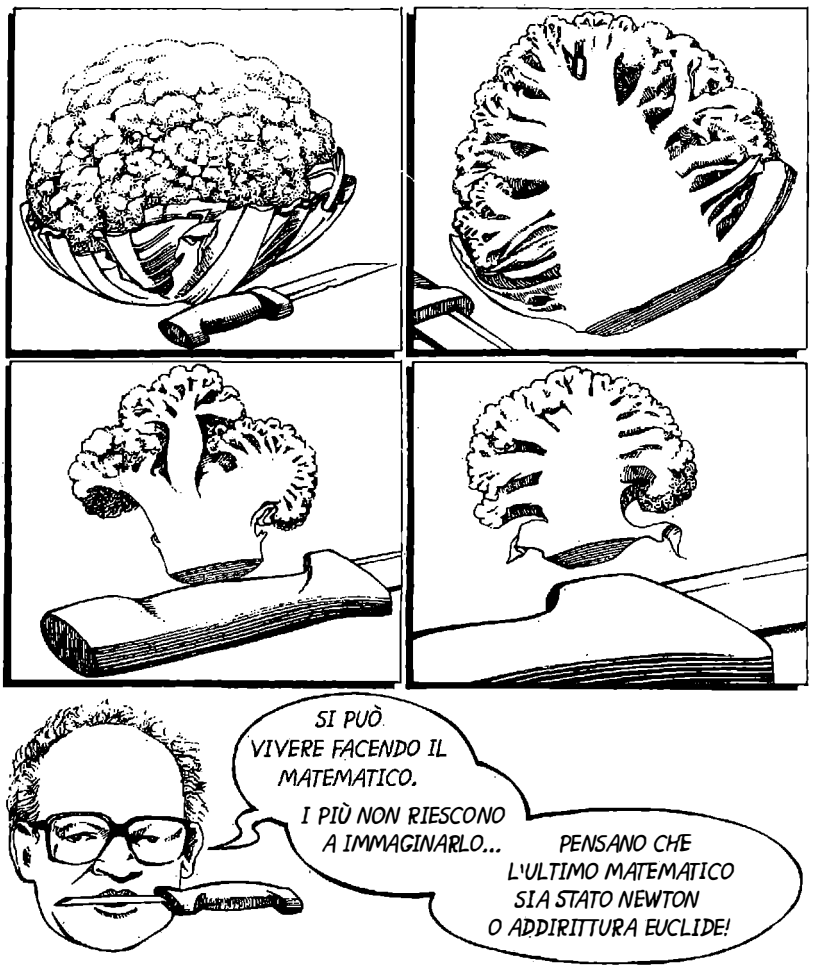
D'inverno gli alberi spogli somigliano agli estuari dei fiumi e ai disegni anatomici del sistema circolatorio umano.



La forma delle cose

Ad affascinarlo particolarmente era il cavolfiore.
Notò che quando se ne stacca un ramo, la piccola parte ottenuta somiglia al cavolfiore intero.

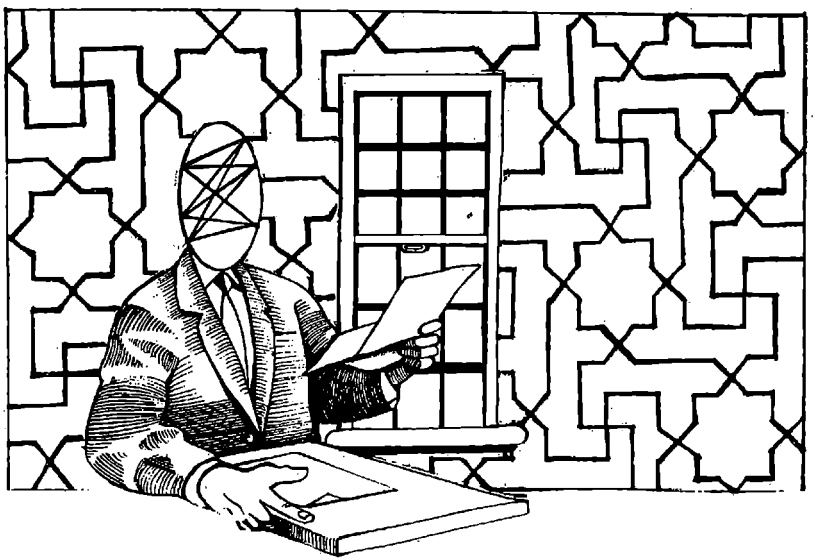
Benoît si accorse così che poteva continuare a staccare rametti via via più piccoli e che, fino a un certo punto, questi continuavano ad apparire come versioni via via più minute dell'intero vegetale.



Ben presto Mandelbrot capì che sarebbe potuto essere un matematico. Grazie allo zio Szolem, sapeva che quella poteva essere una vera occupazione.

Tornato a Parigi alla fine della guerra, Mandelbrot affrontò – e superò – senza alcuna preparazione formale i difficili esami di ammissione all'università. Nella parte dei test dedicati alla matematica – esercizi di algebra e di analisi con integrali – riuscì a nascondere le sue carenze grazie alla sua intuizione geometrica.

Egli aveva compreso di avere la capacità di vedere con gli occhi della mente la "forma" di un problema di analisi.



Data una forma, poteva trovare il modo di trasformarla, alterandone le simmetrie e creando una differente armonia. Spesso queste trasformazioni conducevano direttamente alla soluzione di problemi di chimica o di fisica. Ma dove non era possibile usare la geometria non se la cavava così bene. Ragionando a casa su queste prove d'ammissione, Benoît comprese che esisteva una "matematica degli occhi": la visualizzazione di un problema era un metodo di risoluzione valido quanto ogni altro. Non senza sorpresa, scoprì di essere assolutamente l'unico a sostenere questa idea.

La burla di Bourbaki

In Francia l'insegnamento della matematica era dominato da un gruppo di matematici d'impostazione piuttosto rigida e austera che si celava sotto lo pseudonimo di "Bourbaki", nome di un generale francese del XIX secolo. In effetti si trattava di una burla: il nome piaceva a quei matematici perché aveva un suono esotico e attraente. Il gruppo Bourbaki si riuniva in segreto e giunse a influenzare notevolmente il pensiero matematico non solo in Francia, ma in tutta Europa.



Le immagini erano considerate qualcosa di inadeguato e non confacente alla rarefatta purezza della matematica. Le immagini, affermava Bourbaki, avrebbero potuto portare fuori strada un matematico. Mandelbrot era incapace di confrontarsi con questo tipo di pensiero. Bourbaki rappresentava tutto ciò che egli aborriva e che cercava affannosamente di evitare. Con la sua matematica – la sua geometria – voleva spiegare il mondo "reale" Aspirava a una descrizione della natura e dei suoi processi.

Di nuovo in giro

Si sposò, e per sfuggire alla gelida morsa di Bourbaki si trasferì negli Stati Uniti. Probabilmente, senza l'insopportabile formalismo di Bourbaki contro cui lottare, lo spirito inquieto di Mandelbrot non si sarebbe espresso e noi saremmo ancora in attesa dell'insieme di Mandelbrot e della geometria frattale!

La soffocante gabbia sull'immaginazione matematica allontanò Mandelbrot dall'accademia; scelse invece di lavorare alla IBM, a New York.



Più ce n'è, meglio è

L'IBM diede a Mandelbrot i fondi, le strutture, un gruppo di ricerca (che comprendeva Richard Voss) e la tranquillità mentale per lavorare. I vertici della IBM, va detto, avevano una visione molto diversa dall'*establishment* che dominava il mondo accademico. Guardando indietro, Mandelbrot doveva osservare…

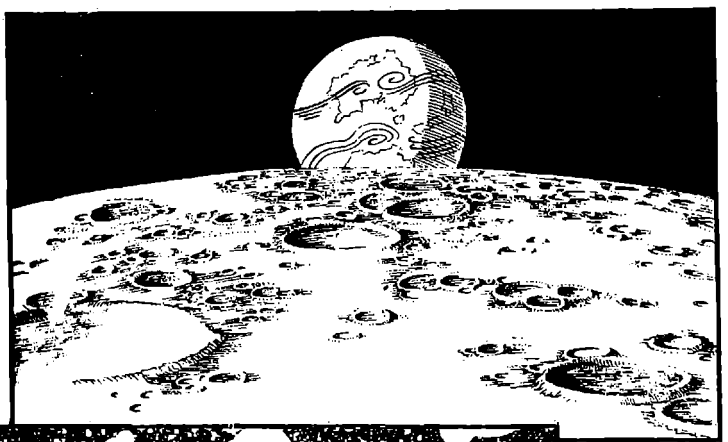


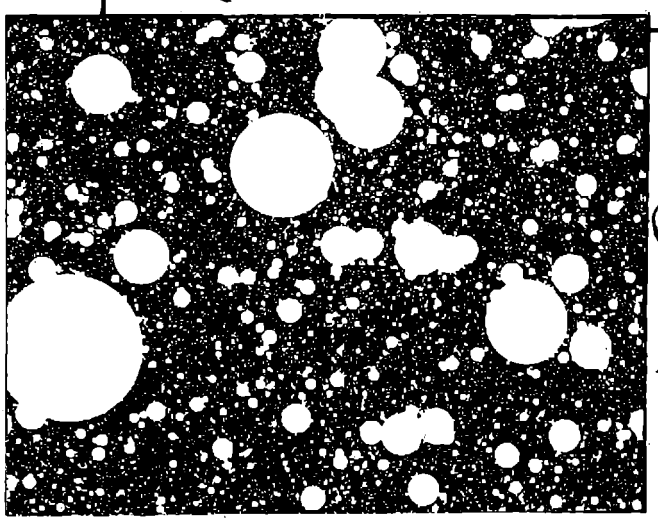
L'emergere di strutture

Traendo ispirazione da matematici indipendenti come Richardson e dagli scritti di altri matematici salvati dal cestino della carta straccia, Benoît Mandelbrot gettò le fondamenta di una nuova scienza della geometria frattale.

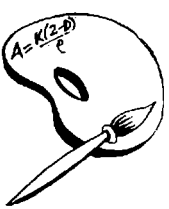
Dalle cataratte del Nilo alla distribuzione dei crateri sulla Luna, dovunque guardasse, vedeva emergere le stesse strutture.

Forme come l'insieme di Cantor e la curva di Koch, per niente eccezionali, sono in realtà presenti ovunque nel mondo fisico.





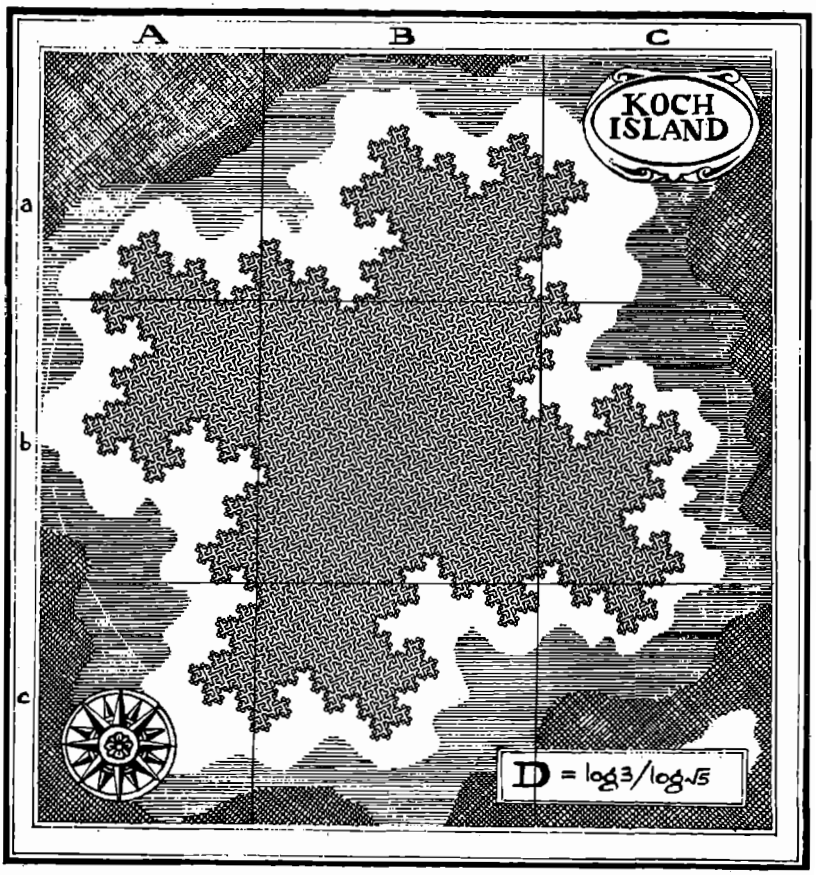
A sinistra, particolare della simulazione matematica di strutture di cratere.



I frattali nella pratica

Varianti dell'insieme di Cantor si trovano dappertutto, dalla frequenza delle parole e delle lettere in una lingua ai disturbi sulle linee telefoniche, mentre la curva di Koch costituisce un modello delle linee di costa reali. Come scrisse Mandelbrot nell'introduzione al suo fondamentale libro *The Fractal Geometry of Nature* del 1977...

Il numero di scale di lunghezza distinte delle strutture naturali è, a tutti gli effetti pratici, infinito.

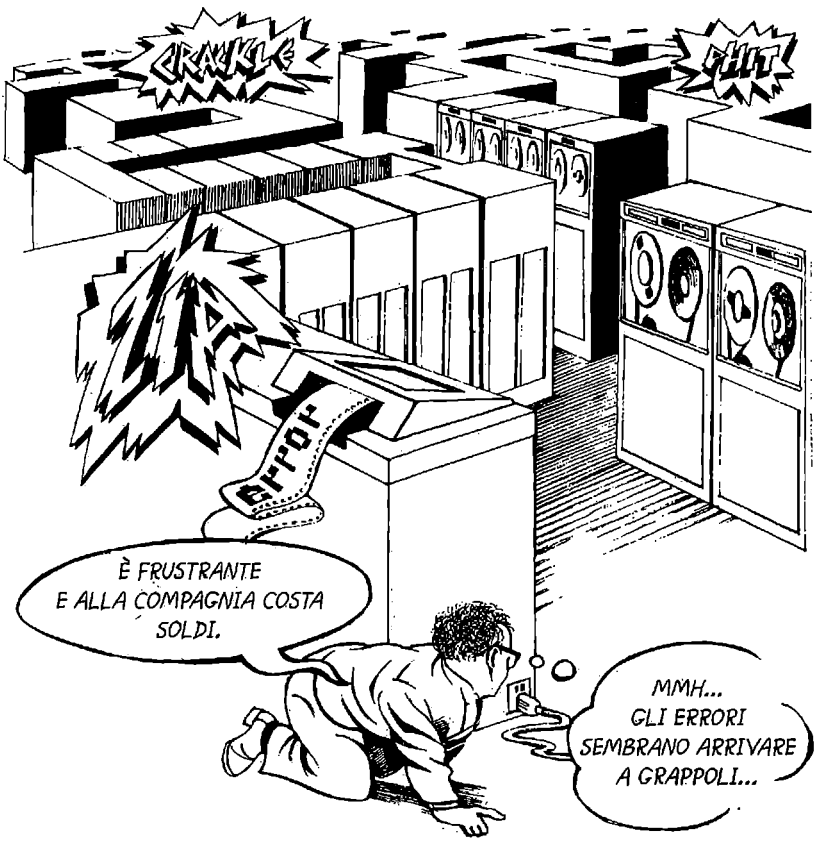


Contraffazione frattale di un'isola

La geometria frattale è di fatto una geometria degli aspetti pratici, per così dire delle viti e dei bulloni che compongono il mondo reale.

Interferenze

Proprio agli inizi della sua carriera alla IBM, Mandelbrot si trovò ad affrontare un problema pratico che coinvolgeva e preoccupava i dipendenti. Quando, all'interno della compagnia, i dati passavano da un computer all'altro, alcuni di essi venivano persi o risultavano corrotti da disturbi che si manifestavano in modo casuale e di cui non ci si riusciva a liberare, soprattutto perché non era facile prevederli.



Mandelbrot applicò la sua matematica e affrontò il problema in un modo completamente nuovo.

Errori frattali

La soluzione di Mandelbrot non aveva senso per gli ingegneri della IBM, ma dovettero ammettere che la matematica prevedeva che non fosse possibile calcolare il tasso medio di errori per qualsiasi periodo di tempo.



L'IBM diede fiducia all'approccio di Mandelbrot e riprogettò il suo sistema per far fronte agli errori. Introdusse così un certo livello di ridondanza nel sistema al fine di eliminare le interferenze. La matematica aveva ragione: con il suo ausilio, Mandelbrot riusciva a spiegare le sue osservazioni.

L'emergere di un principio generale

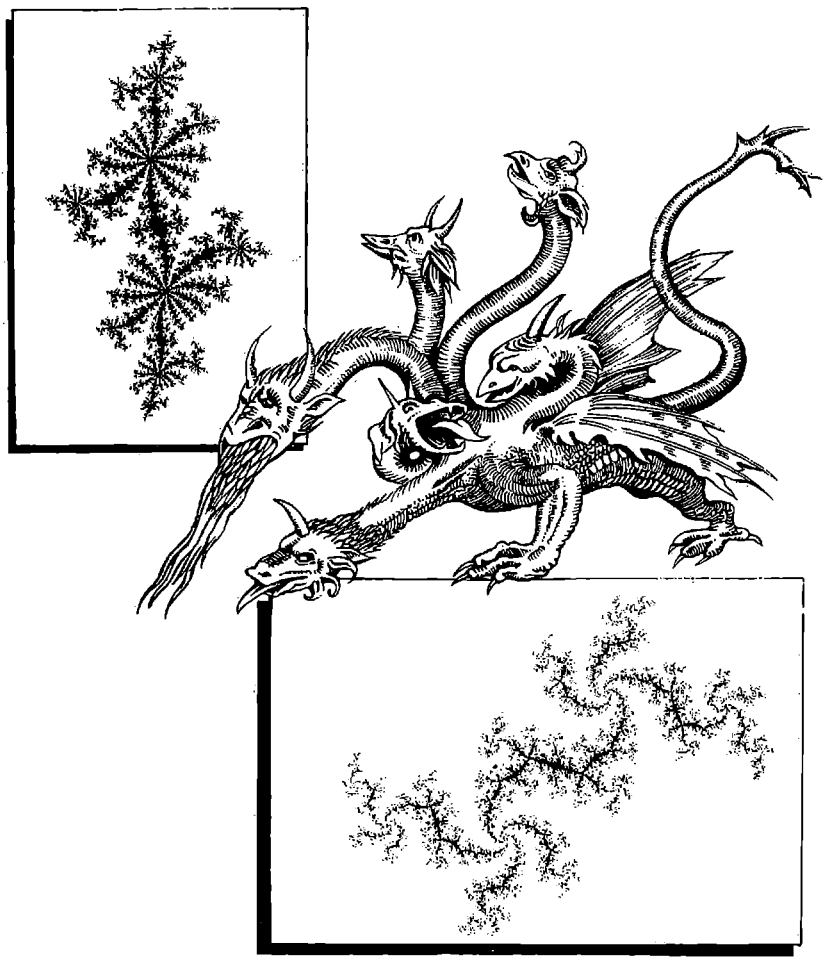
È il principio che soggiace alla dinamica non-lineare. Mandelbrot aveva iniziato a comprendere e a spiegare matematicamente come funzionano le cose nel mondo reale. Aveva percepito la forma sottostante delle cose, l'ordine nascosto.



La trasformazione più semplice possibile

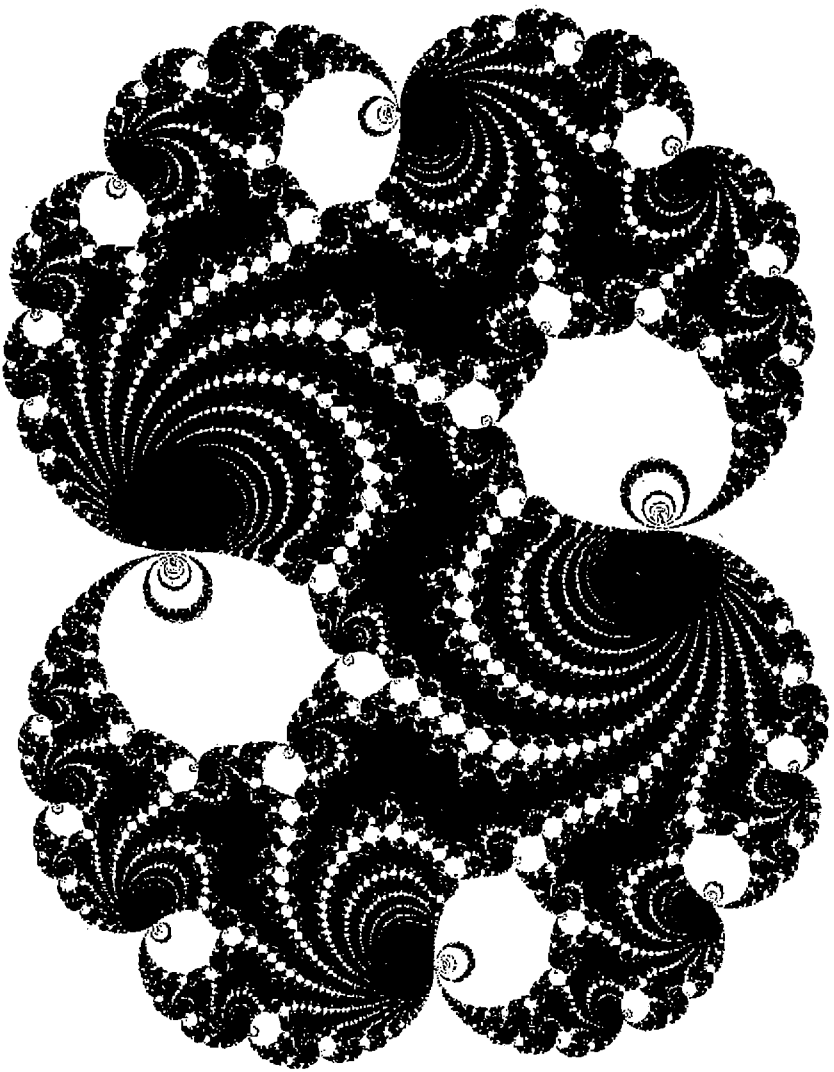
Mandelbrot iniziò a interessarsi all'insieme di Julia della trasformazione più semplice possibile: $z \rightarrow z^2 + c$. Questa formula fornisce una regola per ottenere un numero complesso da un altro, ossia mappa il piano complesso su se stesso.

L'effetto di questa mappatura è quello di tagliare il piano e di avvolgerlo su se stesso mentre lo si stira via dal cerchio unitario.



Mandelbrot chiamò gli insiemi di Julia generati da questa formula "curva del dragone"

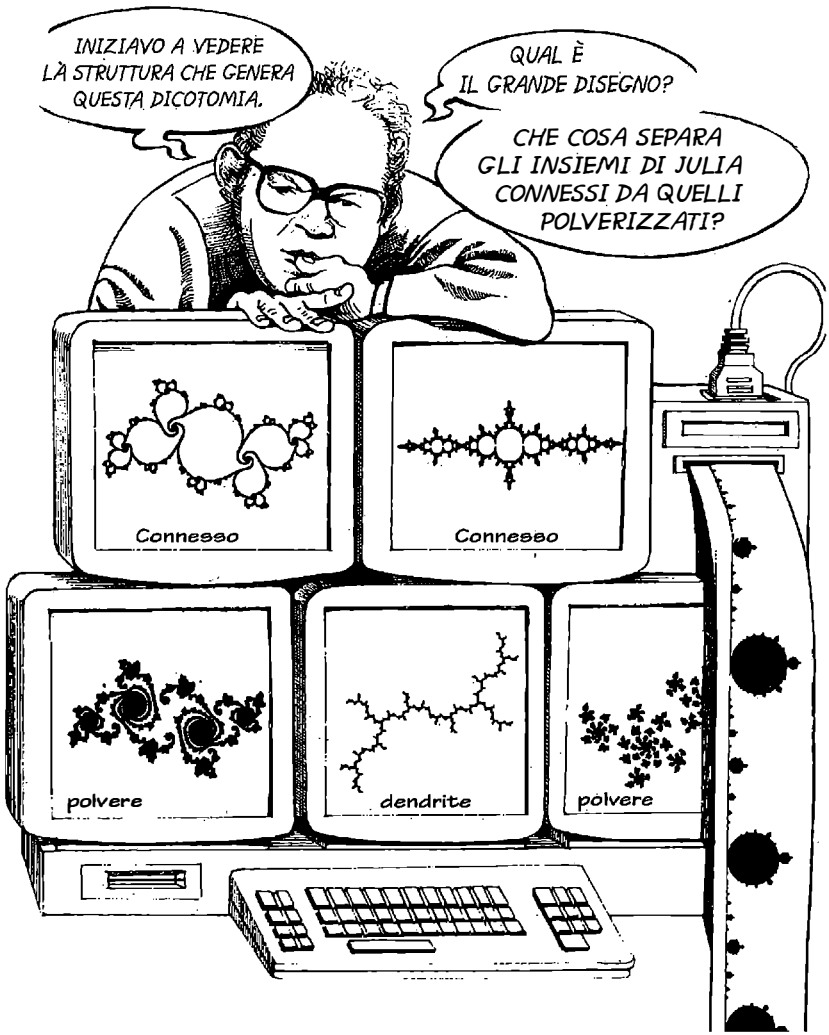
Gli insiemi di Julia di questa rappresentazione dipendono solamente dal valore del parametro c. Quando c è piccolo, sono semplici cappi, come cerchi ritorti su se stessi. Per valori grandi di c, il frattale è formato da un'innumerevole quantità di punti discreti distribuiti come una polvere.

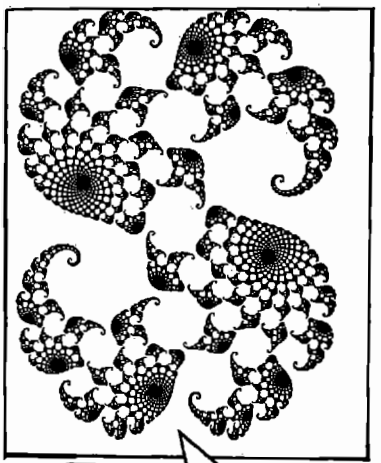


Due tipi di insiemi di Julia

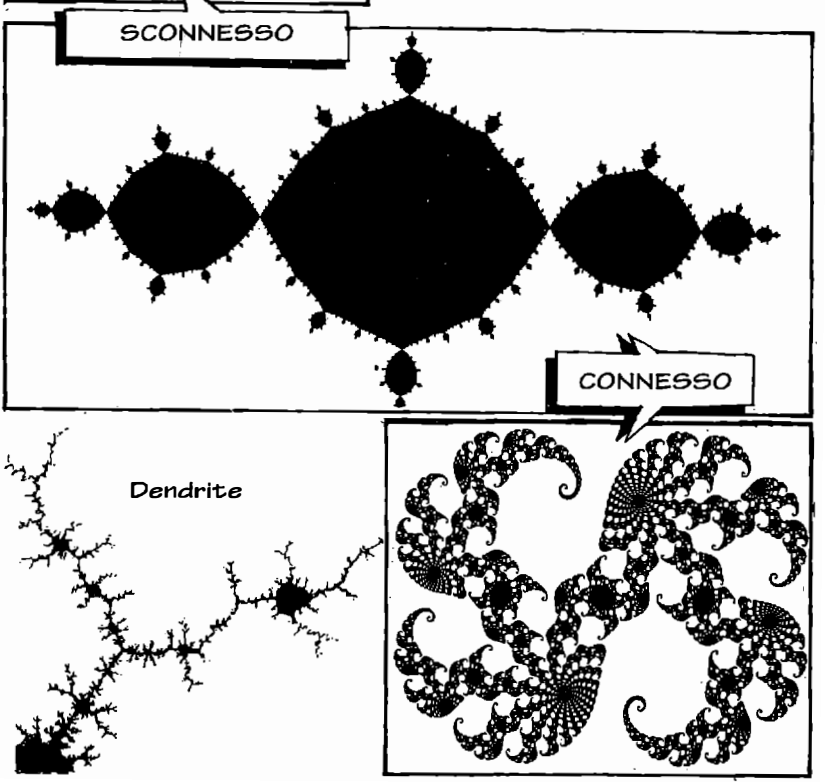
In generale, gli insiemi di Julia possono essere suddivisi in due tipi o varietà. Possono essere totalmente **sconnessi**, come la polvere, o completamente **connessi**. Nel primo caso, gli insiemi sono topologicamente identici al classico insieme di Cantor.

