

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان المفتوحة

برنامج التربية

الحساب (1)

رمز المقرر ورقمه: ريض 101

تأليف

أ. هناء خالد مختار

بسم الله الرحمن الرحيم

التحكيم العلمي * د. محمد عبد المنعم إسماعيل

التصميم التعليمي * أ. آمال حسين محمد أحمد

التنضيد الطباعي * أمانى الأمين مبارك

التصميم الفني * محمد فتح الرحمن محجوب

أمانى الأمين مبارك

منشورات جامعة السودان المفتوحة الطبعة 2005م

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج

أي جزء من هذا الكتاب، وبأي وجه من الوجوه، إلا بعد الموافقة

المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام علي اشرف خلق الله سيدنا محمد صلي الله عليه وسلم أما بعد.

عزيزي الدارس، نضع بين يديك هذا المقرر من مقرر الرياضيات الحسبان (1). نرجو أن تتحقق الفائدة منه وينتفع به كل دارس وطالب علم راغب في إفادة غيره من الناس. يهدف هذا المقرر إلى أن يعرفك بعلم الحسبان هذا العلم الواسع الذي له فوائد جمة في حياة البشر واستفادوا منه في مجالات الفيزياء والكيمياء والأحياء والهندسة ومجالات علمية أخرى كذلك يزودك بالمعلومات الأساسية في هذا العلم ويساعد علي إكسابك المهارات التدريبية في حل تطبيقات النظريات والقوانين في الحسبان.

أن من شأن هذا المقرر أن يساعد ويطور العمليات الرياضية واستخداماتها وتكون ذات فائدة عندما تستخدم في مجالات العمل المختلفة ومجالات التدريس

سوف تدرس في هذا المقرر مجموعة من الوحدات منها الدالة، المشتقة الأولى، قوانين التفاضل، الدوال الأسية، اللوغاريتمية، العكسية، الزائدية، التفاضل الضمني والتفاضل الوسيط المشتقات العليا والتطبيقات الهندسية والفيزيائية، النهايات العظمي والصغرى ورسم الدوال ونظريات أخرى هامة في علم الحسبان.

داخل كل وحدة تجد أمثلة وتدريبات لتسهيل الشرح وفي نهايتها أسئلة تقويم ذاتي حتى تتأكد من فهمك واستيعابك للمعلومات الموجودة داخل الوحدة عليك أن تكثر من التدريب علي تطبيق القوانين والنظريات الرياضية الواردة في الوحدات حتى تستوعب وتجد المادة تجويدا ممتازاً. حاولنا في هذا المقرر تبسيط المادة ولأن هذا العلم له أجزاء كثيرة سوف تأتي في السنوات القادمة حتى يتم لك تناول كل ما فيه من معلومات ونظريات وقوانين.

نتمنى أن تكون سعيدا في دراسته وتناوله وتجد فيه السهل اليسير الممتع والفائدة المرجوة.

وفيما يلي الأهداف التي يجب أن يحققها هذا المقرر.

الأهداف العامة للمقرر

عزيزي الدارس، بعد دراستك لهذا المقرر بتمعن نتوقع منك أن تكون قادرا علي أن :

- 1- تعرف الدالة والنهاية والاستمرار
- 2- تحل المشتقة الأولى
- 3- تستنتج قوانين التفاضل وتميز بينها
- 4- تشرح الدوال الآسية واللوغريتمية
- 5- تعرف الدوال الزائدية والدوال العكسية
- 6- تعرف أسس التفاضل الضمني والتفاضل الوسيط
- 7- تتفهم المشتقات العليا.
- 8- تستخدم التطبيقات الهندسية والفيزيائية
- 9- تشرح النهايات العظمي والصغرى
- 10- تتعلم رسم الدوال بيانيا
- 11- تعرف متسلسلة تيلور وقاعدة لوبيتال واستخدامها في إيجاد قيم النهايات غير المعينة

محتويات المقرر

الصفحة	الموضوع	رقم الوحدة
1	الدالة - النهاية - الاستمرار	1
45	المشتقة الأولى	2
63	قوانين التفاضل	3
81	الدالة الآسية	4
97	الدالة اللوغريتمية	5
111	الدوال الزائدية	6
129	التفاضل الضمني والتفاضل الوسيط	7
143	الدالة العكسية	8
163	التفاضل المتتالي (المشتقات العليا)	9
177	التطبيقات الهندسية والفيزيائية	10
193	النهايات العظمى والصغرى	11
213	رسم الدوال	12
227	نظريات هامة	13



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
3	المقدمة
3	تمهيد
4	أهداف الوحدة
5	1. نظام الأعداد الحقيقية
7	2. الدالة
7	1.2 تعريف الدالة
9	2.2 الدوال وحيدة القيمة ومتعددة القيمة
10	3.2 نطاق تعريف الدالة
11	4.2 الدالة الزوجية والدالة الفردية
12	5.2 أنواع الدوال
13	3. نهاية الدالة
15	1.3 النهايات اليمنى و اليسرى
17	2.3 المقادير غير المعينة
18	3.3 نهايات هامة
22	4. الدالة المستمرة
26	الخلاصة
27	لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية
28	إجابات التدريبات
38	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
41	مسرد المصطلحات
44	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس

مرحبا بك في الوحدة الأولى من مقرر الحساب (1). في هذه الوحدة سنتطرق في القسم الأول لدراسة ومراجعة نظام الأعداد الحقيقية وتعريفها وشرح نظامها ورموزها الرياضية، والعمليات عليها وتجد أنك في دراستك السابقة في المرحلة الثانوية درست عن المجموعات والعمليات علي المجموعات. وفي هذه الوحدة سوف تتوسع معلوماتك ومعرفتك بهذا الجزء لزيادة الاستفادة منه خاصة في الدوال. في القسم الثاني نبدأ بتعريف الدالة ونطاق الدالة وأنواعها وكيف يمكن أن نفرق ونميز بين كل نوع وشروطه أما القسم الثالث نتعرف علي مفهوم نهاية الدالة والذي يقودنا لتعريف المقادير غير المعينة وأخيرا القسم الرابع الذي يشرح استمرار الدالة وكيفية تحقيق شروط الاستمرار ثم كيف نرسم منحني الدالة بيانيا.

في هذه الوحدة سوف تجد من الوسائط التعليمية وبرمجيات الحاسوب ما قد يساعدك ويضيف إليك المزيد من المعلومات. كذلك في داخل الوحدة تجد تدريبات ولها إجابات في نهاية الوحدة وأسئلة تقويم ذاتي لتساعدك علي التأكد من الفهم والاستيعاب واسترجاع النقاط الرئيسية التي وردت في الوحدة. أرجو أن تتمكن من متابعة أقسام هذه الوحدة الهامة بدقة وان لا تنتقل إلى قسم حتى تتأكد من استيعابك للقسم الذي قبله وان تعمل علي حل كثير من التدريبات وترجع إلى مراجع في علم الحساب نتمنى لك الاستفادة. أخيرا يمكنك أن تساعدنا في تقييم هذه الوحدة حتى تعم الفائدة بيننا وبينك.

أهداف الوحدة



1. بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادرا علي أن:
2. تشرح الأعداد الحقيقية ورموزها والعمليات عليها.
3. تعرّف الدوال وتحدد أنواعها.
4. تميز بين الدوال الفردية والزوجية.
5. تفرق بين الدوال المثلثية والنسبية والدورية.
6. تحسب نهاية الدالة والنهايات الهامة.
7. تشرح النهايات اليميني واليسرى.
8. تعرّف المقادير غير المعينة في النهايات وطرق حلها.
9. تحقق في استمرار الدالة باستخدام الاستمرار وترسمها بيانيا.

1. نظام الأعداد الحقيقية Real Numbers Systems

نرجع بك عزيزي الدارس إلى الوراء لمراجعة معلوماتك عن المجموعات والتي درستها في المرحلة الثانوية نجد أن المجموعة هي تجمع من أشياء تسمى بعناصر المجموعة . يرمز للمجموعات عادة بالحروف الكبيرة $A, B, C, \dots$. إذا كان x عنصراً في المجموعة A فإننا نكتب $x \in A$ " x تنتمي إلى A "

كما درست أيضاً العمليات على المجموعات وهي كما يلي
فاتحاد المجموعتين A و B ويرمز له ب $A \cup B$ ، يعرف ب :
 $A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$

وتقاطع المجموعتين A و B ويرمز له ب $A \cap B$ ، يعرف ب :
 $A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$

ويعرف A فرق B ، $A - B$ ، ب :

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

ويعرف مكمل A ، A^c ، ب :

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

" $\notin$ تعني لا ينتمي إلى " .

ونقول إن B جزئية من A ، ونكتب $B \subset A$ ، إذا كان $x \in B$ تقتضي $x \in A$.
بعد مراجعة المجموعات نبدأ بنظام الأعداد الحقيقية وهي عبارة عن :

المجموعة الأولى: الأعداد الطبيعية Natural Numbers

هي أول فئة من الأعداد اهتم بها الإنسان ونعرفها بأنها فئة الأعداد الصحيحة الموجبة ونرمز لها بالرمز N

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

المجموعة الثانية: الأعداد الصحيحة Integer Numbers

إذا أضفنا للمجموعة N الأعداد الصحيحة السالبة والصفر نحصل على مجموعة الأعداد الصحيحة Integers ونرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

المجموعة الثالثة: مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers

نرمز لها بالرمز Q وهي كل الأعداد التي يمكن كتابتها في الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عدنان صحيحان القاسم المشترك الأعظم لهما الواحد و $b \neq 0$. وواضح أن

$$Q \supseteq Z \supseteq N$$

المجموعة الرابعة: مجموعة الأعداد الغير نسبية Irrational Numbers

هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها في الصورة $\frac{a}{b}$ فتسمى الأعداد غير النسبية Irrational Numbers ونرمز لها بالرمز Q^*

مثال:

العدد $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

البرهان (بالتناقض)

بفرض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي، فإنه يوجد عدنان صحيحان a, b القاسم المشترك الأعظم لهما الواحد ، $b \neq 0$ بحيث

$$2b^2 = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$\therefore 2b^2$ عدد زوجي $\therefore a^2$ عدد زوجي

$$\therefore a \text{ عدد زوجي} \Leftrightarrow a = 2c \Leftrightarrow a^2 = 4c^2 \Leftrightarrow 2b^2 = 4c^2$$

$$\therefore 2c^2 = b^2$$

أي أن b^2 عدد زوجي $\therefore b$ زوجي أي أن العدد 2 عامل مشترك بين a, b هذا يناقض

تعريف العدد القياسي $\frac{a}{b}$. إذن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي .

- البرهان بالتناقض هو أسلوب رياضي نلجأ إليه في برهنة بعض المسائل وذلك بنقض المسألة وإثبات أن هذا النقض غير صحيح وغير مقبول كما فعلنا في المثال السابق.

أسئلة تقويم ذاتي (1)



- 1/ اكتب ثلاثة أعداد نسبية وأربعة أعداد غير نسبية
- 2/ اكتب كل المجموعات الجزئية الناتجة عن المجموعة $\{x, y, z\}$
- 3/ اثبت أن العدد $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

2. الدالة Function

قبل أن تبدأ في قراءة هذا القسم تأكد من استيعابك للقسم الأول عن مراجعة المجموعات لأن له ارتباط بالدالة، الآن نتعرف علي الدالة.

1.2 تعريف الدالة

الدالة هي علاقة تربط مجموعة (تسمى مجال تعريف الدالة) بمجموعة أخرى (تسمى المجال المصاحب). نقول إن f دالة معرفة من A إلى B إذا كان كل $x \in A$ ترتبط بعنصر واحد فقط $y \in B$ ، ونبين ذلك بـ :

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

تسمى y بصورة x . المجموعة :

$$f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\}$$

مجموعة جزئية من B ، وتسمى بمدى الدالة f .

إذا كانت $f(A) = B$ فإننا نقول إن الدالة f دالة شاملة. أي لكل $y \in B$ توجد $x \in A$ بحيث $y = f(x)$.

وتسمى الدالة دالة أحادية (أو واحد لـ واحد) إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$

يقضي $x_1 = x_2$ ، أي أن $y \in f(A)$ صورة لعنصر واحد فقط في A .

في دراستك للتفاضل والتكامل سوف تركز على الدوال الحقيقية . نقول إن f دالة حقيقية معرفه في $D \subset \mathbb{R}$ ونكتب

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

إذا كان لكل $x \in D$ عدد حقيقي مقابل $y = f(x)$.

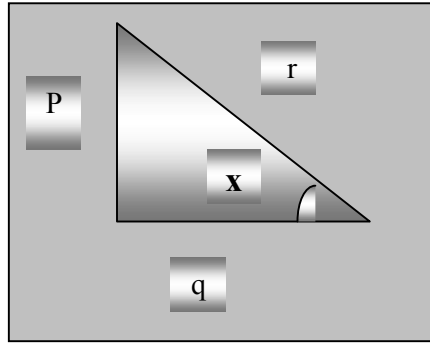
أمثله

$$y = x^2 + 2x + 1/1$$

$$f(x) = x^n /2$$

3/ الدوال المثلثية Trigonometric Functions

سبق أن درست الدوال المثلثية (الدائرية) والتي يمكن تعريفها بالنظر إلى الشكل (1.2.1.1)



الشكل (1.2.1.1)

(i) الجيب (sine)

$$f(x) = \sin x = \frac{p}{r}$$

(ii) جيب التمام (cosine)

$$f(x) = \cos x = \frac{q}{r}$$

(iii) الظل (Tangent)

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{p}{q}$$

(iv) ظل التمام (Cotangent)

$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{q}{p}$$

(v) القاطع (Secant)

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{r}{q}$$

(vi) قاطع التمام (Cosecant)

$$f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{r}{p}$$

★ ملاحظة

ونلاحظ أن قيمة y دائماً تتغير تبعاً لتغير قيمة x لذلك نسمي y المتغير التابع ونسمي x بالمتغير المستقل

2.2 الدوال وحيدة القيمة ومتعددة القيمة

بعد تعريف الدالة والدالة الشاملة والاحادية وطرح أمثلة للدوال نأتي بك إلى تناول الدوال وحيدة القيمة ومتعددة القيمة ونتعرف

أولاً: الدوال وحيدة القيمة.

إذا كانت قيمة y وحيدة لكل قيمة تأخذها x فإن الدالة تسمى دالة وحيدة القيمة.
مثال: <

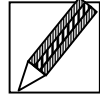
$$y = x^2 + x + 1$$

ثانياً: الدوال متعددة القيمة

إذا كانت لـ y أكثر من قيمة واحدة لبعض قيم x فإن y تسمى دالة متعددة القيم
مثال: <

$$y^2 = x^2 + 1$$

تدريب (1)



إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 3}$ فأوجد

1) $f(2)$ 2) $f(-2)$ 3) $f(1-x)$

4) $f(\sin x)$ 5) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

3.2 نطاق تعريف الدالة

لابد لك عزيزي الدارس من الإلمام بتعريف نطاق تعريف الدالة نقول أن نطاق تعريف الدالة $y = f(x)$ هو $[a, b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ إذا كانت $f(x)$ معلومة القيمة لكل $x \in [a, b]$

أمثلة:

$$1) f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

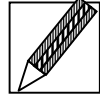
هذه الدالة معرفة فقط لقيم $|x| < 3$ وذلك لان الجذر التربيعي للمقدار السالب تخيلي أي ان نطاق تعريف هذه الدالة هو $-3 \leq x \leq 3$ ونرمز لهذه الفترة $[-3, 3]$ (فترة مغلقة).

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$$

فهي كالمثال السابق تخيلية إذا كانت $|x| > 4$ ولكنها غير معرفة عند $x = \pm 4$ لان قيمتها غير منتهية أي ان نطاق تعريف هذه الدالة هو $(-4, 4)$ (فترة مفتوحة).

تدريب (2)

وضح نطاق تعريف الدوال الآتية:



$$1) f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad 2) f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad 3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{100 - x^2}} \quad 5) f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad 6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

4.2 الدالة الزوجية والدالة الفردية

وهناك نوع آخر من الدوال هو الدالة الزوجية والدالة الفردية ولكل منها شرط لمعرفة حتى يسهل عليك التمييز بينها

نقول أن الدالة $f(x)$ دالة زوجية إذا حققت الشرط الآتي

$$f(-x) = f(x)$$

أمثلة: <

$$f(x) = x^4 + x^2 + 5$$

$$\begin{aligned} 1) f(-x) &= (-x)^4 + (-x)^2 + 5 \\ &= x^4 + x^2 + 5 = f(x) \end{aligned}$$

$$f(-x) = f(x)$$

أما الدالة الفردية هي التي تحقق الشرط

$$f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} 2) f(-x) &= \sin(-x) \\ &= -\sin(x) = -f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = x^5 + x^3 + x$$

$$\begin{aligned} 3) f(-x) &= (-x)^5 + (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^5 - x^3 - x = -(x^5 + x^3 + x) = -f(x) \end{aligned}$$

تدريب (3)

صنف كلاً من الدوال الآتية علي أساس أنها زوجية، فردية أو غير ذلك

$$1) f(x) = \frac{x^3 + x}{x^6}$$

$$2) f(x) = x^2 \cos x + x^4$$

$$3) f(x) = \frac{\sin 2x}{x^9 + x^{13}}$$

$$4) f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$



5.2 أنواع الدوال

نأتي إلى أنواع الدوال والتي تشمل ثلاثة أنواع ولكل نوع صورة لابد منك إن تميز بينها وتتمكن من معرفتها وشرحها من أهم أنواع الدوال

النوع الأول: كثيرات الحدود **Polynomials**

أي دالة في الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

حيث a_i ثوابت ($0 \leq i \leq n$) و n عدد صحيح موجب تسمى كثيرة حدود في المتغير x .
إذا كان $a_n \neq 0$ فإن $f(x)$ كثيرة حدود ذات درجة n .
مثال

$$f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 11x + 9$$

كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

النوع الثاني: الدوال النسبية

هي كل الدوال التي تكون في الصورة

$$f(x) = \frac{g(x)}{q(x)}$$

حيث $g(x)$, $q(x)$ كثيرتا حدود

➤ مثال

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 7}{x - 1}$$

النوع الثالث: الدوال الدورية

تسمى الدالة $f(x)$ دالة دورية إذا كانت تحقق

$$f(x + nL) = f(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

أي أنها تكرر نفسها بصورة منتظمة لفترات متساوية من قيم x . وتسمى L بدورة الدالة
< مثال:

كل الدوال المثلثية دورية بدورة 2π

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

وهكذا

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

وبشرح أنواع الدوال تكون قد حققت الهدف الثاني والثالث والرابع من أهداف الوحدة.

أسئلة تقويم ذاتي (2)

ميز بين أنواع الدوال التالية



1. $f(-x) = -f(x)$

2. $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 7}{x - 1}$

3. $y = x^2 + x + 1$

4. $y = x^2 + 2$

5. $f(x) = \sin x$

6. $-f(x) = 3 - 2x^2 + x^3$

3. نهاية الدالة

لننظر إلى الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ، هذه الدالة غير معرفة عند $x = 2$ ، لأننا إذا حاولنا التعويض بـ $x = 2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ وهي قيمة غير معينة . لذلك ليس هنالك قيمة مناظرة

ل $x = 2$ يمكن أن تأخذها الدالة . إذا كانت $x \neq 2$ فإن الدالة $f(x)$ تتطابق تماماً مع الدالة $g(x) = x + 2$ لأن

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2 = g(x) , x \neq 2$$

الآن ماذا عن القيمة التي تقترب منها الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2 (بحيث $x \neq 2$) لننظر إلى الجدول (1.3.1) لتخمين ما قد تقترب منه الدالة

f(x)	X
5	3
4.9	2.9
4.8	2.8
⋮	⋮
4.01	2.01
4.001	2.001
⋮	⋮
4.000001	2.000001
⋮	⋮

الجدول (1.3.1 - ب)

f(x)	X
3	1
3.1	1.1
3.2	1.2
⋮	⋮
3.9	1.9
3.99	1.99
⋮	⋮
3.99999	1.99999
⋮	⋮

الجدول (1.3.1 - أ)

نلاحظ أن $f(x)$ تقترب من 4 وهي قيمة $g(2)$. نكتب في هذه الحالة

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

هذا يعني أننا يمكن أن نجعل $f(x)$ قريبه قرباً كافياً من 2 . يقودنا ذلك للتعريف

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية و x عدداً حقيقياً نقول أن $f(x)$ لها نهاية L عندما تقترب x

من a إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث $|f(x) - L| < \epsilon$ لكل $|x - a| < \delta$

(ϵ, δ رمزان إغريقيان يقران Epsilon و Delta علي الترتيب) .

نرمز لتلك النهاية بـ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

◀ مثال:

أوجد قيمة النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9x - 2)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 9x - 2 = (0)^2 + 9(0) - 2 = -2$$

(يمكنك تحسس ذلك بإنشاء جدول شبيه بالجدول (1.3.1))

1.3 النهايات اليمنى واليسرى left and right limits

هنالك نهايات لها أهميتها في علم الحساب وتعرف بالنهايات اليمنى واليسرى
إذا اقتربت قيمة x من a من جهة اليسار على الخط العددي نسمي هذه النهاية بالنهاية
اليسرى

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

ونرمز عادة للنهاية اليسرى بالرمز

$$\lim_{x \rightarrow a - \epsilon} f(x)$$

حيث ϵ عدد موجب متناهي الصغر

والعكس صحيح إذا اقتربت x من a من جهة اليمين نسمي النهاية بالنهاية اليمنى

$$\lim_{x \rightarrow a + \epsilon} f(x)$$

نرمز للنهاية اليمنى بالرمز

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

وفي كثير من الحالات فان النهاية اليسرى تساوي النهاية اليمنى.
غير أن هنالك حالات لا تكون فيها النهاية اليسرى مساوية للنهاية اليمنى

◀ مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & -2 \leq x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ف نجد

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{-1} = -1$$

بينما

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1)^2 = 1$$

◀ مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

⊗ ملاحظة

إذا كانت قيمة نهاية الدالة غير منتهية عندما تقترب x إلى a فنلاحظ أن الدالة $f(x)$ لا يمكن أن تتخذ قيمة (∞) مهما اقتربت x من a ولكنها تتجاوز أي مقدار منته نستطيع أن نفكر به مهما كان كبيراً

◀ مثال:

أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^3 - 1}$$

الحل

بقسمة البسط والمقام علي x^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/x - 5/x^3}{1 - 1/x^3} = \frac{1 + 0 - 0}{1 - 0} = 1$$

لان جميع الحدود $1/x, -5/x^3, -1/x^3$ متناهية الصغر كلما كانت x كبيرة كبراً كافياً.

فيما يلي نسوق إليك بعض الأمثلة في إيجاد النهايات:

$$1 - \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x + \cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x + \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 1 + 0 = 1$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x (1 - x)}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) \sec x}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) \lim_{x \rightarrow 0} \sec x}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2)} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)^x = \left(\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) \right)^{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)}$$

$$= (3)^2 = 9$$

تدريب رقم (4)



أوجد قيمة كل من النهايات الآتية

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 + 2x + 4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 + 2x - 2}$$

$$3) \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\theta}$$

$$4) \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \cos 2\theta$$

$$5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{\theta}$$

$$6) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta - \tan^2 \theta}{\theta^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 3x}{x \tan 7x}$$

2.3 المقادير غير المعينة

لا بد أن نتضمن وتركز في حالة إيجاد حسابات لمقادير الدوال التي نجد فيها قيم غير معينة ولقد وضع لها الرياضيون حلول للتبسيط الجبري لصياغة الدالة بصورة أخرى للقيم التي لا تساوى القيمة التي تقترب منها النهاية وتسمى المقادير غير المعينة وتعرف بأنها

مقادير لا يمكن معرف قيمتها علي وجه التحديد وأهمها

(1) $\frac{0}{0}$	(2) $\frac{\infty}{\infty}$	(3) $0 \times \infty$	(4) $\infty - \infty$
-------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------------------

وبالأمثلة الآتية يتم لك الشرح المفصل الكافي لمعرفة الطريقة التي تتم بها الحلول .

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

بقسمة البسط والمقام علي x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 / x^2 + x / x^2 - 1 / x^2}{x^2 / x^2 + 1 / x^2} = \frac{1}{1} = 1$$

3.3 نهايات هامة

(1.3.3.1).....

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

حيث a عدد حقيقي n عدد طبيعي

$$\frac{(a)^n - a^n}{a - a} = \frac{0}{0}$$

وهذه كمية غير معينة ولكن بأجراء القسمة المطولة نجد

$$\begin{array}{r} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \\ x-a \overline{) x^n - a^n} \\ \underline{x^n - ax^{n-1}} \phantom{+ a^2x^{n-2} + a^3x^{n-3}} \\ ax^{n-1} - a^n \phantom{+ a^2x^{n-2} + a^3x^{n-3}} \\ \underline{ax^{n-1} - a^2x^{n-2}} \phantom{+ a^3x^{n-3}} \\ a^2x^{n-2} - a^n \phantom{+ a^3x^{n-3}} \\ \underline{a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3}} \phantom{+ a^4x^{n-4}} \end{array}$$

وهكذا نجد

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

وعند اخذ النهاية نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a(a)^{n-2} + a^2(a)^{n-3} + \dots + a^{n-2}a + a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = \underline{\underline{n a^{n-1}}}\end{aligned}$$

◀ مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

ولكن باستخدام قيمة النهاية (1.3.3.1) وبتعويض $a = 2, n = 5$ نجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2} = 5(2)^{5-1} = 5 \times 2^4 = \underline{\underline{80}}$$

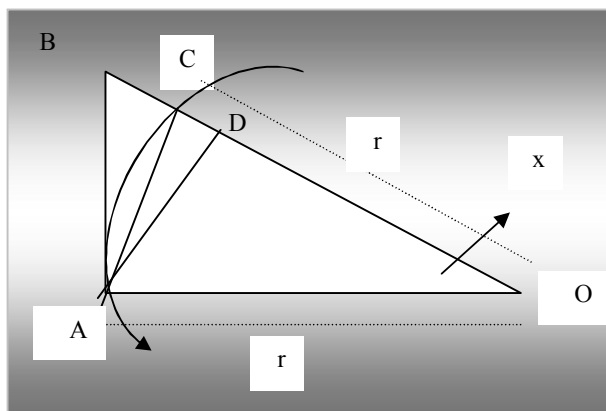
$$(1.3.3.2) \dots \dots \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

إذا عوضنا $x = 0$ نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$$

وهي كمية غير معينة .

ولكن بالنظر إلى الشكل (1.3.3.1) يمكن أن نصل إلى ما يساعدنا في إيجاد تلك النهاية بالشرح البياني أو الهندسي أدنا نأتي إلى الإثبات



الشكل (1.3.3.1)

في الشكل AB مماس للدائرة التي يمثل OAC قطاع فيها.

مساحة مثلث OAB < مساحة القطاع OAC < مساحة مثلث OAC

في Δ OAC نجد أن

$$\sin x = \frac{AD}{r} \Rightarrow AD = r \sin x$$

أي أن مساحة مثلث OAC هي

$$\frac{1}{2} \times r \times r \sin x = \frac{1}{2} r^2 \sin x$$

مساحة القطاع OAC يساوي

$$\pi r^2 \times \frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 x$$

في Δ OAB

$$\tan x = \frac{AB}{r} \Rightarrow AB = r \tan x$$

أي أن مساحة مثلث OAB هي

$$\frac{1}{2} \times r \times r \tan x = \frac{1}{2} r^2 \tan x$$

$$\frac{1}{2} r^2 \tan x > \frac{1}{2} r^2 x > \frac{1}{2} r^2 \sin x$$

بقسمة جميع الحدود علي $\frac{1}{2} r^2$ نجد

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \sin x$$

بالقسمة علي $\sin x$ نجد

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

وبأخذ النهاية عندما x تقترب من الصفر من اليمين.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0^+} 1$$

$$1 < \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} < 1$$

وهذا يقود إلى

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

* يمكن الوصول لنفس النتيجة إذا ما اقتربت x من الصفر من جهة اليسار إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

◀ مثال:

أوجد قيمة النهاية

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta \cos \theta}$$

الحل

بالتعويض المباشر نجد

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta \cos \theta} = \frac{0}{0 \times 1} = \frac{0}{0}$$

وهذه كمية غير معينة

ولكن بضرب البسط والمقام بالعدد 2

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{1}{\cos \theta} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\cos \theta} \\ = 1 \times \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

(θ رمز إغريقي ويقرأ Theta)

الآن لابد أن تأتي بورقة وقلم وتبدأ في حل الأسئلة التالية عن النهايات حتى تستوعب القوانين

وبها تحقق الهدف الخامس والسادس.

تدريب (5)

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية



1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + 5x - 2} - x$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^5 - 32}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$

أسئلة تقويم ذاتي (3)

أوجد قيمة النهايات الآتية



$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{x^2 + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 3^2}{x - 2}$$

$$4) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta \cos \theta}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$$

4. الدالة المستمرة Continuous Function

نبدأ بالقسم الرابع والأخير للوحدة الأولى ويعرف بالدالة المستمرة.
في اللغة العامة عندما نقول هذه المراحل مستمرة معني ذلك أنها تمر بدون أي عائق ومن
غير تغيرات مفاجئة، في الرياضيات كلمة استمرار لها نفس المعني والاستمرار له أهمية في
علم الحساب ولذلك نشرحه بكل دقة واهتمام.

و نقول إن الدالة $y = f(x)$ دالة مستمرة عند $x = a$ إذا تحققت الثلاثة شروط الآتية:-

1 / أن تكون $f(a)$ قيمة منتهية.

2 / أن تكون النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى للدالة عند $x = a$.

3 / أن تساوي كل من النهايتين $f(a)$.

◀ أمثلة:

أوجد نقاط عدم الاستمرار للدالة

$$1) y = \frac{1}{x}$$

الحل

الدالة $y = \frac{1}{x}$ لها قيمة غير منتهية عن $x = 0$

كما أن النهاية اليمنى للدالة عند $x = 0$ تساوي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بينما النهاية اليسرى

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

لكل هذه الأسباب نجد أن $f(x) = \frac{1}{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ ولكنها مستمرة عند كل $x \neq 0$

$$2) f(x) = \begin{cases} x & x \geq 2 \\ 1 & x < 2 \end{cases}$$

الحل

نلاحظ أن النهاية اليمنى للدالة $f(x)$ عند $x = 2$ تساوي

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x = x = 2$$

بينما النهاية اليسرى عند $x = 2$ تساوي

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1$$

∴ $f(x)$ غير مستمرة عند $x = 2$ ، ولكنها مستمرة عند كل $x \neq 2$

تخطيط منحنى الدالة $y = f(x)$

نأتي بك لمعرفة كيفية تخطيط منحنى الدالة بيانياً ويمكن توضيح ذلك بالأمثلة التالية عليك بالتركيز في هذا الجزء لأننا سنتطرق له في الوحدة الثانية عشر.
نأخذ نقاط تقاطع مع محور x, y حتى يكون رسمه اقرب إلى الدقة نحدد هاتين النقطتين في المستوي x, y ونصل بينهما بخط مستقيم ونمده من الجهتين فنحصل علي منحنى الدالة المطلوب.