Ciascuno degli insiemi di Julia connessi, d'altro canto, consiste in una successione di linee: a volte una singola curva chiusa, a volte cappi all'interno di cappi all'interno di cappi, e di tanto in tanto, un dendrite.





Sul confine fra queste due regioni ci sono gli insiemi di Julia dendritici, formati esclusivamente da linee che continuano a ramificarsi e che presentano una connessione minima: l'eliminazione di un solo punto li spezzerebbe in due.



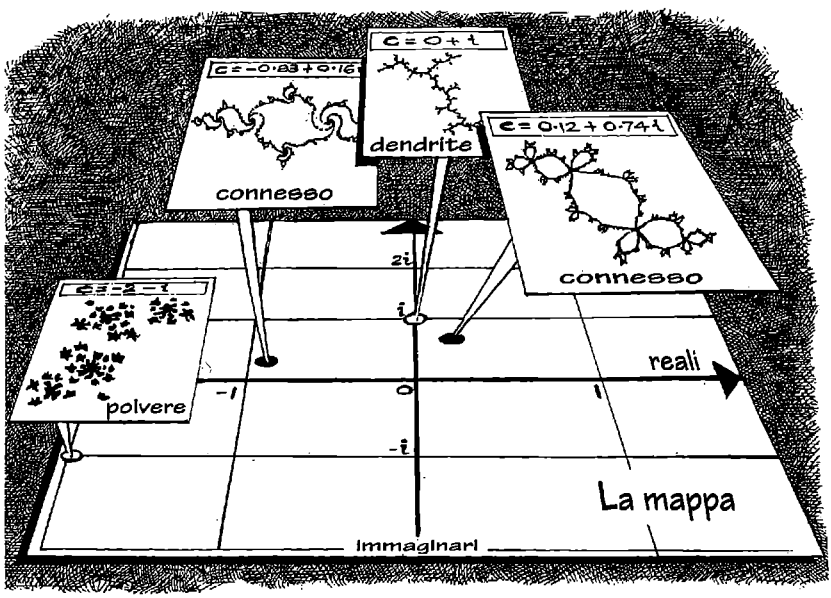
Con il suo gruppo di lavoro passò molto tempo a sfornare insiemi di Julia. "Era un divertimento straordinario!"

Una mappa degli insiemi di Julia

Nel 1980, Mandelbrot decise di tracciare una mappa che raffigurasse questo comportamento. Sulla mappa segnò un punto in nero se l'insieme di Julia in quella posizione era connesso, lasciando invece bianchi i punti ove l'insieme era sconnesso. Così definì l'insieme di Mandelbrot: l'insieme di Mandelbrot è l'insieme dei punti *c* per i quali l'insieme di Julia di $z \rightarrow z^2 + c$ è connesso.

Se *c* è nell'insieme di Mandelbrot, l'insieme di Julia è connesso.

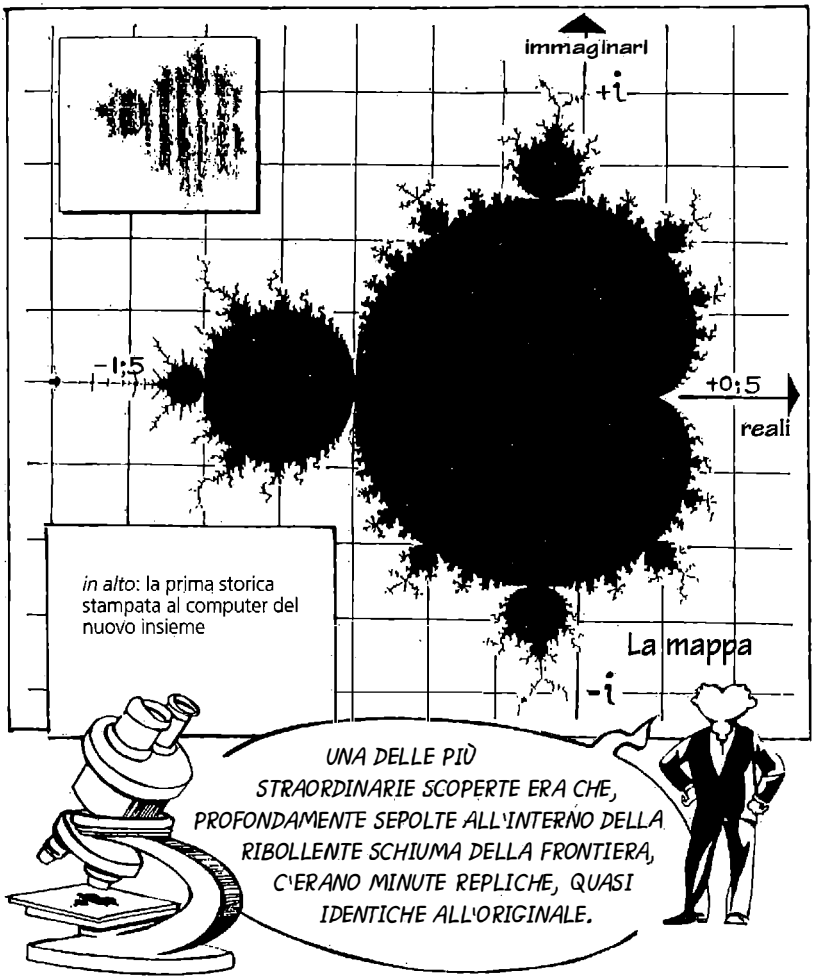
Se *c* è al di fuori dall'insieme di Mandelbrot, l'insieme di Julia è sconnesso.



A prima vista il compito sembra tutt'altro che semplice, ma Julia aveva escogitato un trucco per scoprire se un insieme di Julia è o meno connesso senza doverlo costruire effettivamente. Se si esamina l'orbita del punto di partenza e si scopre che va all'infinito, allora l'insieme non è connesso, altrimenti è connesso. Avendo a disposizione questo dato, un semplice programma per computer può definire a che classe appartiene un insieme di Julia.

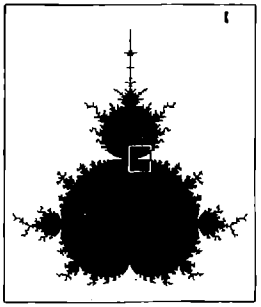
Un intero nuovo mondo

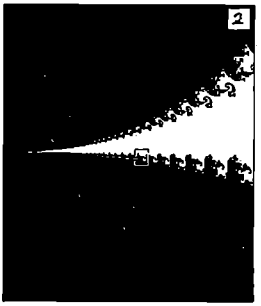
Quando fu stampata la prima immagine dell'insieme, Mandelbrot e i suoi colleghi pensarono immediatamente che doveva esserci stato un errore, una "falla" nel programma. L'immagine si rivelò alquanto strana e sorprendente.

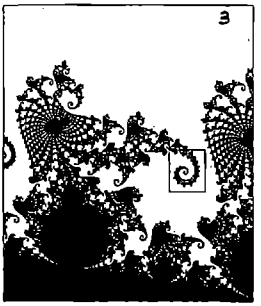


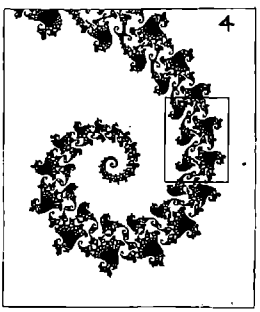
in alto: la prima storica stampata al computer del nuovo insieme

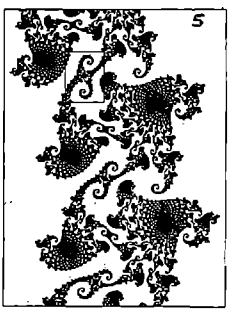
Per settimane, lavorando fino a notte nel seminterrato di un laboratorio dell'Università di Harvard, esplorarono stupefatti il nuovo mondo che avevano scoperto. Fornendo nuove coordinate al loro programma, fecero una serie di zoom sempre più approfonditi sulla frontiera dell'insieme.

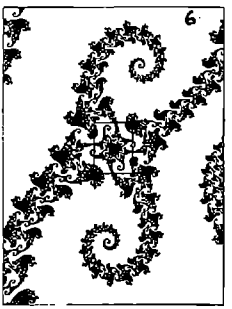


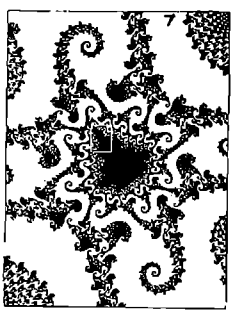


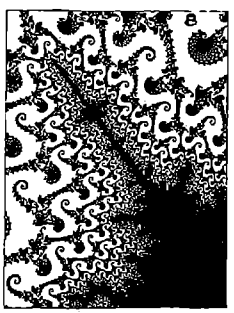














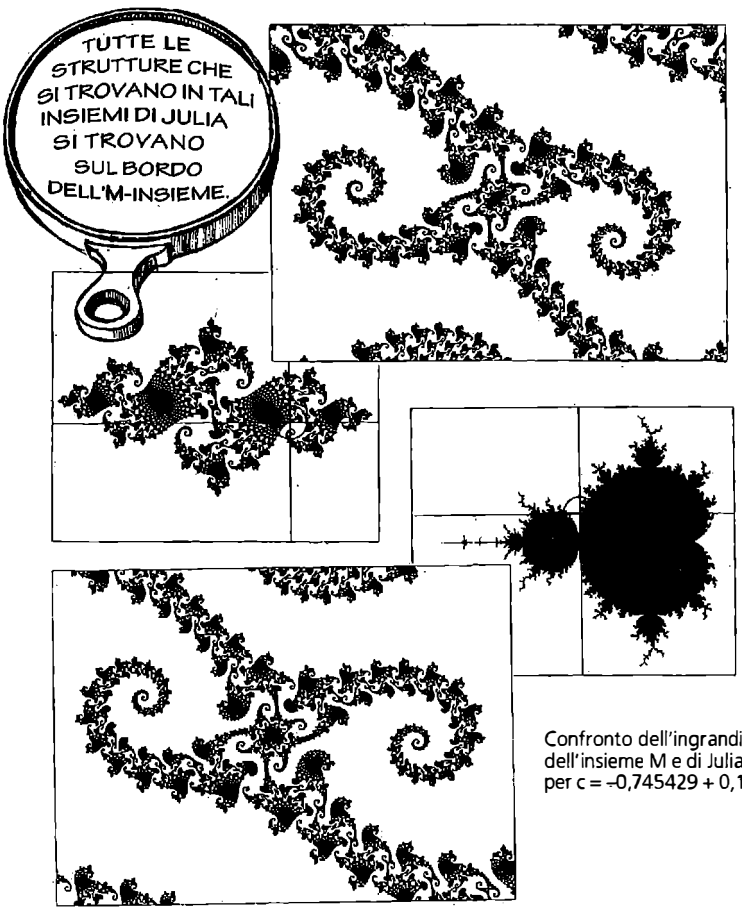
Heinz Otto Peitgen

Zoomando ulteriormente in questi mini M-insiemi, incontrarono continue variazioni di queste stesse strutture adornate di fronzoli e abbellimenti. Questi mini M-insiemi erano come una chiave che rivelava l'esistenza di un nuovo mondo racchiuso negli insiemi di Julia.

Essi consistono di un numero infinito di copie sempre più piccole di un insieme di Julia, appese a filamenti spiraleggianti che seguono la forma generale di un altro insieme.

Gli insiemi di Julia più interessanti erano quelli dotati di connessione minima. Si trovavano al confine fra quelli connessi e quelli "polverizzati", vale a dire sul bordo dell'insieme di Mandelbrot.

Analogamente, l'insieme di Mandelbrot appare più interessante proprio ai bordi. Il matematico cinese **Tan Lei** ha dimostrato che l'M-insieme è asintoticamente simile agli insiemi di Julia vicini a un qualsiasi punto sulla sua frontiera.

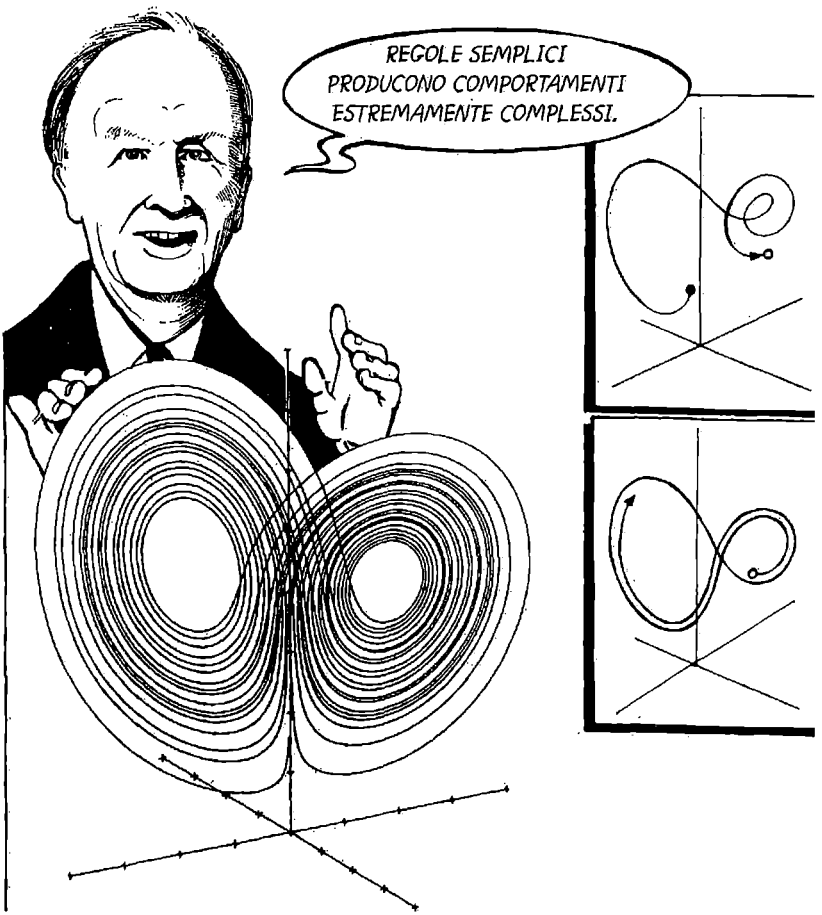


Confronto dell'ingrandimento dell'insieme M e di Julia per c = -0,745429 + 0,113008

Quanto più si ingrandisce un particolare dell'insieme di Mandelbrot, meglio si apprezza una somiglianza con qualche particolare insieme di Julia. Per questa ragione, l'M-insieme è stato paragonato a un "indice pittografico" degli insiemi di Julia.

Regole semplici, comportamento complesso

I fenomeni complessi non richiedono necessariamente una spiegazione complessa. Questa è l'essenza della teoria del caos, meravigliosamente rappresentata dall'attrattore di Lorenz.

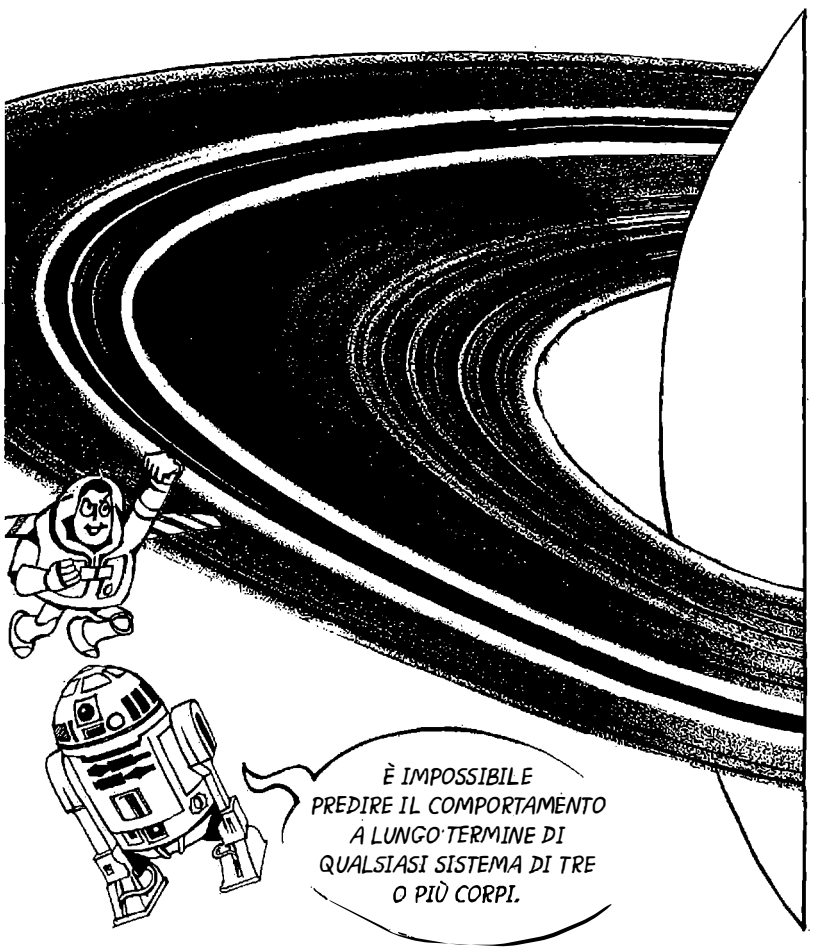


Una formula semplicissima come quella della legge di Newton, composta da pochi simboli, può spiegare il moto dei pianeti attorno al Sole e moltissime altre cose con una precisione che arriva fino alla cinquantesima cifra decimale!

La legge di Newton e il caos

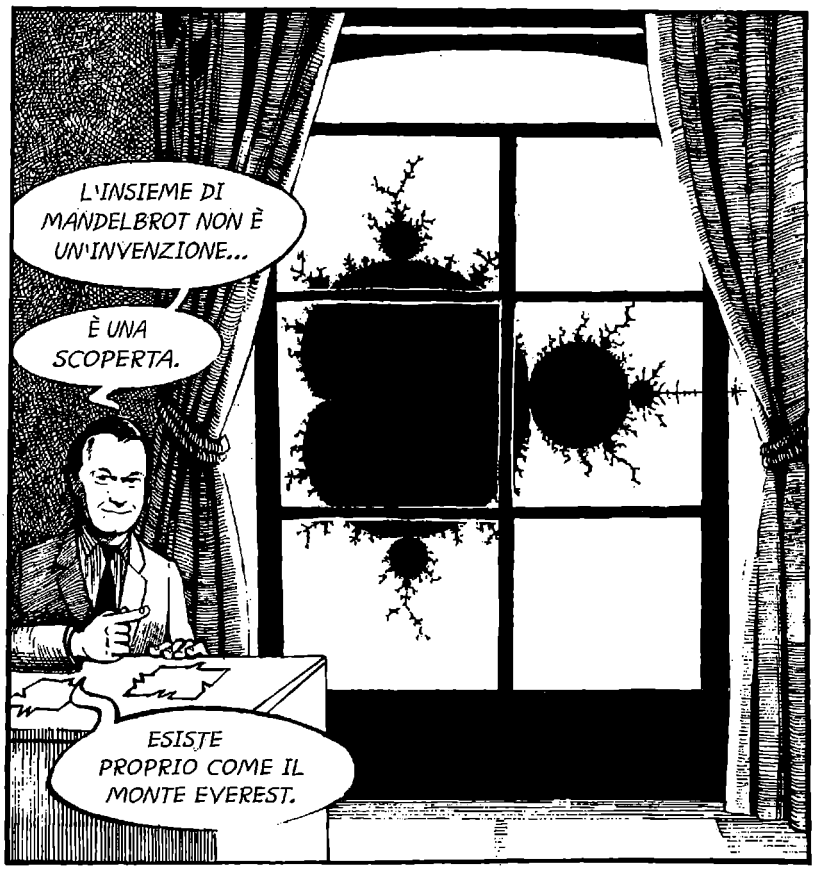
La legge di Newton descrive le orbite periodiche dei pianeti nel Sistema Solare, tuttavia implica anche che il sistema è di fatto caotico, ossia è da considerarsi stabile solo sul breve termine: in questo caso, milioni di anni.

La fascia degli asteroidi che si trova fra Marte e Giove è un chiaro esempio del caos contemplato dalla legge di Newton. Gli anelli di Saturno mostrano una struttura frattale affine all'insieme di Cantor: vi si osservano lacune in regioni critiche che corrispondono alle orbite instabili.



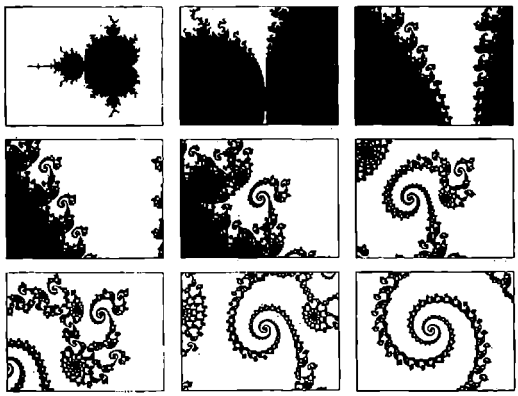
Ammettiamolo, è complicato...

L'insieme di Mandelbrot può essere interpretato come dimostrazione del realismo matematico. È così complicato, si dice, che nessuno potrebbe inventarlo. Questo è esattamente ciò che afferma il matematico **Roger Penrose** quando sottolinea lo statuto ontologico dell'insieme di Mandelbrot.



L'insieme di Mandelbrot è così complicato che nessun programma per computer può determinare se un punto generico appartenga a esso. In un certo senso, non è computabile.

Quanto più si ingrandisce un particolare dell'insieme di Mandelbrot, tanto più appare intricato. Nel 1991 **Mitsuhiro Shishikura** ha dimostrato che il bordo dell'insieme di Mandelbrot ha dimensione frattale 2.



Zoom

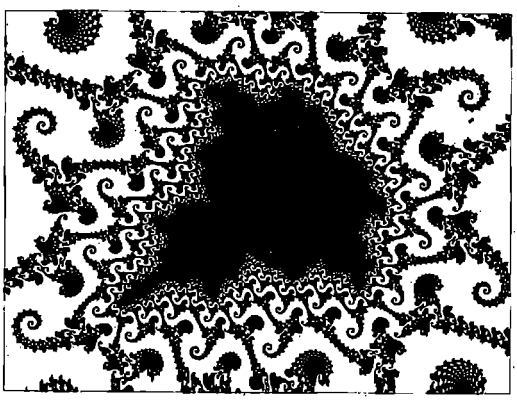
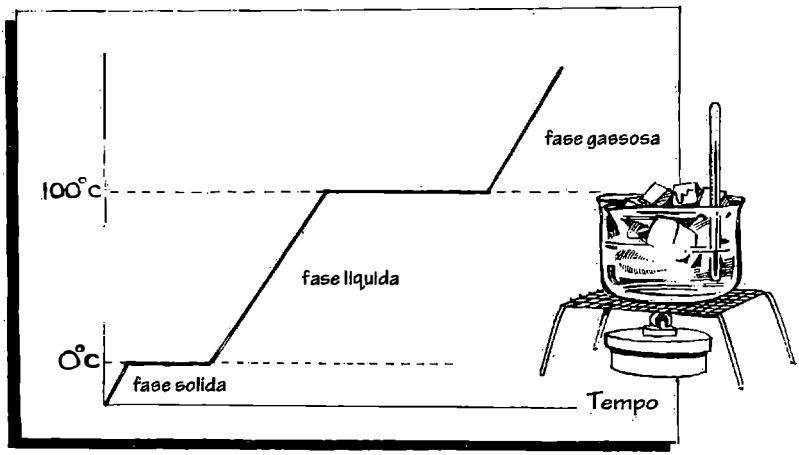


Immagine ingrandita

Nessuno sa se l'insieme sia localmente connesso. Nessuno conosce l'area esatta dell'insieme di Mandelbrot, anche se è noto che si aggira intorno a 1,50659177... Per risolvere questo problema è stata sfruttata una enorme potenza di calcolo, ma potrebbe essere necessario ancora molto tempo, prima che qualcuno trovi un utilizzo in campo applicativo di questo risultato! Tuttavia, il fatto stesso che l'insieme di Mandelbrot esista e abbia un'area è sufficiente ai matematici della "scuola dell'Everest" per tentare la sfida. In assenza di altre idee, continuano a macinare l'M-insieme in frammenti sempre più piccoli, per sommarli e arrivare a una stima dell'area sempre più precisa. La convergenza è lentissima ed è stato ipotizzato che il bordo dell'M-insieme possa delimitare un'area positiva, anche se nessuno conosce la risposta precisa.

Transizioni di fase

Sappiamo che l'acqua può trovarsi in tre stati: come ghiaccio, liquida e come vapore. Il cambiamento da uno stato all'altro avviene bruscamente a temperatura precisa: 0 °C e 100 °C. L'essenza delle transizioni di fase è costituita da salti discontinui nel comportamento di un sistema quando un parametro raggiunge una soglia critica. La dinamica delle transizioni di fase può attualmente essere esplorata con modelli al computer. E sono state trovate strutture comuni a tutte le transizioni di fase.

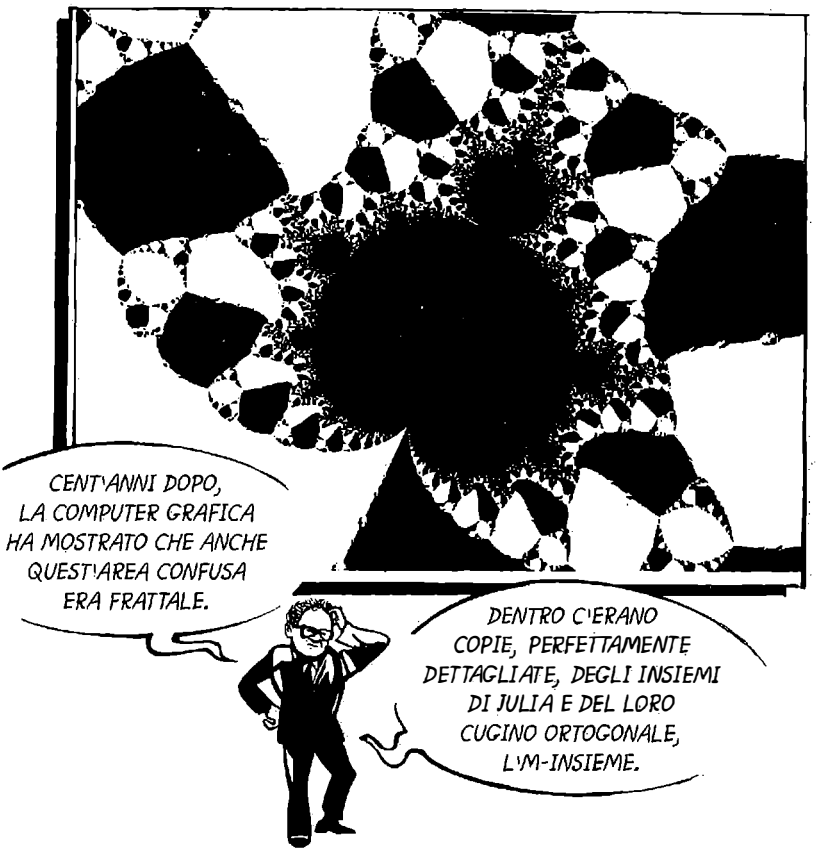


Due matematici tedeschi, **Heinz-Otto Peitgen** e **Peter H. Richter**, hanno studiato un modello delle transizioni di fase magnetiche, scoprendo una famiglia interamente nuova di frattali. E precisamente nelle profondità delle bolle frattali...



Aree di calcolo indistinte

Il metodo di Newton per risolvere le equazioni per tentativi via via migliori era stato impiegato dai matematici per secoli, prima che **Arthur Cayley** (1821-1895) notasse che tra differenti soluzioni si trovava un'area indistinta estremamente complessa.

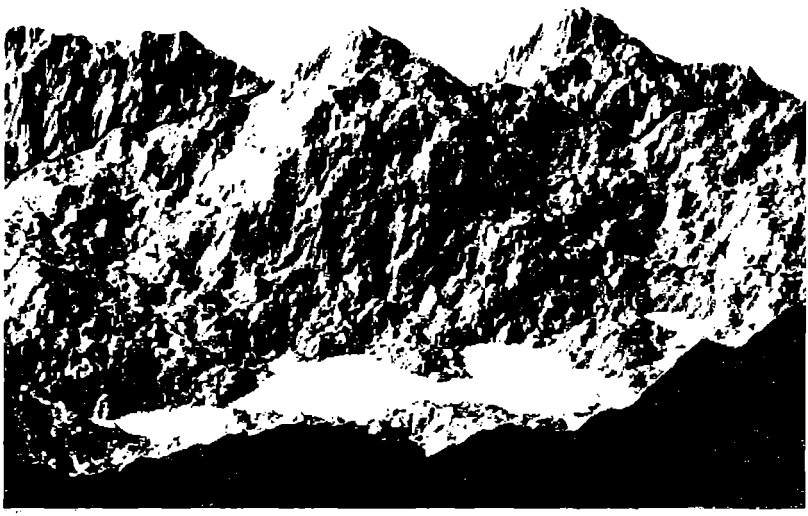


La ricorrenza dell'insieme di Mandelbrot in un ampio spettro di frattali differenti è dovuta al fenomeno dell'universalità. Ampie classi di sistemi differenti possiedono attrattori simili. Tale scoperta fu fatta per il caso unidimensionale da Mitchell Feigenbaum nel 1978, utilizzando una semplice calcolatrice tascabile e una gran quantità di sostanze stimolanti!

La matematica dei corrugamenti

L'M-insieme è increspato e grinzoso, proprio come il mondo naturale. Prima della geometria frattale non c'era uno strumento per descrivere questi aspetti del mondo che ci circonda.

Gli scalatori sono spesso ingannati dalla carenza di dettaglio: questa può far sì che la vetta appaia subito dietro la prossima altura, per scoprire poi che fra i promontori e la cima c'è un ampio baratro.



Ogni parte di una montagna somiglia all'intera montagna...

Un ramo di felce somiglia a una felce intera.

Questa è la caratteristica fondamentale che sta dietro alla crescita di tutti gli organismi complessi. Le stesse forme ricorrono in molte circostanze differenti, in materiali differenti, organici e inorganici, e su un ampio spettro di scale. Ogni piccola parte dei nostri vasi sanguigni somiglia all'intero sistema circolatorio. Ha l'aspetto di un albero, di un estuario, di un alveare.

Stampi naturali

La natura applica la stessa soluzione per molti problemi differenti, tanto per il drenaggio delle acque piovane dalla terra agli oceani, quanto per il trasporto del sangue dal cuore fino alla punta delle dita. E gli stampi impiegati dalla natura sono i frattali. Le nuvole appaiono uguali a tutte le scale. È impossibile determinare la taglia di una nube da una sua fotografia.

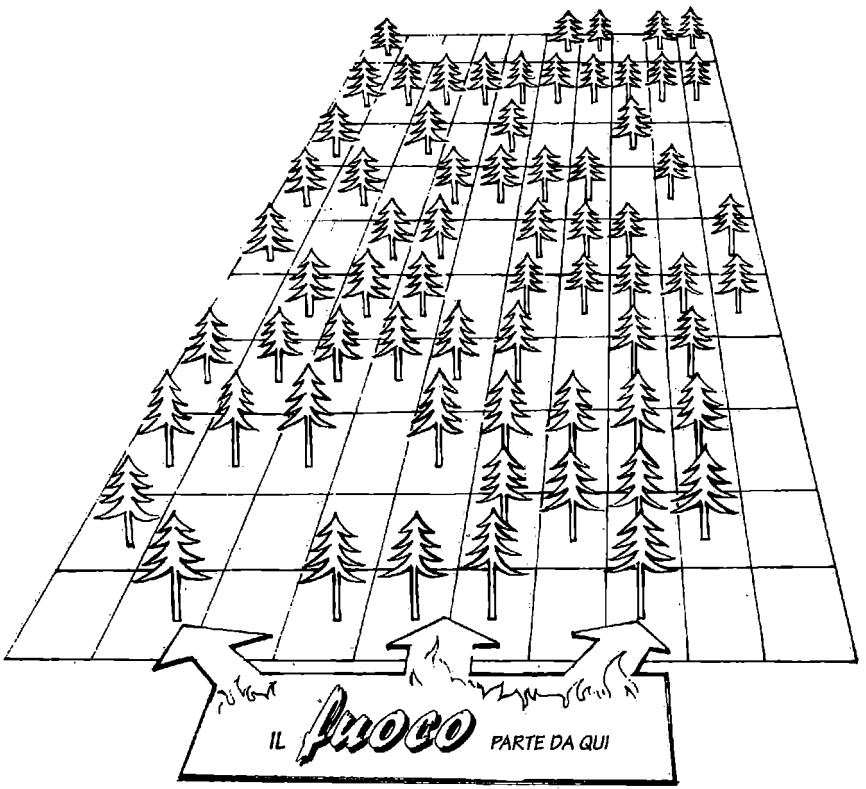




Le nuvole sono costituite dalla condensazione di piccole goccioline d'acqua, che si verifica, in condizioni opportune, in modo piuttosto casuale. Tuttavia, una volta che esse si sono formate, tendono ad attrarre molte altre goccioline in certi punti specifici circostanti. Sono queste le condizioni necessarie perché si generi una figura frattale.

Incendi boschivi: il confine frattale

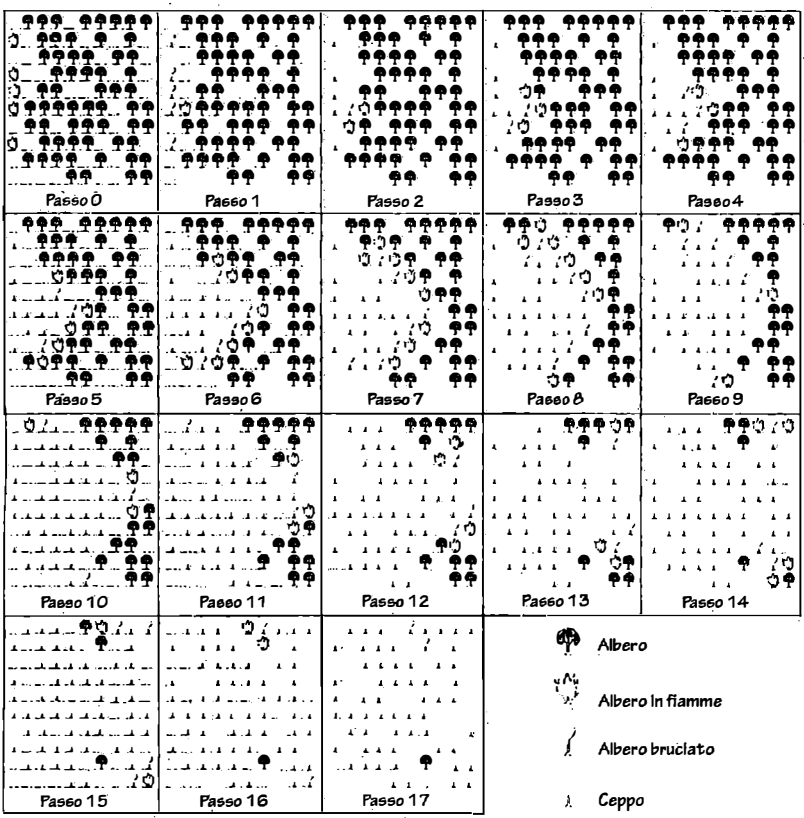
Immaginate una piantagione di alberi distanziati regolarmente in un giorno caldissimo e secco. Se la temperatura s'impenna, foglie secche e rametti prendono fuoco, mandando in fiamme l'intero albero. Si tratta di un processo essenzialmente casuale che va ben al di là delle nostre capacità di previsione. Ma una volta che un albero brucia, l'incendio si diffonde facilmente alle piante vicine e, di questo processo di diffusione dell'incendio, si può fare un modello con tecniche iterative.



Non possiamo dire nulla su quale albero brucerà per primo, ma possiamo dire come si espanderà l'incendio. Il fuoco avrà un ***confine frattale****.*

Altri tipi di transizioni di fase

Questo principio si applica tanto al modo in cui si diffondono le malattie infettive, o la polarità magnetica, quanto agli incendi dei boschi. In tutti questi fenomeni naturali si dispiega sostanzialmente lo stesso processo.

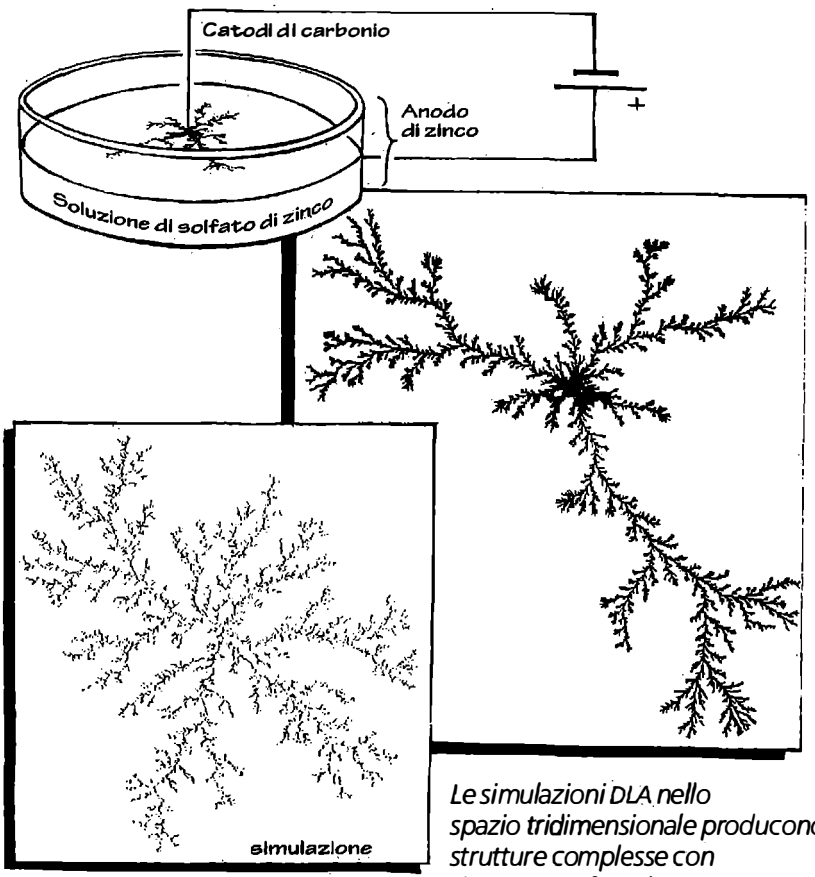


Ciò che rileviamo è una dipendenza estremamente sensibile dalle condizioni iniziali, che produce ***transizioni di fase****.*

Una volta superata la soglia critica, un incendio si diffonde rabbioso, una malattia si trasforma in un'epidemia, un pezzo di materiale metallico diventa magnetico.

Frattali elettrolitici

Nel 1983 **Thomas Witten** e **Leonard Sander** idearono un nuovo metodo per studiare come si formano i depositi su una piastra elettrolitica. Il loro lavoro ha prodotto un nuovo modello detto "aggregazione limitata dalla diffusione" (o DLA, *diffusion limited aggregation*). Le simulazioni al computer che impiegano il loro modello riproducono tanto fedelmente la realtà da apparire indistinguibili.

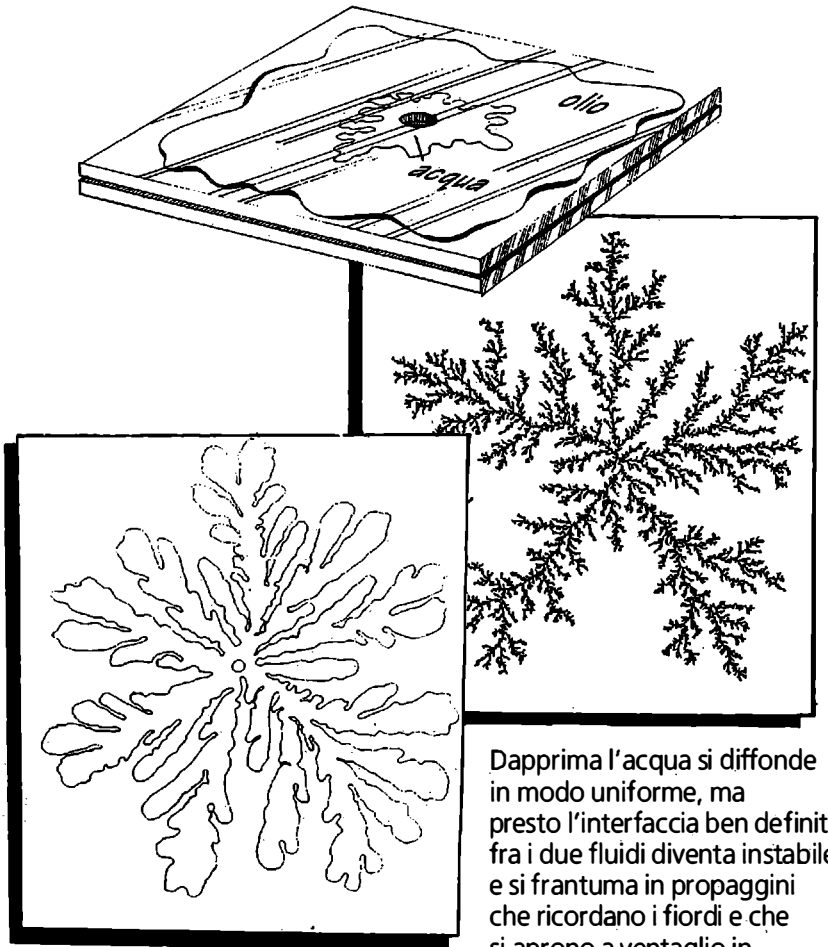


Le simulazioni DLA nello spazio tridimensionale producono strutture complesse con dimensione frattale pari a circa 2,5.

Richiamano alla mente le alghe marine e le strutture prodotte dall'olio nell'acqua, le cosiddette ***impronte viscose***.

L'impronta viscosa

Nel classico esperimento di Hele-Shaw, l'acqua è introdotta attraverso un piccolo foro al centro di un sottile strato di olio stretto fra due lastre di vetro.



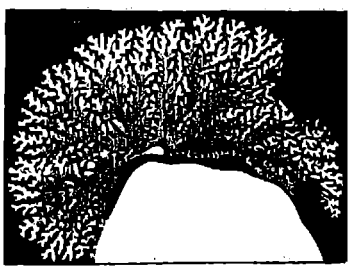
L'impronta viscosa assomiglia notevolmente all'aggregazione limitata dalla diffusione (DLA).

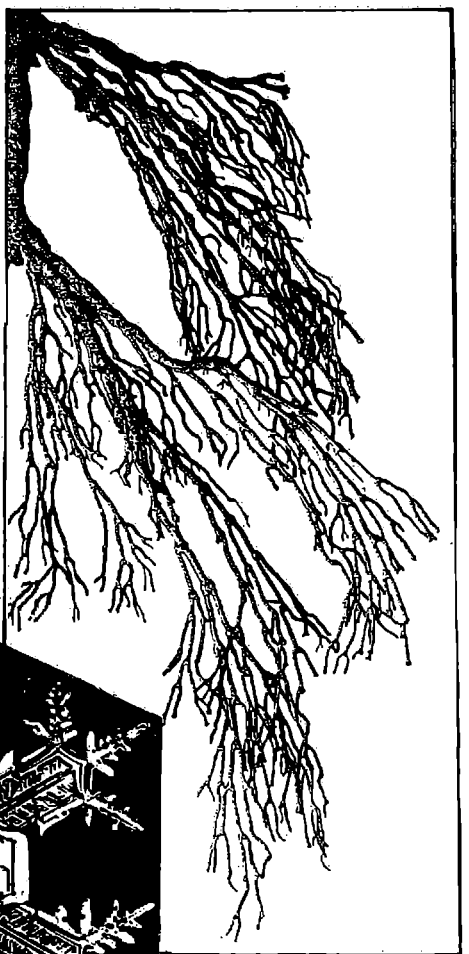
Dapprima l'acqua si diffonde in modo uniforme, ma presto l'interfaccia ben definita fra i due fluidi diventa instabile e si frantuma in propaggini che ricordano i fiordi e che si aprono a ventaglio in modo frattale: evocando, in un certo qual modo, la crescita dei coralli o delle piante.

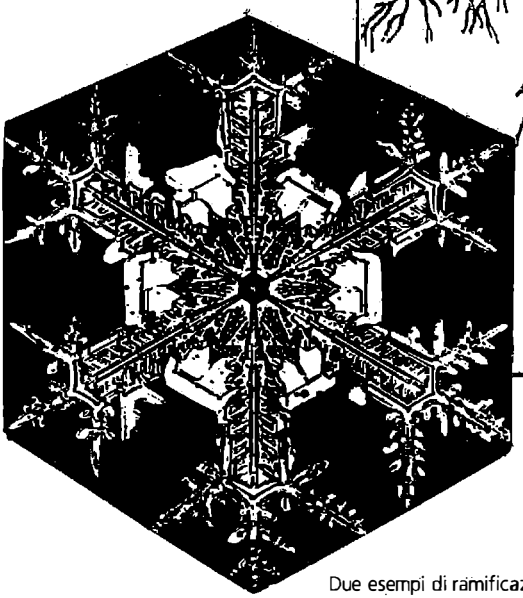
Entrambe hanno una dimensione frattale di circa 1,7: vi sono prove convincenti che questi fenomeni siano matematicamente correlati.

Crescita per aggregazione

I coralli crescono per aggregazione. Vale a dire, successivi depositi di materiale aderiscono a una superficie che cresce verso l'esterno. Queste modalità di accrescimento ricordano i processi di ramificazione degli alberi. È qualcosa di simile accade durante la formazione dei fiocchi di neve e alle strutture DLA.



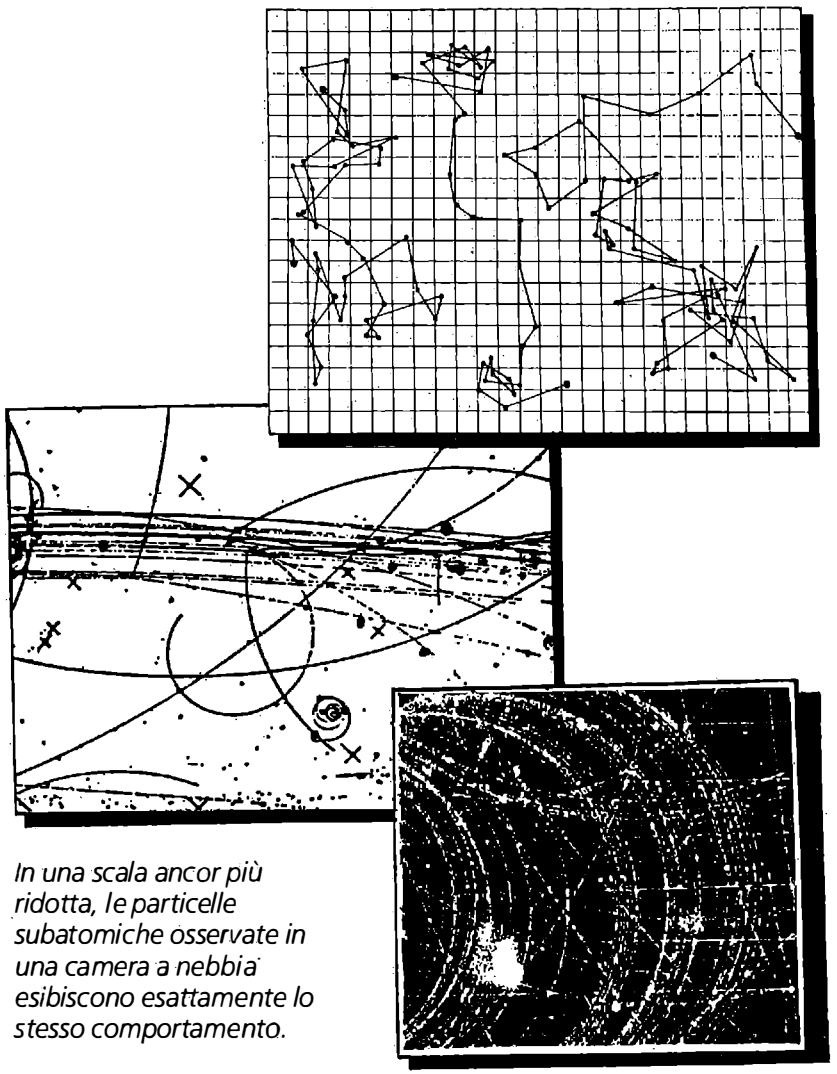




Due esempi di ramificazione corallina e un fiocco di neve.

Il moto browniano e il mondo dei quanti

Il moto browniano – il movimento di una piccola particella di polvere dovuto al costante bombardamento di milioni di invisibili molecole presenti nell'aria – segue un cammino frattale di dimensione prossima a 2.

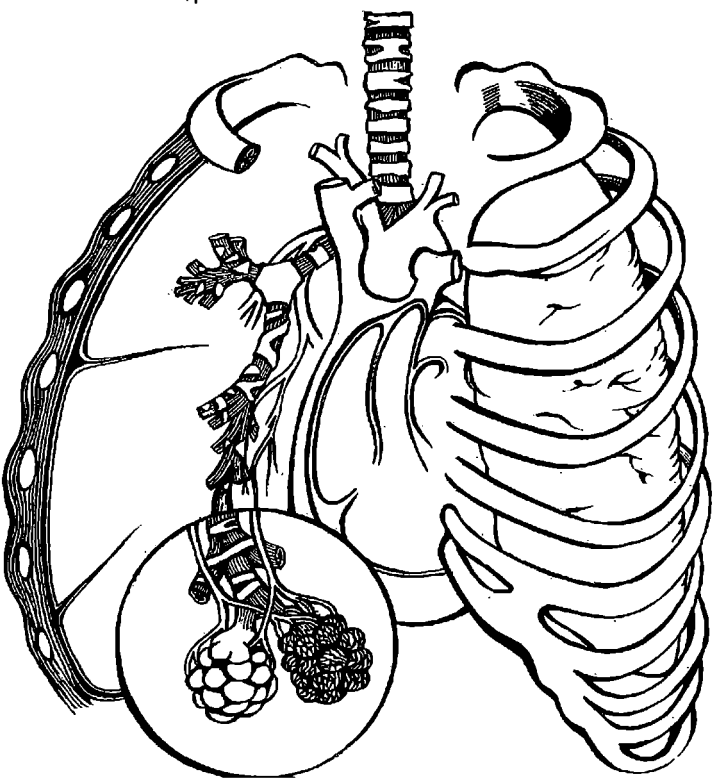


In una scala ancor più ridotta, le particelle subatomiche osservate in una camera a nebbia esibiscono esattamente lo stesso comportamento.

Magia dimensionale

Noi siamo frattali. Le piccole vie aeree dei nostri polmoni, i vasi del nostro sistema circolatorio, i neuroni e le loro connessioni che si distribuiscono nei nostri cervelli mostrano similarità strutturali con i processi di ramificazione degli alberi. Sono strutture frattali.

La geometria frattale permette curve limitate di lunghezza infinita e superfici chiuse con un'area infinita. Ammette anche curve con volume positivo, e gruppi di forme arbitrariamente grandi che possiedono precisamente lo stesso confine. È così che i nostri polmoni riescono a massimizzare la loro superficie!



La maggior parte degli oggetti naturali – inclusi gli esseri umani – sono composti da differenti tipi di frattali intrecciati gli uni negli altri. A volte, un oggetto naturale è costituito da parti che hanno differente dimensione frattale: per esempio, l'albero bronchiale nei polmoni dell'uomo ha una certa dimensione frattale per le prime sette generazioni di ramificazioni, e un'altra per quelle successive.



I nostri polmoni racchiudono l'area di un campo da tennis nel volume di poche palle da tennis.

La legge di potenza dei "3/4"

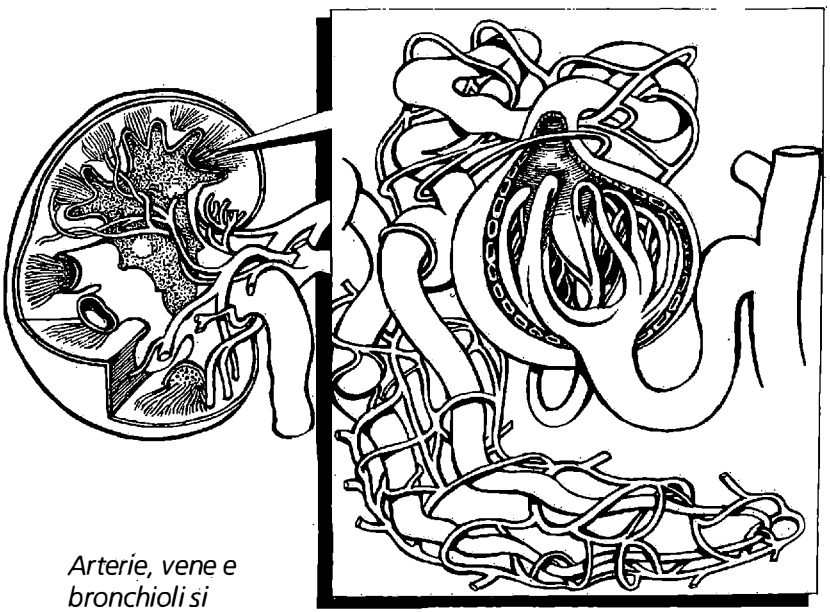
La geometria frattale ha messo in luce intuizioni notevolissime circa la misteriosa e ubiquitaria "legge di potenza dei 3/4". Questa particolare legge di potenza fornisce un modello del modo in cui una struttura è correlata e interagisce con un'altra. È basata sul cubo della radice quarta.



Dalla misurazione di sistemi apparentemente privi di relazioni reciproche sono emerse molte leggi di potenza dei 3/4 che forniscono un modello di come una struttura varia con un'altra.

Da lungo tempo i fisiologi avevano raggiunto una comprensione empirica del modo in cui il sangue fluisce nel sistema circolatorio, e di come questo flusso sia legato alla taglia dei vasi che lo contengono. Sfruttando le regole frattali, i ricercatori hanno scoperto una legge di potenza dei 3/4 anche nel sistema circolatorio.

La rete arteriosa, che rappresenta in volume circa il 3 per cento del nostro corpo, è in grado di raggiungere ogni cellula dell'organismo portandovi i nutrienti.