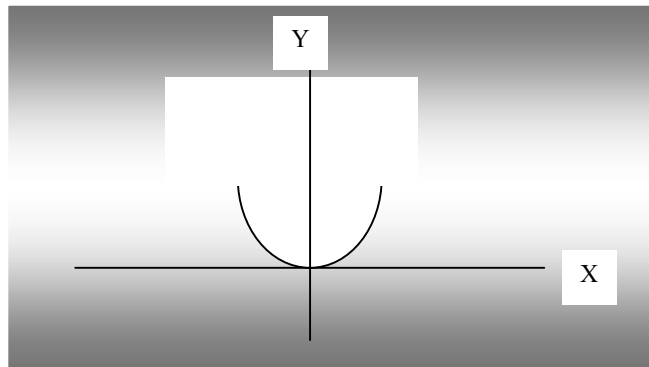
لرسم الدالة $y = f(x)$ نستعين ببعض النقاط التي يمر بها منحنى الدالة
< أمثلة:

1. $y = x^2$

الحل

لرسم هذه الدالة نأخذ قيم اختيارية لـ x ونوجد قيم y المقابلة لها

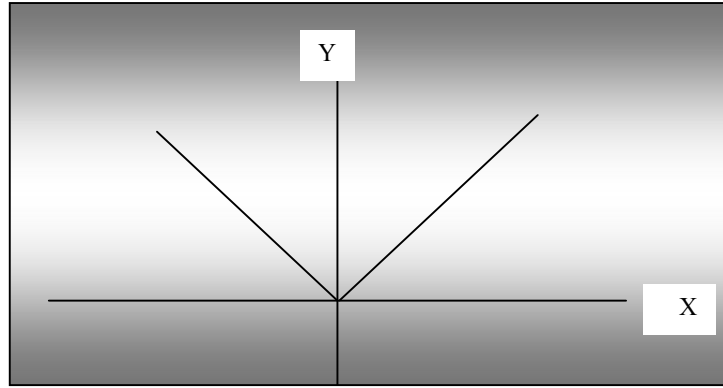
X	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	4	1	0	1	4



$$2. y = |x|$$

الحل

X	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	2	1	0	1	2



تدريب (6)

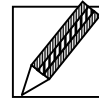
وضح ما إذا كانت الدوال الآتية مستمرة عند النقطة الموضحة:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

عند $x = 1$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^4 & x < 0 \end{cases}$$

عند $x = 0$



أسئلة تقويم ذاتي (4)

ارسم منحنيات الدوال الآتية:

$$1) f(x) = 5$$

$$2) y = 3x + 6$$

$$3) y = x^2 - 2x + 5$$

$$4) y = x^3 + x - 1$$



الخلاصة

تناولت هذه الوحدة نبذة بسيطة ومدخل لمقرر الحسابان وقسمت إلى أربعة أقسام
القسم الأول: بدأ بمراجعة نظام الأعداد الحقيقية وشرح مبسط للمجموعات ورموزها والعمليات
عليها ومجموعة الأعداد الحقيقية قسمت إلى أربعة مجموعات. مجموعة الأعداد الطبيعية
والأعداد الصحيحة وهي إضافة الأعداد الموجبة والسالبة والصفر إلى مجموعة الأعداد
الطبيعية

ثم مجموعة الأعداد النسبية والتي تكتب في صورة $\frac{a}{b}$ وغير النسبية والتي لا يمكن كتابتها
في صورة $\frac{a}{b}$

القسم الثاني: تم شرح وتعريف الدالة بأنها عبارة عن ارتباط مجموعتين الأولى مجموعة
مجال الدالة مع المجموعة الأخرى مجموعة المجال المصاحب وبعد ذلك عرفنا الدالة الشاملة
والدالة الأحادية إذا كانت $f(A) = B$ فإننا نقول إن الدالة f دالة شاملة . أي لكل $y \in B$
توجد $x \in A$ بحيث $y = f(x)$. وتسمى الدالة دالة أحادية (أو واحد لـ واحد) إذا كان
 $f(x_1) = f(x_2)$

يقضي $x_1 = x_2$ ، أي أن $y \in f(A)$ صورة لعنصر واحد فقط في A .

ثم تطرقنا إلى أنواع الدوال المثلثية، والدوال وحيدة القيمة، متعددة القيمة، إذا كانت قيمة y
وحيدة لكل قيمة تأخذها x فإن الدالة تسمى دالة وحيدة القيمة. إذا كانت لـ y أكثر من قيمة
واحدة لبعض قيم x فإن y تسمى دالة متعددة القيم. والدالة الزوجية والفردية وتعرفنا علي
الشروط التي تميز كل منها بعد ذلك قسمت الدوال إلى ثلاثة أنواع كثيرة الحدود، النسبية
والدورية وشرحنا كيف يمكن أن نفرق ونعرف كل منهما.

القسم الثالث: نهاية الدالة وهي $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ وعرفنا كل من النهاية اليمنى واليسرى فعندما
تقترب قيم x من a من جهة اليمين فهي نهاية يمني واقتربها من جهة اليسار نهاية يسري
وشرحنا كيف يمكن أن نوجد قيم للنهايات التي لها قيم غير معينة.

القسم الرابع والأخير: تم شرح الدالة المستمرة ومعرفة شروطها الثلاثة التي تحققها عندما تكون $f(a)$ منتهية ونهاية الدالة اليمنى تساوي النهاية اليسرى وكل من النهايتين يساوي $f(a)$ ثم رسم منحنى الدالة بيانياً.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

بعد دراستك للوحدة الأولى وشرح كل المصطلحات والمفاهيم الرياضية الجديدة ندخل علي الوحدة التالية وهي بعنوان المشتقة الأولى وفيها سوف يتم تعريف المشتقة وكيفية إيجادها من المبادئ الأولية وكذلك إيجاد المشتقة الأولى للدوال المثلثية من المبادئ الأولية مثل مشتقة الظل والجيب وجيب التمام والقاطع وقاطع التمام بالإضافة إلى تعريف المشتقة الأولى نتعرف علي المعني الهندسي للمشتقة الأولى.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

الحل

$$(1) \quad f(2) = \frac{(2)^2 + 4}{(2) - 3} = \frac{4 + 4}{2 - 3} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$(2) \quad f(-2) = \frac{(-2)^2 + 4}{(-2) - 3} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$$

$$(3) \quad f(1-x) = \frac{(1-x)^2 + 4}{(1-x) - 3} = \frac{1 - 2x + x^2 + 4}{1 - x - 3} \\ = \frac{5 - 2x + x^2}{-x - 2}$$

$$(4) \quad f(\sin x) = \frac{(\sin x)^2 + 4}{\sin x - 3} = \frac{\sin^2 x + 4}{\sin x - 3}$$

$$(5) \quad f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 4}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 3} \\ = \frac{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} + 4}{\frac{x-1}{x+1} - 3} = \frac{\frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{(x+1)^2}}{\frac{(x-1) - 3(x+1)}{x+1}}$$

وذلك بتوحيد المقام

$$= \frac{\frac{(x^2 - 2x + 1) + 4(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1-3x-3}{x+1}} \\ = \frac{x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 8x + 4}{(x+1)^2} \div \frac{-2x-4}{x+1} \\ = \frac{5x^2 + 6x + 5}{(x+1)^2} \times \frac{(x+1)}{-2x-4} \\ = \frac{5x^2 + 6x + 5}{(x+1)(-2x-4)}$$

تدريب (2)

$$1) f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

الحل

لهذه الدالة قيمة خيالية إذا كانت قيمة المقدار $1-x^2$ سالبة أي $1-x^2 < 0$ أي $|x| > 1$ أن نطاق تعريف هذه الدالة يحقق $|x| \leq 1$ وهو قيم x الواقعة في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ أي الفترة المغلقة $[-1,1]$

$$2) f(x) = \sqrt{25-x^2}$$

نطاق تعريف هذه الدالة هو قيم x التي تحقق $|x| \leq 5$ وهي الفترة $-5 \leq x \leq 5$.
∴ نطاق تعريف الدالة هو الفترة المغلقة $[-5,5]$.

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{36-x^2}}$$

هذه الدالة معرفة إذا كانت قيمة المقدار $\sqrt{36-x^2}$ حقيقية ولا تساوي الصفر وهي الفترة المفتوحة $(-6, 6)$

$$4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}$$

وهي كالدالة السابقة معرفة إذا كانت قيمة المقدار $(100-x^2)$ موجبة .
فترة التعريف هي الفترة المفتوحة $(-10, 10)$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2-4}$$

هذه الدالة معرفة إذا كانت قيمة المقدار (x^2-4) أكبر من أو تساوي الصفر أي $x^2 \geq 4$ ونطاق تعريف هذه الدالة هو الفترة $[2,\infty)$ والفترة $(-\infty,-2]$ أي نطاق تعريفها هو $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

$$6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$$

نطاق تعريف هذه الدالة هو قيم x التي تحقق $x^2-9 > 0$ وهو

$$(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$$

• ملاحظة نطاق تعريف الدالة هنا هو اتحاد فترتين مفتوحتين.

تدريب (3)

الحل

$$1) \quad f(x) = \frac{x^3 + x}{x^6}$$

الحل

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^6} = \frac{-x^3 - x}{(-x)^6} \\ &= -\left(\frac{x^3 + x}{x^6}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

∴ الدالة فردية

$$2) \quad f(x) = x^2 \cos x + x^4$$

الحل

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \cos(-x) + (-x)^4 \\ &= x^2 \cos x + x^4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

∴ الدالة زوجية

$$3) \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{x^9 + x^{13}}$$

الحل

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sin 2(-x)}{(-x)^9 + (-x)^{13}} \\ &= \frac{-\sin 2x}{-x^9 - x^{13}} = \frac{-\sin 2x}{-(x^9 + x^{13})} \\ &= \frac{\sin 2x}{x^9 + x^{13}} = f(x) \end{aligned}$$

∴ الدالة زوجية

$$4) \quad f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

الحل

$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{-x}{\sin(-x) + \cos(-x)} \\&= \frac{-x}{-\sin x + \cos x} \\&= \frac{-x}{-(\sin x - \cos x)} \\&= \frac{x}{\sin x - \cos x} \neq f(x) \\&\neq -f(x)\end{aligned}$$

∴ هذه الدالة ليست فردية ولا زوجية

تدريب (4)

الحل

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(0)^4 + (0)^2 - 2}{(0)^2 + 2(0) + 4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

الحل

بالقسمة علي x^3

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 / x^3 + x^2 / x^3 + 5 / x^3}{x^3 / x^3 + 2x / x^3 - 2 / x^3} \\ 2) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/x + 5/x^3}{1 + 2/x^2 - 2/x^3} \\ &= \frac{1 + 1/\infty + 5/(\infty)^3}{1 + 2/(\infty)^2 - 2/(\infty)^3} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 1 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 3) & \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\theta} = \frac{\sin \pi/2 + \cos \pi/2}{\pi/2} \\ &= \frac{1 + 0}{\pi/2} = 1 \div \frac{\pi}{2} = 1 \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 4) & \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \cos 2\theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos 2\theta \\ &= 0 \times \cos 2(0) = 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 5) & \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3\theta}{3\theta} \\ &= 3 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{3\theta} = 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 6) & \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta - \tan^2 \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 - \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \right)^2 \\ &= \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 - \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \\ &= 1 - 1 \times \frac{1}{\cos^2 0} = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 3x}{x \tan 7x} &= \frac{0 \times 0}{0 \times 0} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \div x \frac{\sin 7x}{\cos 7x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\cos 7x}{x \sin 7x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{x \sin 7x} \times \frac{\cos 7x}{\cos 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 7x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{\cos 7x}{\cos 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{7 \sin 7x} \cdot \frac{3 \sin 3x}{3x} \cdot \frac{\cos 7x}{\cos 3x} \\
 &= \frac{3}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x}{\cos 3x} \\
 &= \frac{3}{7} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 7x}{7x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x}{\cos 3x} \\
 &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x}{\cos 3x} \\
 &= \frac{3}{7} \times 1 \times 1 \times \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

تدريب (5)

الحل

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + 5x - 2} - x = \sqrt{\infty + 5(\infty) - 2} - \infty = \infty - \infty$$

بضرب البسط والمقام في المرافق $(\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + x)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - x \right) \times \left(\frac{\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + x}{\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 5x - 2) - (x^2)}{\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 2}{\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + x}
\end{aligned}$$

بالقسمة علي x^2

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 / x^2 + 5x / x^2 - 2 / x^2}{\sqrt{2x^2 / x^4 + 5x / x^4 - 2 / x^4} + x / x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 5/x - 2/x^2}{\sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{2}{x^4}} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{0} = \infty
\end{aligned}$$

الحل

$$= \infty - \infty$$

وهي غير معينة

$$\begin{aligned}
& 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \right) \times \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x - (x-1)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

بالقسمة علي $\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{0+1} + \sqrt{1-0}} = \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^5 - 32}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^5 - 32} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x^5 - 32} \end{aligned}$$

بإجراء القسمة المطولة

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \overline{) x^5 - 32} \\ \underline{x^5 - 2x^4} \\ 2x^4 - 32 \\ \underline{2x^4 - 4x^3} \\ 4x^3 - 32 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ 8x^2 - 32 \\ \underline{8x^2 - 16x} \\ 16x - 32 \\ \underline{16x - 32} \\ 0 + 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^5 - 32} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{(x - 2)} \\ &= \frac{4 \times 8}{16 + 16 + 16 + 16 + 16} = 2/5 \end{aligned}$$

حل آخر

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^5 - 32} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 4)}{(x^5 - 32)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^5 - 32} \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)(x^2 + 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^5 - 32} \cancel{x - 2} 4 \times 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}32 \times \frac{1}{\lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}} &= 32 \times \frac{1}{5 \times (2)^4} \\ &= 32 \times \frac{1}{5 \times 16} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \frac{1 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

كمية غير معينة

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 3x/2)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin^2 3x/2}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x/2}{x} \right)^2 \\
&= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x/2}{3x/2} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x/2}{3x/2} \right)^2 \\
&= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3/2 x}{3x/2} \right)^2 \\
&= \frac{9}{2} \times 1 = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

تدريب (6)

الحل

النهاية اليمنى عند $x = 1$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$$

النهاية اليسرى عند $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

النهاية اليمنى عند $x = 1$ لا تساوي النهاية اليسرى أي أن الدالة غير مستمرة عند $x = 1$

الحل

عند $x = 0$ قيمة الدالة هي

$$2) f(0) = 0^2 = 0$$

النهاية اليمنى عند $x = 0$ هي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = (0)^2 = 0$$

النهاية اليسرى عند $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^4 = (0)^4 = 0$$

أي أن النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = قيمة الدالة عند $x = 0$

∴ الدالة مستمرة عند $x = 0$.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. ثلاثة أعداد نسبية $5/2$, $0/1$, $-5/2$
أربعة أعداد غير نسبية $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $1 + \sqrt{2}$
2. $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$ $\{x,y\}$ $\{x,z\}$ $\{x,y,z\}$
3. الإجابة موجودة داخل الوحدة

تقويم ذاتي (2)

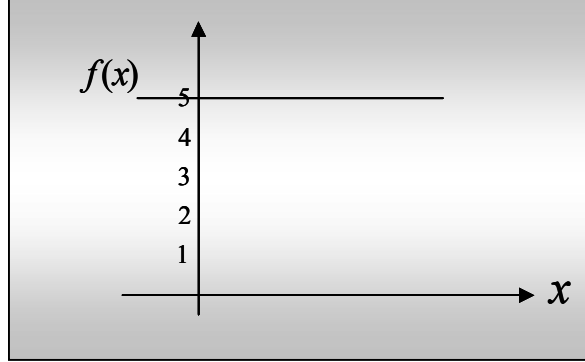
1. فردية
2. نسبية
3. وحيدة القيمة
4. وحيدة القيمة
5. مثلثية
6. كثيرة الحدود

تقويم ذاتي (3)

1. $-1/2$
2. -1
3. ∞
4. 2
5. 1
6. $2/3$

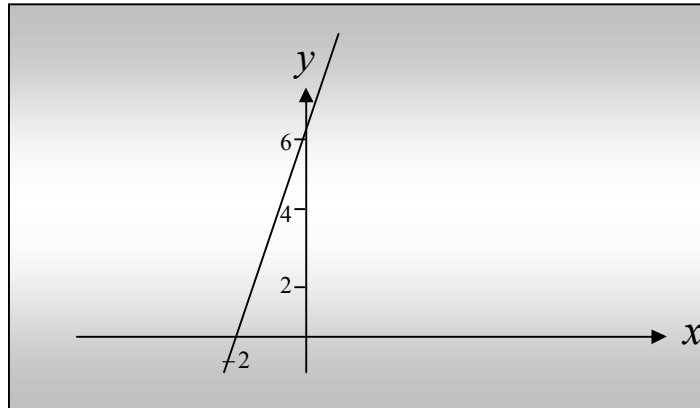
تقويم ذاتي (4)

1. منحنى الدالة $f(x)=5$ نحدد نقطة التقاطع مع محور الصادات وهي النقطة $(0,5)$ ونحدد هذه النقطة علي المستوي x,y ومنها نرسم مستقيم يوازي محور x

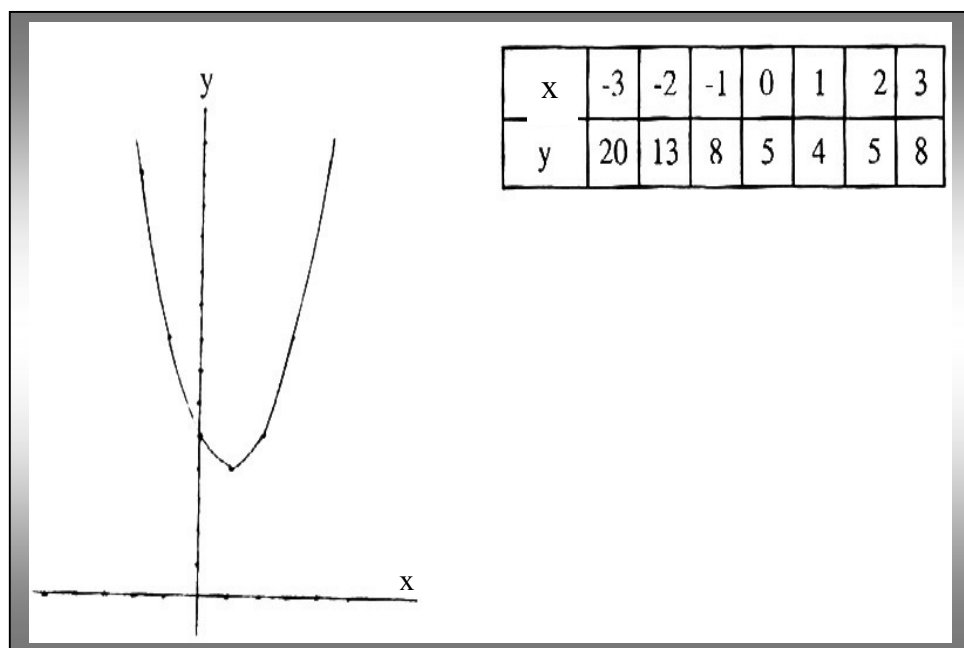


2. منحنى الدالة $f(x) = 3x + 6$

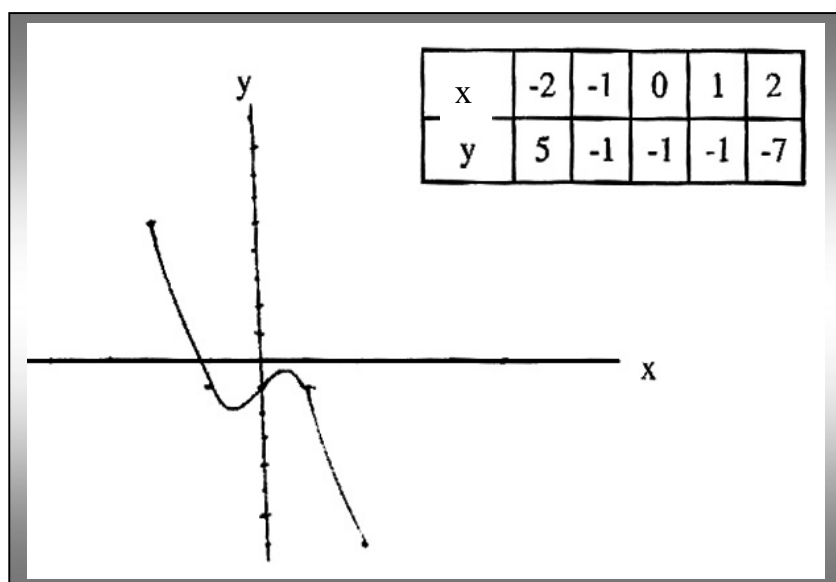
x	0	-2
F(x)	6	0



3. منحنى $y = x^2 - 2x + 5$



4. منحنى $y = -x^3 + x - 1$



مسرد المصطلحات

• مجموعة Set

هي تجمع من أشياء تسمى بعناصر المجموعة ويرمز لها عادة بالحروف الكبيرة
 $A, B, C, \dots$

• اتحاد Union

هو اتحاد مجموعتين A, B يرمز له بالرمز U ويعرف بـ

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

• مجموعة جزئية Subset

هي المجموعة التي تكتب في صورة $B \subset A$ اذا كانت $x \in B$ تقضي $x \in A$

• الأعداد الطبيعية Natural Number

هي فئة الأعداد الصحيحة الموجبة ونرمز لها بالرمز N

• الأعداد النسبية Rational Numbers

هي كل الأعداد التي يمكن كتابتها في صورة a/b ويرمز لها بالرمز Q

• الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

هي كل الأعداد التي لا يمكن كتابتها في صورة a/b ويرمز لها بالرمز Q^*

• الأعداد الحقيقية Real Numbers

هي مجموعة الأعداد النسبية وغير النسبية ونرمز لها بالرمز R

• الدالة Function

هي علاقة تربط بين مجموعتين الأولى تسمى بمجال الدالة والثانية تسمى بالمجال المصاحب.

• المجال والمجال المصاحب Domain of function and Co- Domain of Function

يقال أن f اقتران من المجموعة A إلى المجموعة B نجد أن A مجال وان B مجال مصاحب

• المدى Range

هو عبارة عن مجموعة صور المجال في المجال المقابل

• دالة واحد لواحد One to One Function

هي الدالة التي تحقق $f(x_1) = f(x_2)$ يقتضي أن $x_1 = x_2$

• دالة شاملة Absolute Function

يقال أن f دالة شاملة إذا كان المدى يساوي المجال المقابل

• المتغير التابع والمتغير المستقل Dependant Variable and Independent Variable

هو المتغير الذي فيه قيم y دائما تتغير بتغير قيمة x وتسمى y المتغير التابع ونسمى x بالمتغير المستقل.

• الدالة الزوجية Even Function

هي الدالة التي تكون فيها $f(-x) = f(x)$

• الدالة الفردية Odd Function

هي الدالة التي تكون $f(-x) = -f(x)$

• دالة كثيرة الحدود Polynomial Function

وهي الدالة التي وتكون في صورة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

إذا كان $a_n \neq 0$

• الدالة الدورية Periodic Function

هي التي تكرر نفسها بصورة منتظمة لفترات متساوية أي كانت تحقق

$$f(x+nL) = f(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

• النهاية Limit

إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية وان x عدد حقيقي نقول أن $f(x)$ لها نهاية L

عندما تقترب x من a وتكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

• المقادير غير المعينة Infinite quantities

هي مقادير لا يمكن معرفة قيمتها علي وجه التحديد وأهمها

(1) $\frac{0}{0}$ (2) $\frac{\infty}{\infty}$ (3) $0 \times \infty$ (4) $\infty - \infty$

• الدالة المستمرة Continues Function

هي الدالة التي تكون $f(a)$ قيمة منتهية وتكون النهاية اليمنى = النهاية اليسرى للدالة

عند $x = a$ وان تساوي كل من النهايتين $f(a)$

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحساب الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada.



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
47	المقدمة
47	تمهيد
47	أهداف الوحدة
48	1. تعريف المعنى الهندسي للمشتقة الأولى
50	2. إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية
52	3. إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للدوال المثلثية
57	الخلاصة
57	لمحة مسبقة عن الوحدة السابقة
58	إجابات التدريبات
60	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
61	مسرد المصطلحات
62	المراجع

المقدمة

تمهيد

مرحبا بك. في الوحدة الثانية بعنوان المشتقة الأولى هذه الوحدة لها ارتباط وثيق بالوحدة الأولى والدالة بصفة خاصة ، يمكنك بسهولة ويسر متابعة وشرح أقسام الوحدة الثانية بعد دراستك للوحدة الأولى والتي تتكون من ثلاثة أقسام رئيسية القسم الأول يشرح ويعرف المعنى الهندسي والبياني للمشتقة الأولى ثم القسم الثاني يبدأ بإيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية وشرحها مع ذكر أمثلة. أما القسم الثالث يشرح المشتقة الأولى للدوال المثلثية.

تجد في داخل الوحدة عدد من الأمثلة ومجموعة من التدريبات ولها إجابات في نهاية الوحدة حتى تتمكن من التأكد من الإجابات الصحيحة وأسئلة التقويم الذاتي لكي تساعدك على المراجعة والاستذكار.

توجد بعض الوسائط البصرية وبرمجيات الحاسوب لتمكنك من إعادة ما صعب عليك فهمه في داخل الوحدة.

نتمنى لك الاستفادة من هذه الوحدة وان تساعدنا في تقييمها ونقدها.

أهداف الوحدة



بعد دراستك لهذه الوحدة ينتظر منك أن تكون قادرا علي أن:

1. تعرف المشتقة الأولى.
2. ترسم وتنتج المشتقة الأولى هندسيا وبيانيا.
3. تحسب المشتقة الأولى من المبادئ الأولية.
4. تشرح المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للدوال المثلثية.
5. تحسب المشتقة الأولى لجيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية.
6. توجد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للقاطع وظل التمام وقاطع تمام الزاوية

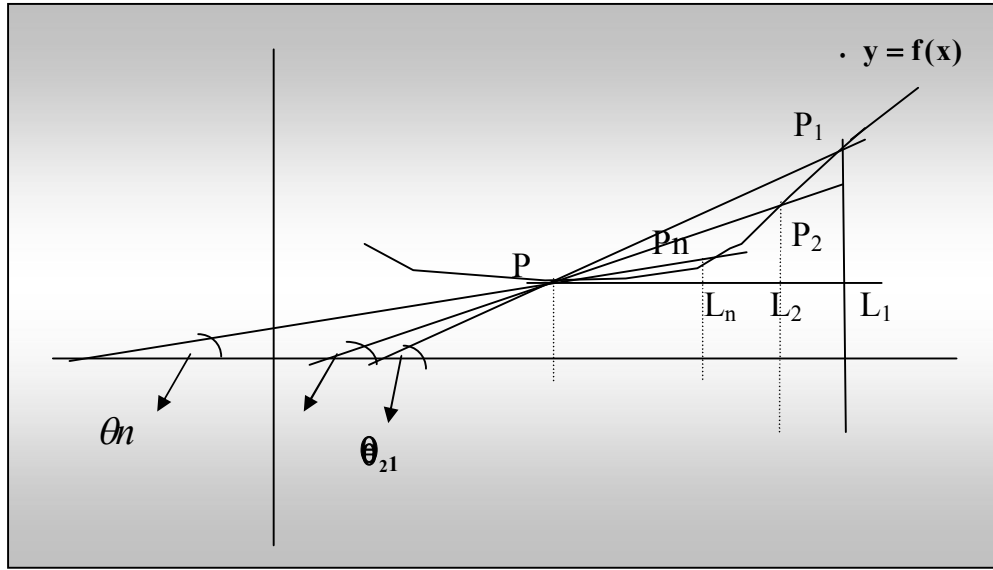
1. تعريف المعنى الهندسي للمشتقة الأولى

Derivative First The

قبل بداية الوحدة الثانية عليك أن تحاول إعادة واسترجاع ما ذكر وشرح في الوحدة الأولى حتى تتمكن من متابعة وفهم هذه الوحدة.

نبدأ بالشرح لمعنى المشتقة الأولى بيانيا

لننظر إلى بيان الدالة $y = f(x)$ الشكل (2.1.1) ولنأخذ النقطتين $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y), P(x, y)$ (الرمز Δ يقرأ Delta) علي منحنى الدالة $y = f(x)$.



الشكل (2.1.1)

لتكن L_1 نقطة تقاطع المستقيم الذي يمر بـ P_1 ويوازي محور y (المحور الراسي) مع

المستقيم الذي يمر بـ P ويوازي محور x (المحور الأفقي). من الشكل $\tan \theta_1 = \frac{L_1 P_1}{L_1 P}$

(حيث $\tan \theta_1$ ترمز لظل الزاوية θ_1)

وإذا تحركت النقطة P_1 علي منحنى الدالة نحو P للموقع P_2 ولتكن L_2 النقطة التي تقطع

فيها المستقيم الذي يمر بـ P_2 ويوازي محور y المستقيم PL_1 ولتكن θ_2 الزاوية التي يصنعها الوتر الجديد PP_2 مع محور x . فان

$$\tan \theta_2 = \frac{L_2 P_2}{L_2 P}$$

وبتكرار هذه العملية (تحرك P_2 إلى P_3 ثم إلى $P_4 \dots P_n$ نحو P) تكون لدينا الزوايا $\theta_3, \theta_4, \dots, \theta_n$

و أخيراً عندما تقترب P_n من P (إذا زادت n بصورة لا نهائية) يقترب الوتر PP_n إلى المماس للمنحني عند P .

$$\tan \theta_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{الآن}$$

وعندما تقترب P_n إلى P فان كلاً من Δx و Δy تقترب شيئاً فشيئاً من الصفر كما تقترب الزاوية θ_n إلى θ_∞ التي يصنعها المماس للمنحني عند P_0 مع محور x وعليه

$$\tan \theta_\infty = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي أن هذه النهاية تساوي ميل المماس للمنحني عند النقطة P عليه ونسمي هذه النهاية المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلي الاول للدالة $y = f(x)$ وتكتب

$$\frac{dy}{dx}$$

وبما أن y معطاة بدلالة x علي المنحني فان Δy تمثل التغير في y المطابق للتغير الذي طرأ علي x . وعليه يمكننا حساب Δy بدلالة Δx .