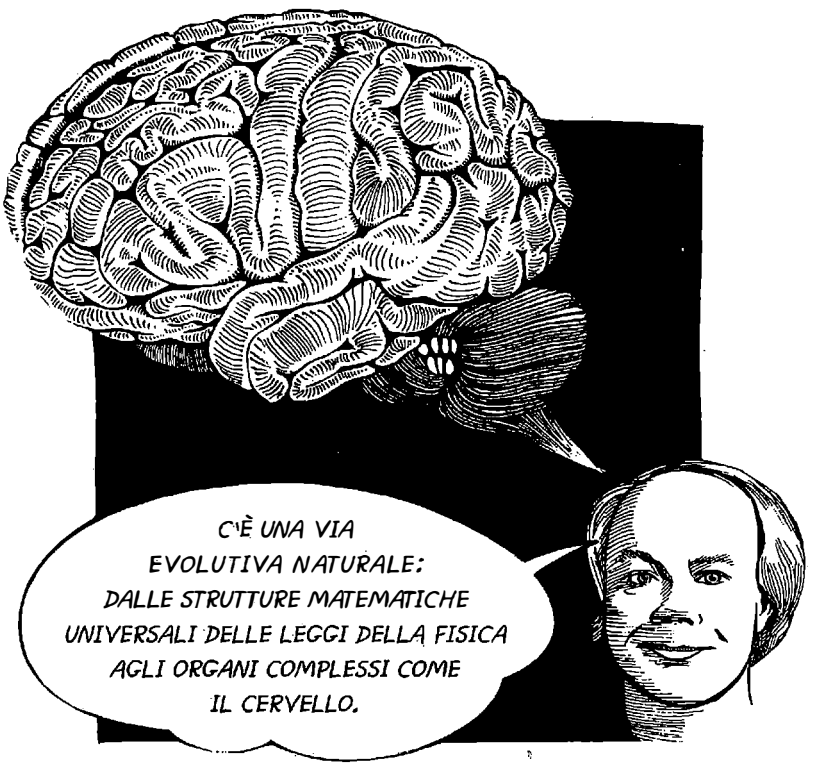
Arterie, vene e bronchioli si intrecciano tutti attorno a un bordo comune.

Le arterie che trasportano il sangue agli organi e le vene che lo drenano prendono rapporto con la superficie degli alveoli polmonari: ciò rende possibile l'ossigenazione del sangue. Le arterie devono rifornire ogni cellula del corpo con i nutrienti utilizzando la quantità minima possibile di sangue.

I reni, il fegato, il pancreas sono tutti organi con un'architettura che rispetta analoghe leggi frattali di autosimilarità. Questo vale anche per il più notevole di tutti gli organi esistenti sul pianeta: il **cervello umano**.

Il cervello misterioso

Quello che possiamo dire con certezza del cervello è che ha una forma decisamente frattale! La sua architettura frattale è evidente. Basta guardare com'è rugoso, circonvoluto e ripiegato più e più volte su se stesso.



È decisamente curioso che questo meraviglioso organo, la sede della mente che ha scoperto o creato le regole matematiche su cui si basa l'intero universo, non possa spiegare o comprendere il proprio funzionamento.

Conoscere la mente di Dio?

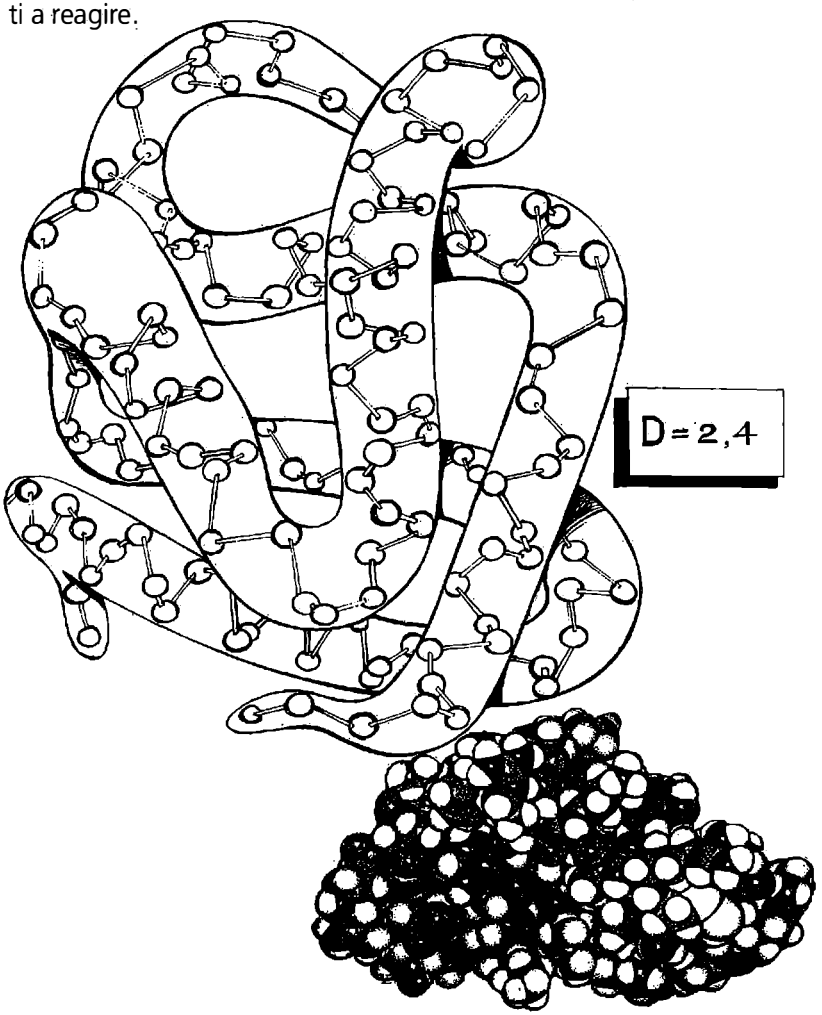


Se comprendessimo come lavora il nostro cervello, non avremmo raggiunto le vertiginose altezze di cui parla **Stephen Hawking** nel libro *Dal big bang ai buchi neri*? Non conosceremmo forse "la mente di Dio"?

La comprensione del funzionamento del nostro cervello è probabilmente la più grande e attuale sfida per l'intera comunità scientifica. La geometria frattale è ai confini di quest'area di ricerca.

I frattali e la ricerca medica

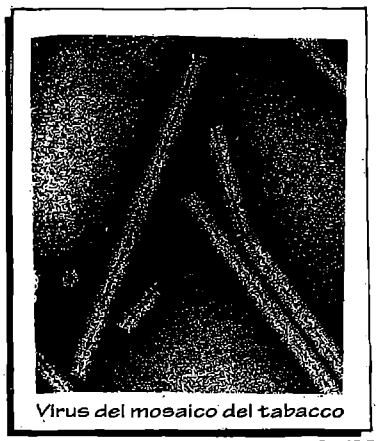
Tutti gli aspetti della natura seguono regole matematiche e mostrano una certa complessità e una pletora di irregolarità. Per esempio, la struttura di una proteina complessa si ripiega e si avvolge nello spazio tridimensionale con una dimensione pari a circa 2,4. Gli anticorpi si legano a un microrganismo grazie alla loro compatibilità con la specifica dimensione frattale della superficie della cellula a cui sono destinati a reagire.



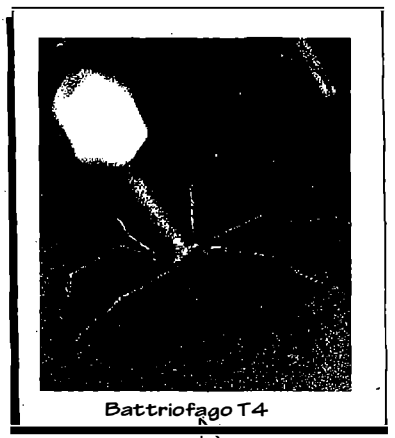
Di conseguenza, molti degli attuali sviluppi e scoperte nel campo della geometria frattale hanno a che fare con **superfici**.

Virus e batteri

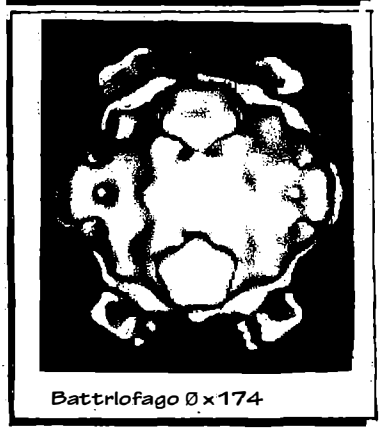
Le molecole di legame sulla superficie di tutti i virus e dei batteri sono frattali. Il loro posizionamento sulla superficie, le modalità che utilizzano per determinare il chimismo del corpo che devono invadere e il modo in cui interferiranno con la stessa chimica dell'organismo, oltre che le loro strutture di legame, possono essere descritte matematicamente grazie alle regole della geometria frattale.



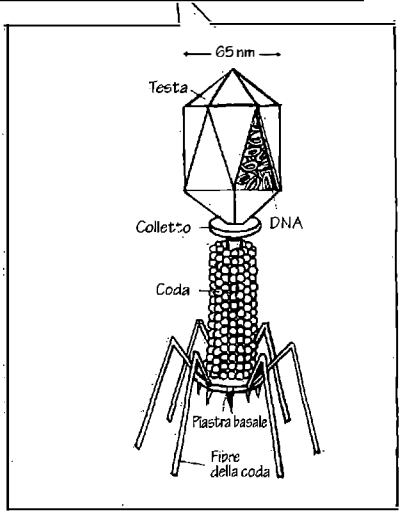
Virus del mosaico del tabacco



Battriofago T4

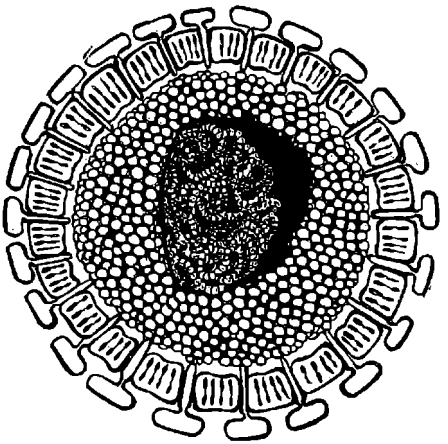


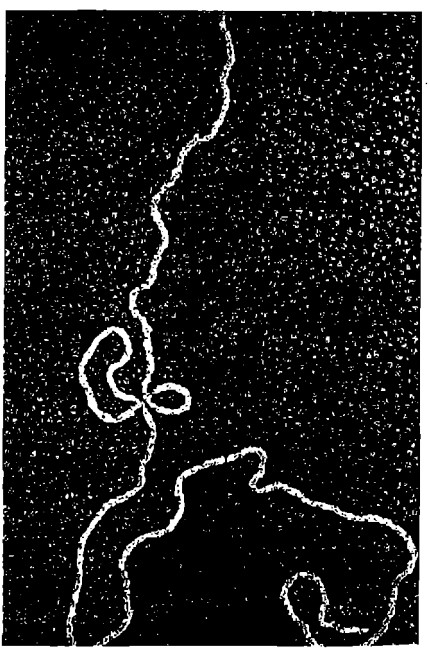
Battriofago Ø x174



AIDS

Grazie alla geometria frattale è stato realizzato un modello che descrive dinamicamente il processo infettivo del virus dell'AIDS nel corpo umano. Questa geometria fornisce la risposta all'interrogativo riguardante il periodo di incubazione, insolitamente lungo, del virus. Molti pazienti rimangono sieropositivi allo HIV anche per dieci anni prima che il virus decida di darsi da fare portando all'effettiva insorgenza della malattia e al suo manifestarsi in modo evidente nel corpo.



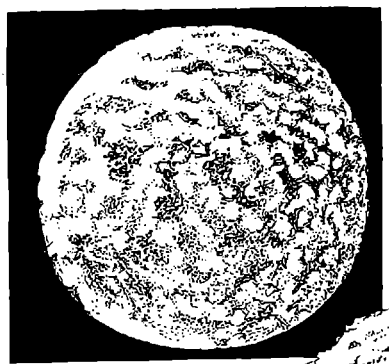


Quando il sistema immunitario inizia a diventare funzionalmente insufficiente, il virus dell'AIDS inizia a comportarsi in modo caotico. Studi sulla replicazione del virus in questo stadio hanno rivelato significativi cambiamenti nella struttura frattale.

*La geometria frattale svela le **differenze strutturali** che avvengono al termine del periodo di incubazione del virus.*

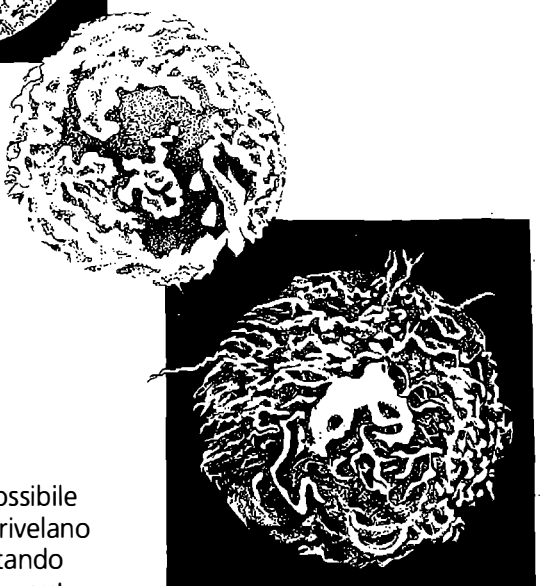
Rilevare il cancro

Anche le strutture di superficie delle cellule cancerose sono increspate e frastagliate. Queste strutture circonvolute mostrano proprietà frattali che cambiano significativamente nei diversi stadi di crescita delle cellule tumorali.



Cellula sana

La geometria frattale potrebbe essere utilizzata per la diagnosi precoce della presenza di cellule tumorali nel corpo.



Cellula cancerosa

Grazie ai computer è possibile ottenere immagini che rivelano se una cellula sta diventando o meno cancerosa. Il computer è, infatti, in grado di misurare la struttura frattale delle cellule. Se la dimensione frattale aumenta, è meglio cominciare a preoccuparsi: c'è qualcosa che non va in quelle cellule.

Donne a rischio

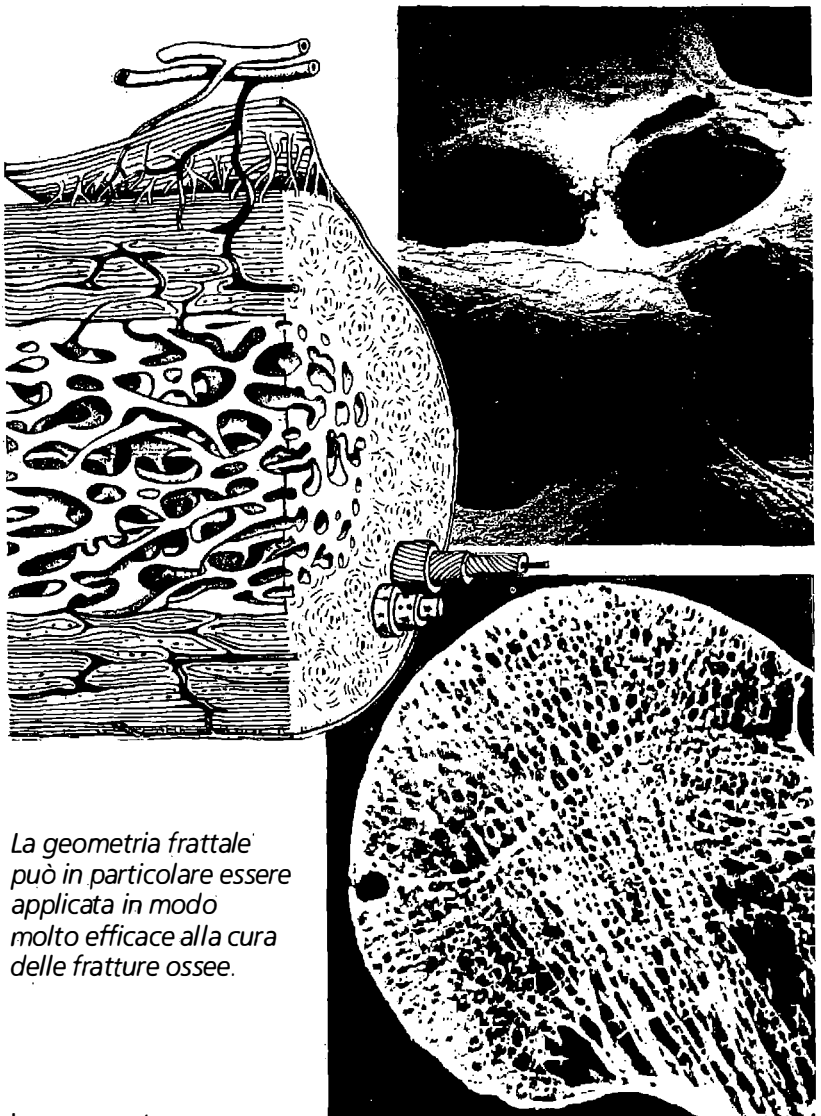
La dimensione frattale del tessuto canceroso è superiore a quella dei tessuti sani. **Alan Penn**, docente di matematica e ingegneria alla George Washington University, spiega il suo lavoro in questo ambito.



L'applicazione clinica della risonanza magnetica è stata complicata dalla difficoltà di distinguere quali masse sono benigne e quali sono invece maligne. In tempi recenti, la ricerca si è focalizzata sullo sviluppo di solide stime della dimensione frattale che potranno migliorare la discriminazione fra masse neoplastiche benigne e maligne localizzate nel seno.

Bolle nelle ossa e fratture

Le fratture ossee sono frattali.



La geometria frattale può in particolare essere applicata in modo molto efficace alla cura delle fratture ossee.

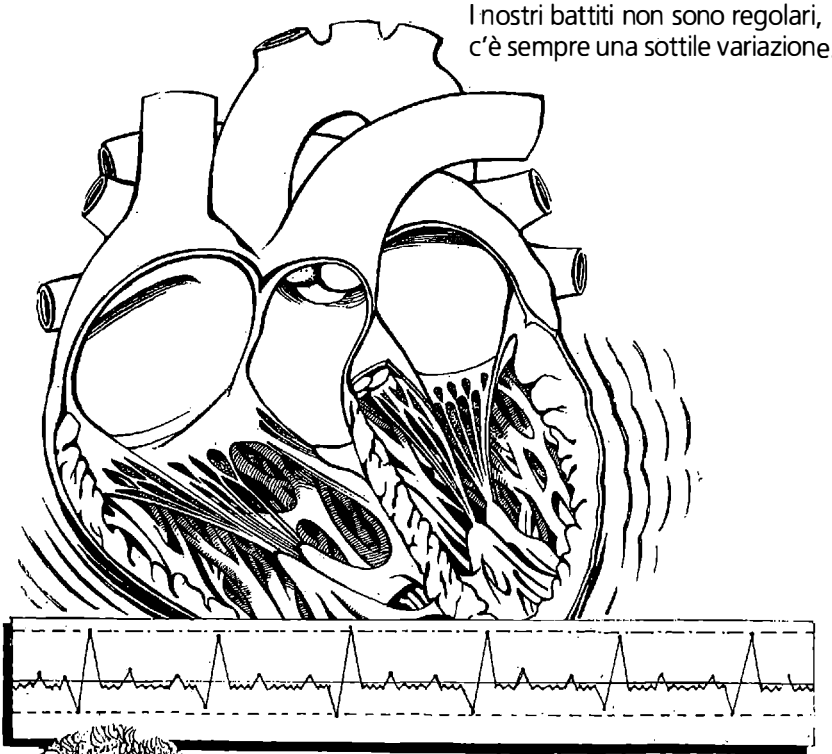
Le ossa contengono bolle d'aria.

Battiti frattali

Le strutture anatomiche di tutti gli animali sono frattali, tanto quanto il loro comportamento (si veda il paragrafo ***La folla e le orchidee frattali***) e perfino la loro **temporizzazione**.

I battiti del nostro cuore sembrano regolari e ritmici, ma se ne esaminiamo la temporizzazione nei dettagli più fini si rivela leggermente frattale. E questo è molto importante.

I nostri battiti non sono regolari, c'è sempre una sottile variazione.



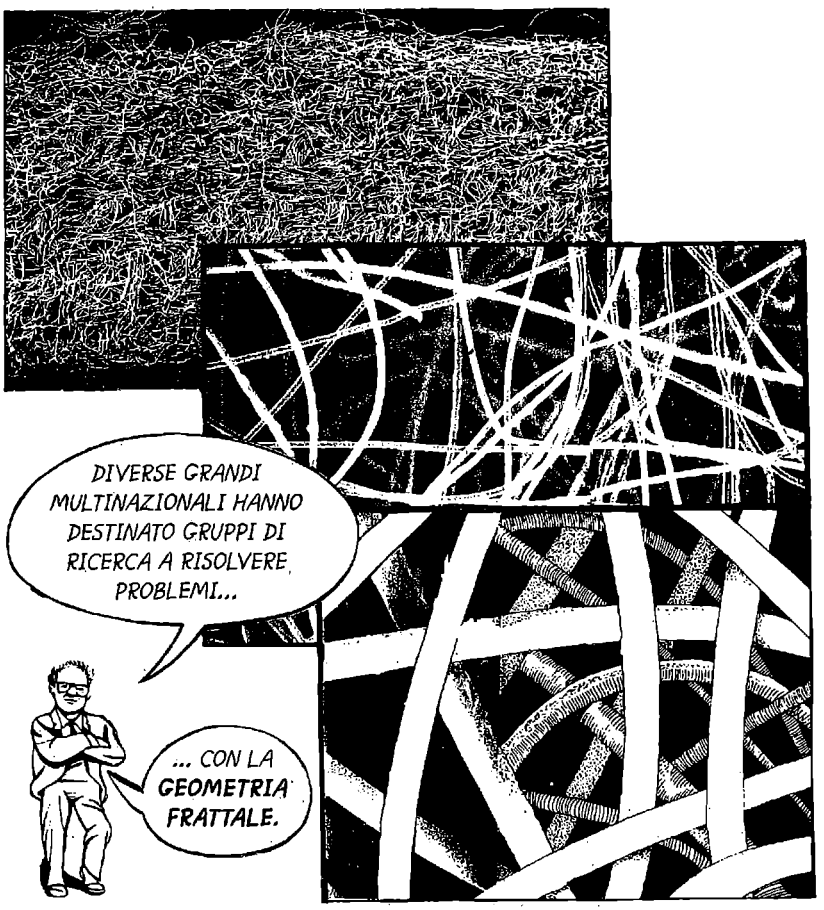
Questa sottile variazione temporale riduce drasticamente il logorio cardiaco. Inoltre è possibile rivelare patologie cardiache da un comportamento frattale estremo e aritmico.



Soluzioni pratiche

All'inizio Benoît Mandelbrot trovò le risposte più entusiastiche alle sue idee fra gli scienziati che lavoravano in ambito applicativo, nei settori del petrolio, delle rocce e dei metalli. Ora tutto è cambiato.

I frattali sono diventati un punto fermo nello studio delle strutture polimeriche e dei materiali ceramici, come pure nell'ambito dei problemi di sicurezza nei reattori nucleari.



Struttura polimerica a ingrandimenti progressivi

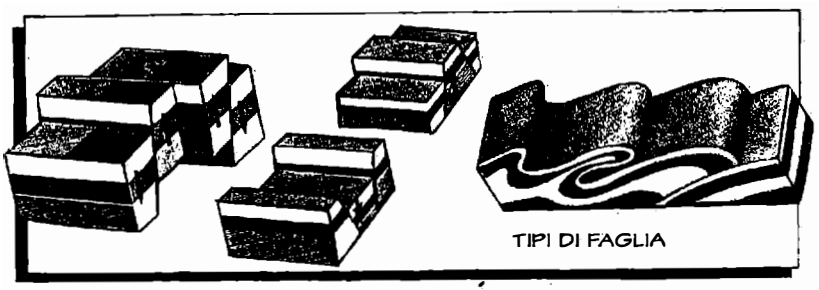
Petrolio a sorpresa

In tempi recenti è stato sviluppato, per esempio, un nuovo approccio a una varietà di problemi geologici e geofisici che sfrutta la derivazione della dimensione frattale delle sequenze stratigrafiche, delle strutture di faglia e dei sistemi di canali nei delta.

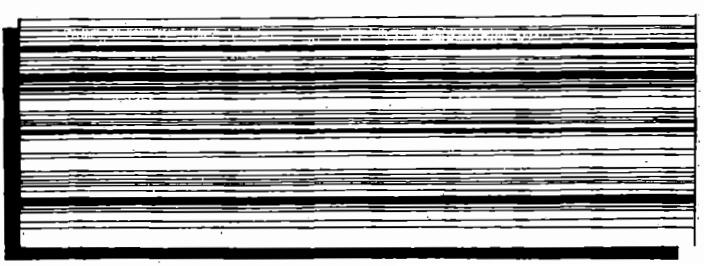


Il contenuto frattale delle immagini in 2D delle strutture di faglia ha consentito la rappresentazione di quelle stesse immagini con un numero abbastanza esiguo di equazioni, che sono state poi iterate. La scomposizione delle immagini in 2D in una quantità di dati molto inferiore a quella richiesta per rappresentare i pixel, e la loro successiva ricomposizione, è una scomposizione di vitale importanza. La possibilità di ricomporre l'immagine 2D a una risoluzione maggiore porta poi all'interessante possibilità di predire faglie anche al di sotto del limite di risoluzione sismica.

Guy Nason e Alan McKeon

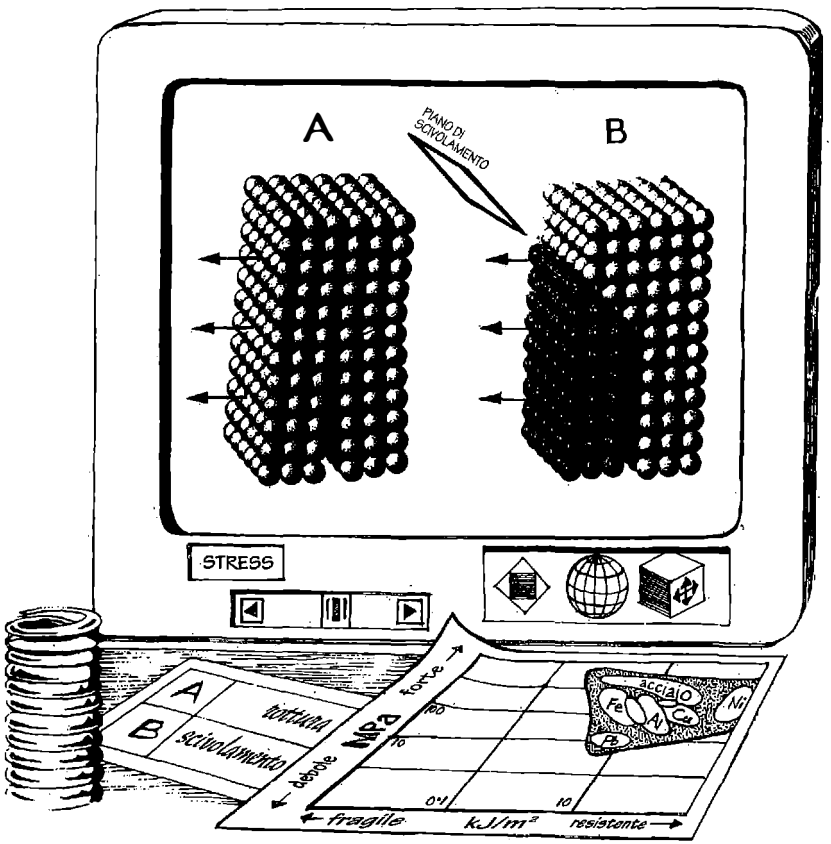






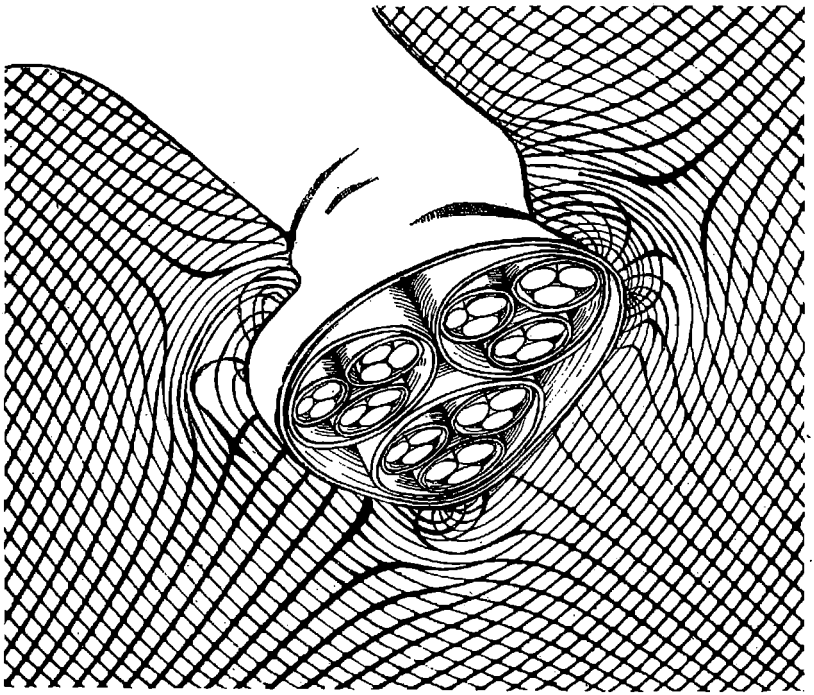
La molla è elastica

L'elevata quantità di scarti è sempre stata un problema spinoso per le fabbriche di molle di tutto il mondo. Il dieci per cento delle molle a spirale non sarà dotato di un'elasticità sufficiente, anche se all'apparenza quelle molle sembrano come tutte le altre, con spire della stessa forza e malleabilità. La ragione risiede nella struttura frattale delle molecole all'interno del filamento.



Con le tecnologie computerizzate è ora possibile ottenere un modello della struttura del filamento, testarla, valutarla e caratterizzarla.

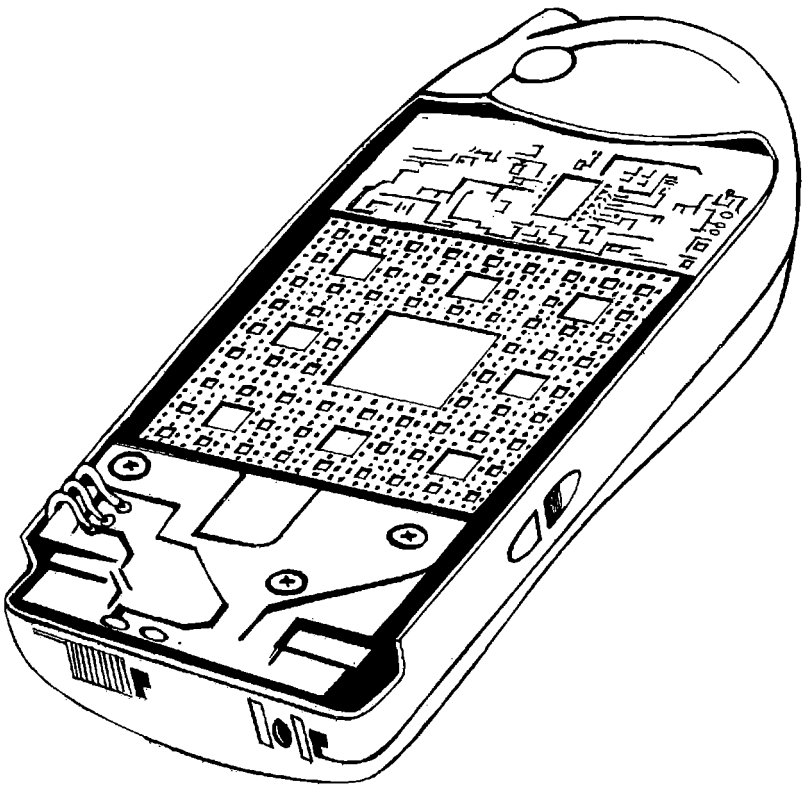
Testare un filamento di bobina richiedeva fino a tre giorni; ora, con la geometria frattale, il tempo è stato ridotto a tre minuti! Si tratta di un risparmio enorme che ha aumentato notevolmente l'efficienza dell'industria delle molle.



Questa tecnologia è stata adottata con soddisfazione in tutti i processi in cui forza e malleabilità sono della massima importanza. Vi sono applicazioni nell'industria orafa e in quella delle fibre ottiche; in questo specifico ambito i ricercatori hanno scoperto che le fibre frattali, formate da fibre di fibre, sono otticamente più efficienti.

Valutare lo stress

Modelli statistici che utilizzano la geometria frattale sono impiegati per testare gli stress in azione sugli impianti di perforazione petrolifera e gli effetti delle turbolenze sugli aerei, specie di quelli dovuti a brevissime folate di vento.

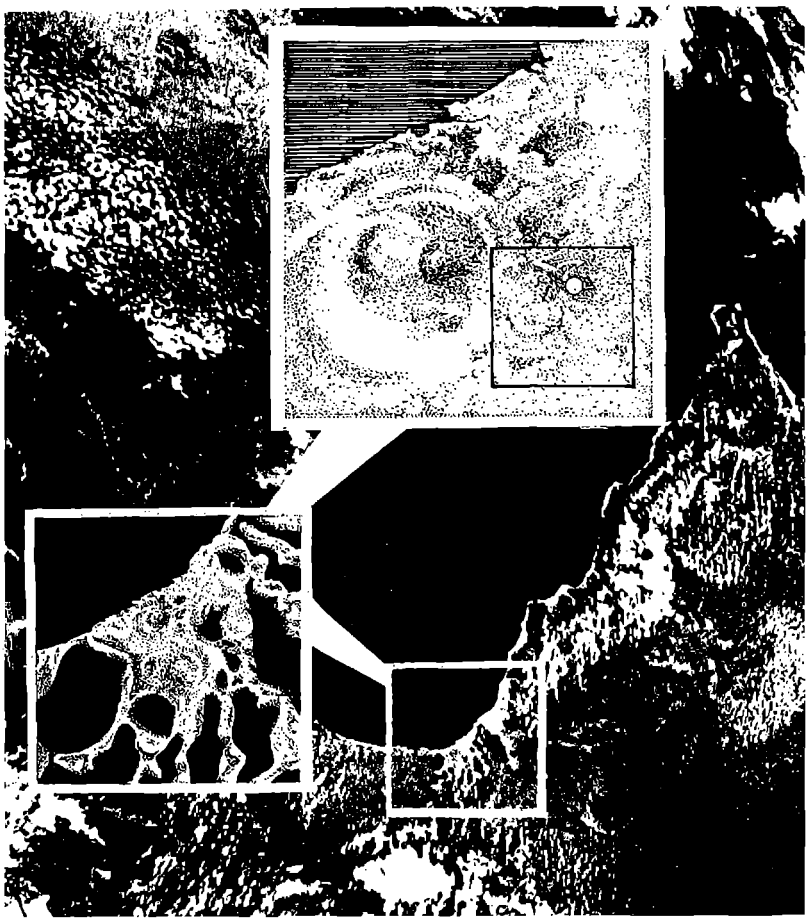


Antenne

Si è scoperto che le strutture frattali forniscono le forme più efficienti per le antenne dei cellulari.

Identificazione

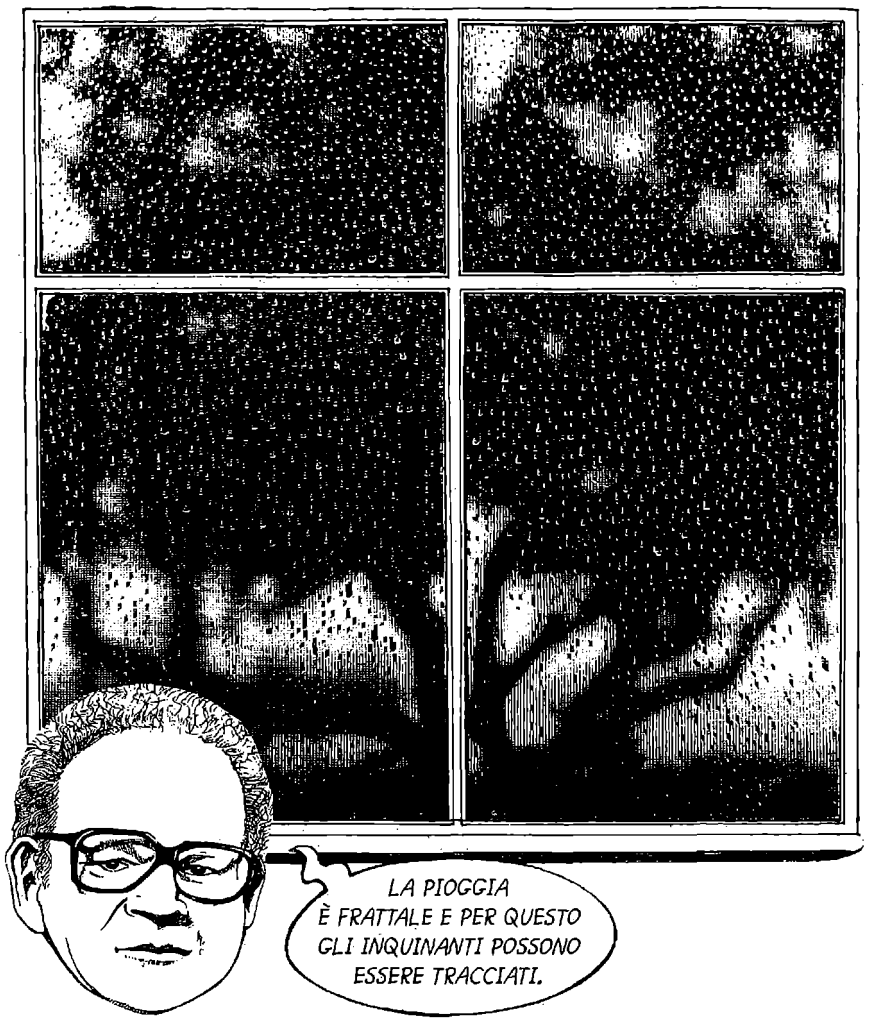
La geometria frattale è stata efficacemente sfruttata dai militari per rivelare la presenza di manufatti dell'uomo nell'ambiente naturale. Questa tecnologia si è rivelata particolarmente efficiente nell'individuare e seguire i sottomarini o le scie delle navi.



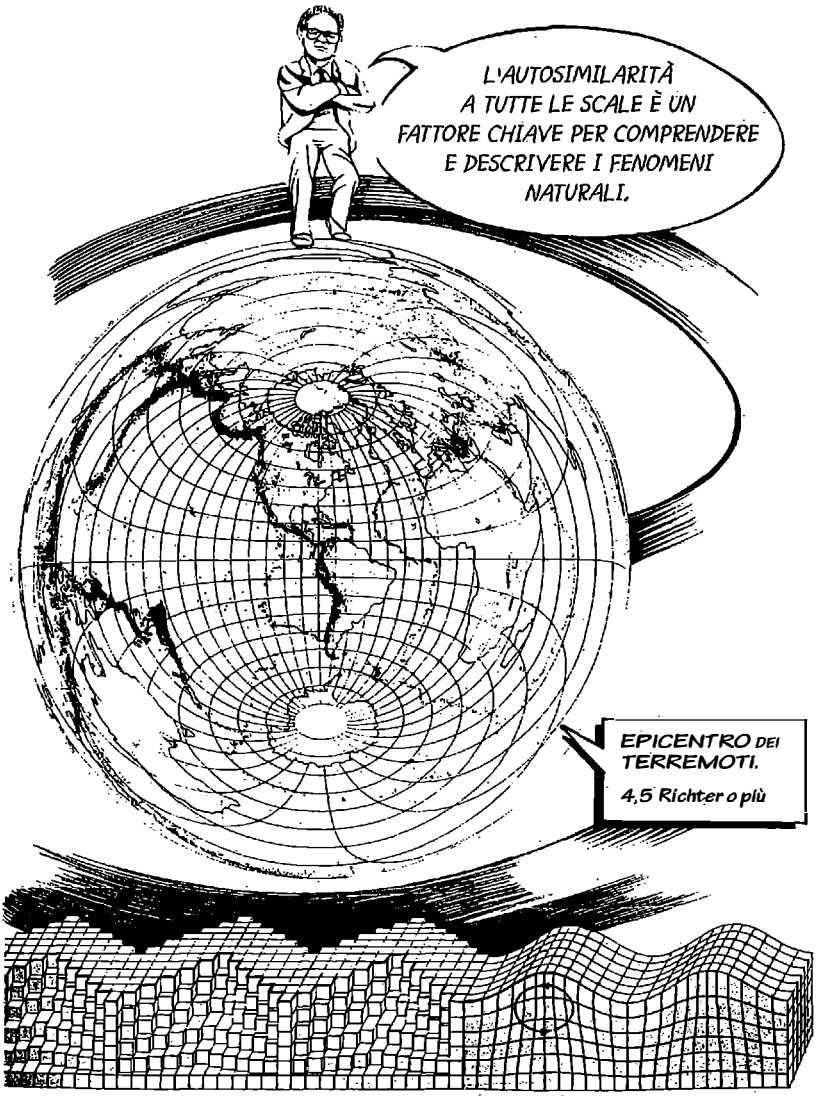
Alla Queens University di Belfast **Avian Alexander** ha sviluppato, a scopi forensi, un database frattale delle impronte delle suole che elimina dall'identificazione l'elemento soggettivo.

Ecologia frattale

La geometria frattale è un nuovo linguaggio matematico. Noi tutti vediamo frattali ogni giorno, ovunque guardiamo. Ci sono già assai familiari. Non è dunque sorprendente che la geometria frattale trovi innumerevoli applicazioni nello studio e nella gestione del nostro ambiente. Lo studio delle gocce di pioggia acida è un primo esempio.



I terremoti esibiscono una chiara "firma" frattale, così come le epidemie che colpiscono la specie umana.



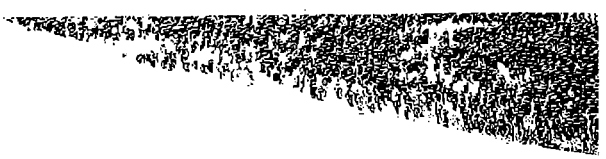
La corrosione rivela la natura frattale del processo, suggerendo modi e mezzi per ovviare al problema.

La folla e le orchidee frattali

La geometria frattale viene oggi utilizzata per creare modelli dei flussi di persone. Il comportamento degli individui che costituiscono la folla si è rivelato frattale. Il lavoro di **G. Keith Still** ha portato ad alcune scoperte inaspettate sul comportamento degli assembramenti di persone e sul modo di gestirli.

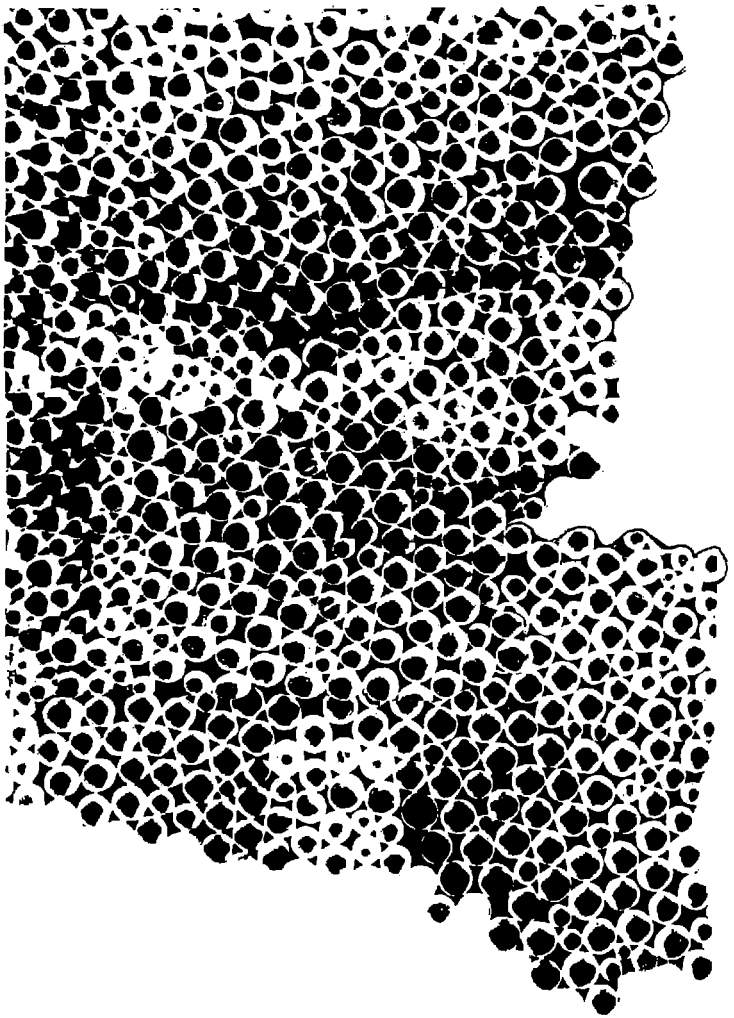


Il nostro comportamento somiglia a quello degli stormi di uccelli o dei banchi di pesci quando si muovono come un tutt'uno.



La folla che entra, esce e si muove in uno stadio rivela schemi comportamentali notevolissimi. Anche se siamo degli individui e possiamo decidere la direzione in cui muoverci, persino dove e quanto speditamente, nel caso in cui ci troviamo immersi in una folla indaffarata e fluida ci comportiamo come parti di un unico organismo.

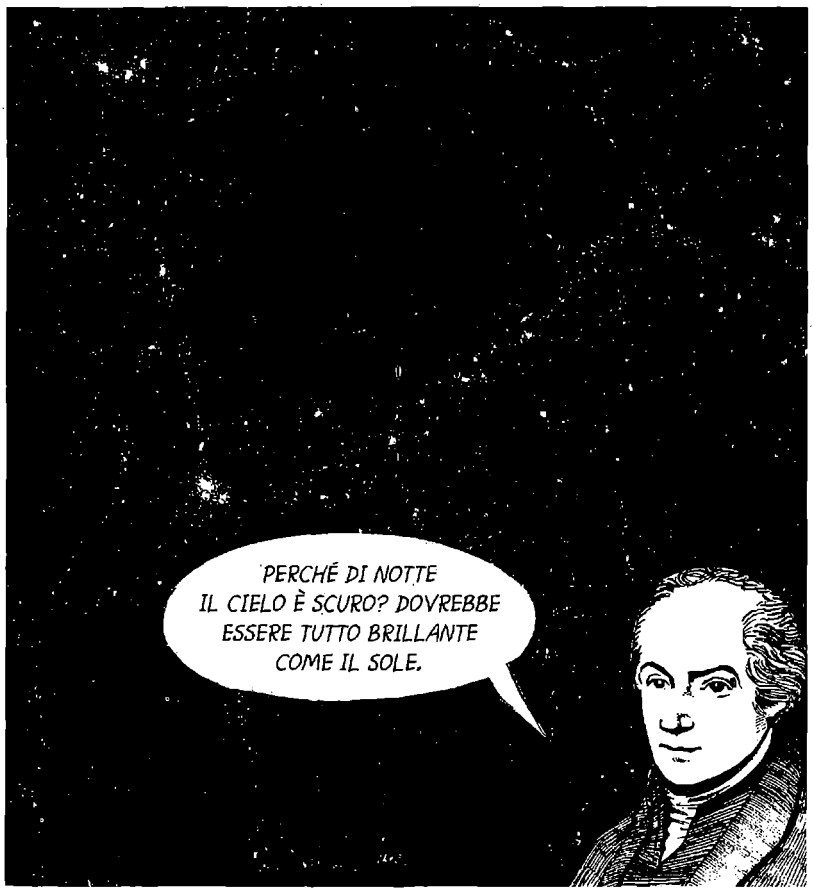
In mezzo alla folla la nostra attenzione si rivolge alla bolla del nostro spazio e sul quel poco di più che possiamo rilevare al di là di essa. Simulazioni al computer dei flussi di folla producono strutture straordinarie per la loro natura frattale, e hanno la stessa struttura a tutte le scale. Appaiono come strutture organiche, davvero affascinanti.



Le simulazioni dei flussi ricordano molto spesso sia strutture floreali come quelle delle orchidee. E il lavoro di Still è utilizzato sia nella progettazione degli stadi sia nella intricata definizione dei modelli degli ecosistemi.

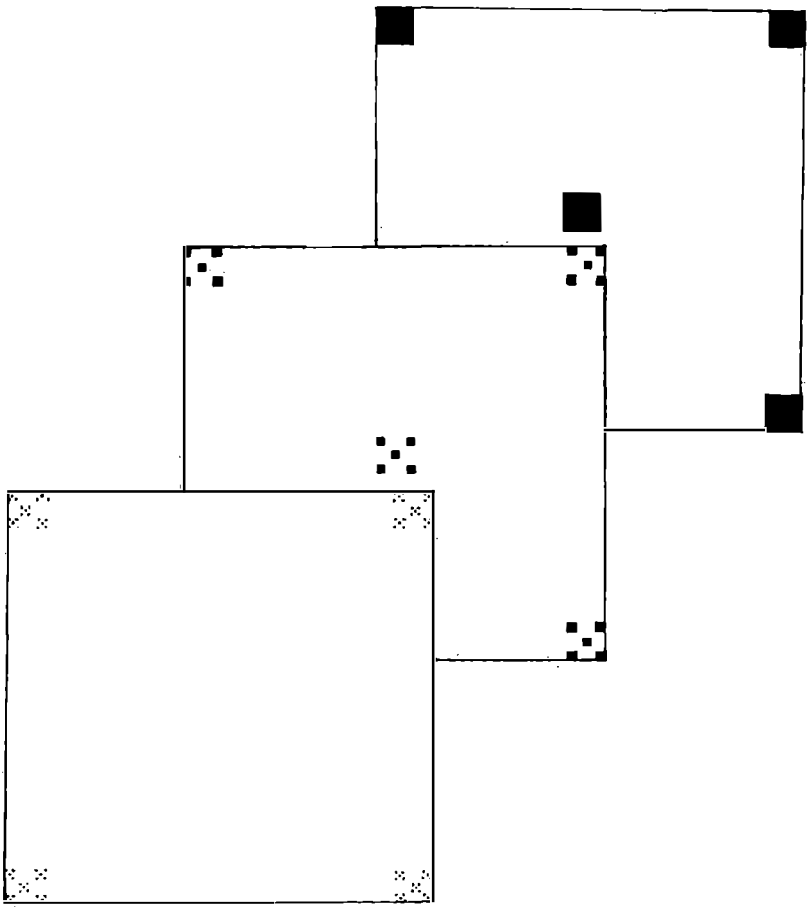
Il paradosso di Olbers

Uno dei più affascinanti frattali della natura è il cielo stellato. Ovunque si guardi c'è una stella. Fra due stelle c'è sempre un'altra stella. Nel 1826 **Wilhelm Olbers** osservò che in un universo abbastanza grande il cielo notturno dovrebbe brillare in modo uniforme.



Dato che la luminosità decresce con il quadrato della distanza e così pure la dimensione apparente, la quantità totale di luce proveniente da qualsiasi direzione nello spazio dovrebbe essere sempre la stessa.

Già nel 1907 **Edmund Fournier d'Albe** suggerì un modello per affrontare questo problema della distribuzione della materia nell'Universo. Egli disse: si prendano cinque punti disposti a quadrato, con un punto al centro. Si sostituisca ciascun punto con una copia a scala più piccola dell'intera struttura. Ma non ci si fermi qui: si continui a sostituire ogni punto del nuovo diagramma con un duplicato ancora più piccolo dell'intera struttura, e così via...

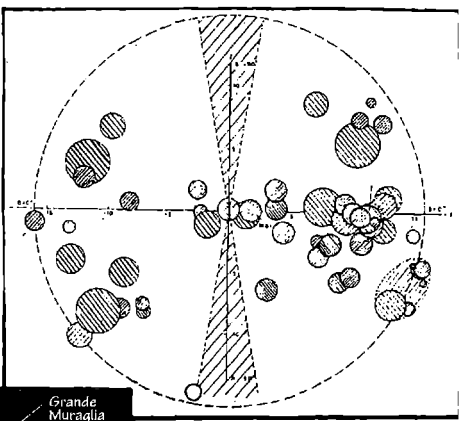


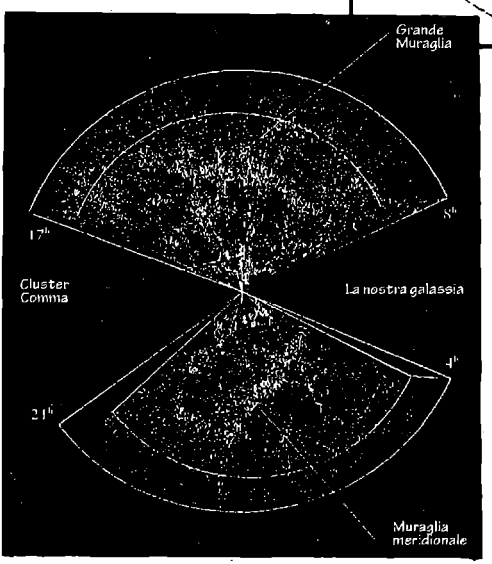
Al limite, vi ritrovate con un frattale di Fournier. Anche se in modo estremamente semplificato, esso mostra che un universo infinito, se ha una struttura frattale, non deve essere necessariamente brillante in ugual misura in tutte le direzioni.

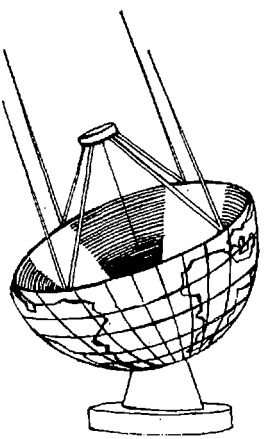
La Grande Muraglia

I pianeti si raggruppano a formare sistemi solari. Le stelle si assembrano a generare ammassi stellari. Gli ammassi stellari si assiepano a formare galassie. Le galassie si uniscono per dare origine ad ammassi galattici e questi a loro volta si raggruppano in super-ammassi.

I principali gruppi di galassie entro 16 megaparsec di distanza dalla Terra.

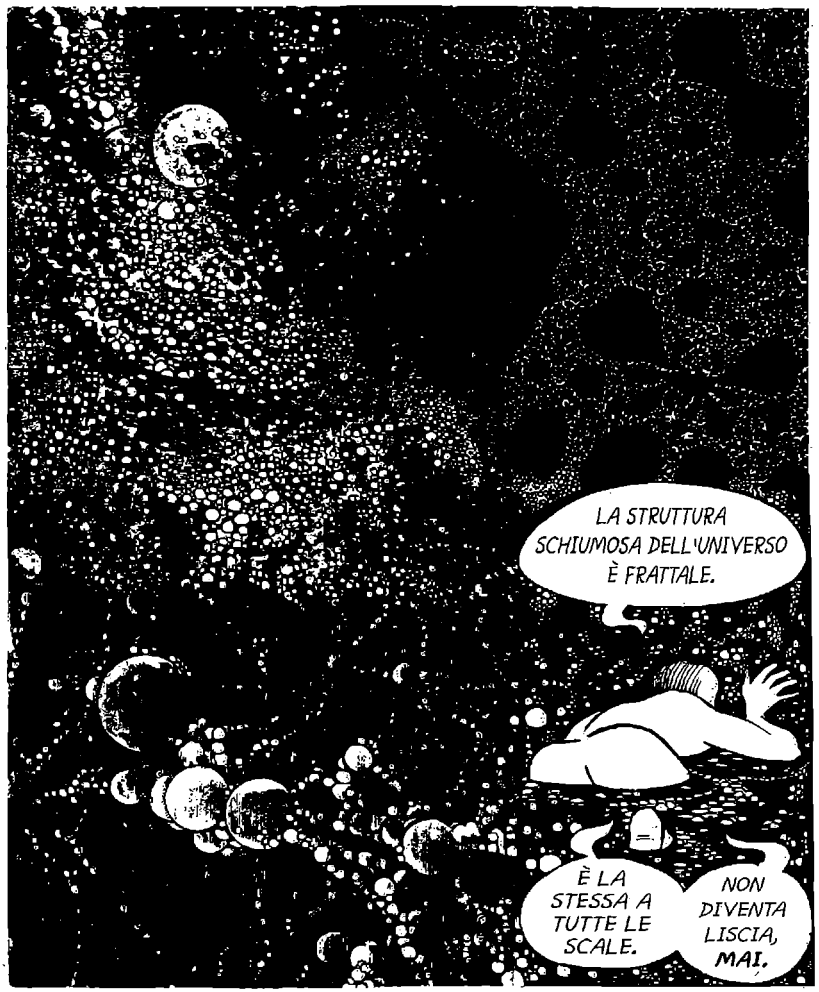






Nel 1986 gli astronomi scoprirono che alcuni ammassi galattici erano costituiti da diversi agglomerati di materia del diametro di un miliardo di anni luce. Nel 1989, **John Huchra** e **Margaret Geller** dello Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics scoprirono un enorme strato di galassie noto come la Grande Muraglia.