والنسبة $\frac{dy}{dx}$ تمثل معدل تغيير y بالنسبة إلى x . فالمعني الحقيقي والاشمل للمعامل التفاضلي الأول ما هو إلا معدل تغيير الدالة بالنسبة للمتغير المستقل.

2. إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية

لإيجاد المعامل التفاضلي الأول أو المشتقة الأولى من المبادئ الأولية نقوم بالخطوات التالية:

1- نحسب التغير Δy المقابل في y (من معادلة الدالة) بدلالة التغير Δx ، وهو

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

2- نأخذ النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

3- نوجد نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر أي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

أمثلة <

أوجد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية لكل من

1) $y = ax^n$

2) $y = x^2 + 5x + 1$

حيث a ثابت

1) $y = f(x) = ax^n$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$$

وبتعويض $\Delta x = 0$ نجد قيمة $\frac{dy}{dx} = 0$ ولكن باستخدام النهاية الهامة (1.3.3.1) نجد

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^n - ax^n}{\Delta x + x - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^n - ax^n}{(x + \Delta x) - x} = n ax^{n-1}$$

• يمكن تعميم هذه القاعدة لأي عدد حقيقي n مثلاً

(i) $y = 2x^{-5}$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times -5 \times x^{-5-1} = -10x^{-6}$$

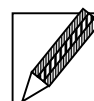
(ii) $y = 5x^{-\frac{3}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \times -\frac{3}{2} \times x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{15}{2} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$2) \quad y = x^2 + 5x + 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 1) - (x^2 + 5x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 5x + 5(\Delta x) + 1) - x^2 - 5x - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 5(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 5)}{\Delta x} \\ &= 2x + 5 \end{aligned}$$

تدريب (1)



أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

$$1) \quad y = 3x + 1$$

$$2) \quad y = 5x^2 + 2x - 11$$

$$3) \quad y = 2x^{-3} + 3x^{-2}$$

$$4) \quad y = 6x^{1/3} + 16x^{1/4}$$

$$5) \quad y = x^3 - x^{3/2} + x^{-1/2}$$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



1/ أوجد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية لكل مع كتابة الخطوات

a) $y = x^3 + 3x + 2$

b) $y = x^2 - 2x + 1$

c) $y = x^2 - 1$

2/ اكتب المعامل التفاضلي الأول للدالة $y = f(x)$

3/ ما هي الخطوات لإيجاد المعامل التفاضلي الأول من المبادئ الأولية

4/ احسب التغير Δy المقابل في y من معادلة الدالة $y = f(x)$ أوجد النسبة ثم نهاية النسبة.

3. إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للدوال المثلثية

إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للدوال المثلثية لا يختلف عن الخطوات لإيجاد المشتقة الأولى للمبادئ الأولية ولكن عليك بمراجعة الخطوات السابقة حتى تتمكن من فهم هذا القسم من الوحدة ونأخذ

أولاً: إيجاد المشتقة الأولى للجيب

$$y = \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \end{aligned}$$

عندما تقترب Δx من الصفر فإن $\cos \Delta x$ تقترب من 1

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos x = \cos x$$

(استخدمنا أولاً قانون جيب مجموع زاويتين وثانياً نتيجة النهاية الهامة (1.3.3.2)).

ثانياً: إيجاد المشتقة الأولى لجيب تمام الزاوية

$$y = \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \end{aligned}$$

وبالمثل فإن $\cos \Delta x$ يقترب من 1 عندما تقترب Δx من الصفر

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \sin x = -\sin x$$

ثالثاً: إيجاد المشتقة الأولى لظل الزاوية

$$y = \tan x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + \Delta x) - \tan x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + \tan \Delta x}{1 - \tan x \cdot \tan \Delta x} - \tan x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan \Delta x - \tan x(1 - \tan x \tan \Delta x)}{\Delta x(1 - \tan x \tan \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan \Delta x - \tan x + \tan^2 x \tan \Delta x}{\Delta x(1 - \tan x \tan \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan \Delta x(1 + \tan^2 x)}{\Delta x(1 - \tan x \tan \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \frac{(1 + \tan^2 x)}{\cos \Delta x(1 - \tan x \tan \Delta x)} \\ &= \frac{1 \times (1 + \tan^2 x)}{1(1 - \tan x(0))} = \sec^2 x \end{aligned}$$

استخدمنا المتطابقة المثلثية المعروفة وهي

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

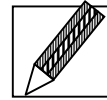
تدريب (2)

أوجد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للدوال الآتية:

1) $y = \sin(2x + 3)$

2) $y = \cos(3x + 1)$

3) $y = \tan(-2x + 1)$



رابعاً: إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية للقاطع

$$y = \sec x$$

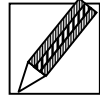
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sec(x + \Delta x) - \sec x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 \div \cos(x + \Delta x)) - (1 \div \cos x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(x + \Delta x)}{\Delta x (\cos x \cos(x + \Delta x))} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x)}{\Delta x (\cos x [\cos \Delta x \cos x - \sin x \sin \Delta x])} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x \cos(0) - \cos x \sin x \sin(0)} \\ &= 1 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sec x \tan x \end{aligned}$$

تدريب (3)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = \sec(ax + b)$

حيث a ، b ثابتان



خامساً: المشتقة الأولى من المبادئ الأولية لظل التمام

$$y = \cot ax$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cot a(x + \Delta x) - \cot ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 \div \tan(x + \Delta x)) - (1 \div \tan x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan(x + \Delta x)}{\Delta x \tan x \tan(x + \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \frac{(\tan x + \tan \Delta x)}{(1 - \tan x \tan \Delta x)}}{\Delta x \tan x \tan(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x \tan \Delta x - \tan x - \tan \Delta x}{\Delta x(1 - \tan x \tan \Delta x) \tan x \tan(x + \Delta x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\tan \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{(\tan^2 x + 1)}{(1 - \tan x \tan(0)) \tan x \tan(x + 0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{-(\tan^2 x + 1)}{\cos 0 \tan^2 x} \\
&= \frac{-\tan^2 x - 1}{\tan^2 x} = -1 - \cot^2 x = -\operatorname{cosec}^2 x
\end{aligned}$$

استخدمنا المتطابقة المثلثية

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

سادسا: إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية لقاطع التمام

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosec}(x + \Delta x) - \operatorname{cosec} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 \div \sin(x + \Delta x)) - (1 \div \sin x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(x + \Delta x)}{\Delta x(\sin x \sin(x + \Delta x))} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x)}{\Delta x(\sin x \sin(x + \Delta x))} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos(0) - \sin \Delta x \cos x}{\Delta x(\sin x \sin(x + 0))} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cot x
\end{aligned}$$

الجدول الآتي يساعد الدارس علي حفظ المشتقة الأولى للدوال المثلثية

$y = f(x)$	dy/dx
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



1. أكمل الجدول الآتي والذي يبين المشتقة الأولى للدوال المثلثية

$y = f(x)$	dy/dx
$\sin x$	
$\tan x$	
$\cotan x$	
$\sec x$	

2. أوجد المشتقة الأولى لجيب تمام الزاوية $y = \cos x$

الخلاصة

في هذه الوحدة تم شرح المعني الهندسي للمشتقة الأولى ومنها أوجدنا قانون المشتقة الأولى وتعريفها رياضيا وهي ميل المماس للمنحني عند نقطة عليه ويطلق عليها النهاية وتعرف أيضا بأنها معدل تغير الدالة بالنسبة للمتغير المستقل ويرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$ ثم بدأ القسم الثاني بشرح عن كيفية إيجاد المشتقة الأولى لأي دالة من المبادئ الأولية وتعرفت علي الخطوات الهامة لإيجاد المعامل التفاضلي وهي أن نحسب التغير ثم نأخذ النسبة وبعد ذلك نوجد النهاية القسم الثالث تم فيه شرح لإيجاد المشتقة الأولى للدوال المثلثية من المبادئ الأولية وتوصلنا إلى قوانين المشتقات وهو الجيب $\cos x$ ومشتقه لجيب التمام $\sin x$ - ولظل $\sec^2 x$ ولظل التمام $\sec x \tan x$ والقاطع $\cotan x$ $\csc x$ - وقاطع التمام $\csc^2 x$ - وتم شرح كيفية إيجاد المشتقة الأولى لكل الدوال المثلثية وهي عبارة عن تفاضل الزاوية مضروب في تفاضل النسبة المثلثية.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة الثالثة والتي تلي هذه الوحدة بعنوان قوانين التفاضل وسوف يتم التطرق والشرح بالتفصيل لقوانين التفاضل وهو قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين وتفاضل حاصل قسمة دالتين وتفاضل دالة الدالة بعد أن تكون قد استوعبت الوحدة الأولى والثانية ومشتقات الدوال المثلثية جيدا لأنها ترتبط بالوحدات الأخرى للمقرر.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$1) y = 3x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 1 \times x^{1-1} = 3$$

$$2) y = 5x^2 + 2x - 11$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \times 2 \times x^{2-1} + 2 \times x^{1-1} = 10x + 2$$

$$3) y = 2x^{-3} + 3x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times -3 \times x^{-3-1} + 3 \times -2 \times x^{-2-1} = -6x^{-4} - 6x^{-3}$$

$$4) y = 6x^{1/3} + 16x^{1/4}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \times \frac{1}{3} \times x^{\frac{1}{3}-1} + 16 \times \frac{1}{4} \times x^{\frac{1}{4}-1} = 2x^{-2/3} + 4x^{-3/4}$$

$$5) y = x^3 - x^{3/2} + x^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times x^{3-1} - \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} - \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}-1} = 3x^2 - \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

تدريب (2)

$$1) y = \sin(2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2(x + \Delta x) + 3) - \sin(2x + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin((2x + 3) + 2\Delta x) - \sin(2x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + 3) \cos(0) + \cos(2x + 3) \sin 2\Delta x - \sin(2x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{2\Delta x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2\Delta x}{2\Delta x} \cos(2x + 3) = 2 \cos(2x + 3) = 2 \cos(2x + 3)$$

$$2) \quad y = \cos(3x + 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(3(x + \Delta x) + 1) - \cos(3x + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos((3x + 1) + 3\Delta x) - \cos(3x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x + 1)\cos 3\Delta x - \sin(3x + 1)\sin 3\Delta x - \cos(3x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{3\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3\Delta x}{3\Delta x} \cdot -\sin(3x + 1) = -3\sin(3x + 1) \end{aligned}$$

$$3) \quad y = \tan(-2x + 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan((-2x + 1) - 2\Delta x) - \tan(-2x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan(-2\Delta x)(1 + \tan^2(-2x + 1))}{\Delta x (1 - \tan(-2x + 1)\tan(-2\Delta x))} \\ &= \lim_{-2\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(-2\Delta x)}{-2\Delta x} \cdot \frac{(1 + \tan^2(-2x + 1))}{\cos(-2\Delta x)(1 - \tan(-2x + 1)\tan(-2\Delta x))} \\ &= -2\sec^2(-2x + 1) \end{aligned}$$

تدريـب (3)

$$\begin{aligned} 1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax + b) - \cos(a\Delta x + (ax + b))}{\Delta x \cos(ax + b) \cos(a\Delta x + (ax + b))} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax + b) - [\cos(a\Delta x)\cos(ax + b) - \sin(a\Delta x)\sin(ax + b)]}{\Delta x \cos(ax + b) \cos(a\Delta x + (ax + b))} \\ &= \lim_{a\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \sin a\Delta x}{a\Delta x} \cdot \frac{\sin(ax + b)}{\cos^2(ax + b)} = a \frac{1}{\cos(ax + b)} \cdot \frac{\sin(ax + b)}{\cos(ax + b)} \\ &= a \sec(ax + b) \tan(ax + b) \end{aligned}$$

حيث a, b ثابتان

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. (a) $3x + 3$
(b) $= 2x - 2$
(c) $2x$
2. dy / dx

3. أولاً نحسب التغير Δy المقابل في y (من معادلة الدالة) بدلالة التغير Δx ، وهو

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ثانياً نأخذ النسبة}$$

ثالثاً نوجد نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر أي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{النسبة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{النهاية}$$

تقويم ذاتي (2)

1. $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$
 $\frac{d}{dx} (\tan x) = \sec^2 x$
 $\frac{d}{dx} (\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
 $\frac{d}{dx} (\sec x) = \sec x \tan x$

$$2. y = \cos x$$

$$-\sin x = \text{المشتقة الأولى}$$

مسرد المصطلحات

- المشتقة الأولى The first Derivative

هي عبارة عن نهاية متوسط التغير عند $\Delta x \rightarrow 0$ ويرمز لها بالرمز $f'(x)$ وتكتب $\frac{dy}{dx}$ وهي ميل المماس للمنحني.

- معدل تغير Variation Rate

هو نسبة التغير في y إلى التغير في x أو هي معدل تغير الدالة بالنسبة للمتغير المستقل

ويرمز لها بالرمز $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسين الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N ,**Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
65	المقدمة
65	تمهيد
65	أهداف الوحدة
66	1. قوانين التفاضل
66	1.1 تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين
66	2.1 تفاضل حاصل ضرب دالتين
69	3.1 تفاضل حاصل قسمة دالتين
70	4.1 تفاضل دالة الدالة
73	الخلاصة
73	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
74	إجابات التدريبات
78	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
79	مسرد المصطلحات
80	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس نرحب بك في الوحدة الثالثة بعنوان قوانين التفاضل بعد الشرح والفهم الجيد للوحدة الأولى والثانية والتي كانت تشمل الدوال ومشتقات الدوال المتثلثة والتي سترد كثيرا في أمثلة هذه الوحدة.

تبدأ قوانين التفاضل بقانون تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين، ثم قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين يأتي بعده تفاضل حاصل قسمة دالتين وتفاضل دالة الدالة.

تجد في ثنايا هذه الوحدة أمثلة لتعميق الشرح وتقريب الفهم والاستيعاب، وحتى يتمكن الدارس من حل التدريبات الواردة في هذه الوحدة مع وجود أسئلة تقويم ذاتي لاسترجاع القوانين واستذكارها وحفظها.

في نهاية هذه الوحدة نجد حلول للتدريبات وكذلك نجد من الوسائط السمعية والبصرية وبرمجيات الحاسوب ما يعينك علي زيادة المعرفة وتعميق الشرح. نطلب منك أن تساعدنا في تقييم هذه الوحدة.

أهداف الوحدة

أخي الدارس



بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي أن تكون قادرا علي أن:

- 1/ تشرح تفاضل حاصل جمع وطرح دالتين.
- 2/ تحل تفاضل حاصل ضرب دالتين .
- 3/ تحسب تفاضل حاصل قسمة دالتين.
- 4/ تستنتج وتشرح تفاضل دالة الدالة.
- 5/ تميز بين قوانين التفاضل الأربعة.

1. قوانين التفاضل The Differentiation Rules

يجب عليك مراجعة الوحدة الأولى والثانية جيدا حتى نبدأ معا مشوارنا مع الوحدة الثالثة وقوانين التفاضل وهي كما يلي:

1.1 تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين

لتوضيح الشرح نبدأ بالمثال الآتي:

لنكن $y = u \pm v$ حيث u, v بدلالة x وليكن $\Delta u, \Delta v$ هما التغير الناتج في u, v على الترتيب عندما يحدث تغير Δx في x .

$$\Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) - u \pm v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

والقاعدة هي : تفاضل حاصل جمع (طرح) دالتين يساوي جمع (طرح) تفاضل الدالتين .

➤ أمثلة:

$$(1) y = x^2 + \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \sin x$$

$$(2) y = \tan x + \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x$$

2.1 تفاضل حاصل ضرب دالتين

المثال أدناه يشرح لك تفاضل حاصل ضرب دالتين ومنه نستنتج القاعدة التي لابد لك أن تحفظها وتتأكد من معرفتك وفهمك الجيد لها.

لنكن $y = uv$ حيث u, v دالتان في x وليكن $\Delta u, \Delta v$ هما التغير الناتج في u, v على الترتيب عندما يحدث تغير Δx في x .

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\ &= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

عندما تقترب Δx من الصفر فإن Δu أيضا تقترب من الصفر . إذن
وهذه هي قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين :

المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين يساوي الدالة الأولى $\times$ المعامل التفاضلي للدالة الثانية زائداً الدالة الثانية $\times$ المعامل التفاضلي للأولى.

سوف يتبادر إلى ذهنك إذا كان هنالك حاصل ضرب أكثر من دالتين ما هو القانون أو القاعدة التي يجب أن تطبق؟ للإجابة علي هذا السؤال
يمكننا تعميم هذه القاعدة لحاصل ضرب أكثر من دالتين ، مثلاً لإيجاد المعامل التفاضلي لحاصل ضرب ثلاث دوال نعتبر دالتين منها كدالة واحدة ونطبق القاعدة السابقة مثلاً إذا كانت

$$\begin{aligned}y &= uvw = (uv)w \\ \frac{dy}{dx} &= uv \frac{dw}{dx} + w \frac{d(uv)}{dx} \\ &= uv \frac{dw}{dx} + w \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) \\ &= uv \frac{dw}{dx} + wu \frac{dv}{dx} + wv \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

وإذا كانت y حاصل ضرب أربع دوال يمكننا اخذ دالتين كدالة واحدة أو اخذ ثلاث دوال كدالة واحدة ونطبق قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين.
 أمثله: <

$$1) \quad y = x^3 \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^3 \frac{d \sin x}{dx} + \sin x \frac{dx^3}{dx} \\ &= x^3 \cos x + \sin x (3x^2) = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x \end{aligned}$$

$$2) \quad y = x^3 \sin x \tan x = (x^3 \sin x) \tan x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^3 \sin x \frac{d}{dx} (\tan x) + \tan x \frac{d}{dx} (x^3 \sin x) \\ &= x^3 \sin x \sec^2 x + \tan x (x^3 \cos x + 3x^2 \sin x) \end{aligned}$$

بعد دراستك ومعرفتك للقانونين قانون حاصل جمع وطرح دالتين وقانون حاصل ضرب دالتين تكون قد حققت الهدف الأول والثاني وحتى يتم لك التأكد من الفهم نأتي إلى أسئلة التقويم الذاتي لتبدأ في وضع الحلول لها.

أسئلة تقويم ذاتي (1)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$1/ \quad y = x^3 + \cos x$$

$$2/ \quad y = x^3 \sin x \tan x$$

$$3/ \quad y = x^3 \sin x$$

$$4/ \quad y = \tan x + \operatorname{cosec} x$$

5/ برهن قانون حاصل ضرب دالتين.

3.1 تفاضل حاصل قسمة دالتين

بعد نهاية شرح ضرب الدالتين فأكثر ندخل سوياً إلى شرح حاصل قسمة دالتين

لتكن $y = \frac{u}{v}$ حيث u, v بدلالة x

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \div v^2$$

➤ أمثله:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$1) \quad y = \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 - 7}$$

$$2) \quad y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

الحل

$$1) \quad y = \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 - 7}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2 - 7)(2x + 3) - (x^2 + 3x + 5)(4x)}{(2x^2 - 7)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^3 + 6x^2 - 14x - 21) - (4x^3 + 12x^2 + 20x)}{4x^4 - 28x^2 + 49}$$

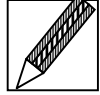
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2 - 34x - 21}{4x^4 - 28x^2 + 49}$$

$$2) \quad y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

وهذه النتيجة تذكرك بالتي حصلت عليها بالوحدة الثانية باستخدام المبادئ الأولية. عليك أخي الدارس الرجوع إليها حتى تستطيع ربط الوحدات والتأكد من ذلك.

تدريب (1)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$1) \quad y = (x^2 + 1)(3x - 1) \quad 2) \quad y = (x^2 + 1)(3x - 1) \cos x$$

$$3) \quad y = (2x^2 - 3) \operatorname{cosec} x \quad 4) \quad y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$

$$5) \quad y = \frac{x^2}{1 + \cotan x} \quad 6) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$$

4.1 تفاضل دالة الدالة

مما سبق شرحه حاول أن تتعرف علي ماذا نعني بتفاضل دالة الدالة. إذا كانت y معطاة بدلالة u و u معطاة بدلالة x فنقول أن y دالة في x . و نستطيع أن نكتب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

أُمثلة <

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = (6x - 1)^4$ 2) $y = \sin(3x^2 - x + 7)$ 3) $y = \cotan(7x - 2)$

4) $y = \tan^3 x$

1) $y = (6x - 1)^4$

الحل:

بأخذ $u = (6x - 1)$ فإن $y = u^4$

$$\frac{dy}{du} = 4(u)^3, \quad \frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = [4(6x - 1)^3] [6] = 24(6x - 1)^3$$

2) $y = \sin(3x^2 - x + 7)$

الحل:

بأخذ $u = 3x^2 - x + 7$ فإن $y = \sin u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u)(6x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x - 1) \cos(3x^2 - x + 7)$$

3) $y = \cotan(7x - 2)$

الحل:

بوضع $u = 7x - 2$ فإن $y = \cotan u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\operatorname{cosec}^2 u)(7)$$

$$\frac{dy}{dx} = -7 \operatorname{cosec}^2(7x - 2)$$

4) $y = \tan^3 x$

الحل:

بوضع $u = \tan x$ فإن $y = u^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3u^2)(\sec^2 x) = 3 \tan^2 x \sec^2 x$$

تدريب (2)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت



1) $y = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

2) $y = \tan^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3) $y = \frac{\sqrt{1 - \sin x^2}}{\sec^2 x}$

4) $y = \frac{\sin x^3 \tan(5x+1)}{(7x+1)}$

أسئلة تقويم ذاتي (2)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت



1. $y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

2. $y = (6x-1)^4$

3. $y = \cotan(7x-2)$

4. $y = \tan^3 x$

5. $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 - 7}$

6. برهن تفاضل دالة الدالة.

الخلاصة

دعنا نقوم معا بتلخيص أهم ما ورد في هذه الوحدة

شملت الوحدة الثالثة قوانين التفاضل وهي تعتبر ذات أهمية قصوى في علم الحساب وبدأت الوحدة بالقانون الأول للتفاضل وهو تفاضل حاصل جمع وطرح دالتين تم برهان القانون وتوصلنا إلى القاعدة وهي تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين يساوي جمع أو طرح تفاضل الدالتين بعد ذلك تم شرح ضرب دالتين أو أكثر بانه المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين أو أكثر يساوي الدالة الأولى في المعامل التفاضلي للدالة الثانية زايذا الدالة الثانية في المعامل التفاضلي للأولى $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ في حالة ثلاثة دوال تعتبر دالتين كدالة واحدة وإذا أكثر من ثلاثة اخذ دالتين كدالة واحدة أو اخذ ثلاثة دوال كدالة واحدة. ويأتي القانون الثالث حاصل قسمة دالتين $\frac{dy}{dx} = \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \div v^2$ ثم القانون الرابع تفاضل دالة داله.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

بعد نهاية الوحدة الثالثة نأتي بك إلى شرح الوحدة الرابعة بعنوان الدالة الأسية وفي هذه الوحدة سوف نتعرف عن الدالة الأسية والعدد e وكذلك بيان ورسم الدالة الأسية ثم عمليات تفاضل الدالة الأسية مع وجود أمثلة وتدريبات لتعميق الفهم والشرح.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

الحل

$$1) \quad y = (x^2 + 1)(3x - 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 1)(3) + (3x - 1)(2x) = 3x^2 + 3 + 6x^2 - 2x \\ &= 9x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

$$2) \quad y = (x^2 + 1)(3x - 1) \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 1)(3x - 1)(-\sin x) + (x^2 + 1)(\cos x)(3) + (3x - 1)(\cos x)(2x) \\ &= -(x^2 + 1)(3x - 1) \sin x + 3(x^2 + 1) \cos x + 2x(3x - 1) \cos x \end{aligned}$$

$$3) \quad y = (2x^2 - 3) \operatorname{cosec} x$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{dx} &= (2x^2 - 3)(-\operatorname{cosec} x \cotan x) + 4x \operatorname{cosec} x \\ &= ((3 - 2x^2) \cotan x + 4x) \operatorname{cosec} x \end{aligned}$$

$$4) \quad y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \tan x) \sec^2 x - (\tan x) \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \end{aligned}$$

$$5) \quad y = \frac{x^2}{1 + \cotan x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \cotan x)(2x) - x^2(-\operatorname{cosec}^2 x)}{(1 + \cotan x)^2} \\ &= \frac{2x(1 + \cotan x) + x^2 \operatorname{cosec}^2 x}{(1 + \cotan x)^2} \end{aligned}$$

$$6) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x \sin x)(2x) - (x^2 + 1)(x \cos x + (1) \sin x)}{(x \sin x)^2}$$

$$= \frac{2x^2 \sin x - (x^3 + x) \cos x - (x^2 + 1) \sin x}{x^2 \sin^2 x}$$

تدريب (2)

$$1) \quad y = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$u = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \Rightarrow y = \tan u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx} \dots\dots\dots(1)$$

$$u = w^2 \quad \text{فان} \quad w = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{إذا أخذنا}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 2w \cdot \left(\frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} \right) = 2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) = -4 \frac{x+1}{(x-1)^3}$$

بالتعويض في (1)

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u \left(\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3} \right)$$

$$= \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3} \sec^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

$$2) \quad y = \tan^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$y = u^2 \quad \text{نجد} \quad u = \tan \frac{x+1}{x-1} \quad \text{إذا عوضنا}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \frac{du}{dx}$$

$$u = \tan w \quad \text{فان} \quad w = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{وإذا عوضنا}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \sec^2 w \cdot \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \sec^2 w \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2u \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) \sec^2 w = 2 \tan \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) \sec^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \\ &= \frac{-4}{(x-1)^2} \tan \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \sec^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

$$3) \quad y = \frac{\sqrt{1 - \sin x^2}}{\sec^2 x}$$

$$y = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{w^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{w^2 \frac{d}{dx} u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} w^2}{w^4} = \frac{w \left(\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} \right) - u^{\frac{1}{2}} \left(2w \frac{dw}{dx} \right)}{w^4} \dots\dots\dots(1)$$

وذلك بوضع $w = \sec x$, $u = 1 - \sin x^2$

أيضا إذا عوضنا $u = 1 - \sin v \Leftarrow v = x^2$ فإن

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = -\cos v(2x) = -2x \cos x^2$$

$$\frac{dw}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x \left(\frac{1}{2} (1 - \sin x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x \cos x^2) \right) - (1 - \sin x^2)^{\frac{1}{2}} (2 \sec^2 x \tan x)}{\sec^4 x}$$

$$4) \quad y = \frac{\sin x^3 \tan(5x+1)}{(7x+1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(7x+1) \frac{d}{dx} (\sin x^3 \tan(5x+1)) - \sin x^3 \tan(5x+1) \frac{d}{dx} (7x+1)}{(7x+1)^2}$$

$$\frac{d(7x+1)}{dx} = 7$$

$$\frac{d}{dx} (\sin x^3 \tan(5x+1)) = \frac{d}{dx} \sin x^3 \cdot \tan(5x+1) + \sin x^3 \frac{d}{dx} \tan(5x+1)$$

$$\text{بوضع } u = x^3$$

$$\frac{d}{dx} \sin x^3 = \frac{d}{du} \sin u \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

$$\text{بوضع } v = 5x + 1$$

$$\frac{d}{dx} \tan(5x + 1) = \frac{d}{dv} \tan v \cdot \frac{dv}{dx} = 5 \sec^2(5x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(7x + 1) \left(3x^2 \cos x^3 \tan(5x + 1) + 5 \sec^2(5x + 1) \sin x^3 \right) - 7 \sin x^3 \tan(5x + 1)}{(7x + 1)^2}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$
2. $\frac{dy}{dx} = x^3 \sin x \sec^2 x + \tan x (x^3 \cos x + 3x^2 \sin x)$
3. $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos x + \sin x (3x^2) = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$
4. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x$
5. الرجوع إلى البرهان داخل الوحدة

تقويم ذاتي (2)

1. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
2. $\frac{dy}{dx} = 24 (6x-1)^3$
3. $\frac{dy}{dx} = -7 \operatorname{cosec}^2 (7x-2)$
4. $\frac{dy}{dx} = 3 \tan^2 x \sec^2 x$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2 - 34x - 21}{4x^4 - 28x^2 + 49}$

6. الرجوع إلى البرهان داخل الوحدة

مسرد المصطلحات

- تفاضل Differential

إذا كانت f دالة فان

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

هذه النهاية تسمى تفاضل الدالة f عند x ويرمز لها بالرمز $f'(x)$

- اشتقاق Differentiation

هو دراسة متسلسلة للنهايات والتي يطلق عليها الرياضيون نظريات الاشتقاق

المراجع

أولا المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسبان الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
83	المقدمة
83	تمهيد
83	أهداف الوحدة
84	1. العدد e
85	2. الدالة الأسية
88	3. المعامل التفاضلي للدالة الأسية
91	الخلاصة
91	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
92	إجابات التدريبات
94	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
95	مسرد المصطلحات
96	المراجع

المقدمة

تمهيد

أخي الدارس مرحبا بك في الوحدة الرابعة بعنوان الدالة الأسية وتنقسم هذه الوحدة إلى ثلاثة أقسام رئيسية:

القسم الأول: فيه شرح تفصيلي للعدد e وأهميته في علم التفاضل والتكامل وكذلك ارتباطه مع العلوم الأخرى مثل علوم الفيزياء والجيولوجيا وتتعرف على كيفية إيجاد واستخدماته وتجد أن العدد e يعرف بالنهاية .

القسم الثاني: من الوحدة وهو الدالة الأسية نعرفها ونوضح بيان الدالة الأسية هندسيا .

القسم الثالث: عن المعامل التفاضلي للدالة الأسية ونستخدم قوانين التفاضل السابقة ذكرها في الوحدة الثالثة .

تجد في داخل الوحدة أمثلة للشرح والتطبيق وكذلك تدريبات لها إجابات في نهاية الوحدة وأسئلة تقويم ذاتي للمراجعة والتأكد من الفهم.

وتأتي الوسائط التعليمية مثل برمجيات الحاسوب لتزيد المعرفة و الشرح في نهاية الوحدة لك أن تعيد ما شرح وبعد ذلك تستطيع أن تقيم لنا هذه الوحدة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد فراغك من هذه الوحدة ينتظر أن تكون قادرا على:

- 1/ تعرف العدد e واستخدماته.
- 2/ تشرح الدالة الأسية.
- 3/ تستنتج وترسم الدالة الأسية هندسيا وبيانيا.
- 4/ تحسب المعامل التفاضلي للدالة الأسية.