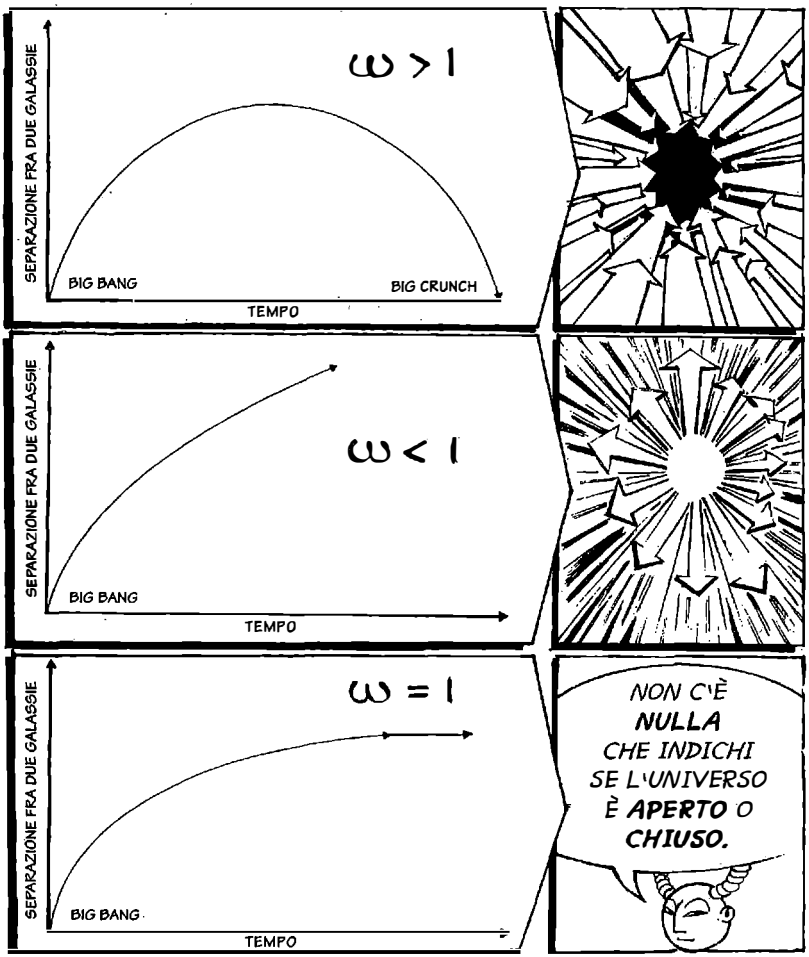
La reale geometria dell'Universo in tre dimensioni somiglia a una schiuma. Tutta la materia dell'Universo – le stelle, i pianeti, e tutti gli altri elementi (noti e, verosimilmente, non noti) – si trova sulle bolle di una schiuma. In mezzo agli ammassi galattici ci sono immensi vuoti che non contengono assolutamente nulla.



Usando i frattali, i ricercatori oggi possono sviluppare modelli dell'evoluzione e della struttura – e anche del destino – delle nubi di polvere interstellare.

Il Big Bang

L'Universo mostra una struttura frattale a scale al di sopra dei 100 milioni di anni luce, con una dimensione frattale compresa fra 1 e 2. Ora che sappiamo che è frattale a tutte le scale osservabili, i cosmologi possono riconsiderare sotto una nuova luce uno dei maggiori problemi che riguardano la teoria del Big Bang sull'origine del cosmo.



La lettera greca omega rappresenta il rapporto fra la densità della massa osservata e la densità critica che porterebbe per gravità a far collassare l'Universo su se stesso. A quanto risulta, esso è situato in una posizione critica: il suo omega è quasi esattamente uguale a 1. È "piatto"

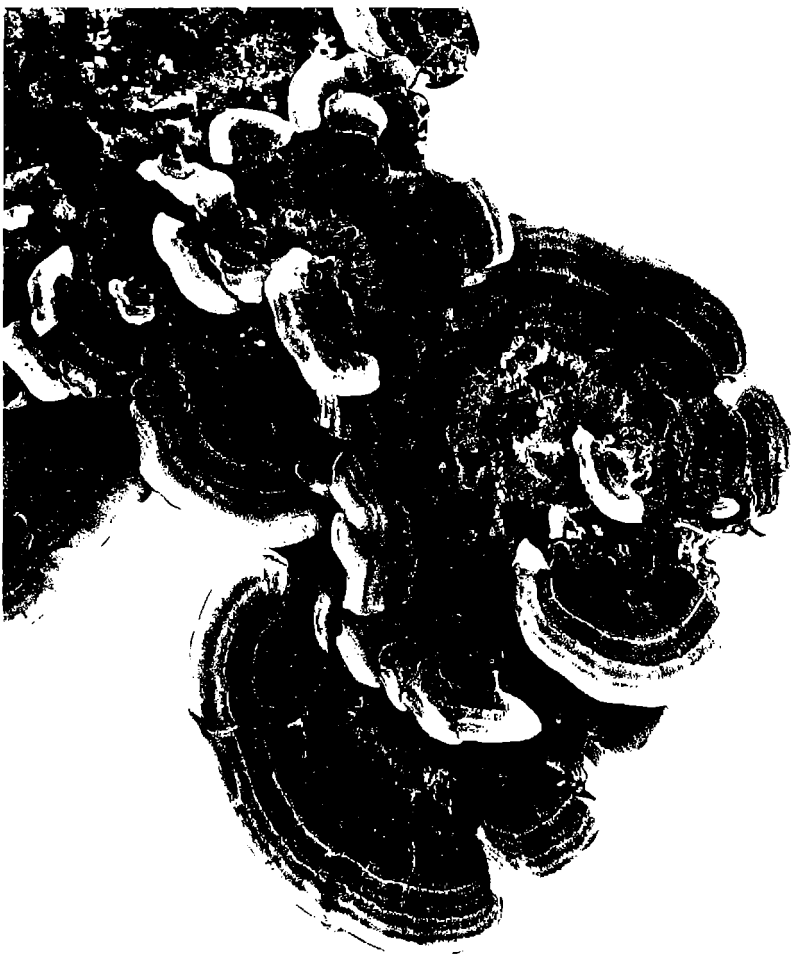
Molti fisici e cosmologi, inclusi Stephen Hawking e colleghi, hanno ammesso che un Universo con un omega uguale a 1 porrebbe enormi problemi al modello del Big Bang.

Ci sono molte altre questioni relative alla teoria del Big Bang che andrebbero risolte. **Hannes Alfvén**, lo svedese premio Nobel e artefice della teoria cosmologica del plasma, la mette in questo modo.



Connessioni cosmiche

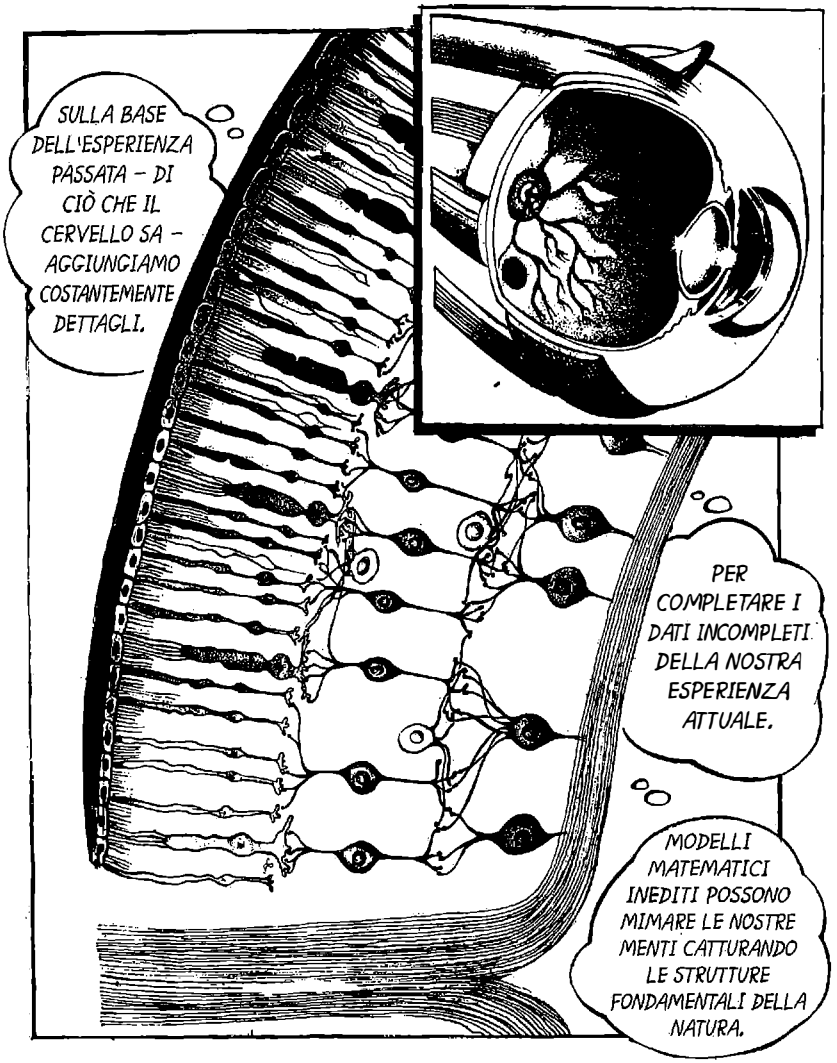
Proprio come la geometria frattale consente ora ai cosmologi di gettare nuova luce su questi delicati problemi, l'ultima versione della ipotesi dell'inflazione cosmica applicata al Big Bang implica che l'Universo sia in effetti un frattale autogenerante, una creazione senza fine di altri universi al di fuori di sé. Ciò indicherebbe che non è solo la struttura dell'Universo a essere frattale, ma anche la sua evoluzione.



Secondo la teoria dell'inflazione, una catena di reazioni dà luogo a una struttura frattale di universi entro universi. In tal caso non ci sarebbe fine all'evoluzione a tutte le scale.

Come vediamo?

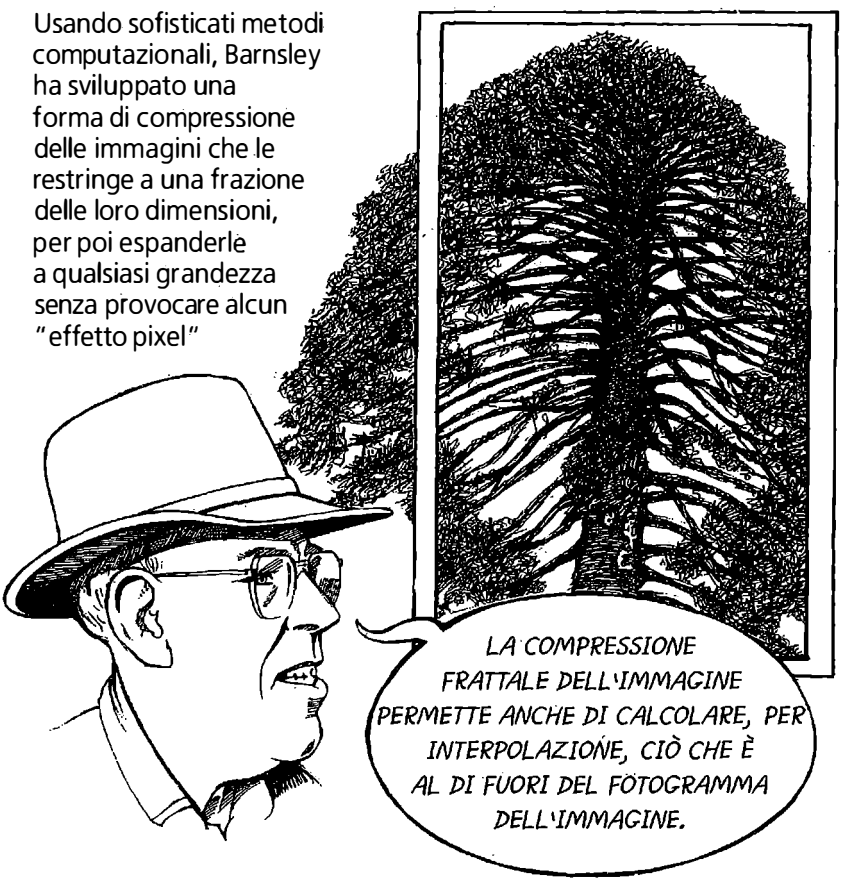
I nostri cervelli producono immagini di risoluzione assai superiore a quella dei segnali registrati dai nostri occhi. La risoluzione retinica è limitata dalla qualità dell'immagine fornita dai cristallini e dalle cornee, dalla stessa natura ondulatoria della luce (nel medesimo modo in cui è limitata la risoluzione di un telescopio), e dalla separazione e dimensione dei fotorecettori che ricevono l'immagine.



Compressione frattale delle immagini

Michael Barnsley ritiene che la nostra corteccia visiva sfrutti un qualche tipo di algoritmo frattale per ottimizzare la propria sensibilità per caratteristiche e dettagli importanti che siano presenti nel nostro campo visivo.

Usando sofisticati metodi computazionali, Barnsley ha sviluppato una forma di compressione delle immagini che le restringe a una frazione delle loro dimensioni, per poi espanderle a qualsiasi grandezza senza provocare alcun "effetto pixel"



Un gruppo di ricercatori del Georgia Institute of Technology, diretto da Barnsley, ha scoperto un metodo per riprodurre realisticamente forme anche estremamente complicate grazie a un processo, detto di "trasformazioni affini", che le fa apparire simili all'originale.

Trasformazioni affini

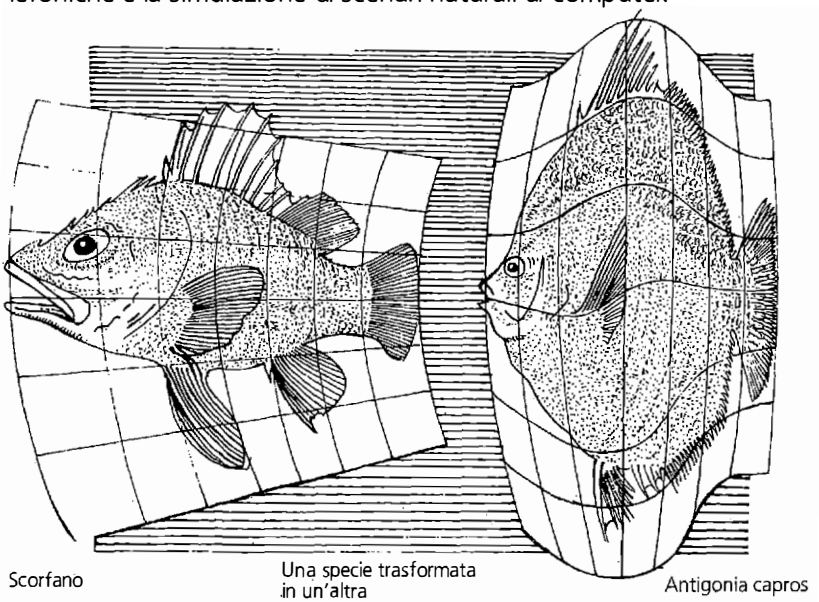


Un processo di rotazione, stiramento e spostamento è detto trasformazione affine.

Una trasformazione affine può essere espressa in termini matematici con pochi numeri, ossia con una rappresentazione affine. Questi numeri sono coefficienti inseriti in una equazione standard.

Morfogenesi

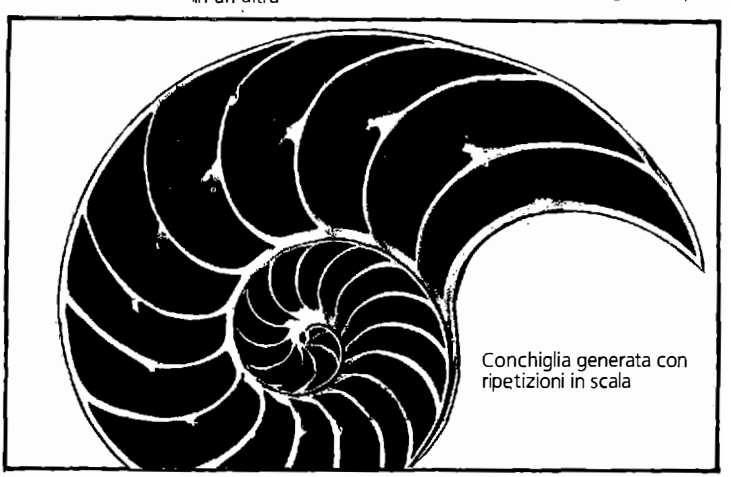
Le implicazioni che le trasformazioni affini possono avere per la **morfogenesi** (il modo in cui si sviluppano le forme degli organismi viventi) nel mondo reale sono ancora da esplorare. Ma in termini pratici immediati, gli scienziati sperano che queste trasformazioni consentano loro di arrivare a metodi sempre più efficienti per l'archiviazione di dati complessi nelle memorie digitali, la trasmissione di fotografie sulle linee telefoniche e la simulazione di scenari naturali al computer.



Scorfano

Una specie trasformata in un'altra

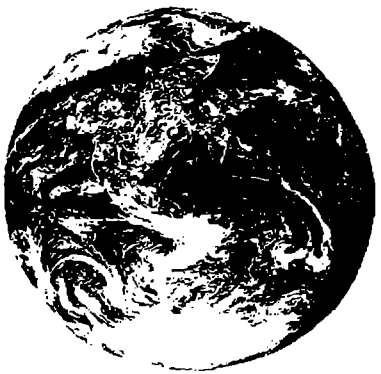
Antigonia capros

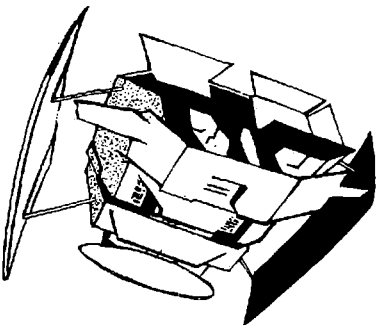


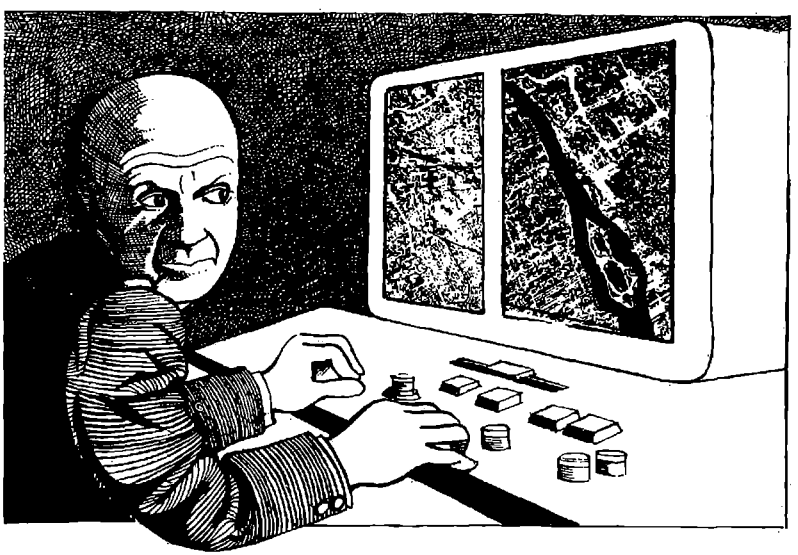
Conchiglia generata con ripetizioni in scala

Satelliti

I satelliti meteorologici sono entrati in funzione tempo fa e ci forniscono dati utili che saranno elaborati per decenni. I satelliti spia che controllano la Terra forniscono immagini di specifico interesse militare con una definizione migliaia di volte superiore a quella dei satelliti meteorologici! I satelliti spia hanno la necessità di trasmettere a terra quantità enormi di dati.







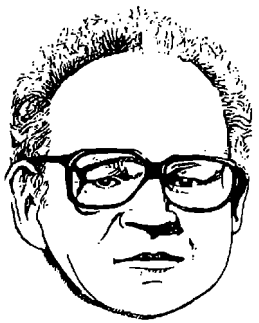
La compressione dei dati – la capacità di comprimere immagini, trasmetterle e ri-espanderle una volta arrivate a destinazione – è un'esigenza militare della massima priorità.

I mercati monetari

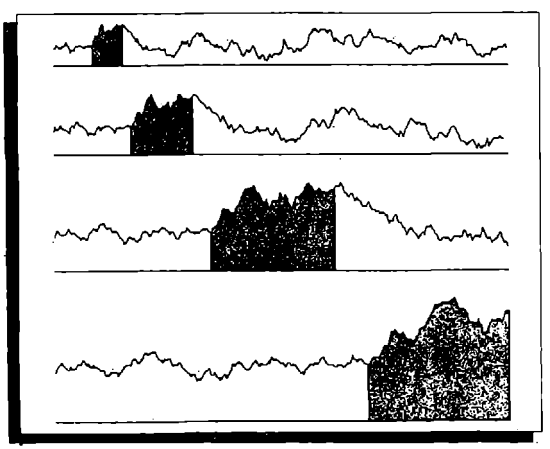
La presenza dei frattali si è rivelata tanto pervasiva in economia quanto nelle scienze naturali. Uno dei più recenti libri di Mandelbrot (*Fractal and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, del 1997), così denso di significati, è stato, al pari di altri suoi lavori, un manifesto di sfida. Forte delle sue precedenti profonde intuizioni, vi affrontava un nuovo mondo di problemi matematici. La recensione del libro apparsa sulla rivista *Scientific American* si intitolava: "UN FRATTALE SI AGGIRA PER WALL STREET"



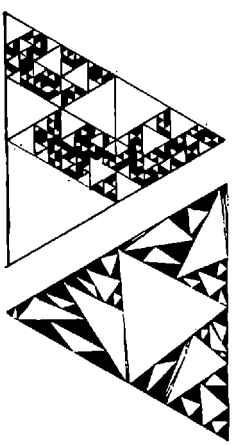
Ecco come Mandelbrot riassume l'essenza della sua argomentazione.



Il modello più semplice della variazione delle quotazioni azionarie presuppone la forma più elementare di casualità, quella tipica di una particella subatomica in movimento; i fisici parlano di moto browniano, ma applicata alla fluttuazione delle quotazioni nei mercati finanziari è stata chiamata "passeggiata aleatoria" Che sia semplice o raffinata, la casualità è un'idea intrinsecamente difficile, che sembra scontrarsi con la forza dei fatti o delle intuizioni. In fisica si scontra con il determinismo, e in finanza con esempi di evidenti processi causali, per cui una quotazione cambia bruscamente in seguito a qualche particolare evento.



Il moto browniano in una dimensione a differenti scale



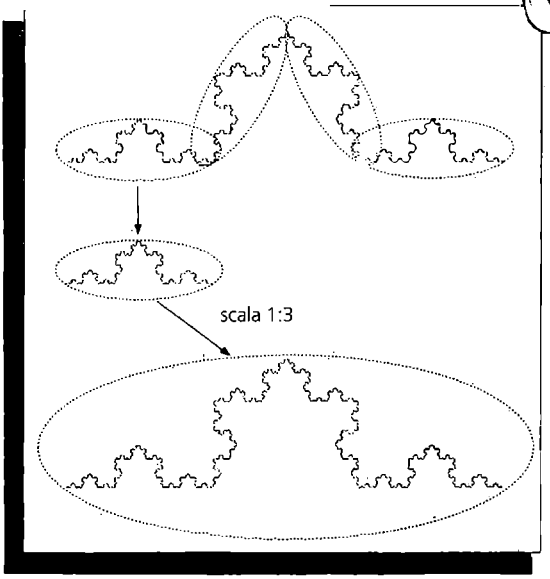
Due triangoli di Sierpinski randomizzati

Che cosa sono le regole?

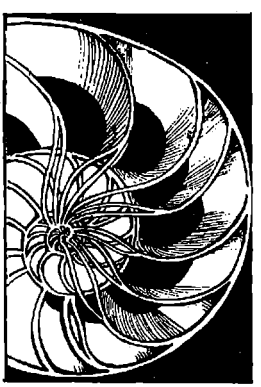
Mandelbrot è sempre stato convinto che le sue ricerche avrebbero mostrato che probabilità, statistica e geometria frattale potevano contribuire a descrivere matematicamente il modo in cui si comportano i mercati. Si trattava di scoprire e smascherare le regole soggiacenti.

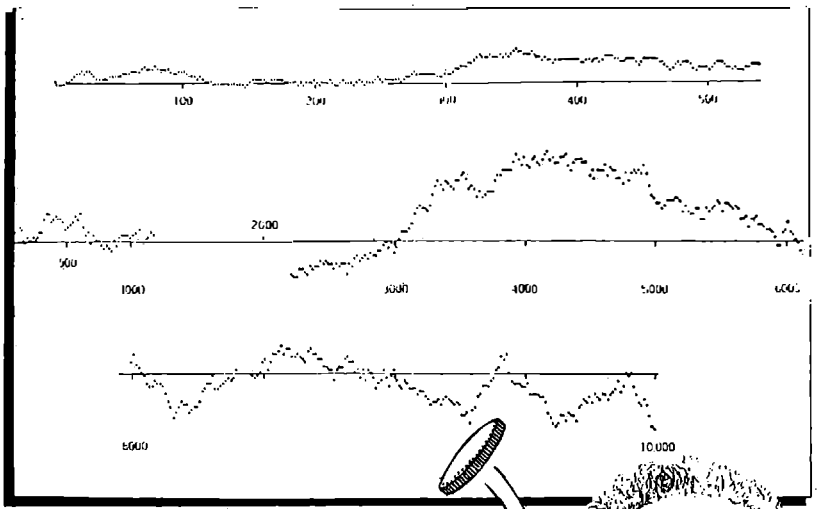
Un'estesa base matematica già esiste per i frattali e i multi-frattali. Strutture frattali non compaiono solamente nelle variazioni delle quotazioni dei titoli, ma nella distribuzione delle galassie nel cosmo, nella forma delle linee delle coste e nelle decorazioni create da innumerevoli programmi informatici. Un frattale è una forma geometrica che può essere separata in parti, ciascuna delle quali è una versione a scala ridotta dell'intero.





Come la ripetizione frattale produce una scalatura





L'importanza della scala: risultati del lancio di una moneta

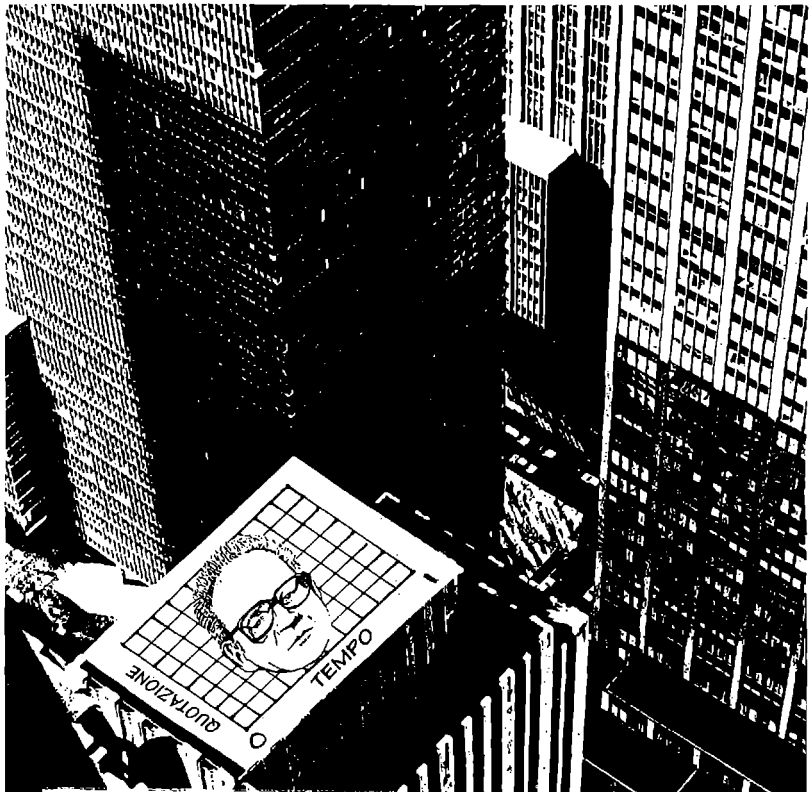


Nella finanza questo concetto non è un'astrazione priva di fondamento, ma una riformulazione teorica del "ritorno alla terra" del folklore dei mercati; in effetti le fluttuazioni di un'azione o di una moneta appaiono tutte simili quando il grafico del mercato viene ingrandito o ridotto in modo da adattarlo alla stessa scala temporale e delle quotazioni. Un osservatore non è in grado di dire quale dei grafici riguardi i cambiamenti delle quotazioni di settimana in settimana, di giorno in giorno o di ora in ora. Questa proprietà definisce i grafici come curve frattali che possono essere analizzate da potenti strumenti matematici e di analisi al computer.