1. العدد e

في بداية الوحدة الحديث عن العدد e ربما يصبح لك غريبا وصعبا ماذا نعني بالعدد e والذي هو ليس رقما كما يحدث في علم الرياضيات ولكنه رمز له دلالاته ومعناه وأهميته في حساب التفاضل والتكامل لعلك زدت شوقا لمعرفة تعريف العدد e وأهميته.

نجد أن العدد e عدد غير قياسي ويعرف بالنهاية

ولإيجاده وتعريفه نستخدم قانون مفكوك ذات الحدين

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

وإذا استخدمنا مفكوك ذات الحدين لإيجاد e نذكر بان المفكوك هو

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2}{(n-1)!}a b^{n-1} + \frac{n!}{n!}b^n]$$

بتطبيق هذا المفكوك علي المقدار $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n(1)\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}(1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 1 + \frac{(1)(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1)(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots\right]$$

وعندما نأخذ $n \rightarrow \infty$ نجد أن أي مقدار في الصورة $\frac{a}{n}$ يقترب من الصفر إذن

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

وسنرمز للمجموع بالرمز $\sum$ (summation)

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(المتسلسلة أعلاه متقاربة) ولنتعرف على العدد e نبدأ بالمتباينة

$$2 < e < 3$$

البرهان

واضح أن $e > 2$ (لان أول عددين من المجموع هما $(1+1)$) بقي أن نثبت أن

$$e < 3$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \dots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$$\therefore e < 3$$

هنا لابد لك أن ترجع إلى معلوماتك عن الهندسة التحليلية ومعرفة المتوالية الهندسية لكي تستخدمها في حل المفكوك لإيجاد قيمة e

★ ملاحظة

(استخدمنا مجموع المتوالية الهندسية التي حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$)
 وقيمة e لعشرة منازل عشرية هي 2.7182818285 وعادة نأخذ $e = 2.718$

2. الدالة الأسية Exponential Function

بعد أن شرحنا وعرفنا العدد e تعريفا واضحا نأتي إلى تعريف الدالة الأسية وارتباطها بالعدد e واستخدام العدد e في هذه الدالة.

الآن نعرف الدالة الأسية بأنها $y = e^x$

$$y = e^x = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{nx}$$

بوضع $m = nx$

$$e^x = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m} \right)^m$$

استخدم مفكوك ذات الحدين للمرة الثانية وفي هذه الحالة لا يأخذ منك زمن ولا تحتاج إلى إعادة شرح لأنك تكون قد استوعبت وفهمت جيدا الطريقة لحل المفكوك

$$\begin{aligned}
e^x &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + m \left(\frac{x}{m} \right) + \frac{m(m-1)}{2!} \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \left(\frac{x}{m} \right)^3 + \dots \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{(1) \left(1 - \frac{1}{m} \right)}{2!} x^2 + \frac{(1) \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left(1 - \frac{2}{m} \right)}{3!} \left(\frac{x}{m} \right)^3 + \dots \right) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

رسم منحنيات الدالة الأسية

عزيزي الدارس بعد تعريف الدالة الأسية رياضيا نأتي لتوضيح كيفية بيان الدالة الأسية ورسمها هندسيا

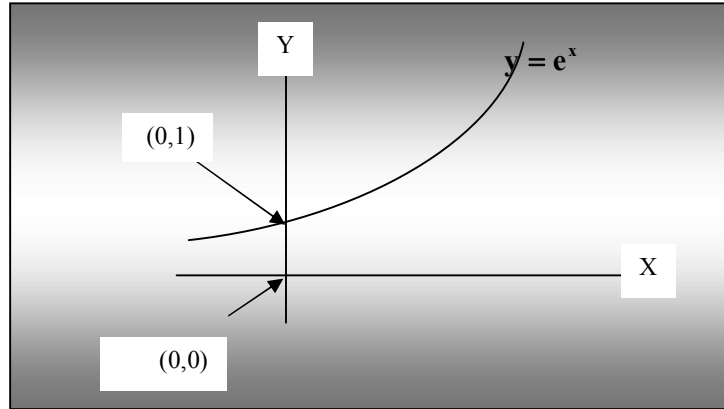
لكي نستطيع أن نرسم منحنى أي دالة أسية نتبع الخطوات الآتية:

- نأخذ مجموعة من الأعداد .
- نوجد صور هذه الأعداد ونتحصل علي مجموعة من الأزواج المرتبة تمثل نقاط .
- تحدد هذه النقاط ثم تصل بينها بخط منحنى .
- نتحصل علي منحنى الدالة المطلوب.

انظر إلى الجدول أدناه وتمعن في العمود والصف ارسم المحور X والمحور Y وعوض النقاط الواردة في الجدول حتى تتحصل علي الشكل أدناه.

$$x = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1, x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow e^\infty = \infty, x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0$$

x	0	1	∞	$-\infty$
Y=f(x)	1	2.718	∞	0



أسئلة تقويم ذاتي (1)



- 1/ اثبت أن $e < 3$
- 2/ استخدم مفكوك ذات الحدين للدالة الأسية $y = e^x$
- 3/ ارسم منحنى $f(x) = e^x$

3. المعامل التفاضلي للدالة الأسية

لإيجاد المعامل التفاضلي للدالة الأسية نأخذ المثال التالي لمعرفة كيفية إيجاده وحتى نتمكن من استخدامه وتطبيقه التطبيق الصحيح

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

بمفاضلة هذه المتسلسلة حداً حداً نجد

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x \end{aligned}$$

باستخدام مفكوك ذات الحدين نتحصل على المعامل التفاضلي لـ e^x ويمكن تعريفه بأنه:

المعامل التفاضلي لـ e^x هو e^x أي أن e^x هي معدل تغير نفسها

أمثلة <

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$1) y = xe^x \quad 2) y = \frac{e^x}{\sin x}$$

انظر إلى هذا المثال وحدد لنا ما يجب أن يستخدم لحل هذه المعادلة لعلك وصلت معي إلى استخدام تفاضل حاصل ضرب دالتين.

$$1) y = xe^x$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x(1) = (1+x)e^x$$

كذلك بالنظر إلى المثال 2 نستخدم تفاضل حاصل قسمة دالتين.

$$2) y = \frac{e^x}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x(e^x) - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

أما إذا كان العدد e مرفوعاً لأي أس آخر x (نفرض $u(x)$ هي أس e) نستخدم قانون

$$\frac{dy}{dx}$$

دالة الدالة لإيجاد

➤ أمثله

$$\frac{dy}{dx}$$

أوجد إذا كانت

$$1) y = e^{2x}$$

$$2) y = e^{\sin x}$$

$$3) y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

الحل بوضع $u = 2x$ فإن $y = e^u$

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}$$

$$2) y = e^{\sin x}$$

الحل بوضع $u = \sin x$ فإن $y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \cos x = \cos x e^{\sin x}$$

كذلك المثال الثاني هو تطبيق لاستخدام قانون دالة الدالة بعد معرفتك لهذه الأمثلة تفهمت ارتباط القوانين ببعضها البعض واستخداماتها في كثير من العمليات الرياضية.

$$3) y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

الحل بأخذ $u = \frac{x+1}{x-1}$

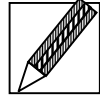
$$\frac{du}{dx} = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

في هذا المثال نجد أننا استخدمنا قانون آخر من قوانين التفاضل هو قانون قسمة دالتين بعد معرفتك وفهمك لهذا القانون يمكنك بسهولة ويسر أن تحل هذا المثال حاول قبل أن تنتظر إلى الحل.

تدريب رقم (1)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = e^{(3x^2+4x+6)}$

2) $y = e^{x^2 \sec x}$

3) $y = e^{\cotan 3x}$

4) $y = e^{x^3 \sin^2 x}$

5) $y = e^{\cos 5x}$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



أوجد المعامل التفاضلي للدوال الآتية

1. $y = e^x$

2. $y = \frac{e^x}{\sin x}$

3. $y = e^{2x}$

الخلاصة

أخي الدارس نأتي بك لنضع خلاصة لهذه الوحدة وقد اشتملت علي تعريف العدد e واستخداماته في التفاضل وهو عدد غير قياسي يعرف بالنهاية واستخدمنا لتعريفه وإيجاده قانون مفكوك ذات الحدين ثم تطرقنا في القسم الثاني إلى شرح للدالة الأسية وعرفت بأنها $y = e^x$ وتدربت علي كيفية رسم الدالة الأسية بيانياً بأخذ النقاط الواردة في الجدول ورسم محورين وتعويض النقاط عليها. ثم شرحنا في القسم الثالث كيف تحسب المعامل التفاضلي للدالة الأسية وعرف بأنه معدل تغير الدالة نفسها أي أنه $e^x = e^x$ وفي هذا القسم تم ربط قوانين التفاضل التي شرحت في الوحدة الثالثة مع قوانين الدالة الأسية.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

بعد تكملة دراسة الوحدة الرابعة التي كانت بعنوان الدالة الأسية وتم فيها مراجعة قوانين التفاضل الواردة في الوحدة الثالثة نأتي إلى الوحدة الخامسة لئتم الربط بين الدوال وندخل في الدالة اللوغاريتمية ونتعرف علي المعني الرياضي للدالة اللوغاريتمية بعد الرجوع إلى قوانين اللوغاريتمات ونستنتج المعامل التفاضلي للدالة اللوغاريتمية والرسم البياني أو الهندسي للدالة اللوغاريتمية.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$1) \quad y = e^{(3x^2+4x+6)}$$

الحل

$$u = 3x^2 + 4x + 6 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u (6x + 4) = (6x + 4)e^{(3x^2+4x+6)}$$

$$2) \quad y = e^{x^2 \sec x}$$

الحل

$$u = x^2 \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x, \quad y = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x) e^{x^2 \sec x}$$

$$3) \quad y = e^{\cotan 3x}$$

الحل

$$u = \cotan 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3 \operatorname{cosec}^2 3x, \quad \frac{dy}{du} = \frac{de^u}{du} = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3 \operatorname{cosec}^2 3x e^{\cotan 3x}$$

$$4) \quad y = e^{x^3 \sin^2 x}$$

الحل

$$u = x^3 \sin^2 x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x^3 \sin x \cos x + 3x^2 \sin^2 x, \quad \frac{dy}{du} = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x^3 \sin x \cos x + 3x^2 \sin^2 x) e^{x^3 \sin^2 x}$$

$$5) \quad y = e^{\cos 5x}$$

$$u = \cos 5x \Rightarrow y = e^u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -5 \sin 5x, \frac{dy}{du} = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -5 \sin 5x \, e^{\cos 5x}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

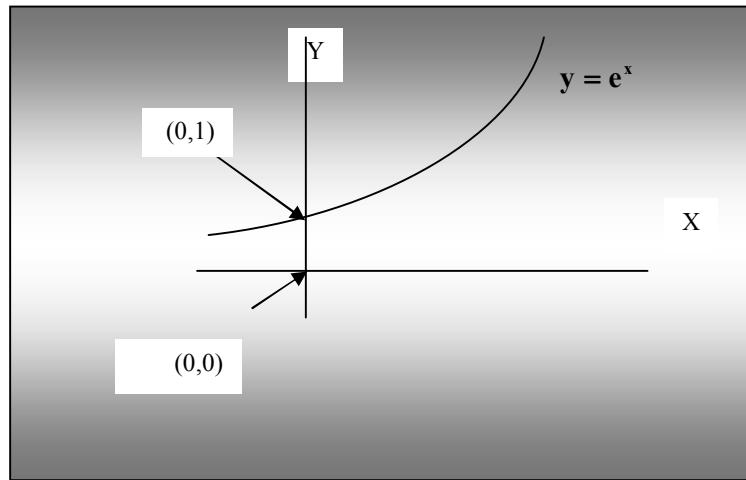
1. أن $e > 2$ (لأن أول عددين من المجموع هما $(1+1)$) بقي أن نثبت أن $e < 3$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$$\therefore e < 3$$

2. الرجوع إلى البرهان داخل الوحدة

3. الرسم البياني كما يلي



تقويم ذاتي (2)

1. e^x

2. $e^x \frac{(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$

3. $2e^{2x}$

مسرد المصطلحات

- **الدالة الأسية Exponential Function**

هي الدالة التي بها أس وتعرف بـ $y = e^x$ لكل قيم x الحقيقية.

- **العدد e**

عدد غير قياسي ويعرف بالنهاية وتكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

- **متسلسلة هندسية Geometric Series**

وهي المتسلسلة التي تأخذ الشكل $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ ويسمى a بالحد الأول ويسمى r بأساس المتسلسلة.

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسين الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانياً : المراجع الأجنبية

- 1/Caunt, G, W **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K .
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa.
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada.



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
99	المقدمة
99	تمهيد
99	أهداف الوحدة
100	1. الدالة اللوغريتمية
101	2. المعامل التفاضلي الأول للدالة اللوغريتمية
104	الخلاصة
104	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
105	إجابات التدريبات
106	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
108	مسرد المصطلحات
109	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس مرحبا بك في الوحدة الخامسة وموضوعها الدالة اللوغريتمية وتعتبر واحدة من الدوال التي لا بد من تعريفها وشرح استخداماتها وأهميتها في علم الحسبان يبدأ القسم الأول بتعريف الدالة اللوغريتمية ثم القسم الثاني المعامل التفاضلي الأول للدالة اللوغريتمية.

في داخل هذه الوحدة نجد الأمثلة لتعزز الشرح ثم أسئلة التقويم ذاتي لتثبت المعرفة وزيادة الفهم ثم تجد تدريبات لها إجابات في نهاية الوحدة ونستخدم أيضا وسائل تعليمية مثل برمجيات الحاسوب لكي تساعدك علي تنويع وإعادة الشرح بطرق مختلفة لتوسيع دائرة المعرفة.

وبعد ذلك تستطيع أن تقيم هذه الوحدة بعد دراستك ومعرفتك لما تحتويه.

مرحبا بك مرة ثانية وإلى الأهداف التي نتمنى أن تتحقق بنهاية دراسة الوحدة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينتظر منك أن تكون قادرا علي أن :



- 1/ تعرف اللوغريثم الطبيعي.
- 2/ تشرح الدالة اللوغريتمية وتعريفها.
- 3/ توضح الدالة اللوغريتمية ببيانها.
- 4/ تحل المعامل التفاضلي الأول للدالة اللوغريتمية.
- 5/ تعرف طريقة التفاضل اللوغريتمي.

1. الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

الحديث عن الدالة اللوغاريتمية سوف يعيد إليك معلوماتك عن اللوغاريتمات والعمليات الرياضية عليها وهذا يتطلب منك إعادة مراجعة اللوغاريتمات.

تعريف الدالة اللوغاريتمية

نبدأ بأخذ مثال لنوضح لك الشرح

$$x = e^y \quad \text{إذا كانت لدينا المعادلة}$$

فبأخذ اللوغاريتم للأساس e للطرفين فإن

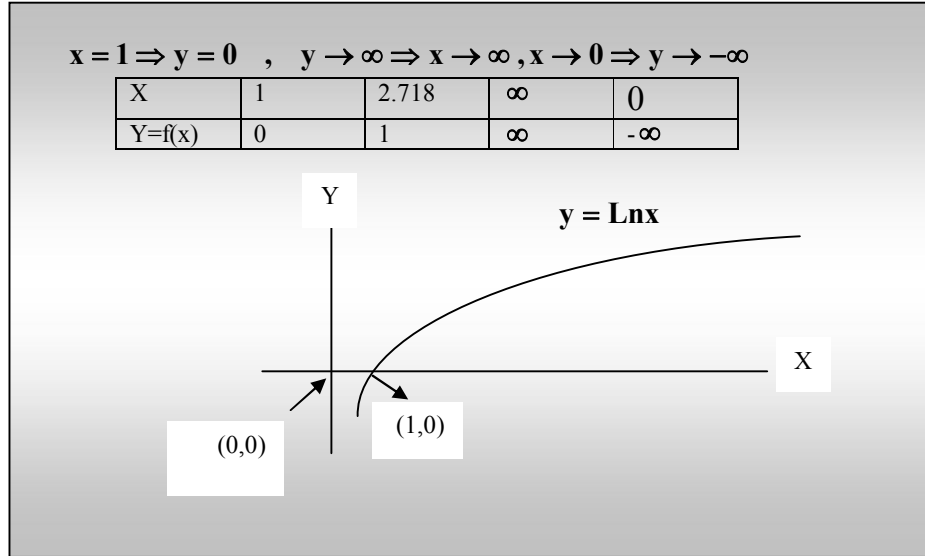
$$\log_e x = \log_e e^y = y \log_e e = y$$

$$y = \log_e x = \ln x \quad \text{أي أن}$$

حيث $\ln$ ترمز للوغاريتم للأساس e

الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

توضيح الدالة اللوغاريتمية ببيانيا، نأخذ الجدول أدناه ونعوض القيم داخل الجدول علي الرسم
نرسم المحورين X/Y ، ولتخطيط بيان الدالة اللوغاريتمية لدينا



عزيزي الدارس رسم الدالة اللوغاريتمية لا يختلف عن رسم منحنيات الدوال التي تم شرحها في الوحدة الأولى

واللوغريثم للأساس e يسمى باللوغريثم الطبيعي **Natural Logarithmic** أو اللوغريثم النابيري

2. المعامل التفاضلي الأول للدالة اللوغاريتمية

بعد دراستك لقانون تفاضل دالة الدالة تستطيع أن تستخدمه في هذا المثال لتتوصل على طريقة التفاضل اللوغاريتمي .
نظرية

$$\boxed{\text{إذا كانت } y = \ln x \text{ فإن } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

البرهان

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

وإذا كانت $y = \ln u(x)$ فباستخدام قانون تفاضل دالة الدالة نجد

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

➤ أمثله

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = \ln \sin x$

2) $y = \ln(x^7 + x^5 + x)$

3) $y = \ln\left(\frac{\sec x}{x-1}\right)$

4) $a^y = b^x$

الحل:

$$1) \quad y = \ln \sin x$$

$$u = \sin x \Rightarrow y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

الحل:

$$2) \quad y = \ln(x^7 + x^5 + x)$$

$$u = x^7 + x^5 + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 7x^6 + 5x^4 + 1$$

$$y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^7 + x^5 + x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7x^6 + 5x^4 + 1}{x^7 + x^5 + x}$$

$$3) \quad y = \ln\left(\frac{\sec x}{x-1}\right)$$

الحل:

$$u = \frac{\sec x}{x-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x-1)\sec x \tan x - \sec x(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du} \ln u = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{((x-1)\sec x \tan x - \sec x)}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\frac{\sec x}{(x-1)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{((x-1)\tan x - 1)\sec x}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)}{\sec x} = \frac{x \tan x - \tan x - 1}{(x-1)}$$

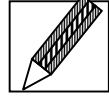
$$4) \quad a^y = b^x$$

$$\ln a^y = \ln b^x \Rightarrow y \ln a = x \ln b \Rightarrow \ln a \frac{dy}{dx} = \ln b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

• هذه الطريقة تسمى بالتفاضل اللوغاريتمي

الآن وصلت إلى تحقيق جميع أهداف الوحدة فأبدا بوضع حلول لأسئلة التقويم الذاتي أدناه

تدريب (1)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = \ln(x^2 \tan x)$

2) $y = \ln(\cot \tan^2 x)$

3) $y = \ln\left(\frac{x^4 + x^2 + 2}{x - 1}\right)$

4) $y = \ln\left(\frac{x - 1}{\cos x}\right)$

5) $y = \ln((x^2 - 1)\cos ecx)$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



1/ ارسم منحنى الدالة اللوغاريتمية مستعينا بالجدول الآتي

x	1	2.718	∞	0
Y=f(x)	0	1	∞	$-\infty$

2/ برهن النظرية الآتية

إذا كانت $y = \ln x$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

3/ من المعادلة $x = e^y$ عرف الدالة اللوغاريتمية رياضيا

4/ أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة الآتية $y = \ln \sin x$

الخلاصة

دعنا نلخص لك النقاط الهامة في هذه الوحدة .
في القسم الأول تعرفنا علي تعريف الدالة اللوغريتمية وهي الدالة العكسية للدالة الأسية ثم
تعرفنا علي اللوغريثم الطبيعي أو اللوغريثم النابيري بأنه لوغريثم للأساس e ويرمز له بالرمز $\ln$
في القسم الثاني تم شرح المعامل التفاضلي الأول للدالة اللوغريتمية، واستخدمنا فيه قانون
تفاضل دالة الدالة وسميت هذه الطريقة بالتفاضل اللوغريتمي.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

بعد أن أكملت الوحدة الخامسة نأخذ فترة راحة لتهنئيه ذهنك للدخول في الوحدة السادسة، وهي
تواصل الشرح عن الدوال والدوال الزائدية لتتعرف علي معني الدالة الزائدية ومشتقاتها
والمتطابقات التي تحققها، ثم نأتي إلى الرسم البياني للمشتقات. ومن هنا ندعوك للدخول فيها
ومتابعتها وفهمها جيدا وربطها مع الوحدات السابقة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$1) \quad y = \ln(x^2 \tan x)$$

$$u = x^2 \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^2 \sec^2 x + 2x \tan x$$

$$y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sec^2 x + 2x \tan x}{x^2 \tan x}$$

$$2) \quad y = \ln(\cot an^2 x)$$

$$u = \cot an^2 x \frac{du}{dx} = -2 \cot an x \cos ec^2 x$$

$$y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cot an x \cos ec^2 x}{\cot an^2 x} = \frac{-2 \cos ec^2 x}{\cot an x}$$

$$3) \quad y = \ln\left(\frac{x^4 + x^2 + 2}{x-1}\right)$$

$$u = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x-1)(4x^3 + 2x) - (x^4 + x^2 + 2)(1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^4 + x^2 - 4x^3 - 2x - 2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{x-1}{x^4 + x^2 + 2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)}{x^4 + x^2 + 2} \cdot \frac{3x^4 + x^2 - 4x^3 - 2x - 2}{(x-1)^2}$$

$$4) \quad y = \ln\left(\frac{x-1}{\cos x}\right)$$

$$u = \frac{x-1}{\cos x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cos x(1) + (x-1)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{x-1} \cdot \frac{\cos x + (x-1)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$5) \quad y = \ln((x^2 - 1)\cos ecx)$$

$$u = (x^2 - 1)\cos ecx \Rightarrow \frac{du}{dx} = (x^2 - 1)(-\cos ecx \cot an x) + \cos ecx(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{(x^2 - 1)\cos ecx} \cdot \cos ecx(- (x^2 - 1)\cot an x + 2x)$$

$$= \frac{(1 - x^2)\cot an x + 2x}{(x^2 - 1)}$$

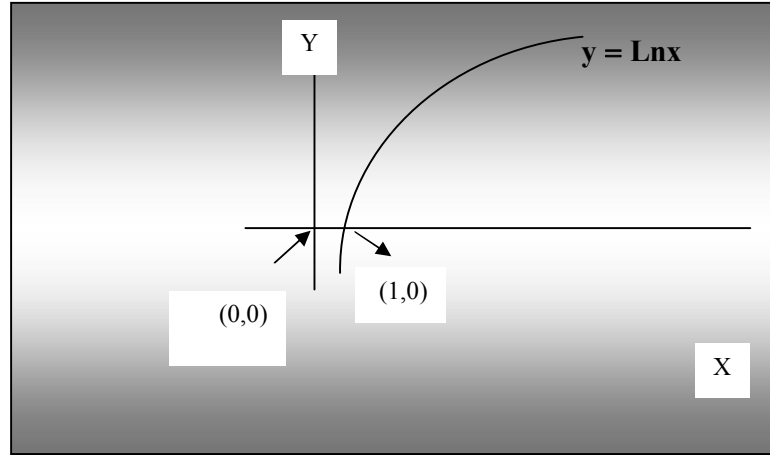
$$6) \quad y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. منحنى الدالة اللوغاريتمية



2. برهان النظرية

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

وإذا كانت $y = \ln u(x)$ فباستخدام قانون تفاضل دالة الدالة نجد

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

3. فبأخذ اللوغاريتم للأساس e للطرفين فإن

$$\log_e x = \log_e e^y = y \log_e e = y$$

أي أن

$$y = \log_e x = \ln x$$

حيث $\ln$ ترمز للوغاريتم للأساس e

$$\frac{dy}{dx} = \cot x \quad \mathbf{4.}$$

مسرد المصطلحات

• الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

هي الدالة العكسية للدالة الأسية وتكتب $y = \log_e x = \ln x$ وتستخدم فيها اللوغاريتمات

• اللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithmic

هو لوغاريتم للأساس e

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحساب الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W , **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



الوحدة السادسة
الدوال الزائدية

محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
113	المقدمة
113	تمهيد
113	أهداف الوحدة
114	1. تعريف الدوال الزائدية
114	1.1 الجيب الزائدي
115	2.1 جيب التمام الزائدي
116	3.1 الظل الزائدي
116	4.1 ظل التمام الزائدي
117	5.1 القاطع الزائدي
118	6.1 قاطع التمام الزائدي
120	2. المتطابقات التي تحققها الدوال الزائدية والمشتقات للدوال الزائدية
123	الخلاصة
123	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
124	إجابات التدريبات
126	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
128	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس هذه الوحدة السادسة عن الدوال الزائدية. بدأ القسم الأول عن تعريف للدوال الزائدية، ثم شرح كل دالة من الدوال الزائدية ومشتقات الدوال الزائدية، مثل الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي والظل الزائدي وظل التمام الزائدي وقاطع الزائدي وقاطع التمام الزائدي أما القسم الثاني فشرح المتطابقات التي تحققها الدوال .

تحتوي الوحدة علي تدريبات وأسئلة تقويم ذاتي لكي تمارس مهاراتك الرياضية وتندرب علي وضع الحلول لكل نوع من أنواع المشتقات، كذلك تضم الوحدة وسائط تعليمية أخرى يمكن أن تعينك مثل برمجيات الحاسوب والأشرطة السمعية والبصرية التي توفرها لك جامعتك. المفتوحة عبر مراكزها الأكاديمية، ويمكنك أن تزيد وتوسع معرفتك بهذه الوحدة من المراجع المذكورة في آخر الوحدة بعد ذلك يمكنك أن تقيم لنا هذه الوحدة بناء علي ما درسته فيها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس



من المتوقع بعد دراستك لهذه الوحدة أن تكون قادرا علي أن:

- 1/ تعرّف الدوال الزائدية
- 2/ تشرح الدوال الزائدية ببيانها
- 3/ تعرف مشتقات الدوال الزائدية
- 4/ تحل المتطابقات التي تحققها الدوال الزائدية

1. تعريف الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

الآن إلى أقسام هذه الوحدة في البداية نعرف الدوال الزائدية ونتطرق إلى الشرح

المفصل لكل دالة مع التخطيط البياني لها

1.1 الجيب الزائدي $\sinh$

يعرف الجيب الزائدي (يقرأ $\sinh$) بالعلاقة

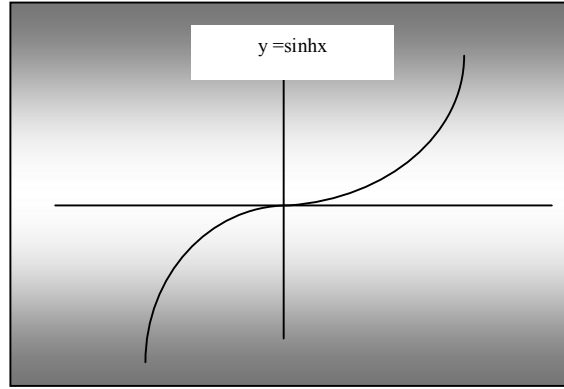
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

تخطيط بيان الجيب الزائدي

$$y = \sinh x, \quad x = 0, \quad y = \frac{e^{(0)} - e^{-(0)}}{2} = 0 \rightarrow (0,0)$$

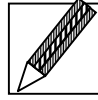
$$x \rightarrow \infty \quad y = \frac{e^{\infty} - e^{-\infty}}{2} = \frac{\infty - 0}{2} = \infty \rightarrow (\infty, \infty)$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y = \frac{e^{-\infty} - e^{\infty}}{2} = \frac{0 - \infty}{2} = -\infty \rightarrow (-\infty, -\infty)$$



تدريب (1)

1/ اثبت أن



$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

2.1 جيب التمام الزائدي

يعرف جيب التمام الزائدي (يقراً $\cosh$) بالعلاقة

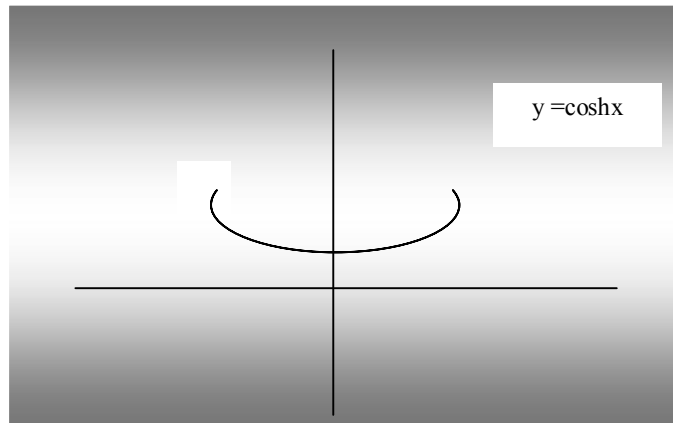
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

تخطيط بيان جيب التمام الزائدي

$$y = \cosh x, \quad x = 0, \quad y = \frac{e^{(0)} + e^{-(0)}}{2} = 1 \rightarrow (0,1)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad y = \frac{e^{\infty} + e^{-\infty}}{2} = \frac{\infty + 0}{2} = \infty \rightarrow (\infty, \infty)$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad y = \frac{e^{-\infty} - e^{\infty}}{2} = \frac{0 + \infty}{2} = \infty \rightarrow (-\infty, \infty)$$



3.1 الظل الزائدي

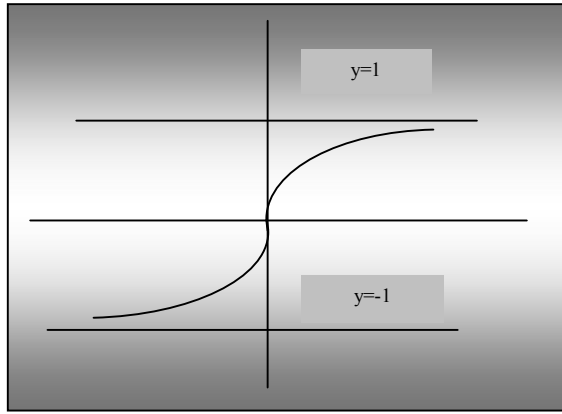
يعرف الظل الزائدي (ويقرأ $\tanh$) بالعلاقة

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

تخطيط بيان الظل الزائدي

$$y = \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow -1 \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 1$$



4.1 ظل التمام الزائدي

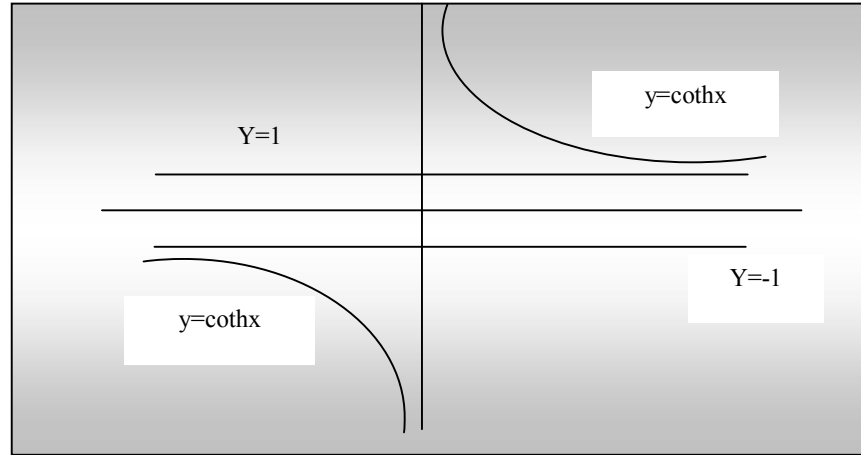
يعرف ظل التمام الزائدي (ويقرأ $\coth$ أو $\cotanh$) بالعلاقة

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

تخطيط بيان ظل التمام الزائدي

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$x \rightarrow \infty, y \rightarrow 1 \text{ and } x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty \text{ and } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -1$$



5.1 القاطع الزائدي

يعرف القاطع الزائدي (ويقرأ sech) بالعلاقة

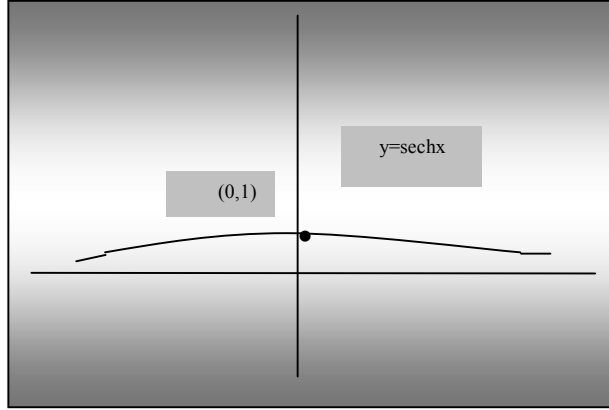
$$y = \text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

تخطيط بيان القاطع الزائدي

$$x = 0, y = \frac{2}{e^{(0)} + e^{(0)}} = 1 \quad (0,1)$$

$$x \rightarrow \infty, y \rightarrow \frac{2}{e^{\infty} + e^{-\infty}} \rightarrow 0 \quad (\infty,0)$$

$$x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \frac{2}{e^{-\infty} + e^{\infty}} \rightarrow 0 \quad (-\infty,0)$$



6.1 قاطع التمام الزائدي

يعرف قاطع التمام الزائدي (ويقرأ cosecsh) بالعلاقة

$$y = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

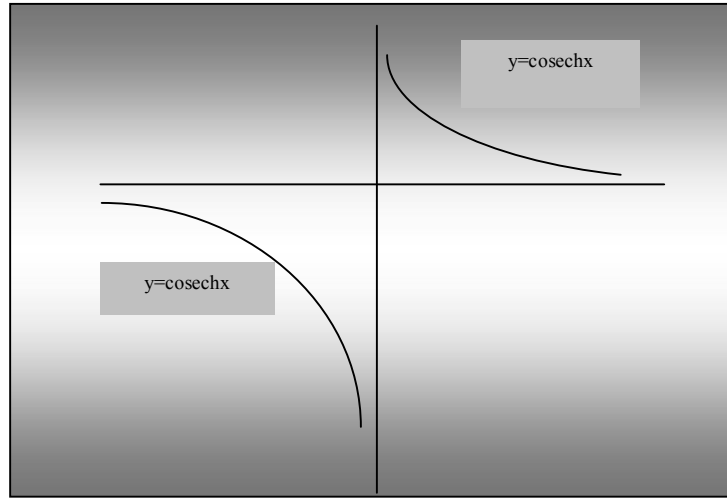
تخطيط بيان قاطع التمام الزائدي

$$x = 0, y = \frac{2}{e^{(0)} - e^{(0)}} = \infty$$

$$x \rightarrow \infty, y = \frac{2}{e^{\infty} - e^{-\infty}} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty, y = \frac{2}{e^{-\infty} - e^{\infty}} = 0$$

بعد دراستك ومعرفتك للدوال الزائدية تكون قد حققت الهدفين الأول والثاني.



أسئلة تقويم ذاتي (1)



اكتب العلاقات التي تحققها هذه الدوال:

- 1/ الجيب الزائدي
- 2/ الظل الزائدي
- 3/ القاطع الزائدي
- 4/ جيب التمام الزائدي

2. المتطابقات التي تحققها الدوال الزائدية والمشتقات للدوال الزائدية

بعد ذلك نشرح لك المتطابقات التي تحققها الدوال الزائدية

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^{(0)} + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \quad \dots\dots\dots(6.1)\end{aligned}$$

وبقسمة المعادلة (6.1) على $\sinh^2 x$ ثم على $\cosh^2 x$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

النسب المتثلثية الزائدية لمجموع زاويتين

$$\begin{aligned}\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)}}{4} = 2 \frac{(e^{(x+y)} + e^{-(x+y)})}{4} \\ &= \cosh(x+y)\end{aligned}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \text{أي ان}$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$\cosh 2x = 1 + 2 \sinh^2 x$$

بوضع $x = y$ واستعمال (*)

إيجاد المشتقة الأولى للدوال الزائدية

$$1) \quad y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$2) \quad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$3) \quad y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x(\cosh x) - \sinh x(\sinh x)}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$4) \quad y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sinh x(\sinh x) - \cosh x(\cosh x)}{\sinh^2 x} = -\frac{(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$$

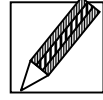
$$5) \quad y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x(0) - (1)\sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{-1}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$6) \quad y = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sinh x(0) - (1)\cosh x}{\sinh^2 x} = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{cosech} x \coth x$$

لخصنا لك مشتقات الدوال الزائدية في هذا الجدول حتى يمكنك أخي الدارس أن ترجع إليها بسهولة وتحفظها لكي تساعدك في التدريب والتطبيق.

y = f(x)	sinh x	cosh x	tanh x	Sech x	cosech x	coth x
dy/dx	cosh x	sinh x	sech ² x	-sech x tanh x	-cosech x coth x	-cosech ² x

تدريب (2)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = \ln \cosh x$ 2) $y = \ln \sec hx \tanh x$

3) $y = \sinh(x^2 + 5)$ 4) $y = \ln(x \sinh x)$

5) $y = x^2 \tanh x$ 6) $y = e^{\sec hx}$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



1/ ارسم منحنى جيب التمام الزائدي وقاطع التمام الزائدي عند
 $x = 0$
 $x \rightarrow \infty$

2/ اكتب مشتقات الدوال الزائدية الآتية

a. $y = \cosh x$

b. $y = \coth x$

c. $y = \operatorname{sech} x$

الخلاصة

ما الذي تم شرحه في هذه الوحدة؟ هذه الوحدة احتوت علي الدوال الزائدية وقوانينها وتعريفاتها التي تختلف بنوع الدالة وهناك

- الجيب الزائدي وتعرف بالعلاقة $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- وجيب التمام الزائدي ويعرف بالعلاقة $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- الظل الزائدي ويعرف بالعلاقة $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

- ظل التمام الزائدي ويعرف بالعلاقة $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

- القاطع الزائدي ويعرف بالعلاقة $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

- قاطع التمام الزائدي ويعرف $y = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

و شرحنا كيفية التخطيط البياني لمجموعة هذه الدوال ومشتقات الدوال وضعت في جدول حتى يسهل عليك حفظه ثم المتطابقات التي تحققها

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس،

نستعد معا للدخول في الوحدة السابعة وهي بعنوان التفاضل الضمني والتفاضل الوسيطى ونعرف التمثيل الوسيطى، وتهدف هذه الوحدة علي معرفة وكيفية إيجاد المشتقة الأولى للدالة الضمنية والوسيطية ، وتتعرف علي أقسام الوحدة بالتفصيل والشرح مع التدريبات لكل قسم.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1- اثبت أن

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

الحل: الطرف الأيمن يساوي

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = 2 \left(\frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{4} \right) = \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} \\ & = \sinh(x+y) \end{aligned}$$

تدريب (2)

1) $y = \ln \cosh x$

الحل: بوضع $u = \cosh x$ نجد $y = \ln u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \sinh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

2) $y = \ln \sec h x \tanh x$

الحل: بوضع $u = \sec h x \tanh x$ نجد $y = \ln u$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} (\sec h x (\sec h^2 x) + \tanh x (-\sec h x \tanh x)) \\ &= \frac{\sec h x (\sec h^2 x - \tanh^2 x)}{\sec h x \tanh x} = \frac{(1 - 2 \tanh^2 x)}{\tanh x} = \coth x - 2 \tanh x \end{aligned}$$

3) $y = \sinh(x^2 + 5)$

الحل: بالتعويض $u = x^2 + 5$ نجد $y = \sinh u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cosh u \cdot (2x) = 2x \cosh(x^2 + 5)$$

4) $y = \ln(x \sinh x)$ بوضع $u = x \sinh x$ نجد $y = \ln u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} (x \cosh x + (1) \sinh x) = \frac{x \cosh x + \sinh x}{x \sinh x} = \coth x + \frac{1}{x}$$

$$5) \quad y = x^2 \tanh x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x^2)(\sec^2 x) + 2x \tanh x$$

$$6) \quad y = e^{\sec hx}$$

الحل: بوضع $u = \sec hx$ نجد $y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (-\sec hx \tanh x) = -\sec hx \tanh x e^{\sec hx}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .1$$

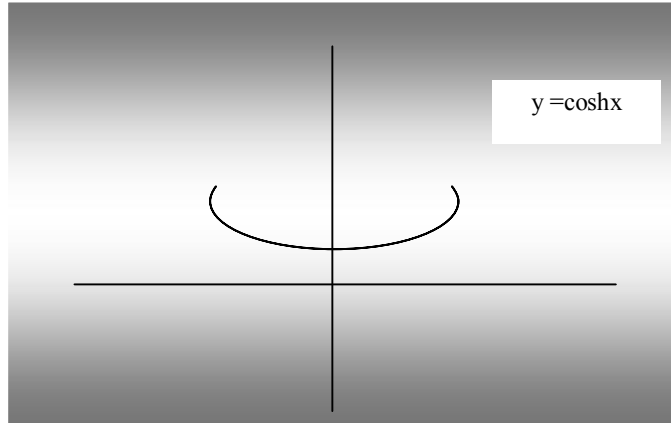
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} .2$$

$$y = \sec hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} .3$$

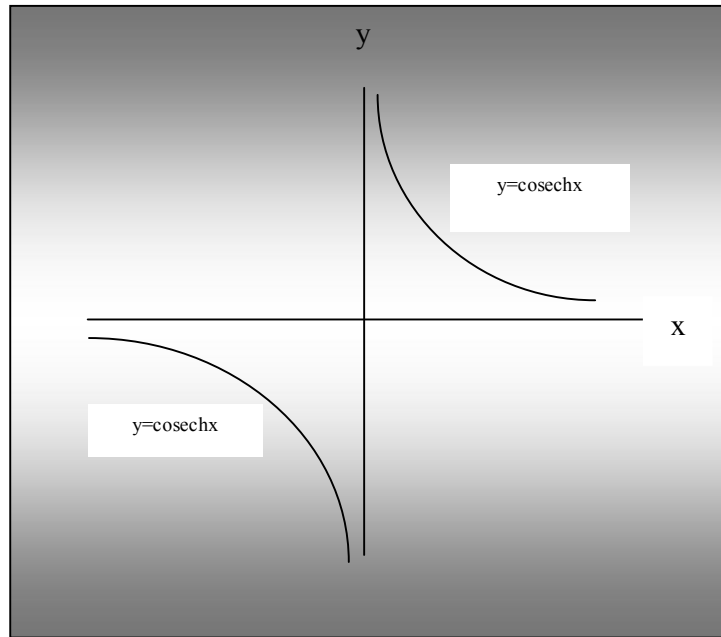
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .4$$

تقويم ذاتي (2)

1. منحنى جيب التمام الزائدي



2. منحنى قاطع التمام الزائدي



$$\frac{d}{dx}$$

2. مشتقات الدوال الزائدية هي:

- a. $\frac{d}{dx} (\cosh x) = \sinh x$
- b. $\frac{d}{dx} (\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x$
- c. $\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسين الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانياً : المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W, **Elementary Calculus** , copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
131	المقدمة
131	تمهيد
131	أهداف الوحدة
132	1. التفاضل الضمني
132	1.1 الدالة الصريحة والدالة الضمنية
133	2. التمثيل الوسيط أو المعلي
134	1.2 التفاضل الوسيط أو المعلي
136	الخلاصة
136	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
137	إجابات التدريبات
139	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
140	مسرد المصطلحات
141	المراجع

المقدمة

تمهيد

ندخل معا على الوحدة السابعة بعد دراستك لستة وحدات من هذا المقرر. نجد أن هذه الوحدة تشمل الدالة الضمنية والدالة الصريحة وكيفية إيجاد المشتقة الأولى للدالة الضمنية وطريقة التمثيل الوسيطي أو المعلمي وقانون التفاضل الوسيطي أو المعلمي.

ستجد نفسك مع شرح مفصل ومتسلسل مع وجود تعريف لكل قسم وأمثلة وتدريبات لها إجابات في نهاية الوحدة، وأسئلة تقويم ذاتي لتتأكد من استيعابك وتجد مع هذه الوحدة وسائل تعليمية أخرى لتوسيع دائرة الفهم والشرح يوفرها لك المركز الأكاديمي مع الإشراف.

نتمنى بعد دراستك للوحدة أن تقيم لنا هذه الوحدة، وإن تستمتع بما ورد فيها من شرح وأمثلة.

أهداف الوحدة

آخى الدارس من المتوقع بعد دراستك وفهمك لهذه الوحدة أن تكون قادرا على أن:



1/ تعرف الدالة الصريحة والدالة الضمنية.

2/ تشرح التفاضل الضمني.

3/ تعرف التمثيل الوسيطي أو المعلمي.

4/ تحل التفاضل الوسيطي أو المعلمي.

5/ توجد المشتقة الأولى للدالة الضمنية.

1. التفاضل الضمني Implicit Differentiation

بعد دراستك السابقة عن الدوال هل يمكنك أن تأتي بتعريف للدالة الصريحة والدالة الضمنية قبل أن تبدأ في قراءة الشرح ابدأ في التفكير, لعلك الآن مستعد لمعرفة الإجابة علي هذا السؤال

1.1 الدالة الصريحة والدالة الضمنية

Explicit and Implicit Function

إذا كانت العلاقة التي تربط بين y, x يمكن أن تكتب في الصورة $y = f(x)$ فنقول أن y دالة صريحة x .

أما إذا كانت x ترتبط بـ y عن طريق دالة لا يمكن وضعها في الصورة الصريحة نقول إن y معطاة ضمناً بدلالة x أو x معطاة ضمناً بدلالة y . وتسمى العلاقة عندئذٍ دالة ضمنية

مثال <

$$\text{الدالة } x^2 + xy^3 - yx^3 + y^4 = 0$$

دالة ضمنية وتستطيع أن نفاضل المعادلة بالنسبة إلى x أو إلى y ونحصل علي $\frac{dy}{dx}$ أو

$$\frac{dx}{dy} \text{ بدلالة كل من } x, y$$

أمثلة <

$$1. \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا كان } x^2 + xy + y^2 = 0$$

الحل بالتفاضل المباشر نجد

$$2x + x \frac{dy}{dx} + y(1) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + y)}{x + 2y}$$

2. أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $\tan x \sin 3y = 5$

لحل بالتفاضل المباشر نجد

$$\tan x \left(3 \cos 3y \frac{dy}{dx} \right) + \sin 3y (\sec^2 x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin 3y \sec^2 x}{3 \tan x \cos 3y} = -\frac{1}{3} \tan 3y \sec x \operatorname{cosec} x$$

تدريب (1)

أوجد $\frac{dy}{dx}$

1) $xy = 1$

2) $\tan xy = \frac{x}{y}$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)^2$



أسئلة تقويم ذاتي (1)

1- ميز بين الدوال الصريحة والدوال الضمنية الآتية:

1) $x^2 + xy^2 + yx^2 + y = 0$

2) $y = x^2 - 2x + 5$

3) $x^3 + yx + y^2 + 5 = 0$



2. التمثيل الوسيط أو المعلمي

إذا كان كل من x, y معطاة بدلالة متغير ثالث (t مثلاً) فنقول أن هذا تمثيلٌ وسيطٌ أو معلمٌ بين x, y ويسمى المتغير الثالث بالوسيط أو المعلمة (Parameter).

1.2 التفاضل الوسيطي أو المعلمي

إذا كتبنا $y = f(t)$, $x = g(t)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

➤ أمثلة

1/ أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = t^2 + 1, \quad x = t^2 - t + 1$$

الحل

$$\frac{dy}{dt} = 2t, \quad \frac{dx}{dt} = 2t - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{2t - 1}$$

2/ أوجد $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي تمثله الوسيطي $y = a(1 - \cos \theta)$, $x = a(\theta - \sin \theta)$ حيث a ثابت

الحل

$$\frac{dy}{d\theta} = a(0 - (-\sin \theta)) = a(\sin \theta) = a \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} = \frac{a(\sin \theta)}{a(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

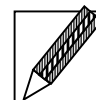
$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

ويمكن إيجاد قيمة المشتقة الأولى عند أي نقطة بالتعويض المباشر مثلاً إذا أردنا قيمة ميل

المماس للمنحنى أعلاه (يسمى المنحنى الدويري) عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ فنجد

$$\frac{dy}{dx} \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

تدريب (2)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية

1) $x = \sqrt{1+2t}$, $y = (t+2)^{\frac{1}{2}}$

2) $x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$

3) $x = \tan\theta$, $y = \sin\theta$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان

1. $y = t^3 - t$, $x = t^2 - 1$ عندما $t = 3$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dx}{dy}$ إذا كان

2. $y = t^2 + 1$, $x = (t+1)^2$

3. $x = 2t - 1$, $y = t^3$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الخلاصة

دعنا نلخص لك ما شرح في الوحدة السابعة عن التفاضل الضمني والتفاضل الوسيط في هذه الوحدة تم شرح قسمين .

القسم الأول عن التفاضل الضمني ووجدت فيه تعريف عن.

➤ الدالة الصريحة وهي الدالة التي تكون علاقة x, y تكتب في صورة $y = f(x)$ تقول أن y دالة صريحة ل x .

➤ الدالة الضمنية هي الدالة التي تكون x مرتبطة ب y عن طريق دالة لا يمكن وضعها في صورة صريحة فنقول أن y معطاة ضمناً بدلالة x أو x ضمناً بدلالة y .

القسم الثاني عن التمثيل الوسيط أو المعلي وهو الذي فيه كل من y, x معطاة بدلالة متغير ثالث (t) مثلاً وفيه تم تعريف المتغير الثالث أو الوسيط أو المعلمة ثم شرحنا التفاضل الوسيط أو المعلي وقوا نينه.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

بعد أن أكملت الوحدة السابعة، وتمعننت بدراستها وفهمها لابد انك متشوق لمعرفة ما هي الوحدة التالية وعن ماذا نتحدث ؟

الوحدة الثامنة عن الدالة العكسية وفيها شرح كيفية إيجاد الدالة العكسية ورموزها وبيان منحنيات بعض الدوال المثلثية العكسية وإيجاد المشتقة الأولى لها وتتعرف علي العلاقة بين الدالة اللوغاريتمية والدوال الزائدية العكسية وتزيد معرفتك بهذا العلم الواسع نتمنى أن تكون وحدة مفيدة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$1) xy = 1$$

$$2) \tan xy = \frac{x}{y}$$

$$3) (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)^2$$

$$1) \quad xy = 1 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

$$2) \quad \tan xy = \frac{x}{y} \Rightarrow \sec^2 xy \left[x \frac{dy}{dx} + y \right] = \frac{y(1) - x \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \left[(x \sec^2 xy) + \frac{x}{y^2} \right] = -y \sec^2 xy + \frac{y}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{y} - y \sec^2 xy}{\frac{x}{y^2} + x \sec^2 xy}$$

$$3) \quad (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)^2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 8(x^2 - y^2) \left(2x - 2y \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} \left[(4yx^2 + 4y^3) + 16y(x^2 - y^2) \right] = 16x(x^2 - y^2) - 4x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 - 20xy^2}{20yx^2 - 12y^3} = \frac{4x(3x^2 - 5y^2)}{4y(5x^2 - 3y^2)}$$

تدریب (2)

$$1) \quad x = \sqrt{1+2t} \quad , \quad y = (t+2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1+2t)^{-\frac{1}{2}} \times 2 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(t+2)^{-\frac{3}{2}}(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(t+2)^{-\frac{3}{2}}}{2(1+2t)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$2) \quad x = 3 \cos \theta \quad , \quad y = 3 \sin \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos \theta}{-3 \sin \theta} = -\cot \theta$$

$$3) \quad x = \tan \theta \quad , \quad y = \sin \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta}{\sec^2 \theta} = \cos^3 \theta$$

إجابات التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. دالة ضمنية

2. دالة صريحة

3. دالة ضمنية

تقويم ذاتي (2)

1. $\frac{dy}{dx} = 4/3$

2. $\frac{dy}{dx} = t/t+1$
 $\frac{dx}{dy} = t + 1/t$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t^2$

مسرد المصطلحات

- **دالة ضمنية** **Implicit Function**

هي الدالة التي فيها x ترتبط ب y عن طريق دالة لا يمكن وضعها في صورة صريحة وتكون y معطاة ضمناً بدلالة x أو x ضمناً بدلالة y

- **دالة صريحة** **Explicit Function**

هي الدالة التي يمكن أن تكتب في صورة $y = f(x)$ ونقول أن y دالة صريحة ل x

- **الوسيط أو المعلمة** **:Parameter**

إذا كانت كل من y و x معطاة بدلالة متغير ثالث مثلاً t فالمتغير الثالث هو الوسيط

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسين الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانياً : المراجع الأجنبية

- 1/Caunt, G, W **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
145	المقدمة
145	تمهيد
145	أهداف الوحدة
146	1. الدالة العكسية
147	2. المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية
147	1.2 الجيب العكسي
148	2.2 جيب التمام العكسي
149	3.2 ظل العكسي
150	4.2 القاطع العكسي
151	5.2 قاطع التمام العكسي
152	6.2 ظل التمام العكسي
154	3. العلاقة بين الدوال الزائدية العكسية والدالة اللوغريتمية
155	الخلاصة
155	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
156	إجابات التدريبات
159	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
160	مسرد المصطلحات
161	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس

تبدأ الوحدة بتعريف الدالة العكسية وكيفية إيجاد الدالة الأحادية الشاملة وبيان منحنيات بعض الدوال المثلثية العكسية شرحها واستنتاجها، يأتي القسم الثاني يتحدث عن إيجاد المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية، ويظهر لك أخي الدارس الربط بين الدالة اللوغريتمية والدوال الزائدية العكسية، ومنها نعرف أن علم الحساب علم واسع ومترابط ولا بد لك أن تراجع وتتأكد من فهمك وتحصيلك الكامل للوحدات السابقة حتى يسهل عليك المتابعة والاستفادة والإحساس بالرضا. تجد كذلك أمثلة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي تساعدك على التركيز والمراجعة الذاتية، نؤكد لك أهمية رجوعك إلى المراجع المذكورة في نهاية الوحدة فهي تساعدك على التدريب. في نهاية دراستك الكاملة للوحدة تستطيع أن تقيم وتساعدنا في تقييم الوحدة نتمنى لك الفائدة والاستفادة منها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس من المتوقع بعد دراستك لهذه الوحدة أن تكون قادراً علي أن:



1. تعرّف الدالة العكسية
2. تشرح إيجاد الدالة العكسية للدالة الأحادية الشاملة
3. تبين رسم منحنيات بعض الدوال المثلثية والعكسية
4. تطبق المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية
5. توضّح العلاقة بين الدالة اللوغريتمية والدوال الزائدية العكسية
6. تحلّ كل العمليات الرياضية المرتبطة بالدالة العكسية

1. الدالة العكسية Inverse Function

قبل دخولك في قراءة هذه الوحدة ابدأ في إعادة الرموز الخاصة بالمجموعات لأهمية استخدامها في هذا القسم

الآن أنت مستعد للدخول في بداية القسم بعد مراجعتك للوحدة الأولى نبدأ ب
تعريف الدالة العكسية

إذا كانت $f : A \rightarrow B$ (الرموز معرفة في الوحدة الأولى) دالة أحادية و شاملة فإنه
توجد دالة $g : B \rightarrow A$ وتسمى بمعكوس f وتحقق
 $g(f(x)) = x$

ونكتب

$$g = f^{-1}$$

بصورة خاصة اذا كانت

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow f(A) \\ \text{أحادية فإن معكوس } f &\text{ يعرف ب :} \\ f^{-1} : f(A) &\rightarrow A \end{aligned}$$

كما يمكن تعريف معكوس f في مجموعة جزئية من $f(A)$. فإذا كانت $B' \subset f(A)$ و
 $A' \subset A$ وكانت

$$\begin{aligned} f : A' &\rightarrow B' \\ \text{أحادية فإن } f^{-1} &\text{ يمكن أن تعرف ب :} \\ f^{-1} : B' &\rightarrow A' \end{aligned}$$

2. المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية

1.2 الجيب العكسي

إذا كانت $x = \sin y$ فإن

$$y = \sin^{-1} x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

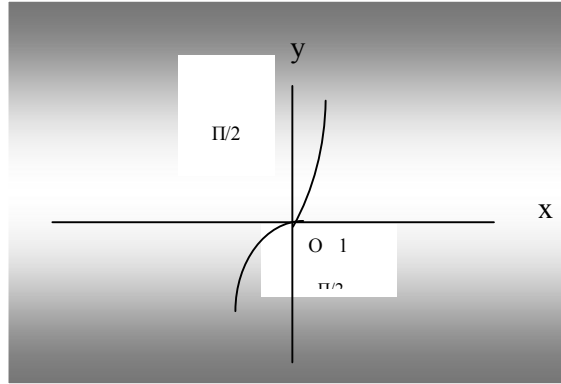
تسمى دالة الجيب العكسية لـ x وهي معرفة في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ ونقرأ $\sin^{-1} x$ أو $\arcsine$

رسم دالة الجيب العكسية بيانياً

انظر إلى الجدول أدناه وابدأ برسم المحورين ونعوض النقاط الواردة في الجدول علي المحورين لنحصل علي المنحني الذي يبين دالة الجيب العكسية.

$$y = \sin^{-1} x$$

x	0	1	-1
y	0	$\pi/2$	$-\pi/2$



المعامل التفاضلي للجيب العكسي

ولتعريف وشرح المعامل التفاضلي للجيب العكسي نأخذ المثال الآتي حتى نتمكن للوصول للقانون

$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$$

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2.2 جيب التمام العكسي

إذا كانت $x = \cos y$ فان

$$y = \cos^{-1} x, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

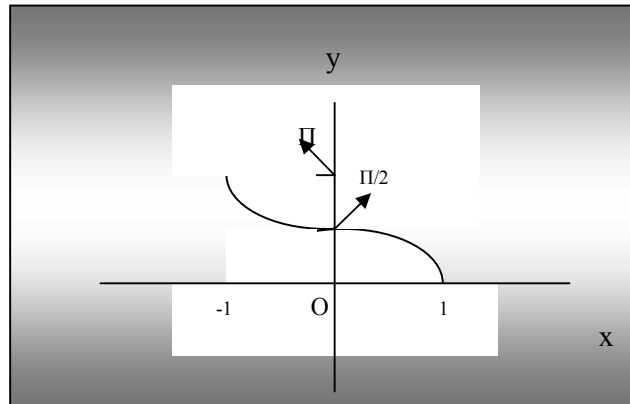
تسمى دالة جيب التمام العكسية لـ x وهي معرفة في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ وتقرأ $\cos^{-1}$

inverse أو arccos

ويمكن توضيح جيب التمام العكسي للمنحني في الرسم أدناه

$$y = \cos^{-1} x$$

x	1	0	-1
y	0	$\pi/2$	π



المعامل التفاضلي لجيب التمام العكسي

$$y = \cos^{-1} x \Rightarrow x = \cos y$$

$$1 = -\sin y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

تدريب (1)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الزائدية العكسية

1) $y = \sinh^{-1} x$

2) $y = \cosh^{-1} x$



3.2 الظل العكسي

إذا كانت $x = \tan y$ فإن

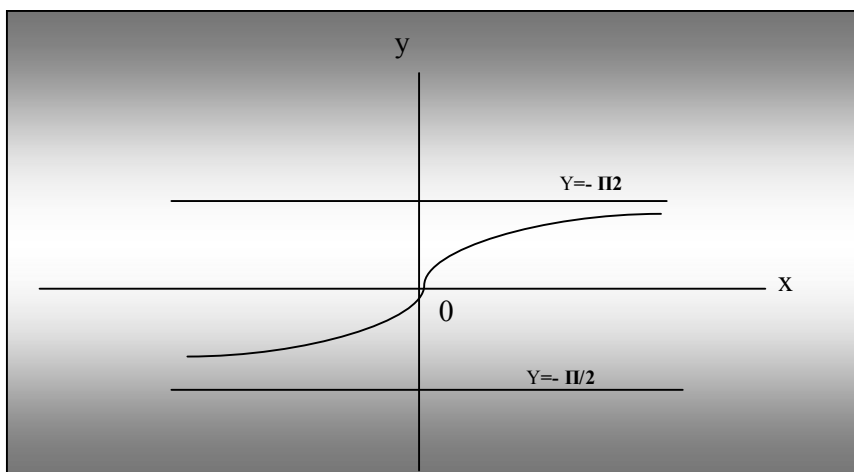
$$y = \tan^{-1} x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

تسمى دالة الظل العكسية لـ x وهي معرفة في الفترة $-\infty < x < \infty$ وتقرأ $\tan^{-1} x$

أو $\arctan$

$$y = \tan^{-1} x$$

x	0	∞	$-\infty$
y	0	$\pi/2$	$-\pi/2$



المعامل التفاضلي للظل العكسي

$$y = \tan^{-1} x \Rightarrow x = \tan y \Rightarrow 1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

4.2 القاطع العكسي

تفهمت المشتقة الأولى للدوال المثلثية ، الجيب العكسي وجيب التمام العكسي والظل العكسي وتعرفت علي طريقة إيجاد المعامل التفاضلي لكل منها. نبدأ بشرح القاطع العكسي ومعامله التفاضلي.