Autoaffinità del mercato

Un termine tecnicamente più specifico per questa somiglianza fra le parti e il tutto è **autoaffinità**. Questa proprietà è connessa a un aspetto della geometria frattale ben conosciuto – quello dell'autosimilarità, che noi abbiamo già discusso –, in virtù del quale ogni caratteristica di un'immagine è espansa o ridotta esattamente dello stesso rapporto. I grafici dei mercati finanziari sono tuttavia lungi, come sappiamo fin troppo bene, dall'essere autosimili.



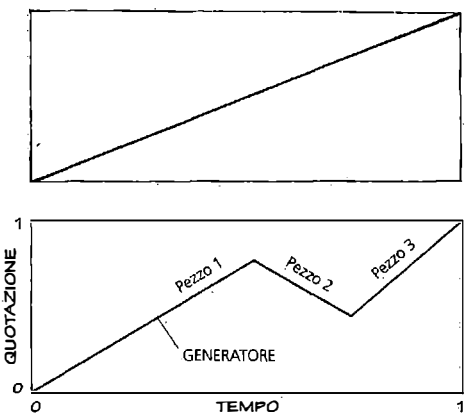


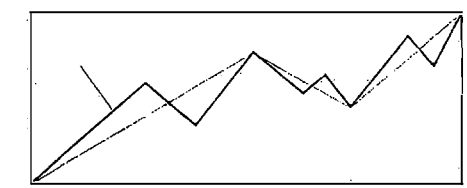
In un grafico dettagliato in cui le caratteristiche sono più alte che larghe – come nell'andamento in su e in giù del valore delle azioni – la trasformazione del tutto a una parte deve ridurre l'asse orizzontale più di quello verticale. Per un grafico delle quotazioni, questa trasformazione deve contrarre la scala temporale (l'asse orizzontale) più della scala delle quotazioni (l'asse verticale). La relazione geometrica del tutto con le sue parti è detta autoaffinità. L'esistenza di proprietà che non cambiano non gode di troppa stima presso la maggior parte degli statistici. Fisici e matematici come me, invece, la adorano: la chiamano invarianza e si rallegrano quando un modello presenta un'attraente proprietà di invarianza. Per avere un'idea di ciò che intendo, si può tracciare un semplice grafico che riproduca le variazioni delle quotazioni dal tempo 0 al tempo 1 in passi successivi. Gli intervalli stessi sono scelti in modo arbitrario: possono rappresentare un secondo, un'ora, un giorno o un anno.

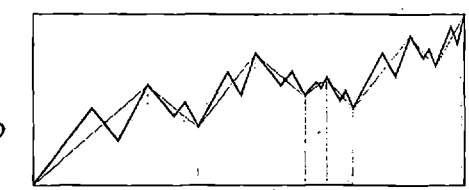
Generatori

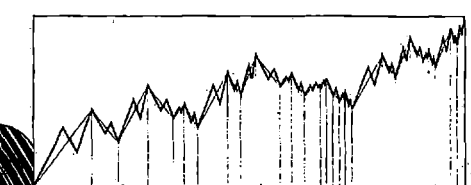
Il processo parte da una quotazione, rappresentata da una retta di tendenza. Quindi una spezzata, che Mandelbrot chiama generatore, viene utilizzata per creare lo schema che corrisponde alle oscillazioni in su e in giù delle quotazioni sui mercati finanziari.

Il generatore consiste di tre segmenti che sono inseriti (interpolati) lungo la retta di tendenza. (Un generatore con meno di tre segmenti non simulerebbe una quotazione che può salire e scendere.) Una volta delineato il generatore iniziale, i tre segmenti sono interpolati da altri tre più corti. Ripetendo questi passi si riproduce la forma del generatore, ovvero la curva delle quotazioni, ma a una scala compressa.



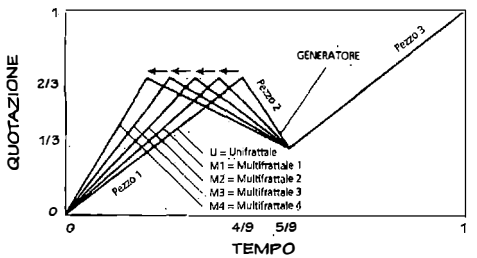




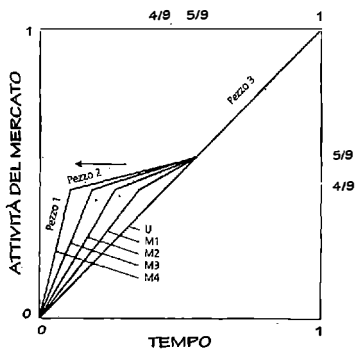




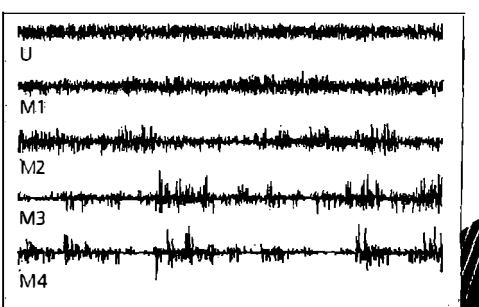
Spostando a sinistra un pezzo del generatore frattale...



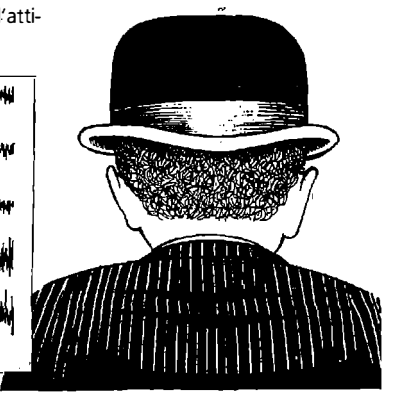
... si determina la stessa quantità di attività di mercato in un intervallo di tempo più breve per la prima parte del generatore e la stessa quantità in un intervallo più lungo per la seconda....



... Il movimento del generatore a sinistra fa sì che l'attività del mercato diventi via via più volatile



Sia l'asse orizzontale (del tempo) sia quello verticale (delle quotazioni) vengono "strizzati" per adattarsi ai limiti orizzontale e verticale di ciascun segmento del generatore. Qui sono mostrati solo i primi stadi del processo che, invece, continua. In teoria, potrebbe non aver fine, ma in pratica non ha senso interpolare fino a intervalli di tempo più brevi di quelli necessari alle transazioni, che possono avvenire in meno di un minuto. Chiaramente ogni segmento finisce per avere una forma abbastanza simile al tutto. In altri termini, l'invarianza di scala è presente semplicemente perché vi era stata inserita. La novità (e la sorpresa) è che queste curve frattali autoaffini esibiscono una struttura estremamente ricca, quella a fondamento sia della geometria frattale sia della teoria del caos.



Oltre la teoria del portafoglio

Pochi generatori "selezionati" portano alle cosiddette curve unifrattali che mostrano un quadro relativamente tranquillo del mercato, il quale corrisponde alla moderna "teoria del portafoglio" Ma la tranquillità prevale solo in condizioni estremamente particolari, che sono soddisfatte solo da questi speciali generatori. Le assunzioni sottostanti a questo modello super-semplificato sono quelle alla base degli errori della moderna teoria del portafoglio. È come se una teoria sulle onde del mare non contemplasse i flutti che superano il metro e ottanta. Il bello della geometria frattale è che rende possibile un modello sufficientemente generale, capace perciò di riprodurre le strutture che caratterizzano tanto i placidi mercati della teoria del portafoglio quanto le più tumultuose condizioni del mercato che così spesso si incontrano.



Multifrattali

Il metodo appena descritto per creare un modello frattale delle quotazioni può essere modificato per mostrare come l'attività dei mercati accelera e rallenta, che è l'essenza della volatilità. Questa variabilità è la ragione del prefisso "multi" che aggiungiamo alla parola "frattale"

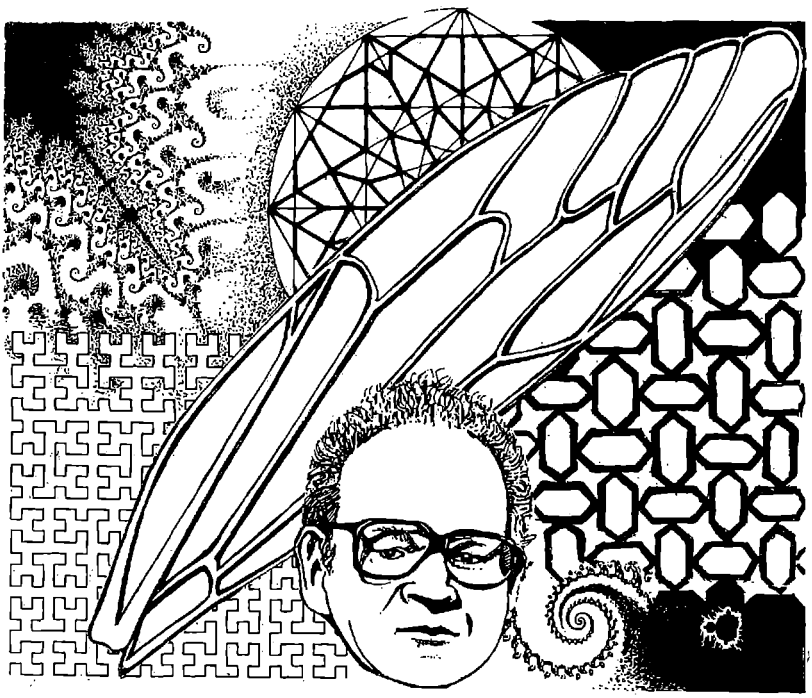
Mandelbrot ritiene che probabilità, statistica e geometria frattale possano aiutarci a descrivere che cosa avviene nei mercati monetari.



Le tecniche che propongo ci avvicinano non tanto a prevedere un crollo o una risalita in uno specifico giorno o istante, ma a stimare la probabilità di ciò che il mercato può fare, e a esservi pronti. In altri termini, un lume di ordine nell'apparentemente impenetrabile selva dei mercati azionari.

I frattali nell'arte: i mandala

Come ha notato lo stesso Mandelbrot: "C'è qualcosa di familiare nei frattali. Io ho avuto subito questa sensazione: la primissima volta che li ho visti, ero certamente la prima persona a osservarli! Non c'era assolutamente la possibilità che qualcuno fosse riuscito a scorgerli prima di me. Ma dopo alcuni giorni o forse alcune ore, se non minuti, mi apparivano già familiari. Vi riconoscevo delle proprietà che avevo già visto da qualche parte. Ma dove? Bene, innanzitutto nei fenomeni naturali, ma anche nell'arte"



Se ingrandiamo il bordo dell'M-insieme, troviamo "molecole" isolate sempre più piccole circondate da strutture circolari via via più complicate che evocano l'arte orientale e, in particolare, i mandala quegli strani disegni di cui i buddhisti si servono durante la meditazione.

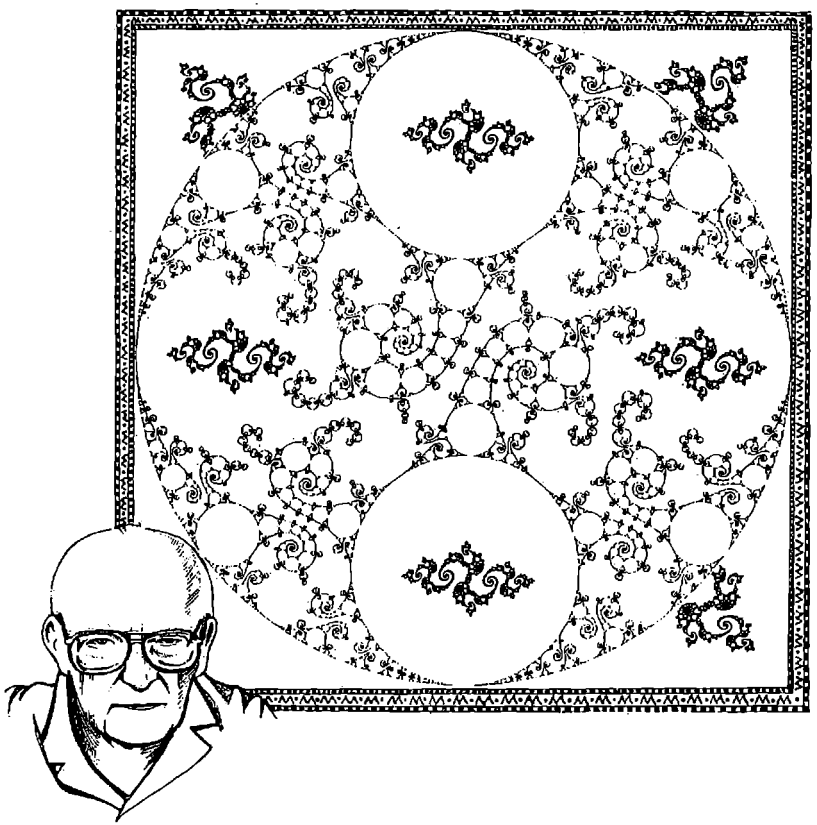
Nel buddhismo Mahayana la natura frattale della realtà è illustrata, nell'*Avatamsaka Sutra*, con la metafora della rete di Indra: un vasto reticolo di gemme preziose sospeso sul palazzo del dio Indra, disposto in modo che quando se ne guarda una, si vedono riflesse in essa tutte le altre.



Sappiamo che aree differenti del cervello elaborano forme, colori e movimento. Benoît Mandelbrot ha ipotizzato che, forse, esiste uno specifico circuito cerebrale per elaborare la complessità frattale.

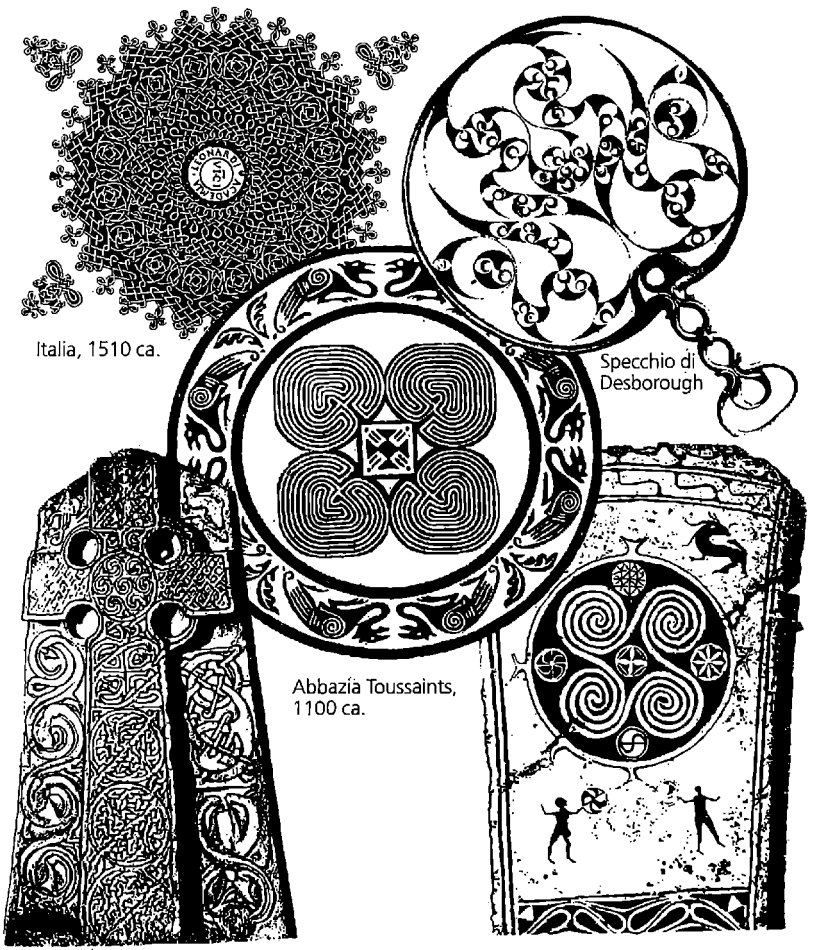
Strutture decorative: autosimilarità

I motivi astratti e curvilinei dell'antica arte decorativa islamica che si ammirano nei mosaici e nei tappeti continuano a comparire a tutte le scale di ingrandimento sulla frontiera dell'insieme di Mandelbrot.



Arthur C. Clarke pensava che potesse trattarsi solo di una coincidenza, "ma – ha scritto – l'insieme di Mandelbrot sembra in effetti contenere un enorme numero di mandala o di simboli che si trovano nei manufatti religiosi, come le vetrate a piombo delle cattedrali e ancor più nell'arte islamica. Troviamo molte forme, come le decorazioni Paisley, che riecheggiano l'insieme di Mandelbrot molti secoli prima che esso venisse scoperto!"

Le forme frattali sono state espresse intuitivamente dagli artisti molto tempo prima di essere riconosciute dalla scienza. Strutture autosimili compaiono nei manufatti celtici, per esempio le spirali e i cerchi all'interno di cerchi delle pagine stupendamente miniate del *Libro di Kells* (noto anche come *Grande Evangeliario di san Colombano*) del IX secolo, o lo specchio di Desborough del primo secolo d.C. La consapevolezza matematica, e in particolare la consapevolezza frattale, si rivela anche nell'arte degli antichi Romani e degli Egizi, come pure nell'opera delle civiltà degli Aztechi, degli Inca e dei Maya del Centro e Sud America. Forme che richiamano fortemente la curva di Koch sono state impiegate in un fregio dagli artisti dell'antica città greca di Akrotiri.



Italia, 1510 ca.

Specchio di Desborough

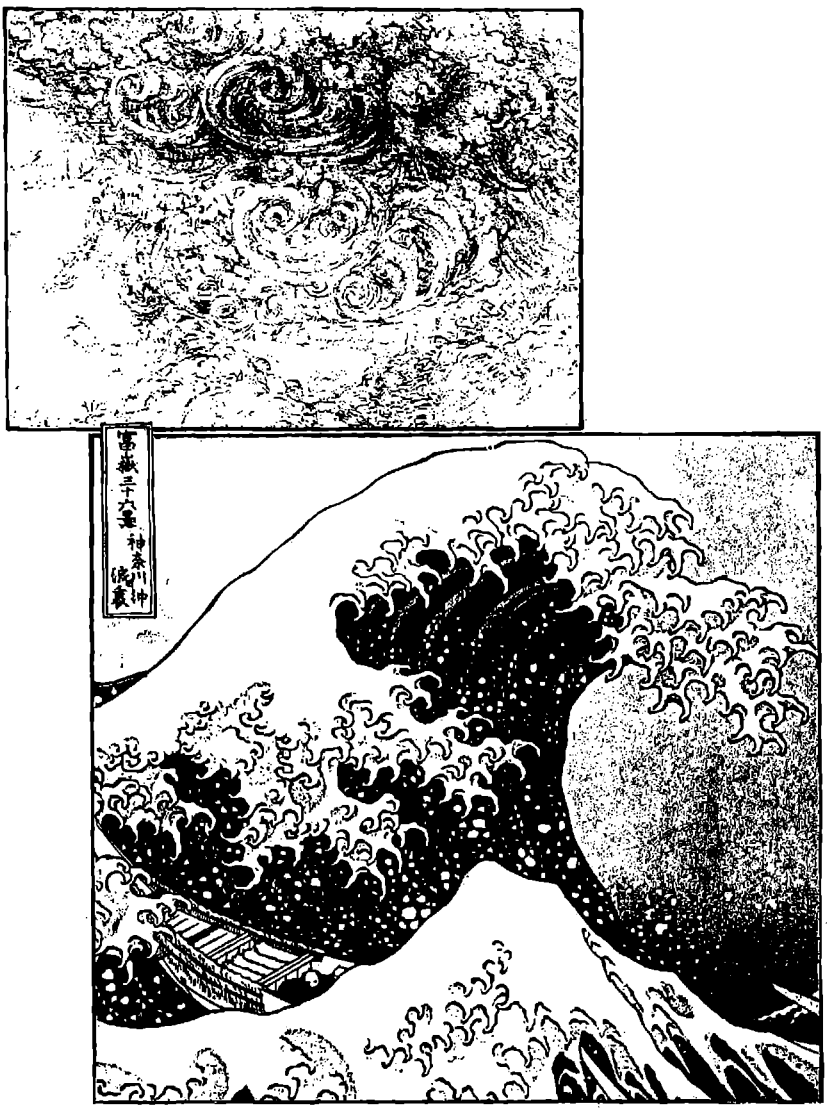
Abbazia Toussaints, 1100 ca.

Aberfemno, Scozia

Pietra runica di Gotland, Svezia, 400 a.C.

Scalamento e ripetizione

La grande onda di Kanagawa dell'artista giapponese **Katsushika Hokusai** (1760-1849) e il *Diluvio* di **Leonardo da Vinci** (1452-1519), conservato oggi a Windsor, riflettono una profonda sensibilità per la dinamica dell'acqua, ove trionfa la tipica ripetitività di tale elemento, in dettagli che si fanno via via più minuti.



Una delle opere d'arte preferite dal matematico Ian Stewart è la xilografia di Hokusai *Cascata a Yoshino*, nella quale "la forma centrale è un artiglio che compare a varie scale e in numerose trasformazioni nella vegetazione, nell'acqua, nelle rocce, nel cavallo e nei due uomini che lo tengono. La forma ricorrente conferisce all'opera un senso di unità, di diversità e di completezza."

In epoca più recente, **Salvador Dalí** (1904-1989) e **M.C. Escher** (1898-1972) hanno esplorato l'idea di forme che contengono copie di se stesse. I quadri del pittore espressionista astratto **Jackson Pollock** (1912-1956) possono essere correttamente datati sulla base della loro dimensione frattale.



Indizi nel paesaggio

L'arte è una di quelle cose che non dobbiamo sempre riconoscere o capire immediatamente. L'artista ci aiuta a vedere più chiaramente le cose rivelando strutture che prima sembravano nascoste. L'arte è frattale. L'arte riflette ed esprime la natura frattale della nostra percezione cosciente del mondo interpretata dal nostro cervello frattale.



Bill Hirst, lo scienziato e fotografo britannico, ha scritto: "Se si eliminano indizi come l'orizzonte dall'immagine di un paesaggio, diventa difficile dire se si sta guardando della ghiaia, delle rocce o delle colline"



"C'era qualcosa che cercavo di comprendere. Non riguardava l'ordine e il caos, ma qualcosa a metà strada fra i due. Poi mi venne un'illuminazione, riguardava i frattali!"



I frattali in musica

L'analisi spettrale della musica, da quella classica alle nenie infantili, ha rivelato una notevole affinità con le strutture naturali, in particolare con la distribuzione frattale detta *rumore 1/f*, che si trova nel suono di una cascata o nel frangersi delle onde sulla spiaggia.



Tutta la musica da Bach ai Beatles, e persino il canto degli uccelli, è caratterizzata dal *rumore 1/f*, manifestando lo stesso bilanciamento dinamico fra prevedibilità e sorpresa, fra insipida monotonia e discordanza casuale. Vista sotto questa luce, la musica è essenzialmente una simulazione dell'armonia della natura.

Disfunzionalità dell'architettura moderna

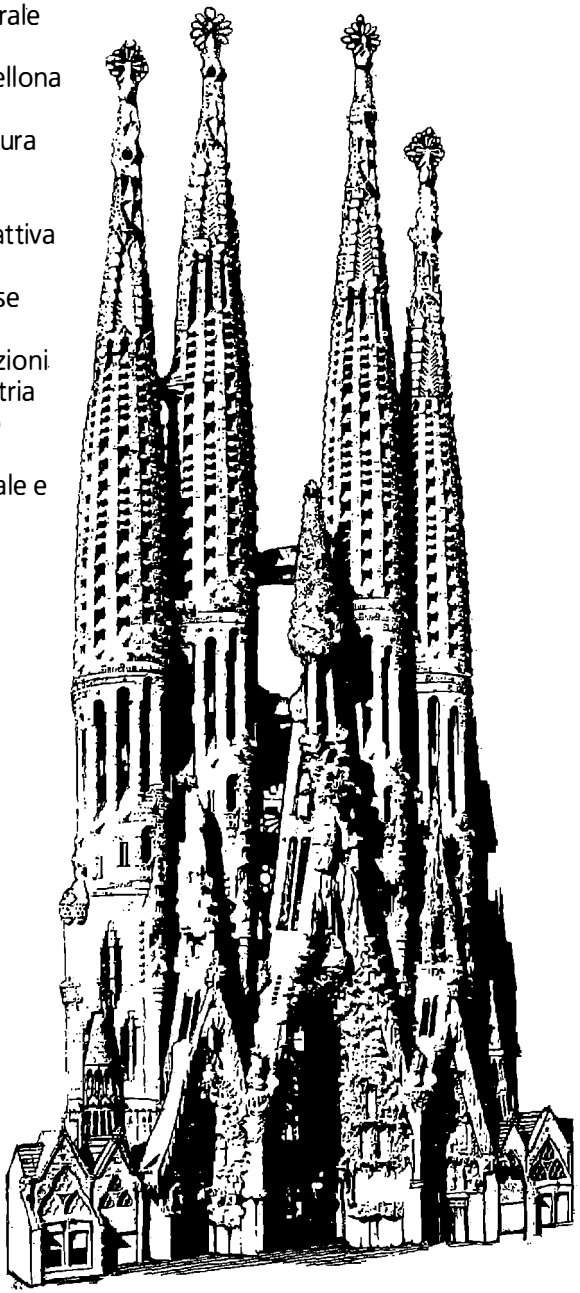


È perfettamente concepibile che il basso livello di complessità frattale dei moderni centri urbani sia un fattore che contribuisce fortemente all'elevata incidenza della depressione che si riscontra in tali ambienti.