إذا كانت $x = \sec y$ فان

$$y = \sec^{-1} x, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

تسمى دالة القاطع العكسية لـ x وهى معرفة في الفترة $|x| \geq 1$ وتقرأ $\sec^{-1}$ أو

arcsec

المعامل التفاضلي للقاطع العكسي

$$y = \sec^{-1} x \Rightarrow x = \sec y \Rightarrow 1 = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y (\sqrt{\sec^2 y - 1})} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

تدريب (2)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الزائدية العكسية



1) $y = \tanh^{-1} x$

2) $y = \sec^{-1} x$

5.2 قاطع التمام العكسي

إذا كانت $x = \operatorname{cosec} y$ فإن

$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

تسمى دالة قاطع التمام العكسية لـ x وهى معرفة في الفترة $|x| \geq 1$ وتقرأ $\operatorname{cosec} \text{ inverse}$ أو

$\operatorname{arccosec}$

المعامل التفاضلي لقاطع التمام العكسي

$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{cosec} y \Rightarrow 1 = -\operatorname{cosec} y \cotan y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y \cotan y} = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

6.2 ظل التمام العكسي

إذا كانت $x = \cotan y$ فإن

$$y = \cotan^{-1} x, \quad 0 < y < \pi$$

تسمى دالة ظل التمام العكسية لـ x وهي معرفة في الفترة $-\infty < x < \infty$ وتقرأ $\cotan$ inverse أو $\arctan$

المعامل التفاضلي لظل التمام العكسي

$$y = \cotan^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sec^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

تدريب (3)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الزائدية العكسية

$$1) y = \operatorname{cosech}^{-1} x \quad 2) y = \operatorname{coth}^{-1} x$$



الجدول (8.1.1) يساعد الدارس علي حفظ المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية

y	$\sin^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	$\tan^{-1} x$	$\cotan^{-1} x$	$\sec^{-1} x$	$\operatorname{cosec}^{-1} x$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

جدول (8.1.1)

أما إذا كانت $y = f^{-1}(u)$ حيث u دالة في x فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

حيث استخدمنا قانون تفاضل دالة الدالة .

أمثلة <

1) $y = \sin^{-1} x^2$

الحل بوضع $u = x^2$ نجد $y = \sin^{-1} u$ وهذا يعني

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

2) $y = \tan^{-1}(\sin x)$

بوضع $u = \sin x$ نجد $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

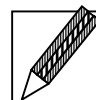
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

تدريب (4)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 2) $y = \tan^{-1}(\cos x)$

3) $y = \cos^{-1}(x^2 \ln x)$ 4) $y = \sec^{-1}(\sin x)$



أسئلة تقويم ذاتي (1)

املأ الجدول أدناه الذي يبين المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية

y	$\sin x^{-1}$	$\cos x^{-1}$	$\tan x^{-1}$	$\cotan x^{-1}$	$\sec x^{-1}$	$\text{Cosec } x^{-1}$
$\frac{dy}{dx}$						



3. العلاقة بين الدوال الزائديه العكسية والدالة اللوغريتمية

إذا كانت $y = \cosh^{-1} x$ فإن $x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ أي ان

$$2x = e^y + e^{-y} \Rightarrow 2xe^y = e^{2y} + e^{(0)}$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

بوضع $e^y = m$ نجد $m^2 - 2xm + 1 = 0$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في m وحلها

$$m = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

بأخذ اللوغريثم الطبيعي للطرفين نجد

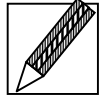
$$\begin{aligned} \ln e^y &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \\ y \ln e &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \quad \because (\ln e = 1) \\ y &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد إذا كانت $y = \sinh^{-1} x$ فإن

$$y = \sinh^{-1} x = \ln\{x + \sqrt{x^2 + 1}\}$$

تدريب (5)

1. أوجد العلاقة بين الدالة اللوغريتمية والدالة $\tanh^{-1} x$



أسئلة تقويم ذاتي (2)

1. أوجد العلاقة بين الجيب الزائدي العكسي والدالة اللوغريتمية والعلاقة بين جيب النمام الزائدي العكسي والدالة اللوغريتمية.



الخلاصة

عزيزي الدارس في هذه الوحدة تعرفت علي الدالة العكسية في القسم الأول ثم بعد ذلك شرحنا المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية في القسم الثاني وهي كما يلي:

دالة الجيب العكسي: تساوي $y = \sin^{-1} x$ ومعاملها التفاضلي يساوي $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ثم الرسم البياني لدالة الجيب العكسي.

دالة جيب التمام العكسي: تساوي $y = \cos^{-1} x$ ومعاملها التفاضلي يساوي $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

دالة الظل العكسي: تساوي $y = \tan^{-1} x$ ومعاملها التفاضلي يساوي $\frac{1}{1+x^2}$

دالة القاطع العكسية : تساوي $y = \sec^{-1} x$ ومعاملها التفاضلي يساوي $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

دالة قاطع التمام العكسي: تساوي $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ومعاملها التفاضلي يساوي $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

دالة ظل التمام العكسي: تساوي $y = \cotan^{-1} x$ ومعاملها التفاضلي يساوي $\frac{-1}{1+x^2}$

أما القسم الثالث عن العلاقة بين الدوال الزائدية العكسية والدالة اللوغريتمية. تعرفنا على القانون مع الرسومات البيانية لإيضاح الدوال العكسية.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التي تلي هذه الوحدة عن المشتقات العليا وسوف نتعرف علي المشتقات العليا للدوال وذلك بالاشتقاق المتتالي وهو اشتقاق المشتقة الأولى للحصول علي المشتقة الثانية واشتقاق المشتقة الثانية للحصول علي المشتقة الثالثة وهكذا إلى المشتقة ن. وندخل في التفاضل المتتالي للدالة الضمنية والدالة الوسيطة ثم بعد ذلك مبرهنة لايبنتز. عليك بالاستعداد لبداية الوحدة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1- المشتقة الأولى للدوال الزائدية العكسية

1) $y = \sinh^{-1} x$

$$x = \sinh y \Rightarrow 1 = \cosh y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2) $y = \cosh^{-1} x$

$$x = \cosh y \Rightarrow 1 = \sinh y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

تدريب (2)

1) $y = \tanh^{-1} x$

$$x = \tanh y \Rightarrow 1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

2) $y = \sec^{-1} x$

$$x = \sec y \Rightarrow 1 = -\sec y \tanh y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sec y \tanh y} = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

تدريب (3)

1) $y = \operatorname{cosech}^{-1} x$

$$x = \operatorname{cosech} y \Rightarrow 1 = -(\operatorname{cosech} y \coth y) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosech} y \coth y} = \frac{-1}{\operatorname{cosech} y \sqrt{\operatorname{cosech}^2 y - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

2) $y = \coth^{-1} x$

$$x = \coth y \Rightarrow 1 = -(\operatorname{cosech}^2 y \frac{dy}{dx}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosech}^2 y} = \frac{-1}{\coth^2 y - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}$$

تدريب (4)

1) $y = \sin^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

الحل : بوضع $u = \frac{x+1}{x-1}$ نجد $y = \sin^{-1} u$

$$\sin y = u \Rightarrow \cos y \frac{dy}{du} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2}}$$

2) $y = \tan^{-1}(\cos x)$

الحل : بوضع $u = \cos x$ نجد أن $y = \tan^{-1} u$

$$\tan y = u \Rightarrow \sec^2 y \frac{dy}{du} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{1 + (\cos x)^2} = -\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$$

$$3) \quad y = \cos^{-1}(x^2 \ln x)$$

$$u = \cos y \Rightarrow 1 = -\sin y \frac{dy}{du} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \left[(x^2) \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x (2x) \right] = \frac{-(x + 2x \ln x)}{\sqrt{1 - (x^2 \ln x)^2}}$$

$$4) \quad y = \sec^{-1}(\sin x)$$

الحل : بوضع $u = \sin x$ نجد ان $y = \sec^{-1} u$ فان

$$u = \sec y \Rightarrow 1 = \sec y \tan y \frac{dy}{du} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - 1}}$$

تدريب (5)

العلاقة بين الدالة اللوغاريتمية والدالة $\tanh^{-1} x$

$$y = \tanh^{-1} x \Rightarrow \tanh y = x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow \frac{e^{2y} - e^{(0)}}{e^{2y} + e^{(0)}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

y	$\sin^{-1}x$	$\cos^{-1}x$	$\tan^{-1}x$	$\cotan^{-1}x$	$\sec^{-1}x$	$\operatorname{cosec}^{-1}x$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

تقويم ذاتي (2)

شرح العلاقة بين الجيب الزائدي العكسي والدالة اللوغريتمية

إذا كانت $y = \cosh^{-1} x$ فإن $x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ أي أن

$$2x = e^y + e^{-y} \Rightarrow 2xe^y = e^{2y} + e^{(0)}$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

بوضع $e^y = m$ نجد $m^2 - 2xm + 1 = 0$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في m وحلها

$$m = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

بأخذ اللوغريثم الطبيعي للطرفين نجد

$$\begin{aligned} \ln e^y &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \\ y \ln e &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \quad , \quad \because (\ln e = 1) \\ y &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد إذا كانت $y = \sinh^{-1} x$ فإن

$$y = \sinh^{-1} x = \ln\{x \pm \sqrt{x^2 + 1}\}$$

مسرد المصطلحات

• الجيب العكسي Inverse Sine

هو دالة الجيب العكسية وتكتب $y = \sin x^{-1}$

• جيب التمام العكسي Inverse cosine

هو دالة جيب التمام العكسية وتكتب $y = \cos x^{-1}$

• الظل العكسي Inverse Tangent

هو دالة الظل العكسية وتكتب $y = \tan x^{-1}$

المراجع

أولا : المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسين الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا : المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
165	المقدمة
165	تمهيد
165	أهداف الوحدة
166	1. التفاضل المتتالي
167	1.1 التفاضل المتتالي للدوال الضمنية
168	2.1 التفاضل المتتالي للدوال الوسيطة
169	2. مبرهنة لايبنتز
170	الخلاصة
170	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
171	إجابات التدريبات
173	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
174	مسرد المصطلحات
175	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

أجدد لك الترحيب وأنت معنا في الوحدة التاسعة وهي بعنوان المشتقات العليا، وبعد دراستك ومتابعتك للوحدات السابقة تجد نفسك متشوق لتكملة المقرر ومعرفة المزيد حتى ترتبط معلومات ونظريات المادة مع بعضها، ونجد أن هذه الوحدة لها ارتباط بالوحدة الثانية. والتي تشرح المشتقة الأولى ومن هنا يبدأ الشرح عن المشتقة الثانية والثالثة والرابعة إلى المشتقة n وسوف نسهل عليك متابعة هذه الوحدة بما عرفته وفهمته من الوحدة الثانية سوف تجد فيها كثير من الأمثلة والتمارين والتدريبات وأسئلة التقويم الذاتي.

كذلك تجد في هذه الوحدة ارتباط مع الوحدة السابعة والتي تشرح التفاضل الضمني والوسيطي، نأتي لنأخذ التفاضل المتتالي للدوال الضمنية والدوال الوسيطة مع طرح بعض الأمثلة والبراهين عليها ويأتي القسم الأخير لشرح مبرهنة لايبنتز واستخدامها في إيجاد المشتقات العليا كحاصل ضرب دالتين.

عليك بمراجعة المراجع وأخذ اليسير منها حتى تزيد فائدتك من هذا العلم و أن نقيم لنا هذه الوحدة بعد أن تكون أخذت منها المفيد علنا نستفيد من هذا التقييم.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي منك أن تكون قادرا علي أن:

1. تعرّف المشتقات العليا.
2. توجّد المشتقات العليا.
3. تشرح التفاضل المتتالي للدوال الضمنية.
4. تحل مشتقات التفاضل المتتالي للدوال الوسيطة.
5. تعرّف كيف تستخدم قاعدة لايبنتز لإيجاد المشتقات العليا لحاصل ضرب دالتين.



1. التفاضل المتتالي

سبق أن تعرفت إلى المشتقة الأولى والاشتقاق الضمني والوسيطي في الوحدات السابقة وسنحاول في هذه الوحدة التعرف إلى المشتقات العليا وهي اشتقاق المشتقة الأولى للحصول على المشتقة الثانية واشتقاق المشتقة الثانية للحصول على المشتقة الثالثة وهكذا إلى المشتقة n ونأتي بك إلى الشرح الرياضي للتفاضل المتتالي أو المشتقات العليا

❖ لتكن y دالة في x إذا فاضلنا المشتقة الأولى لـ y نحصل على المشتقة الثانية أو

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ المعامل التفاضلي الثاني ونرمز للمشتقة الثانية بالرمز}$$

❖ وإذا فاضلنا المشتقة الثانية نجد المشتقة الثالثة ونرمز لها بالرمز $\frac{d^3y}{dx^3}$

❖ وبتكرار التفاضل بالنسبة لـ x يمكن أن نحصل على المشتقة رقم n ونرمز لها

$$\text{بالرمز } \frac{d^n y}{dx^n}$$

وهذا يقتضي إمكانية الاشتقاق إلى الرتبة المحدودة.

➤ أمثلة

1. أوجد المشتقة الثالثة للدالة $y = x^4$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \times 3x^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 4 \times 3 \times 2x = 24x$$

2. أوجد المشتقة رقم n للدالة $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = n(n-1)(n-2)(n-3)....3.2x$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)(n-2)(n-3)....3.2.1 = n!$$

ونلاحظ أن المشتقة رقم $(n+1)$ تساوي الصفر وكذلك المشتقة رقم $(n+2)$ وأي مشتقة أكبر من n تساوي الصفر.

1.1 التفاضل المتتالي للدوال الضمنية

بعد معرفتك للتفاضل المتتالي نأتي بك إلى التفاضل المتتالي للدوال الضمنية وفي هذا القسم عليك بمراجعة معلوماتك عن الدوال الضمنية والدوال الوسيطة حتى تربط الوحدات مع بعضها البعض. ونبدأ بأخذ هذا المثال

➤ مثال

أوجد المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x إذا كانت $x^2 + 5x + 2y^2 = 1$

الحل بتفاضل المعادلة أعلاه بالنسبة لـ x

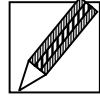
$$2x + 5\left(x \frac{dy}{dx} + y(1)\right) + 2(2y) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y}{5x + 4y} \dots\dots\dots(1)$$

وبتفاضل المعادلة (1) بالنسبة لـ x للمرة الثانية نجد

$$2 + 5\left(x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(1)\right) + 5 \frac{dy}{dx} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2 - 10 \frac{dy}{dx} - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{5x + 4y} = \frac{-2 + 10\left(\frac{2x + 5y}{5x + 4y}\right) - 4\left(\frac{2x + 5y}{5x + 4y}\right)^2}{5x + 4y}$$

تدريب (1)



أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل من الدوال الآتية

1) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$

2) $y = 5x^3 - 3x^5$

3) $y = 4x^2 - 8x + 1$

2.1 التفاضل المتتالي للدوال الوسيطة

أوجد المشتقة الثانية للمنحنى الذي تمثله الوسيطة

$$y = a \sin^3 \theta, \quad x = a \cos^3 \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = 3a \cos^2 \theta (-\sin \theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

ولإيجاد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (-\tan \theta)$$

$$= \frac{d}{d\theta} (-\tan \theta) \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\sec^2 \theta \div \frac{dx}{d\theta} = \frac{-\sec^2 \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta}$$

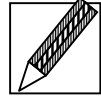
$$= \frac{1}{3a \cos^4 \theta \sin \theta} = \frac{1}{3a} (\cos \theta)^{-4} (\sin \theta)^{-1} = \frac{1}{3a} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{(x^{-4} y^{-1})^{\frac{1}{3}}}{3a^{-\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}$$

حيث a ثابت

$$\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{3}} = \sin \theta, \quad \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}} = \cos \theta \quad \text{حيث استخدمنا التعويض}$$

تدريب (2)



جد $\frac{d^2 y}{dx^2}$ لكل من الدوال الآتية

$$1) y = x^2 \sin x$$

$$2) y = \frac{t+1}{t-1}, \quad x = t^2 + 2$$

$$3) 2x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 2y^3 = 1$$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



أوجد المشتقة الثانية لكل من الدوال الآتية:

1. $y = x^5$

2. $x^2 + 5x + 2y^2 = 1$

3. $y = a \sin^3 \theta, x = a \cos^3$

2. مبرهنة لايبنتز

لتكن $y = v(x)u(x)$ حيث v, u دوال في x ولها مشتقات من الرتبة الأولى و حتى الرتبة n فان

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(uv) &= u^{(0)}v^{(n)} + nu^{(1)}v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(2)}v^{(n-2)} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(3)}v^{(n-3)} + \dots + u^{(n)}v^{(0)} \end{aligned}$$

لاحظ أن $v^{(0)} = v$, $u^{(0)} = u$

مثال

أوجد المشتقة السابعة لـ $y = x^4 \sin x$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y}{dx^4} &= x^4 \cos x + 7 \times 4x^3 (-\sin x) + \frac{7 \times 6}{2!} 4 \times 3x^2 (-\cos x) + \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} 4 \times 3 \times 2x (\sin x) \\ &+ \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} 4 \times 3 \times 2 \times 1 (\cos x) \end{aligned}$$

وبقية الحدود تعطي أصفارا.

تدريب (3)

أوجد $\frac{d^4 y}{dx^4}$ إذا كانت $y = x^4 \sin x$



الخلاصة

في هذه الوحدة تم شرح المشتقات العليا وكيفية إيجادها، واستخدام قاعدة لايبنتز لإيجاد المشتقات العليا لحاصل ضرب دالتين، اشتملت الوحدة علي قسمين.

القسم الأول

◀ **التفاضل المتتالي** وعرف بأنه تفاضل المشتقة الأولى للحصول علي المشتقة الثانية وتفاضل المشتقة الثانية للحصول علي المشتقة الثالثة إلى أن نصل إلى المشتقة n .

◀ **التفاضل المتتالي للدوال الضمنية** وهي الدالة التي تكون فيها x مرتبطة ب y عن طريق دالة لا يمكن وضعها في صورة صريحة، ونقول أن y معطاة ضمناً بدلالة x ، وشرحنا كيف يمكن إيجاد المشتقة الثانية والثالثة إلى المشتقة n .

◀ **الدوال الوسيطة**. والتي تكون كل من x , y معطاة بدلالة متغير ثالث أو وسيط.

القسم الثاني شرح

◀ **قاعدة لايبنتز** وبرهانها واستخدامها في إيجاد المشتقات العليا لحاصل ضرب دالتين.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التي تلي هذه الوحدة عن تطبيقات التفاضل في الهندسة والفيزياء، وإيجاد معادلة المماس والعمودي عن طريق عمليات التفاضل، وتفاضل المسافة أو الإزاحة لإيجاد معادلة السرعة والعجلة بدلالة الزمن. نتركك لتتعرف عليها وتستمتع بالأمثلة والتدريبات.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$1) y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 7 \times 3x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \times 3x^2 - 21 \times 2x = 12x^2 - 42x$$

$$2) y = 5x^3 - 3x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \times 3x^2 - 3 \times 5x^4, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 15 \times 2x - 15 \times 4x^3 = 30x - 60x^3$$

$$3) y = 4x^2 - 8x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 2x - 8, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 8$$

تدريب (2)

$$1) y = x^2 \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(\cos x) + 2x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2(-\sin x) + 2x \cos x + 2x \cos x + 2 \sin x = \sin x(2 - x^2) + 4x \cos x$$

$$2) y = \frac{t+1}{t-1}, \quad x = t^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t-1)(1) - (t+1)(1)}{(t-1)^2} = \frac{-2}{(t-1)^2}, \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{-2}{(t-1)^2} \div 2t = \frac{-1}{t(t-1)^2} \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{t(t-1)^2} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \frac{-1}{t(t-1)^2} \div \frac{dx}{dt}$$

$$= \left((t^{-1})(2)(t-1)^{-3}(1) - (t-1)^{-2}(-t^{-2}) \right) \div 2t =$$

$$\left[\frac{2}{t(t-1)^3} + \frac{1}{t^2(t-1)^2} \right] \div 2t = \frac{2t + (t-1)}{t^2(t-1)^3} \div 2t = \frac{3t-1}{2t^3(t-1)^3}$$

$$3) \quad 2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3 = 1$$

$$6x^2 + 3\left(x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy\right) + 3\left(y^2 + 2xy \frac{dy}{dx}\right) + 3 \times 2y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2 - 6xy - 3y^2}{3x^2 + 6xy + 6y^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$= \frac{(3x^2 + 6xy + y^2) \left(-12x - 6 \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) - 6y \frac{dy}{dx} \right) + (6x^2 + 6xy + 3y^2) \left(6x + 6 \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) + 12y \frac{dy}{dx} \right)}{(3x^2 + 6xy + 6y^2)^2}$$

عوض ب $\frac{dy}{dx}$ من (1) ثم بسط .

تدريب (3)

$$y = x^4 \sin x \quad \text{إذا كانت} \quad \frac{d^4y}{dx^4} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 (\cos x) + 4x^3 \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x + 12x^2 \sin x + 4x^3 \cos x$$

$$= 8x^3 \cos x - x^4 \sin x + 12x^2 \sin x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x^2 \cos x - 8x^3 \sin x - 4x^3 \sin x - x^4 \cos x + 24x \sin x + 12x^2 \cos x$$

$$= 36x^2 \cos x - 12x^3 \sin x - x^4 \cos x + 24x \sin x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 36(2x \cos x - x^2 \sin x) - 12(3x^2 \sin x + x^3 \cos x) + x^4 \sin x - 4x^3 \cos x + 24(x \cos x + \sin x)$$

أو في خطوة واحدة (باستخدام قاعدة لايبنتز)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 4! \sin x + 4(4 \times 3)(2x) \cos x + \frac{4 \times 3}{2!} (4 \times 3x^2)(-\sin x)$$

$$+ \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} (4x^3)(-\cos x) + \frac{4!}{4!} x^4 \sin x$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. $20x^3$

$$2. \quad \frac{-2 + 10\left(\frac{2x+5y}{5x+4y}\right) - 4\left(\frac{2x+5y}{5x+4y}\right)^2}{5x+4y}$$

$$3. \quad = \frac{(x^{-4}y^{-1})^{\frac{1}{3}}}{3a^{-\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$$

مسرد المصطلحات

- **المشتقات العليا Higher Derivative**
هي اشتقاق المشتقة الأولى للحصول علي المشتقة الثانية واشتقاق المشتقة الثانية للحصول علي المشتقة الثالثة وهكذا
- **دالة ضمنية Implicit Function**
هي الدالة التي فيها x ترتبط ب y عن طريق دالة لا يمكن وضعها في صورة صريحة وتكون y معطاة ضمنيا بدلالة x أو x ضمنيا بدلالة y
- **الوسيط أو المعلمة :Parameter**
إذا كانت كل من x و y معطاة بدلالة متغير ثالث مثلا t فالمتغير الثالث هو الوسيط

المراجع

أولا : المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسبان الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا : المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W , **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus, one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada.



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
179	المقدمة
179	تمهيد
179	أهداف الوحدة
180	1. تطبيقات التفاضل الهندسية
184	2. تطبيقات التفاضل الفيزيائية
186	الخلاصة
186	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
187	إجابات التدريبات
189	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
190	مسرد المصطلحات
191	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك في الوحدة العاشرة ضمن مقرر الحسابان (1). فقد انتهيت من الوحدة التاسعة والتي تناولت المشتقات العليا، وتتناول هذه الوحدة التطبيقات الهندسية والفيزيائية والتي نستخدم فيها قوانين المشتقات العليا أو التفاضل المتتالي كما تعرفت عليه في الوحدة السابقة. ونشرح معادلة المماس والعمودي عن طريق التفاضل، ونفاضل المسافة لإيجاد معادلة السرعة وكذلك نفاضل معادلة السرعة، لإيجاد العجلة بدلالة الزمن، وتبين هذه الوحدة أهمية استخدام علم الحسابان في مجالات العلوم الأخرى مثل الفيزياء والهندسة. تجد في هذه الوحدة الأمثلة التي تشرح وتوضح التطبيقات وإيجاد المعادلات ثم نأتي إلى التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي لكي تتوسع في معرفتك وتساعدك علي زيادة التطبيق. وفي هذه الوحدة ندعوك لأخذ المراجع المذكورة في نهاية الوحدة وان تقيم لنا هذه الوحدة وتوضح لنا مدى استفادتك منها.

أهداف الوحدة

من المتوقع بعد دراستك لهذه الوحدة وقيامك بكل ما سيطلب منك أن تصبح قادراً علي أن:

1. تعرّف المعامل التفاضلي الأول.
2. تُحل معادلة المماس والعمودي عن طريق التفاضل .
3. توجّد معادلة السرعة والعجلة بدلالة الزمن.
4. تعرّف تطبيقات التفاضل في الهندسة والفيزياء.

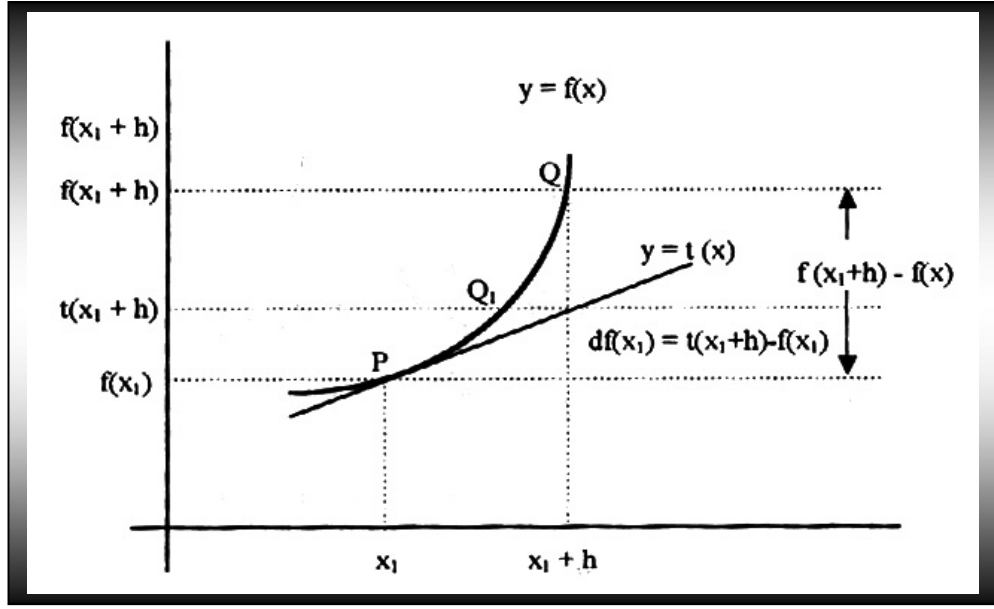


1. تطبيقات التفاضل الهندسية

يتناول هذا القسم الذي هو بين يديك التطبيقات الهندسية وكيفية إيجاد المعامل التفاضلي الأول لإيجاد معادلة المماس وإيجاد معادلة العمودي ونجد أن المعامل التفاضلي الأول يعني ميل المماس للمنحني الدالة $y = f(x)$ أو معدل تغير اتجاه منحني الدالة وعليه يمكننا إيجاد معادلة المماس والعمودي عليه عند نقطة التماس عن طريق التفاضل.

لقد بينا سابقا تعريف المشتقة الأولى وهي عبارة عن نهاية متوسط التغير عندما $h \rightarrow 0$ وان متوسط التغير في الدالة يساوي ميل القطعة المستقيمة PQ المبينة في الشكل (1) وإذا اعتبرنا أن الإحداثي السيني للقطعة P هو x_1 وللقطعة Q هو $x_1 + h$ واقتربت قيمة h تدريجا من الصفر أي أن $h \rightarrow 0$ فإن النقطة Q تأخذ أوضاعا جديدة مثل $Q_1, Q_2, \dots$ وينطبق في النهاية علي P وتأخذ القطعة المستقيمة أوضاع جديدة مثل $PQ_1, PQ_2, \dots$ وتأخذ في النهاية وضع المماس المرسوم للمنحني عند النقطة P ونعبر عن ذلك بالرموز كما يلي:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \text{ميل المماس}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \text{ميل المماس}$$



شكل (1)

المعادلة العامة للمماس

الصورة العامة لمعادلة المماس هي $y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث (x_1, y_1) هي إحداثيات نقطة التماس و m ميل المماس.

معادلة العمودي علي المماس

الصورة العامة لمعادلة العمودي علي المماس هي $y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1)$

حيث (x_1, y_1) هي إحداثيات نقطة التماس

وميل العمودي علي المماس $= \frac{-1}{m}$

ميل المماس X ميل العمودي علي المماس $= -1$

$$\frac{-1}{m} \times m = -1$$

➤ أمثلة

1/ أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحني $9x^2 + 4y^2 = 40$ عند النقطة (2,1) عليه

الحل

ميل المماس هو $\frac{dy}{dx}$ ويتفاضل معادلة المنحني نجد

$$18x + 8y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{18x}{8y}$$

$$-\frac{9}{2} = -\frac{18 \times 2}{8} \text{ هو (2,1) عند المماس}$$

$$(y-1) = -\frac{9}{2}(x-2) \text{ هي معادلة المماس}$$

$$\text{ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة (2,1) هي } (y-1) = \frac{2}{9}(x-2)$$

2/ أوجد ميل منحنى الدالة الآتية عند قيم x المبينة ثم أوجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند نفس النقطة.

$$x^2y - y^3 = 8 \text{ عند النقطة } (-3,1)$$

الحل:

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (x^2 - 3y^2) = -2xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2 - 3y^2)}$$

$$m = \frac{dy}{dx} \text{ عند النقطة } (-3,1) = \frac{-2(-3)(1)}{(-3)^2 - 3(1)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$m = 1$$

الصورة العامة لمعادلة المماس هي $y - y_1 = m(x - x_1)$

نعوض قيم y_1, x_1, m

$$y - 1 = 1(x+3) \Rightarrow y-1 = x+3$$

$$\Rightarrow y = x+3+1 \Rightarrow y = x+4$$

الصورة العامة لمعادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1)$$

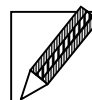
نعوض قيم y_1, x_1, m

$$y - 1 = \frac{-1}{1} (x+3)$$

$$\Rightarrow y = -x -3 +1 \Rightarrow y = -x -2$$

$$= -(x+2)$$

تدريب (1)



أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنيات الآتية كل عند النقطة الموضحة

1) $y^2 + xy + x^2 = 1$ (1,0)

2) $x^2 + y^2 = 8$ (2,2)

3) $x^3 + y^3 + xy = 11$ (2,1)

أسئلة تقويم ذاتي (1)



1. أوجد ميل المنحني عند قيم x المبينة

$f(x) = 3x^2 + 3x - 7$ عند النقطة $x = 2$

أوجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقاط الموضحة للمنحنيين

2. $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ عند النقطة $y = 3$

$f(x) = \tan 2x$ عند $x=0$

2. تطبيقات التفاضل الفيزيائية

سنبدأ وإياك تطبيقات التفاضل الفيزيائية ونتعرف علي كيفية إيجاد السرعة والعجلة إذا كانت المسافة (الإزاحة) دالة في الزمن t فإن معدل تغيير الإزاحة بالنسبة للزمن يعطي السرعة ومعدل تغيير السرعة بالنسبة للزمن يعطي العجلة. ونعبر عن ذلك

$$\text{العجلة } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} , \text{ السرعة } v = \frac{dx}{dt}$$

السرعة Velocity

السرعة هي عبارة عن المشتقة الأولى لدالة المسافة بالنسبة للزمن ويرمز لها بالرمز V وتعطي بالعلاقة $v = \frac{dx}{dt}$ حيث t تعني الزمن بالثواني.