Questi edifici moderni – uffici a blocchi, torri a blocchi, industrie a blocchi – non funzionano mai nel vero senso della parola. Non svolgono il ruolo per cui erano stati pensati. Diventano oggetto di disgusto e derisione. Finiscono per essere mal usati, diventano più brutti e anche meno "utili"

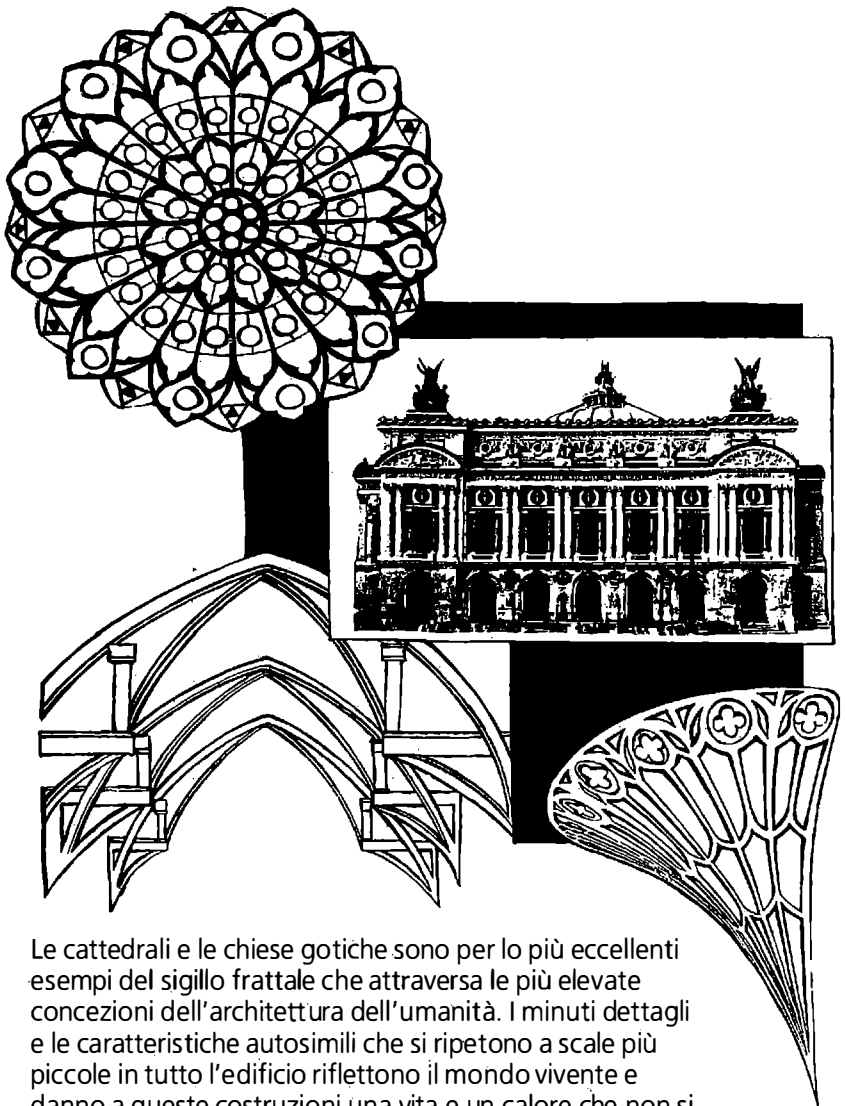
Architettura organica

L'incompiuta cattedrale di **Antonio Gaudí** (1852-1926) a Barcellona è uno stupefacente esempio di architettura frattale. È organica. È ricca di dettagli. È espressiva. È interattiva e affascinante. Le sue curve vorticose e arricciate, le sue dettagliate ramificazioni grondano di geometria "frattale"! L'edificio sembra quasi vivo. Questa qualità frattale e organica percorre, naturalmente, tutta l'opera di Gaudí.



Tradizioni frattali

Lo stesso può dirsi del palazzo dell'Opera (1875) di Parigi con i suoi fregi barocchi ricchi di intricati dettagli.

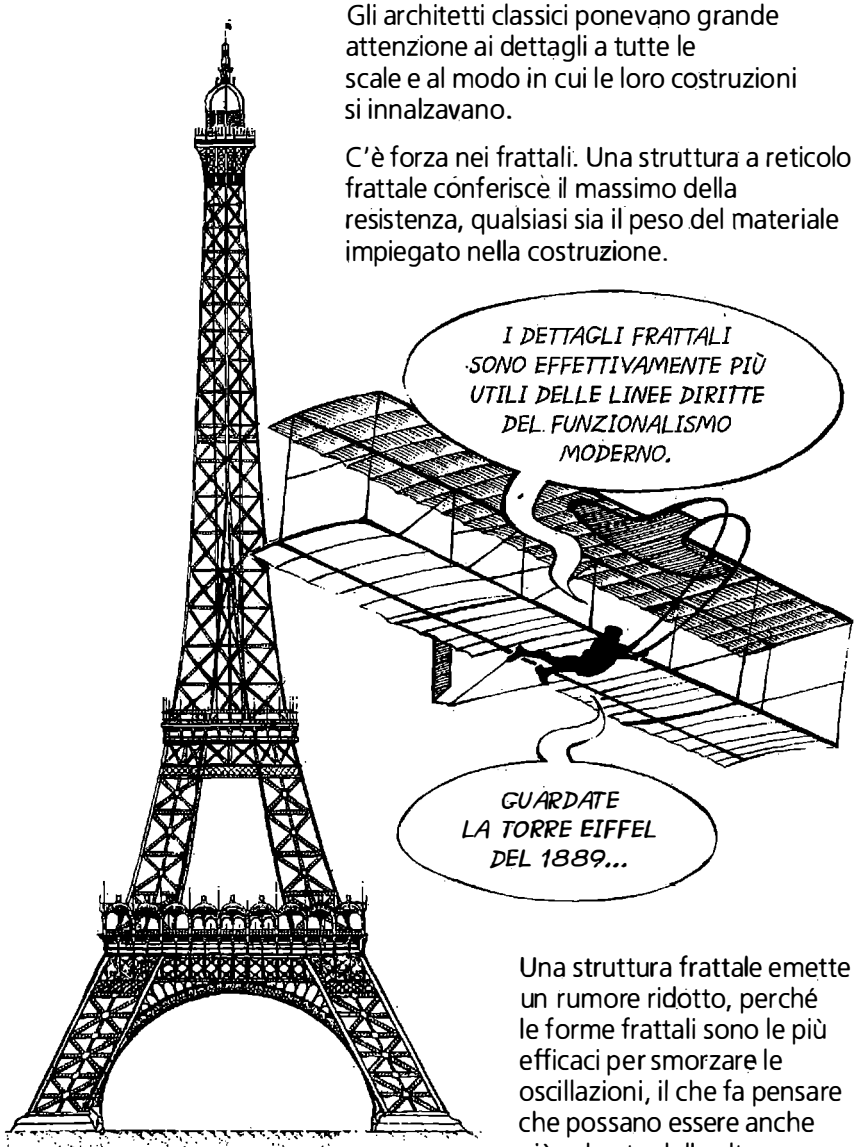


Le cattedrali e le chiese gotiche sono per lo più eccellenti esempi del sigillo frattale che attraversa le più elevate concezioni dell'architettura dell'umanità. I minuti dettagli e le caratteristiche autosimili che si ripetono a scale più piccole in tutto l'edificio riflettono il mondo vivente e danno a queste costruzioni una vita e un calore che non si ritrovano nell'architettura "utilitaristica"

La forza è nei dettagli

L'architettura è un'espressione della mente umana che coniuga utilità e arte. Gli architetti classici ponevano grande attenzione ai dettagli a tutte le scale e al modo in cui le loro costruzioni si innalzavano.

C'è forza nei frattali. Una struttura a reticolo frattale conferisce il massimo della resistenza, qualsiasi sia il peso del materiale impiegato nella costruzione.



Una struttura frattale emette un rumore ridotto, perché le forme frattali sono le più efficaci per smorzare le oscillazioni, il che fa pensare che possano essere anche più robuste delle altre.

Fracologia

Gli etnologi hanno recentemente trovato prove del fatto che le società africane tradizionali fossero modellate, sia pure in modo inconsapevole, su forme frattali. Le foto aeree degli insediamenti africani tradizionali rivelano una chiara struttura frattale sia nella ramificazione delle strade sia nella ricorsività delle recinzioni rettangolari e delle case circolari.



Vista aerea di Logone-Birni, Camerun

"Strutture che si ripetono ricorsivamente in scala possono essere trovate anche in altri ambiti della cultura africana, nell'arte, nella religione, nell'ingegneria indigena e perfino nei giochi. Nella motivazione progettuale e nella semantica culturale di molte di queste forme geometriche vi sono idee astratte e strutture formali paragonabili in maniera assai precisa ad alcuni degli aspetti fondamentali della geometria frattale.Questi risultati concordano con i più recenti sviluppi della teoria dei sistemi complessi: le società premoderne non statuali non erano né completamente anarchiche, né congelate in un ordine statico; sfruttarono piuttosto una flessibilità adattativa che approfittava della geometria frattale e degli aspetti non lineari delle dinamiche ecologiche.

Ron Eglash, Dipartimento di scienza e tecnologia,
Rensselaer Polytechnic Institute





Quo vadis?

Dal 1975, quando Mandelbrot coniò la parola "frattale", fino al 1980 quel termine apparve solo in una manciata di articoli accademici. Ma nel 1990 si contavano oltre 5000 scritti all'anno che contenevano nel titolo la parola "frattale"

C'era un nuovo strumento che poteva essere utilizzato a tutto campo nella scienza, anche se forse, come ha osservato **Leo Kadanoff** dell'Università di Chicago, "a dispetto della bellezza e dell'eleganza delle osservazioni fenomenologiche su cui si fonda la disciplina, la fisica dei frattali è, per molti versi, un tema di ricerca che deve ancora emergere. Si può sperare, e anche immaginare, che alla fine verrà sviluppata una base teorica per fondare questo campo."

Forse, è ancora presto, ma alla domanda se i frattali portassero da qualche parte, Arthur C. Clarke ribatté...



Non tutti concordano...

In un severo articolo apparso su *The Mathematical Intelligencer*, **Steven G. Krantz** dell'Università della California a Santa Cruz ha scritto: "Mandelbrot è bravo a inventare bei problemi. Non credo che abbia dimostrato alcun teorema come risultato di questi studi e, d'altra parte, non è quello che pretende di fare. Come dice lui stesso, è un filosofo della scienza."

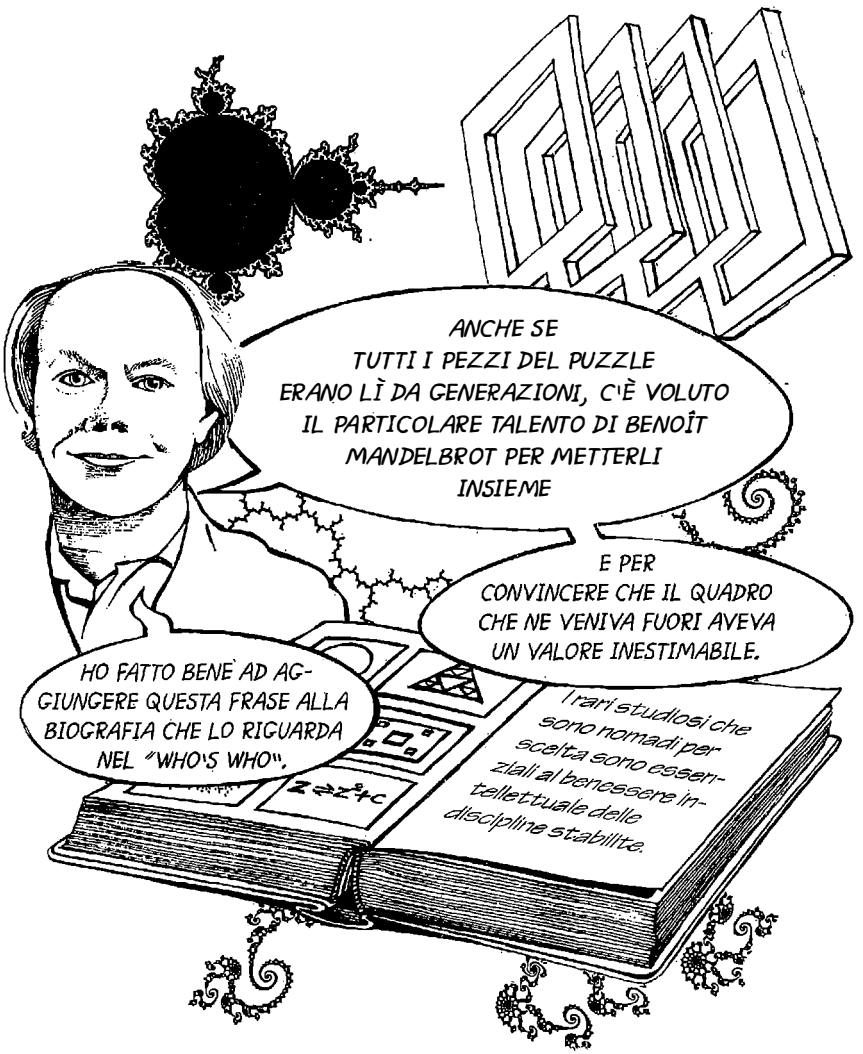
Ecco cosa risponde Mandelbrot a propria difesa.



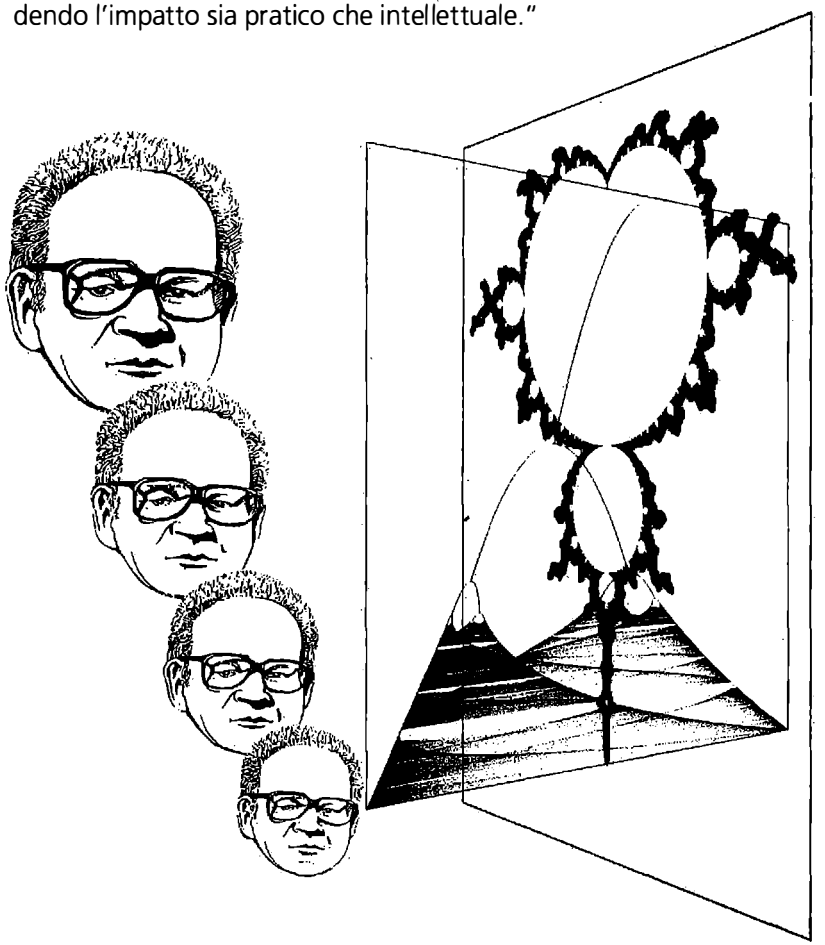
Mandelbrot si è sempre considerato un uomo d'azione. La sua è una geometria del mondo reale, di azione e reazione, di causa ed effetto. Ed effettivamente con la sua geometria si possono *fare cose*. "Il mio lavoro, e quello di quanti ho ispirato, non lo si trova certo nelle riviste di filosofia, ma in quelle che si occupano di matematica, scienza e arte *in atto*."

Il particolare talento di Mandelbrot

Mandelbrot è stato insignito del Premio Wolf per la fisica nel 1993. Nella motivazione si legge che il premio è stato assegnato a Benoît Mandelbrot per "aver cambiato il modo in cui guardiamo al mondo grazie al concetto di geometria frattale". Questo è senz'altro corretto. Ian Stewart, matematico e campione della geometria frattale, ha riassunto l'essenza della storia di Mandelbrot nel suo libro *Dio gioca a dadi?*



Siamo solo agli inizi, per constatare che cosa può darci la geometria frattale. È questo il pensiero di Ian Stewart. "Grazie allo sviluppo di nuove teorie matematiche come la geometria frattale, le strutture più elusive della natura iniziano a rivelare i loro segreti. Ne stiamo già vedendo l'impatto sia pratico che intellettuale."



La nostra nuova comprensione delle regolarità segrete della natura comincia a essere usata per dirigere i satelliti artificiali verso nuove destinazioni con molto meno carburante di quanto si sarebbe ritenuto possibile; per ridurre l'usura delle ruote delle locomotive e di altre strutture rotanti; per migliorare l'efficienza dei pacemaker cardiaci; per gestire aree forestali e allevamenti ittici; perfino per produrre lavastoviglie più efficienti. Ma la cosa più importante è che ci dà una visione più profonda dell'Universo in cui viviamo e del nostro posto in esso.

Letture consigliate

The Fractal Geometry of Nature di Benoît Mandelbrot (W.H. Freeman, New York 1977). È l'opera da cui è nata la geometria frattale e la prima pubblicazione di Mandelbrot sulla sua scoperta. Un libro notevole, ma molto tecnico.

La mente nuova dell'imperatore di Roger Penrose (tr. it. Rizzoli, Milano 2000). Esplora il mistero della mente e della coscienza e include un affascinante capitolo sui frattali e sull'insieme di Mandelbrot o – come lo chiama Penrose – sul paese di Tor'Bled-Nàm.

Dio gioca a dadi? La nuova matematica del caos di Ian Stewart, tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 2009. Una divertente e stimolante introduzione alla nuova matematica della teoria del caos, che esplora approfonditamente la geometria frattale in questo contesto e traccia il retroterra storico della teoria.

The Turbulent Mirror di John Briggs e F. David Peat (Harper and Row, New York 1989). Una guida molto creativa e illustrata al caos e ai frattali. Un vero divertimento.

Fractals. Images of Chaos di Hans Lauwerier (Penguin, Londra 1991). Libretto di agile lettura, ma un poco tecnico e che richiede qualche conoscenza matematica per essere pienamente goduto.

Dynamical Systems and Fractals di Karl-Heinz Becker e Michael Dörfler (Cambridge University Press, Cambridge 1989; traduzione dal tedesco di Ian Stewart). Affronta la matematica del caos, i frattali e i sistemi complessi, ma è destinato a un pubblico tecnicamente preparato e abile con il computer.

Il fantasma del Titanic di Arthur C. Clarke (tr. it. Rizzoli, Milano 1994). In questo racconto immaginario del viaggio sui fondali dell'oceano di una nave affondata, l'autore traccia con abilità una descrizione "tascabile" dell'insieme di Mandelbrot.

Leadership and the New Science di Margaret J. Wheatley (Berrett-Koehler, San Francisco 1992). Il libro mostra come la nuova matematica fornisca una spiegazione di come organizziamo il lavoro e di come sia possibile migliorarlo in futuro. I frattali hanno una parte considerevole nell'argomentazione dell'autrice.

Fractals Everywhere di Michael Barnsley (Academic Press, San Diego 1988). Uno dei migliori libri di geometria frattale. Si tratta di un'opera fondamentale, ma destinata esclusivamente a matematici.

Fractals. The Patterns of Chaos di John Briggs (Thames and Hudson, Londra 1992). Un meraviglioso libro strenna illustrato che cattura ed esplora le caratteristiche frattali del mondo naturale alla luce della teoria del caos.

La scienza della vita. Le connessioni nascoste fra la natura e gli esseri viventi di Fritjof Capra (tr. it. Rizzoli, Milano 2004). L'autore presenta una sintesi radicale delle recenti scoperte nel campo della teoria della complessità, della teoria del caos e della geometria frattale.

From Here to Infinity di Ian Stewart (Oxford University Press, Oxford 1987). Definito una perfetta guida alla matematica di oggi, è decisamente accessibile e divertente.

Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications di Kenneth Falconer (John Wiley, New York 1990). Un resoconto approfondito della teoria dei frattali, della dimensione di Hausdorff e delle loro applicazioni fisiche.

Mazes for the Mind di Clifford A. Pickover (St Martin's Press, New York 1992). Un'esplorazione visiva delle frontiere della ricerca al computer sullo strano mondo del formaggio di Cantor e delle coltivazioni frattali delle formiche.

The Science of Fractal Images di Heinz-Otto Peitgen e Dietmar Saupe (Springer Verlag, Berlino 1987). Un libro meraviglioso che contiene ricette per la costruzione di molti stupefacenti frattali.

Altre letture interessanti sui frattali, il loro mondo, le possibilità che dischiudono

Gli oggetti frattali di Benoît Mandelbrot, tr. it. Einaudi, Torino 2000.

La bellezza dei frattali di Peter H. Richter e Heinz-Otto Peitgen, tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 1987.

Nel mondo dei frattali di Benoît Mandelbrot, tr. it. Di Renzo Editore, Roma 2005.

Il disordine dei mercati. Una visione frattale di rischio, rovina e redditività di Benoît Mandelbrot e Richard L. Hudson, tr. it. Einaudi, Torino 2005.

Come funziona il caos. Dal moto dei pianeti all'effetto farfalla di Ivar Ekeland, tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 2010.

Inoltre, sul sito del Festival della Matematica di Roma alla pagina http://www.auditorium.com/eventi/4894163 si può ascoltare la Lectio Magistralis tenuta (in inglese) da Benoît Mandelbrot il 18 marzo 2007 a Roma, con una introduzione (11 minuti) di Franco Brezzi.

Immagini e video molto suggestivi sono visibili su http://willrood.net/

Indice analitico

Accelerazione, 11
Aggregazione *vedi* DLA
Aeroplani e turbolenze, 126
Aggregazione limitata dalla diffusione *vedi* DLA
AIDS, 116
Alexander, Avian, 127
Algoritmo, 55
Ammassi galattici, 134
Analisi, 14
Antenne per cellulari, 126
Architettura, 162-165
Arte, 154-160
  buddhista, 154-155
  islamica, 156
Attrattori strani, 45, 48-49
  esempio, 57
Autoaffinità, 148
Autosimilarità, 25, 28, 148

Batteri, 115
Battito cardiaco, 120
Biforcazione, punto di, 59
Big Bang, 136-138
Bourbaki, 78

Calcolo infinitesimale, 10, 13
Cancro, 117-118
Cantor, Georg, 9, 18-21
Cantor, insieme di, 20-21, 24-25, 27, 81-84, 88
Cauchy, Augustin-Louis, 12, 14
Cayley, Arthur, 99
Caos, teoria del, 54, 61, 94
Caotica, orbita, 60
Cielo notturno, 132
Clarke, Arthur C., 156, 168
Complesso
  numero, 15, 67-68
  piano, 68-72
Computer, immagini al, 8
Conteggio dei riquadri, metodo, 30
Continuo, 18
Costa, misura della linea di, 34
Cultura africana, 166-167
Curva
  che riempie lo spazio, 22-23
  spigolosa, 14
Curve e calcolo infinitesimale, 13

Dendrite (insieme di Julia), 89
Derivata, 11
Diagonale di Cantor, 18
Differenziazione, 11
Dimensione, 24
  topologica, 24
DLA, 104-106

Ecologia, 128-129
Equilibrio stabile, 58
Escher, Maurits C., 38
Euclide, 9, 25

Faglia geologica, 122-123; *vedi anche* Terremoti
Fatou, Pierre, 70-72
Feedback
  modello di, 52-54
  negativo, 52-53
Feigenbaum
  costante di, 64-66
  punto di, 60
Feigenbaum, Mitchell, 64, 99
Fichi, albero dei, 60
Fiocco di neve, curva, 26
Flussi di persone, 130-131
Ford, Joseph, 55
Forense, 127
Forme della natura, 4-6, 41
Fournier, Edmund, 133
Frattale
  compressione delle immagini, 140
  dimensione 28-31
  forme della natura, 4-6, 41
  geometria, 7
  il primo, 14-21
  origine del termine, 7
Frattali
  aeroplano, 126
  corpo umano, 108-120, 139
  e mercati finanziari, 146-155
  e ricerca sull'AIDS, 116
  e telefoni cellulari, 126
  importanza dei, 3
  in architettura, 162-165
  in arte, 154, 160
  musica, 161
  nel mondo naturale, 101-102, 128-138
  origine, 8
  regole, 146
  uso militare dei, 127
Fratture ossee, 119

Gaudí, Antonio, 163
Geller, Margaret, 134
Generatori, 150
Geometria
  classica, 8
  frattale, 7

Gödel, Kurt, 63
Grande Muraglia, 134

Halley, Edmond, 10
Hausdorff, dimensione di, 36
Hausdorff, Felix, 24, 28-31
Hawking, Stephen, 113, 137
Hele-Shaw, esperimento, 105
Hirst, Bill, 160
HIV *vedi* AIDS
Huchra, John, 134

IBM e Mandelbrot, 80
Immagini, compressione, 140
Impronta viscosa, 104
Industria, uso dei frattali, 121-127
Infinitesimi, 10, 12
Infinito, 18
  lunghezza della linea di costa, 35
Insiemi in matematica, 16-21; *vedi anche* Julia, insiemi di; Mandelbrot, Benoît
Interi, 15, 18
Integrazione, 11
Iterazione, 55, 70

Julia, Gaston, 70-72
Julia, insiemi di, 71,86-93, 99
  mappa, 90

Kadanoff, Leo, 168
Keplero, Giovanni, 10
Koch, curva di, 26-29, 37, 81-82
Krantz, Steven G., 169

Laplace, Pierre-Simon de, 13
Lei Tan, 93
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 10
Li, Tien Yien, 62
Logaritmi, 28
Logistica, equazione, 54
Lorenz, attrattore di, 94
Lorenz, Edward, 33

Malthus, Thomas, 52
Mandelbrot, Benoît, 29-37
  all'IBM, 80
  attrattore frattale, 45
  e il mercato, 144-155
  formazione, 73-77
  insieme di, 90-93, 96-100
  numeri, 66
  origine del termine, 7
  Premio Wolf, 170
  su se stesso, 169
Mandelbrot, Szolem, 74
Maxwell, James Clerk, 13
May, Robert, 58
McKeon, Alan, 123
Medica, ricerca, 114-118
Mercati finanziari, 146-155
Militare, uso dei frattali, 127
Molle, produzione, 124-125
Morfogenesi, 142
Moto
  browniano, 154-155
  natura del, 12
Musica, 161

Nason, Guy, 122-123
Natura
  attrattori, 49
  e frattali, 101-102, 128-138
  forme della, 4-5, 41
Newton, Isaac, 10
Newton, legge di, 95
Nubi, 101
Numeri, spiegazione dei, 15

Olbers, Wilhelm, 132
Orbite ellittiche, 10
Orchidea frattale, 131
Oscillazione, 59

Pascal, triangolo di, 46
Peano, Giuseppe, 22-23
Peitgen, Heinz-Otto, 98
Penn, Alan, 118
Penrose, Roger, 19, 96
Perfetto, insieme, 21
Petrolio
  perforazione, 126
  scoperta, 122
Pianeti, 134
  orbite caotiche, 60
  orbite ellittiche, 10
Pioggia acida, 128
Poincaré, Jules-Henri, 9, 50-51
Polmoni, 108
Popolazione, 52-55
Portafoglio, teoria del, 152

Quotazioni *vedi* Mercati finanziari

Raddoppio del periodo, 59, 61, 64-65
Repulsori, 71
Richardson, Lewis F., 32-37
Richter, Peter, 98
Russell, Bertrand, 17

Sander, Leonard, 104
Sarkowski, Alexei, 62
Satelliti, 143
Saturno, anelli, 95
Sierpinski, triangolo di, 38-47, 57
Sierpinski, Vaclav, 38

Similarità, dimensione, 28
Smith, Henry, 20
Stanley, Eugene, 4
Stelle, 132,134
Stewart, Ian, 3, 171
Stolum, Hans-Henrik, 122
Strutture ricorsivamente ripetute in scala, 166-167

Tasso di variazione, 11
Termodinamica, leggi della, 13
Terremoti, 129
Topologia, 23
Transizioni di fase, 98, 103
Trasformazioni affini, 141
Tre quarti, legge di potenza, 110

Umano
cervello, 111-113
corpo, 108-113, 139-141
Universalità, 99
Universo, 132-138

Verhulst, modello di, 53-54, 58
Virus, 115
Visione, nell'uomo, 139-141

Wallis, John, 68
Weierstrass, Karl, 9, 12, 14
Wheeler, John A., 3
Witten, Thomas, 104

Yorke, James, 62

Zenone, 12