العجلة Acceleration

العجلة هي عبارة عن المشتقة الثانية لدالة المسافة بالنسبة للزمن ويرمز لها بالرمز a وتعطي حسب العلاقة $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ أو هي عبارة عن المشتقة الأولى لدالة السرعة بالنسبة للزمن

مثال

الإزاحة x (بالمتر) لنقطة مادية تحقق $x = t^3 + 3t^2 + t + 1$ حيث t ترمز للزمن (بالثواني) فإن

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t + 1 \quad \text{أولا السرعة}$$

$$v_{t=2} = 3(4) + 6(2) + 1 = 25 \text{ m/s} \quad \text{وإذا أردنا السرعة بعد 2 ثانية مثلاً}$$

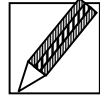
$$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 6 \quad \text{ثانياً العجلة}$$

$$a_{t=3} = 6(3) + 6 = 24 \text{ ms}^{-2} \quad \text{وإذا أردنا قيمة العجلة بعد الثانية الثالثة}$$

أخي الدارس لحل أسئلة المعادلات المرتبطة بالتطبيقات الفيزيائية عليك إتباع الأسس التالية:

1. تقرأ السؤال بتمعن.
2. تتعرف علي المعطيات والمطلوب إيجاداه.
3. توجد معادلة الدوال التي تمثلها المعطيات والمطلوب إيجاداه.
4. نشتق أو نأتي بالمشقة الأولى بالنسبة للزمن t .
5. نأتي بالمشقة الثانية بالنسبة للزمن t .
6. نعوض المعطيات في كل من المشتقة الأولى والمشتقة الثانية وإيجاد الحل.

تدريب (2)



أوجد معادلة السرعة والعجلة لنقطة تتحرك بحيث تكون معادلة المسافة لها

$$1 - \quad x = t^2 + 5t + 6$$

$$2 - \quad x = te^{-t}$$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



1/ يتحرك جسم حسب العلاقة $f(t) = t^4 - 5t^2 + 8t$ حيث t الزمن بالثواني

و f المسافة بالأمتار احسب كل من السرعة والعجلة عندما $t = 2$

2/ يتحرك جسم حسب العلاقة $f(t) = t^3 - 8t^2 + 5t + 5$ احسب سرعة

الجسم عندما تكون العجلة تساوي $8m/s^2$

3/ أوجد السرعة والعجلة بعد ثانيتين في المعادلة التالية $y = t^3 + 3t^2 + t + 4$

الخلاصة

دعنا نلخص لك ما تم شرحه في الوحدة العاشرة من الحسبان (1) في هذه الوحدة تعلمت كيفية استخدام التفاضل في التطبيقات الهندسية ومنها توصلنا إلى ميل المماس للمنحني ومعادلة المنحني ومعادلة المماس والعمودي وعرفنا:

➤ معادلة المماس بأنها

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ حيث } (x_1, y_1) \text{ هي إحداثيات نقطة التماس و } m \text{ ميل المماس}$$

➤ معادلة العمودي علي المماس بأنها

$$y - y_1 = -\frac{1}{m} (x - x_1)$$

حيث (x_1, y_1) هي إحداثيات نقطة التماس

➤ وتعرفنا علي أن ميل المماس X ميل العمودي $= -1$

ثم القسم الثاني فيه شرحنا التطبيقات الفيزيائية والتي وجدنا فيها كيف يمكن أن تفاضل أو توجد المشتقة الأولى أو معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن ونتحصل علي السرعة ثم معدل السرعة بالنسبة للزمن لتعطي العجلة ونعبر عن ذلك

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ السرعة ، } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ العجلة}$$

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

نتركك لتهيئة ذهنك للوحدة القادمة، وهي وحدة تشرح النهايات العظمي والصغرى والتي تم التطرق والشرح لها في الوحدة الأولى وتعريفها وفي هذه الوحدة يتم تعريف وشرح الدالة التزايدية والدالة التناقضية ونقطة رجوع الدالة والدالة المحدبة والدالة المقعرة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$1) \quad y^2 + xy + x^2 = 1 \quad (1,0)$$

$$2y \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} + y + 2x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx}(1,0) = \frac{-2}{1} = -2$$

$$(y - 0) = -2(x - 1)$$

معادلة المماس

$$(y - 0) = \frac{1}{2}(x - 1)$$

معادلة العمودي

$$2) \quad x^2 + y^2 = 8 \quad (2,2)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}(2,2) = -\frac{2}{2} = -1$$

$$(y - 2) = (-1)(x - 2)$$

معادلة المماس

$$(y - 2) = x - 2$$

معادلة العمودي

$$3) \quad x^3 + y^3 + xy = 11 \quad (2,1)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - y}{3y^2 + x}$$

$$\frac{dy}{dx}(2,1) = \frac{-3(4) - 1}{3(1) + 2} = \frac{-13}{5}$$

$$(y - 1) = -\frac{13}{5}(x - 2)$$

معادلة المماس

$$(y - 1) = \frac{5}{13}(x - 2)$$

معادلة العمودي

تدريب (2)

ii - أوجد معادلة السرعة والعجلة لنقطة تتحرك بحيث تكون معادلة المسافة لها

$$1 - \quad x = t^2 + 5t + 6$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t + 5$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2$$

$$2 - \quad x = te^t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = te^t + e^t = e^t(t + 1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = e^t(t + 2)$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

$$y = 11 \quad .1$$

$$m = 15$$

$$y = 15x - 19 \quad \text{معادلة المماس}$$

$$y = \frac{1}{15}(-x + 167) \quad \text{معادلة العمودي علي المماس}$$

$$5x + 6y - 13 = 0 \quad \text{2. معادلة المماس}$$

$$6x - 5y + 21 = 0 \quad \text{معادلة العمودي}$$

$$y = 2x \quad \text{3. معادلة المماس}$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{معادلة العمودي}$$

تقويم ذاتي (2)

$$v = 20 \text{ m/s} \quad \text{السرعة}$$

$$a = 38 \text{ m/s}^2 \quad \text{العجلة}$$

$$-11 \text{ m/s}$$

$$v_{t=2} = 25 \text{ m/s} \quad \text{السرعة بعد 2 ثانية}$$

$$a_{t=2} = 18 \text{ m/s}^2 \quad \text{العجلة بعد 2 ثانية}$$

مسرد المصطلحات

• سرعة Velocity

هي عبارة عن المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن ويرمز لها بالرمز $V = \frac{dx}{dt}$

أو هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

• عجلة Acceleration

هي عبارة عن معدل تغيير السرعة بالنسبة للزمن $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

أو هي الاشتقاق الثاني للمسافة بالنسبة للزمن

• الزمن Time

هو الوقت بالثواني الذي يحدث فيه معدل التغير بالنسبة للمسافة والسرعة

• ميل المماس Slope of tangent

هو معدل تغيير اتجاه منحنى الدالة، ميل المماس للمنحنى $\frac{dy}{dx}$ ويرمز لها بالرمز m

المراجع

أولا : المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسبان الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا: المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W , **Elementary Calculus** copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ 2.K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa.
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada.



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
195	المقدمة
195	تمهيد
195	أهداف الوحدة
196	1. تعريف النهايات العظمى والصغرى
197	2. الدالة التزايدية والدالة التناقصية
199	3. نقاط الرجوع
201	4. التحذب والتقعر
205	الخلاصة
206	لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية
207	إجابات التدريبات
209	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
210	مسرد المصطلحات
211	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحبا بك في الوحدة الحادية عشر. وهي بعنوان النهايات العظمي والصغرى والتي تطرقنا لها في الوحدة الأولى. وفي داخل هذه الوحدة التعريف الرياضي والبياني للنهايات العظمي والصغرى، والبرهان الرياضي للدالة التزايدية والدالة التناقصية وتتعرف علي الشروط التي لابد أن توجد حتى تفرق بين الدالة التناقصية والتزايدية. ثم نأتي لتعريف نقاط الرجوع ومنها نصل إلى الشرط الضروري لتكون النهاية عظمي أو صغري. بعد ذلك ندخل في التحدب والتقعير، ونتعرف علي الدالة المحدبة والمقعرة وشروطها والرسم البياني الذي يوضح كل منها .

هذه الوحدة لها أهمية في رسم الدوال كما سنتطرق له بعد هذه الوحدة فعليك بالاهتمام بما ورد فيها وفهمه فهما جيدا، تجد في داخل الوحدة أمثلة لتوضيح الشرح وتعميق الفهم والتطبيق كذلك سوف تجد من الوسائط التعليمية ما يعينك علي المتابعة والاستفادة.

لك أن تساعدنا في تقييم ما قدم في هذه الوحدة بعد دراستك لها. والآن إلى الأهداف التي يجب أن تحققها الوحدة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس ينتظر بعد دراستك لهذه الوحدة أن تكون قادرا علي أن:



1. تعرف النهايات العظمي والصغرى.
2. تستنتج الدالة التزايدية والدالة التناقصية رياضيا وبيانيا.
3. تحدد نقاط الرجوع.
4. تشرح الشروط الضرورية لتكون النهاية عظمي أو صغري.
5. تثبت الدالة المقعرة والدالة المحدبة بيانيا ورياضيا.
6. تستنتج نقاط الرجوع ونقطة النهاية العظمي والصغرى للدوال.

نبدأ الوحدة الحادية عشر والتي تشرح وتعرف النهايات العظمى والصغرى واستخداماتها.
الآن إلى التعريف

1. تعريف النهاية الصغرى و العظمى

تعرف بأن بعض المنحنيات تأخذ شكل قمة الجبل رياضياً تسمى النقطة التي عندها قيمة الدالة اكبر من أي قيمة في الجوار بنقطة نهاية عظمى

تعرف أن بعض المنحنيات التي تأخذ شكل اسفل الوادي رياضياً تسمى النقطة التي عندها قيمة الدالة اصغر من أي قيمة في الجوار بنقطة النهاية الصغرى.

نقول إن $x=a$ نقطة نهاية صغرى للدالة $f(x)$ إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث $f(a+\delta) \geq f(a)$ لكل $0 < |\delta| < \epsilon$.

لنفرض الآن أن $f'(a) \neq 0$ ، و دون مساس بالعمومية ، لنفرض أن $f'(a) > 0$ إذن يمكن جعل $|\delta|$ صغيرة صغراً كافياً بحيث يكون

$$\frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta} > 0$$

فإذا كانت $\delta < 0$ فإن هذا يقتضي $f(a+\delta) < f(a)$ وهذا يناقض تعريف كون a نقطة نهاية صغرى . عليه فإن $f'(a) = 0$ شرط ضروري لتكون a نقطة نهاية صغرى للدالة $f(x)$.
ونقول إن $x=a$ نقطة نهاية عظمى للدالة $f(x)$ إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث $f(a+\delta) \leq f(a)$ لكل $0 < |\delta| < \epsilon$.

يمكن أيضاً الوصول إلي الشرط الضروري $f'(a) = 0$ لتكون $x=a$ نقطة نهاية عظمى .
نعلم أن الشرط الضروري $f'(a) = 0$ ليس كافياً لمعرفة حالة الدالة عند $x=a$.
فهى إما أن تكون للدالة نهاية عظمى أو صغرى عند $x=a$ أو غير ذلك .

2. الدالة التزايدية والدالة التناقصية

نقول إن الدالة $f(x)$ دالة تزايدية عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث

$$f(a - \delta) < f(a) < f(a + \delta) \quad \text{لكل} \quad 0 < \delta < \epsilon$$

الآن إذا كانت $f'(a) > 0$ أى :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta} > 0$$

فإنه توجد $\epsilon > 0$ بحيث

$$\frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta} > 0 \quad \text{لكل} \quad 0 < |\delta| < \epsilon$$

أو

$$\frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta} > 0 \quad \text{لكل} \quad 0 < \delta < \epsilon$$

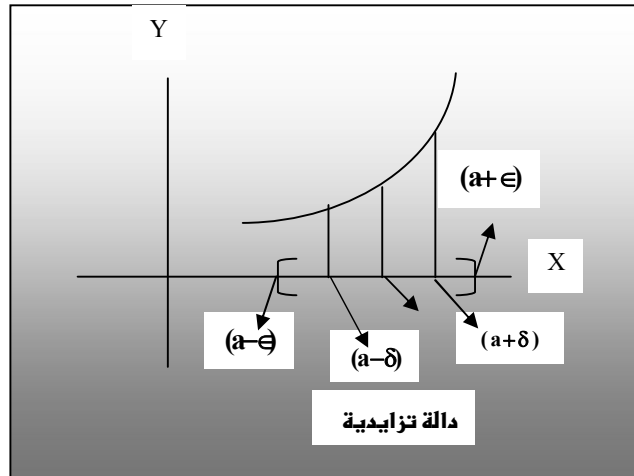
و

$$\frac{f(a - \delta) - f(a)}{-\delta} > 0$$

إذن $f(a - \delta) < f(a) < f(a + \delta)$

إذن $f'(a) > 0$ تقتضى أن تكون $f(x)$ تزايدية عند $x = a$.

a

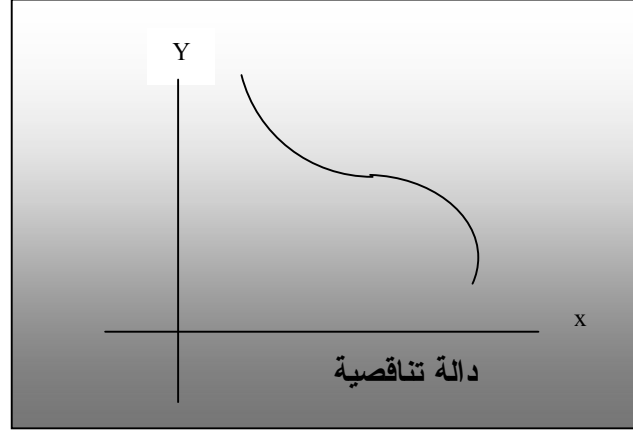


الشكل (11.1.1)

ونقول إن الدالة $f(x)$ دالة تناقصية عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث

$$f(a - \delta) > f(a) > f(a + \delta) \quad \text{لكل} \quad 0 < \delta < \epsilon$$

ويمكن الوصول الى النتيجة $f'(a) < 0$ تقتضي أن تكون $f(x)$ تناقصية عند $x = a$.



الشكل (11.1.2)

للبحث عن الدالة التزايدية والدالة التناقصية عليك عزيزي الدارس إتباع الأسس التالية

- ♦ نجد المشتقة الأولى $f'(x)$
- ♦ نجعل $f'(x) = 0$ ومنها نجد إشارة المشتقة الأولى
- ♦ نبحث عن إشارة المشتقة الأولى قبل وبعد أصفار المشتقة الأولى فإذا كانت
- ♦ $f'(x)$ موجبة فإن الدالة تزايدية (ولها قيمة عظمي).
- ♦ $f'(x)$ سالبة فإن الدالة تناقصية (ولها قيمة صغري).
- ♦ $0 = f'(x)$ الدالة ثابتة وتسمى بنقطة الرجوع.

أسئلة تقويم ذاتي (1)



1/ ابحث عن الدالة التزايدية والتناقصية في كل من الدوال الآتية

a. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$

b. $f(x) = x^3 + 3/x$

3. نقاط الرجوع

وصلنا إلى أنه إذا كانت $f'(a) > 0$ فإن الدالة $f(x)$ تكون تزايدية عند $x = a$

و إذا كانت $f'(a) < 0$ فإن الدالة $f(x)$ تكون تناقصية عند $x = a$

. ماذا عن حالة الدالة عند a إذا كانت $f'(a) = 0$.

تعريف

تسمى النقطة a نقطة رجوع للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(a) = 0$.

◀ مثال (1)

أوجد نقاط النهاية العظمي والصغرى للدالة $y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x - 24$

الحل

عند نقاط الرجوع فإن

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 15x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

لمعرفة نوع النقطة $x = 1$ نوجد

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1-\delta} = 3(1-\delta)^2 - 15(1-\delta) + 12 = -6\delta + 3\delta^2 + 15\delta = 3\delta^2 + 9\delta > 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1+\delta} = 3(1+\delta)^2 - 15(1+\delta) + 12 = 6\delta + 3\delta^2 - 15\delta = 3\delta^2 - 9\delta = 3\delta(\delta - 3) < 0$$

(لان δ عدد صغير جداً وموجب)

∴ عند $x = 1$ نقطة نهاية عظمي لإيجاد قيمة y عند $x = 1$ نعوض في معادلة المنحني

$$y = 1 - \frac{15}{2}(1) + 12(1) - 24 = -11 - \frac{15}{2} = -\frac{37}{2} \quad \left(1, -\frac{37}{2}\right)$$

وعند النقطة $(4, -32)$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=4-\delta} = 3\delta^2 - 9\delta < 0$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=4+\delta} = 3\delta^2 + 9\delta > 0$$

أي أن $(4, -32)$ نقطة نهاية صغري

طريقة أخرى:-

هناك طريقة أسهل لتمييز نقاط الرجوع وهي المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ فإذا كانت إشارة المشتقة الثانية موجبة عند نقطة الرجوع تسمى النقطة نهاية صغري وإذا كانت سالبة فهي نقطة نهاية عظمي.

◀ مثال (2)

أوجد نقاط الرجوع (أو التوقف) للدالة الآتية وميز بينها

$$y^2 + x^2 - 6x - 8y - 11 = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x - 6 - 8 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6-2x}{2y-8} = \frac{3-x}{y-4}$$

بوضع $\frac{dy}{dx} = 0$ نجد أن $x = 3$ والنقاط هي $(3, 10), (3, -2)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(3,10)} = \frac{(y-4)(-1) - (3-x)y'}{(y-4)^2} \Big|_{(3,10)} = \frac{-6}{36} < 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(3,-2)} = \frac{6}{36} > 0$$

إن $(3, -2)$ نقطة نهاية صغري و $(3, 10)$ نقطة نهاية عظمي .

أسئلة تقويم ذاتي (2)



أوجد نقاط التوقف للدوال الآتية وميز بينها

$$1. f(x) = x^3 + 3x - 2$$

$$2. f(x) = x + 1/x$$

$$3. f(x) = x^2 (1-x)$$

$$4. f(x) = 1 + x/1-x$$

4. التحدب و التقرع

نقول إن الدالة $f(x)$ محدبة عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث يكون الوتر الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ يقع فوق منحنى الدالة $f(x)$ لكل $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ حيث $0 < \delta < \epsilon$

بمعنى آخر

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{لكل } x_1, x_2, x \in (a - \delta, a + \delta)$$

من الشكل (11.3.1) نلاحظ علاقة التحدب عند النقطة a بكون الدالة $f'(x)$ تزايدية عند a .

الميل عند a^+ اكبر من الميل عند a أي $f'(a^+) > f'(a)$

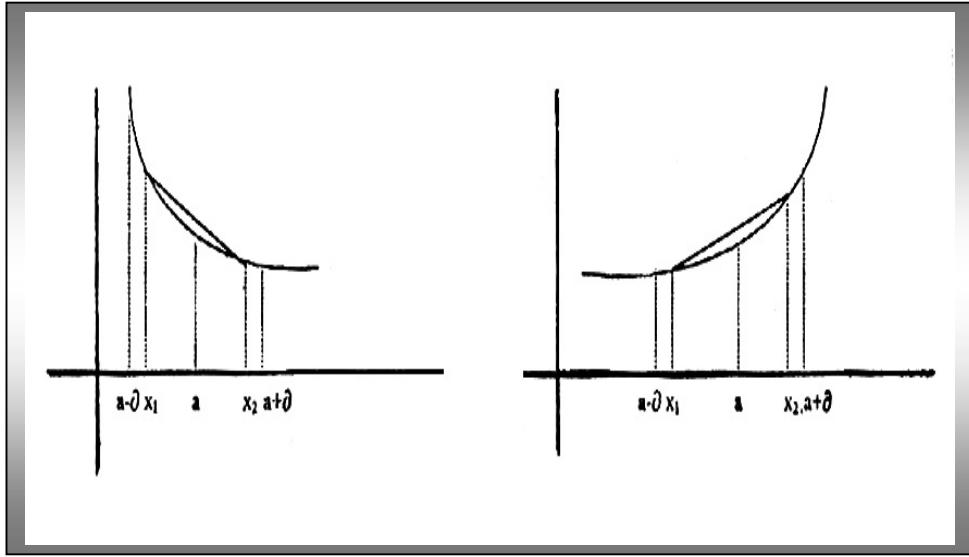
فيمكن إثبات أنه إذا كانت $f'(x)$ تزايدية عند a فإن الدالة $f(x)$ محدبة عند a . ومما سبق نعلم أن $f''(a) > 0$ شرط كافي لتكون $f'(x)$ تزايدية عند a . إذاً $f''(a) > 0$ شرطاً كافياً لتكون الدالة $f(x)$ محدبة عند a .

و نقول إن الدالة $f(x)$ مقعرة عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث يكون الوتر الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ يقع تحت منحنى الدالة $f(x)$ لكل $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ حيث $0 < \delta < \epsilon$

بمعنى آخر

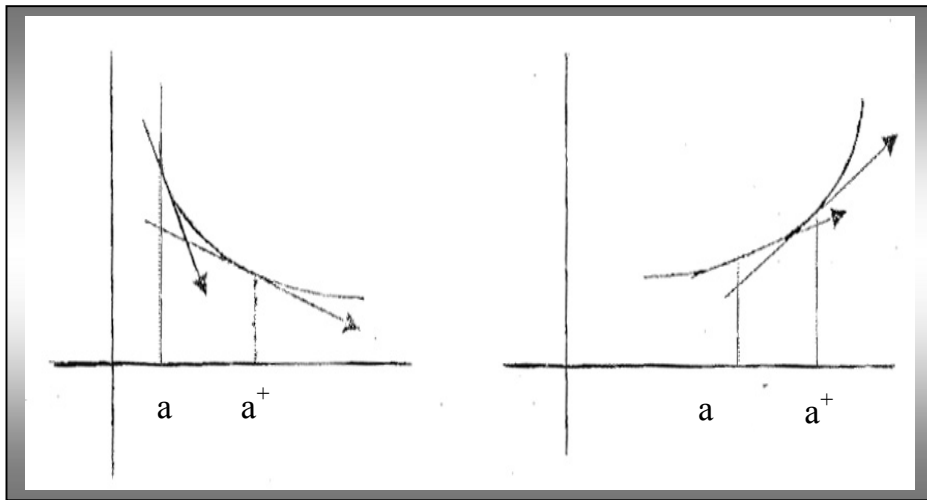
$$x_1, x_2, x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ لكل } f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن $f''(a) < 0$ شرطاً كافياً لتكون الدالة $f(x)$ مقعرة عند a .



الشكل (11.3.1)

من الشكل (11.3.1) نلاحظ علاقة التحذب عند النقطة a بكون الدالة $f''(x)$ تزايدية عند a .



الشكل (11.3.2)

لمعرفة الدالة المحدبة والمقعرة عليك عزيزي الدارس إتباع الخطوات التالية

أولاً: نوجد $f'(x)$

ثانياً: نوجد $f''(x)$

ثالثاً: نجعل $0 = f''(x)$

رابعاً: نبحث عن إشارة المشتقة الثانية إذا كانت

♦ إشارة المشتقة الثانية موجبة فإن الدالة محدبة.

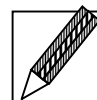
♦ إشارة المشتقة الثانية سالبة فإن الدالة مقعرة.

تدريب (1)

1. ابحث عن مجالات التحدب والتقعير في الدوال الآتية

a. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

b. $f(x) = 1/x^2$



نقاط الانقلاب

هناك نوع ثالث من نقاط التوقف $x=a$ يكون عندها $\frac{dy}{dx}$ يساوي صفراً ولكنه لا يغير إشارته عند اجتياز تلك النقطة في الفترة $(a-\delta, a+\delta)$ فهذه ليست بنقطة رجوع وبيان الدالة في هذه الفترة لا يتحدب ولا تقعر و $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندها يساوي الصفر وتسمى مثل هذه النقطة بنقطة انقلاب .

◀ مثال

أوجد نقاط التوقف للدالة $y = x^3 + 3$ وميز بينها
الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذن (0,0) نقطة توقف

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(0,0)} = 6(0) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{-\delta} = 3(-\delta)^2 = 3\delta^2 > 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\delta} = 3(\delta)^2 = 3\delta^2 > 0$$

إذن لم تتغير إشارة $\frac{dy}{dx}$ عند اجتياز $x = 0$. عليه فان (0,0) نقطة انقلاب .

تدريب (2)

أوجد جميع نقاط التوقف للدوال الآتية وميز بينها



$$1) y = x^3 - 3x \quad 2) y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12 \quad 3) y^2 + x^2 + 2x - 4y = 0$$

أسئلة تقويم ذاتي (3)

أوجد مجالات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية

$$1. f(x) = 1 - 4x - x^2$$

$$2. f(x) = x/x - 2$$

$$3. f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$



الخلاصة

بعد نهاية الشرح للوحدة نأتي معا لنضع خلاصة للنقاط والقوانين الهامة في الوحدة

أولاً: احتوت الوحدة علي تعريف النهايات العظمي والصغرى

النهاية العظمي عرفت بأنها النقطة التي عندها قيمة الدالة اكبر من أي قيمة في الجوار،

والنهاية الصغرى عرفت بأنها النقطة التي عندها قيمة الدالة اصغر من أي قيمة في الجوار

و شرحنا النهايات بيانياً ثم بدأنا بالقسم الأول

عن الدالة التزايدية والدالة التناقصية وعرفنا كل منها الآتي

الدالة التزايدية هي الدالة التي عندها $f(x)$ دالة تزايدية عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث

$$0 < \delta < \epsilon \quad \text{لكل} \quad f(a - \delta) < f(a) < f(a + \delta)$$

الدالة التناقصية هي الدالة التي عندها $f(x)$ دالة تناقصية عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث

$$0 < \delta < \epsilon \quad \text{لكل} \quad f(a - \delta) > f(a) > f(a + \delta)$$

ومنها تعرفنا علي الحالة التي تكون فيها $f'(a) = 0$ وعرفناها بنقطة الرجوع وشرحنا

طريقة التميز بين نقاط الرجوع عن طريق المشتقة الثانية. إذا كانت إشارة المشتقة الثانية

موجبة عند نقطة الرجوع تسمى نقطة نهاية صغرى وإذا كانت سالبة فهي نقطة نهاية عظمي.

أما القسم الثاني شرحنا فيه التحدب والتقعر وتعريف الدالة المحدبة والدالة المقعرة وكيف يمكن

أن نميز بينها .

الدالة المحدبة هي الدالة التي $f(x)$ محدبة عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث يكون الوتر

الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ يقع فوق منحنى الدالة $f(x)$ لكل

$$0 < \delta < \epsilon \quad \text{حيث} \quad x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$$

الدالة المقعرة هي الدالة التي $f(x)$ مقعرة عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث يكون الوتر الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ يقع تحت منحنى الدالة $f(x)$ لكل $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ حيث $0 < \delta < \epsilon$

وتعرفنا علي نوع آخر من نقاط التوقف هي نقطة الانقلاب يكون عندها المشتقة الأولى تساوي صفر ولا تتغير الإشارة وبيان الدالة في هذه الفترة لا يتحذب ولا يتقعر والمشتقة الثانية تساوي صفر.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التالية بعنوان رسم الدوال وفي هذه الوحدة سوف نتعلم ونتعرف علي كيفية رسم الدوال بعد أن تكون قد تعرفت علي النقاط التي تمر بها الدالة وميزت بينها وتعرفت علي النهايات العظمي والصغرى.

وتحديد ما إذا كانت دالة فردية أو دالة زوجية واستنتاج خطوط تقارب الدالة وتحديد نقاط الرجوع والتميز بينها.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

a. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
 $f'(x) = -2x + 2$
 $f''(x) = -2$
 $\therefore f''(x) = -2 < 0$
 $f(x)$ منحنى مقعر

b. $f(x) = 1/x^2$
 $f'(x) = -2x/x^4 = -2/x^3$
 $f''(x) = 6x^2 / x^6 = 6/x^4$
 $x \neq 0$
 $f(x) > 0$
 $f(x)$ منحنى محدبة

تدريب (2)

1) $y = x^3 - 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y|_{x=1} = (1)^3 - 3(1) = -2, \quad y|_{x=-1} = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

نقطتا توقف. $(-1, 2)$ و $(1, -2)$ إذن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(1,-2)} = 6(1) > 0$$

أي أن النقطة $(1, -2)$ نقطة نهاية صغرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(-1,2)} = 6(-1) = -6 < 0$$

أي أن النقطة $(-1, 2)$ نقطة نهاية عظمى

$$2) \quad y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 12x^2 - 24x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 12(x^3 - x^2 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1, 2$$

$$y|_{x=0} = 12, \quad y|_{x=-1} = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 12(-1)^2 + 12 = 7$$

$$y|_{x=2} = 3(2)^4 - 4(2)^3 - 12(2)^2 + 12 = -20$$

أي أن نقاط التوقف هي $(0,12), (-1,7), (2,-20)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3x^2 - 2x - 2)$$

$$\text{نقطة نهاية عظمى } (0,2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(0,2)} = 12(-2) < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(-1,7)} = 12(3(-1)^2 - 2(-1) - 2) = 12 \times 3 > 0 \Rightarrow (-1,7) \text{ نقطة نهاية صغرى}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(2,-20)} = 12(3(2)^2 - 2(2) - 2) = 12 \times 6 > 0 \Rightarrow (2,-20) \text{ نقطة نهاية صغرى}$$

$$3) \quad y^2 + x^2 + 2x - 4y = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x + 2 - 4 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+2)}{2y-4} = \frac{-(x+1)}{y-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x=-1 \Rightarrow y^2 - 4y - 1 = 0 \Rightarrow y^2 + (-1)^2 - 2 - 4y = 0$$

$$y = 2 \pm \sqrt{5}$$

أي أن نقاط التوقف هي $(-1, 2 + \sqrt{5})$ و $(-1, 2 - \sqrt{5})$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y-2)(-1) + (x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)}{(y-2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(-1, 2+\sqrt{5})} = \frac{(2+\sqrt{5}-2)(-1) + (-1+1)(0)}{(2+\sqrt{5}-2)^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{(-1, 2-\sqrt{5})} = \frac{(2-\sqrt{5}-2)(-1) + (-1+1)(0)}{(2-\sqrt{5}-2)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

أي أن $(-1, 2 + \sqrt{5})$ نقطة نهاية عظمى بينما $(-1, 2 - \sqrt{5})$ نقطة نهاية صغرى .

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. a. $f(x)$ متزايدة علي الفترة $(-\infty, -2)$

$(5/3, \infty)$ والفترة

$f(x)$ متناقصة علي الفترة $(-2, 5/3)$

b. $f(x)$ متزايدة علي الفترة $(-\infty, -1)$ $(1, \infty)$

$f(x)$ متناقصة علي الفترة $(-1, 0)$ $(0, 1)$

تقويم ذاتي (2)

/1 لا توجد نقاط رجوع ولا قيم للنهايات

/2 نقاط الرجوع $f(-1) = -2$ نهاية عظمي

$f(1) =$ نهاية صغري

/3 نقاط الرجوع $f(0) = 0$, $2/3$ صغري

نهاية عظمي $f(2/3) = 4/27$

/4 لا توجد نقاط رجوع ولا قيم للنهايات

تقويم ذاتي (3)

/1 متزايد $(-\infty, 2)$

متناقص $(-2, \infty)$

/2 متناقصه في مجالها

/3 متناقص عند $(0, 1)$

متزايد عند $(1, \infty)$

مسرد المصطلحات

- **نهاية عظمى Maximum Limit**
هي النقطة التي عندها قيمة الدالة اكبر من أي قيمة لها في الجوار
- **نهاية صغرى Minimum Limit**
هي النقطة التي عندها قيمة الدالة اصغر من أي قيمة لها في الجوار
- **دالة تزايدية Increasing Function**
هي الدالة التي فيها $\epsilon > 0$ ونكتب $f(a - \delta) < f(a) < f(a + \delta)$
- **دالة تناقصية Decreasing Function**
هي الدالة التي عندها $f(a - \delta) > f(a) > f(a + \delta)$ لكل $0 < \delta < \epsilon$
- **نقطة رجوع Turning Point**
تسمى النقطة a نقطة رجوع للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(a) = 0$
- **نقطة انقلاب Inflection Point**
يكون عندها $\frac{dy}{dx}$ يساوي صفراً ولكنه لا يغير إشارته عند اجتياز تلك النقطة في الفترة $(a - \delta, a + \delta)$ وأيضاً $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندها يساوي الصفر
- **دالة محدبة Convex Function**
الدالة المحدبة هي الدالة التي $f(x)$ محدبة عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث يكون الوتر الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ يقع فوق منحنى الدالة $f(x)$ لكل $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ حيث $0 < \delta < \epsilon$
- **دالة مقعرة Concave Function**
الدالة المقعرة هي الدالة التي $f(x)$ مقعرة عند a إذا وجدت $\epsilon > 0$ بحيث يكون الوتر الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ يقع تحت منحنى الدالة $f(x)$ لكل $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ حيث $0 < \delta < \epsilon$

المراجع

أولا : المراجع العربية

- 1/ توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/ خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/ خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/ محمد عثمان المكي (1999)، الحسين الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/ فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا : المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W, **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
215	المقدمة
215	تمهيد
215	أهداف الوحدة
216	1. رسم الدوال
219	الخلاصة
219	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
220	إجابات التدريبات
222	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
225	المراجع

المقدمة

تمهيد

أخي الدارس بعد دراستك للدوال بأنواعها مثل الدالة الزوجية والفردية ومعرفتكم لمعادلة الدالة ونقاط التوقف مثل النهايات العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب كل هذه النقاط تساعدك في رسم الدوال وتحديد شكل المنحني كذلك تحتاج في هذه الوحدة لمراجعتكم للمشتقة الأولى والثانية، وبعد نهاية هذه الوحدة تجد نفسك قد تعلمت مهارات رسم الدوال واستنتج خطوط تقارب الدالة وتحديد نقاط التوقف والتميز بينها .

كما تجد بعض الأمثلة والتدريبات في داخل الوحدة وتجد أن رسم الدوال له أهمية في علم الحساب وفي تعريف شكل الدالة وتمثيلها مع المحورين x, y وهذه الوحدة ربطت بين وحدات المقرر، عليك أن تأخذ منها الفائدة والاستفادة القصوى. لكي تصل إلى تحقيق الأهداف الآتية:

أهداف الوحدة

يتوقع بعد دراستك لهذه الوحدة أن تكون قادرا علي أن:



- 1/ ترسم الدوال بيانيا.
- 2/ تتحقق من النقاط التي تمر بها الدالة.
- 3/ تحدد النقاط التي يمر بها المنحني.
- 4/ تميز بين نقاط التوقف.
- 5/ تستنتج خطوط تقارب الدالة.

1. رسم الدالة $y = f(x)$

في الوحدات السابقة من هذا المقرر تعرفت علي كيفية ايجاد نقاط الرجوع للدالة والنهايات العظمي والصغرى وشرحنا كيفية تحديد التقعر والتحدب رياضيا وبيانيا وكيف يمكن أن نوجد نقاط التوقف ونميز بين نقاط الرجوع ونقاط الانقلاب والنهايات العظمي والصغرى هذه المعلومات سوف تساعدك وتسهل لك رسم الدوال.

قبل أن نبدأ شرح رسم الدوال نحاول معا أن نجمع المعلومات الأساسية والهامة في رسم الدوال ونكتبها بالترتيب حتى يمكنك تطبيقها.

المعلومات هي كما يلي:

1/ تحديد بعض النقاط عددها n مثلا التي تمر بها الدالة وذلك بتعويض $x = x_i$ حيث $0 \leq i \leq n$ في معادلة الدالة ونتحصل علي مجموعة من النقاط.

2/ تحديد نقاط تقاطع المحورين قيم y عندما $x = 0$ وقيمة x (أو قيم) $y = 0$ عندما $y = 0$

3/ تحديد قيم x عندما تقترب x من $\pm \infty$ وقيم y عندما تقترب y من $\pm \infty$ (تسمى مثل هذه المستقيمات بخطوط التقارب).

4/ تماثل الدالة حول محور y دالة زوجية

5/ تضاد التماثل حول محور y دالة فردية

6/ نحسب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ والمشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$

7/ تحديد نقاط التوقف (نهايات عظمي - صغرى - نقطة انقلاب)

إذا ما حددنا كل هذه النقاط تكون قد درسنا شكل المنحني ولا يصعب علينا رسمه

◀ مثال

ارسم الدالة $y = \sin x$

الحل

لإيجاد بعض النقاط التي تمر بها الدالة $y = \sin x$

$$y\left(x = \pm \frac{(2n+1)}{2}\pi\right) = \sin\left(\pm \frac{(2n+1)}{2}\pi\right) = \pm 1$$

عندما $n > 0$ وزوجية تكون قيمة $y = +1$ و عندما n فردية تكون قيمة $y = -1$ أي

أن منحنى الدالة $y = \sin x$ يمر بالنقاط $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right)$, $\left(\frac{5}{2}\pi, 1\right)$, ...

وعندما $n < 0$ و $|n|$ فردي تكون قيمة $y = +1$ و عندما $|n|$ زوجي تكون قيمة $y = -1$ أي

أن منحنى الدالة يمر بالنقاط $\left(-\frac{1}{2}\pi, -1\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\pi, 1\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\pi, -1\right)$, ...

قيمة الدالة تتراوح بين -1 و $+1$

وبما أن $y = \sin x$ دالة فردية فإن شكلها يضاد التماثل حول محور y ونقاط تقاطعها

مع محور x نجدها بوضع $y = 0$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\dots(0, -2\pi), (0, -\pi), (0, 0), (0, \pi), (0, 2\pi) \dots$$

نقاط التوقف :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{(2n+1)}{2}\pi \Rightarrow y = \pm 1$$

وللتميز بينها نوجد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow x \in \left\{ \dots, -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$$

أي أن نقاط النهاية العظمى هي

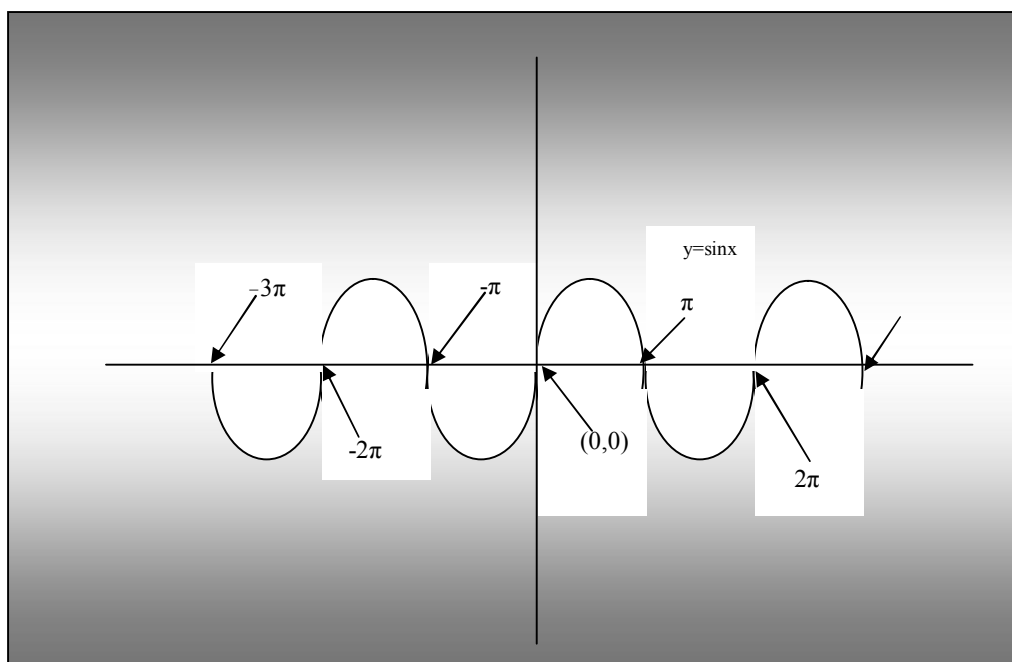
$$\dots, \left(-\frac{3}{2}\pi, 1\right), \left(\frac{1}{2}\pi, 1\right), \left(\frac{5}{2}\pi, 1\right), \dots$$

ونقاط النهاية الصغرى نجدها عندما

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow x \in \left\{ \dots, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots \right\}$$

أي أن نقاط النهاية الصغرى هي

$$\left(-\frac{5}{2}\pi, -1\right), \left(-\frac{1}{2}\pi, -1\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -1\right)$$



تدريب (1)

أرسم الدوال الآتية:



1. $y = \cos x$

2. $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

أسئلة تقويم ذاتي (1)

ارسم الدوال الآتية:



1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ قيم x حقيقية

2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ $x \in (-1, 5)$

3. $f(x) = 5x - 3x^{5/3}$ قيم x حقيقية

الخلاصة

اشتملت الوحدة علي تعلم مهارات رسم الدوال وفيها تمت مراجعة القوانين السابقة والتي بها يمكن أن نصل إلى رسم الدوال.

تعرفت علي أن معرفة تضاد تماثل الدالة حول محور y يوضح أن الدالة فردية وتماثل الدالة حول محور y يبين أن الدالة زوجية وتحديد نقاط التوقف وهي النهاية العظمي تعرف بأنها النقطة التي عندها قيمة الدالة اكبر من أي قيمة في الجوار والنهاية الصغرى وتعرف بأنها النقطة التي عندها قيمة الدالة اصغر من أي قيمة في الجوار ونقطة الرجوع وهي النقطة التي فيها $f'(a=0)$ ونقطة الانقلاب وهي النقطة التي فيها $f''(a=0)$ وشرحنا كيف يمكن تحديد نقاط تقاطع منحنى المحورين عند قيم y عند $x=0$ وقيم x عند $y=0$ وتحديد خطوط التقارب عند قيم x عندما y تقترب من $\pm\infty$ وقيم y عندما x تقترب من $\pm\infty$ المعينة وتحديد نقاط التوقف كل هذه النقاط سهلت عليك رسم الدالة.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التالية هي الوحدة الثالثة عشر والأخيرة في مقرر الحسابان (1). وفيها يتم شرح النظريات الهامة في هذا العلم لابد لك أن تتعرف عليها، وعلي طرق استخدامها وفوائدها منها متسلسلة تيلور وقاعدة لوبيتال ولها أهمية في إيجاد قيم النهايات غير المعينة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$1 - y = \cos x$$

هذه الدالة زوجية أي أن شكلها يتماثل حول محور y ونقاط تقاطعها مع محور x عند

$$x = \pm \frac{2n+1}{2}\pi \quad \text{ونقطة تقاطعها مع محور } y \text{ عند } y = 1 \text{ ونقاط التوقف.}$$

أي أن نقاط التوقف هي

$$\dots(-2\pi, 1), (-\pi, -1), (0, 1), (\pi, -1), (2\pi, 1) \dots$$

وللتميز بينها

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} < 0$$

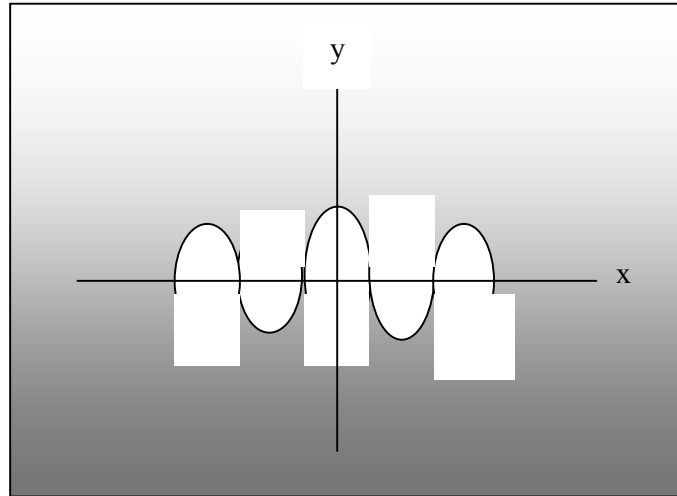
النهاية العظمى عند النقاط

$$\dots(-2\pi, 1), (0, 1), (2\pi, 1) \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} > 0$$

النهاية الصغرى عند النقاط

$$\dots, (-\pi, -1), (\pi, -1), \dots$$



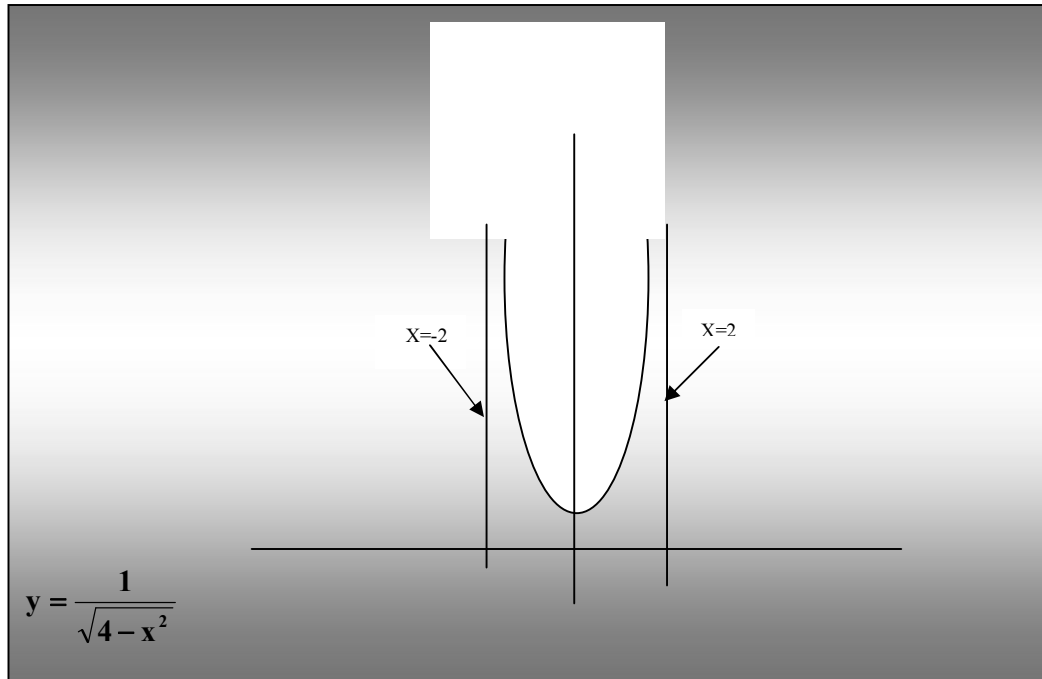
$$2 - y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

الدالة $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ دالة زوجية فهي متماثلة حول محور y وتقطع محور y عند $y = \frac{1}{2}$

وفترة تعريفها هي الفترة المفتوحة $(-2, 2)$ وعندما تقترب x من 2 فإن y تقترب من $+\infty$ وعندما تقترب x من -2 فإن y تقترب من $+\infty$ أيضا أي أن المستقيمين $x = \pm 2$ يمثلان خطى تقارب للدالة ولإيجاد نقاط التوقف

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(4 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0$$

وواضح أنها نقطة نهاية صغرى (لأن y تتخذ قيما اكبر من الصفر دائما)



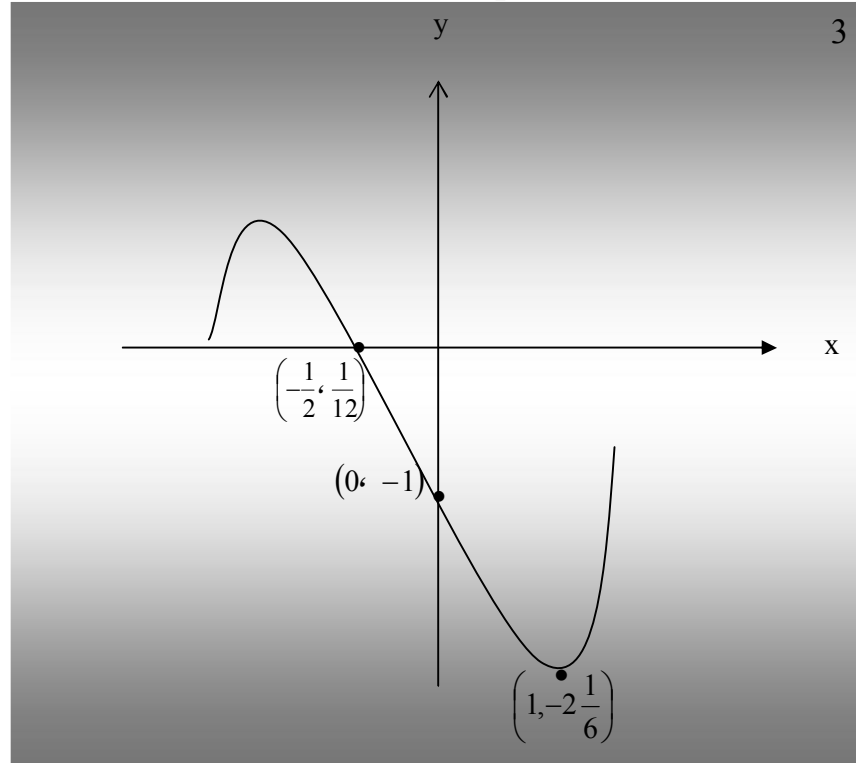
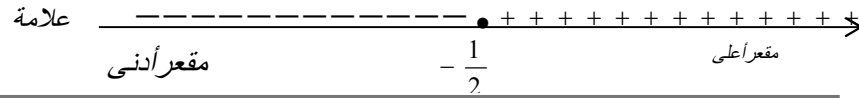
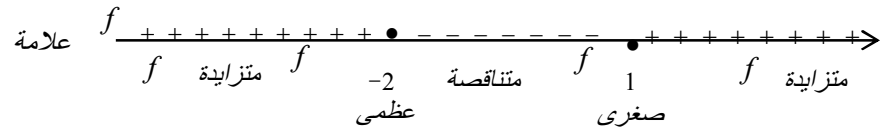
إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$

هذه الدالة كثيرة الحدود

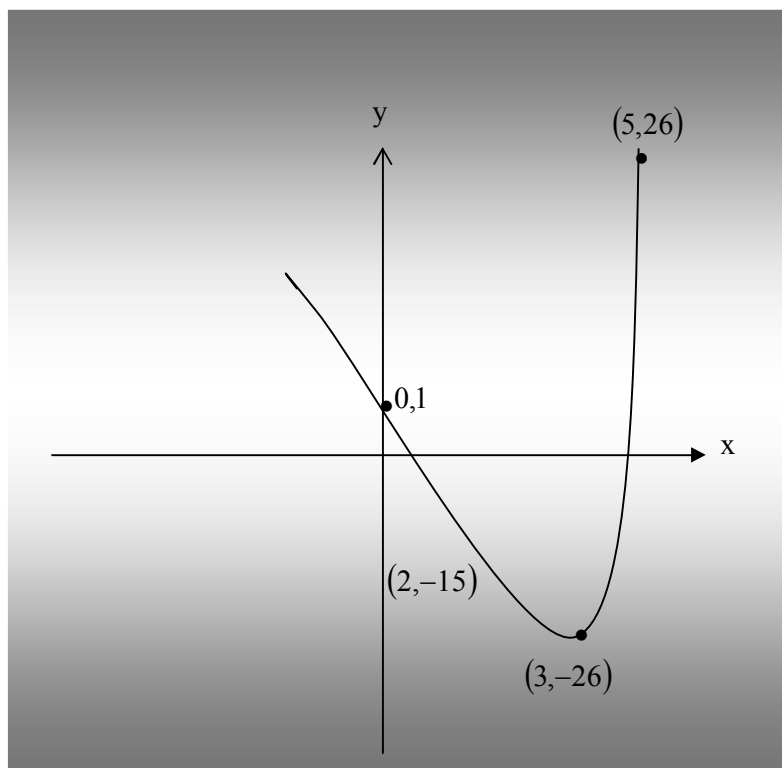
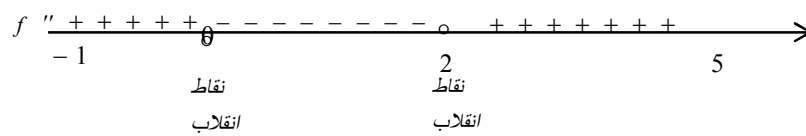
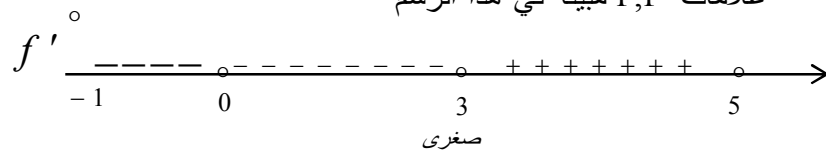
علامات المشتقة الأولى والمشتقة الثانية كما في الرسم



$$2. f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$$

عند $x = 0$ نقطة نهاية for $x \in (-1, 5)$

علامات f', f'' مبينه في هذا الرسم

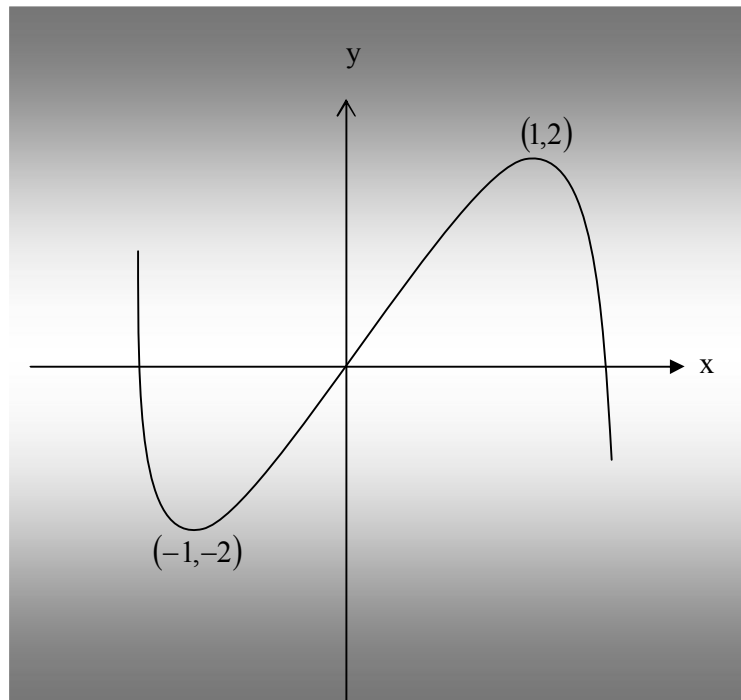
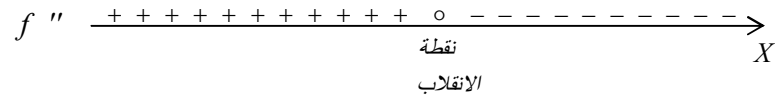
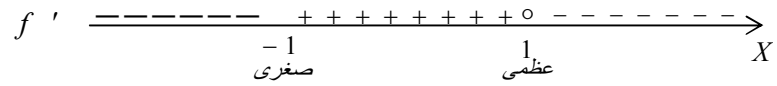


3. قيمة حقيقية x قيم $f(x) = 5x - 3x^5/3$

هذه دالة فردية

$$f(-x) = -f(x)$$

علامات المشتقة الاولى f' والمشتقة الثانية f'' كما مبين في الرسم أدناه



المراجع

أولا : المراجع العربية

1. توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
2. خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
3. خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- محمد عثمان المكي (1999)، الحساب الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا : المراجع الأجنبية

- 1/ Caunt, G, W , **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K.
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N , **Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
229	المقدمة
229	تمهيد
229	أهداف الوحدة
230	1. متسلسلة تيلور
233	2. قاعد لوبيتال
235	3. نهايات القيم غير المعينة
237	الخلاصة
238	إجابات التدريبات
240	إجابات أسئلة التقويم الذاتي
241	مسرد المصطلحات
242	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس بحمد الله تعالى وتوفيقه وصلت إلى نهاية مقرر الحساب (1) و الآن أنت علي أبواب الوحدة الثالثة عشر وهي عن النظريات الهامة في علم الحساب والتي لها استخدامات خاصة في إيجاد قيم النهايات

ومن هذه النظريات متسلسلة تيلور وتستخدم لإثبات مبرهنة اويلر وقاعدة لوبيتال وهي قاعدة هامة جدا في علم الحساب لأنها تمكنك من إيجاد قيم النهايات غير المعينة والتي تأخذ صور 1^∞ , 0^0 , ∞^0 عند التعويض المباشر.

وهذه الوحدة توضح كيفية تمثيل الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق من أي رتبة بمتسلسلة لا نهائية في قوة $(x-a)$ الموجبة حيث a ثابت

وتجد أن هذه الوحدة تربطك مع الوحدات السابقة مثل الدوال المستمرة والدالة الأسية والنهايات وتجد بعض الأمثلة والتدريبات وأسئلة التقويم الذاتي، عليك بالاهتمام بمعرفة وفهم وتطبيق هذه النظريات لان لها امتداد في السنوات القادمة.

عليك الآن أن تقيم لنا هذه الوحدة وبها تكون أكملت مقرر الحساب (1) وحتى تستعد إلى مقرر الحساب (2) وفقك الله.

أهداف الوحدة

ينتظر منك بعد أن تكمل دراسة هذه الوحدة أن تكون قادرا علي أن:

- 1/ توضّح كيفية تمثيل الدالة المستمرة والقابلة للاشتقاق.
- 2/ تتعرف علي متسلسلة تيلور واستخداماتها ومفكوك ماكلورين.
- 3/ تتعرف علي معادلة اويلر.
- 4/ تشرح قاعدة لوبيتال وتبين استخداماتها.
- 5/ تحسب نهايات القيم غير المعينة.



لقد وصلنا إلى نهاية المقرر والوحدة الثالثة عشر والتي تطرح فيها نظريات لها أهميتها في علم الحسبان وسندرس كيفية تمثيل الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق من أي رتبة بمتسلسلة لا نهائية في قوة $(x-a)$ الموجبة حيث (a) ثابت وهذه المتسلسلة تسمى بـ

1. متسلسلة تيلور

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق لجميع الرتب في هذه الفترة، فإن لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \quad a < c < x$$

وفي الحالة الخاصة $a = 0$ فإن مبرهنة تيلور تتخذ القيمة

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \quad 0 < c < x$$

وتسمى هذه المتسلسلة بمفكوك مكلورين وهي حالة خاصة من مفكوك تيلور .

◀ أمثلة:

1/ أوجد مفكوك مكلورين للدالة $f(x) = \sin x$

الحل

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

وهكذا نجد

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^{(n)} \sin x$$

$$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$$

أي أن

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

2/ أوجد مفكوك مكلورين للدالة $f(x) = \cos x$

الحل

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0$$

وهكذا نجد

$$(\cos x)^{2n} = (-1)^{(n)} \cos x$$

$$(\cos x)^{2n+1} = (-1)^{(n)} \sin x$$

أي أن

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

و الآن من تعريف الدالة الأسية نجد أن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

(وهو مفكوك ماكلورين للدالة الأسية)

وبوضع ix بدلا عن x (حيث $i = \sqrt{-1}$) نجد

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

ولكن أي أن $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} \dots$$

وبفصل الجزء الحقيقي عن الخيالي واستعمال النتيجة المثالين أعلاه نجد أن

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \dots(1)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة اويلر Euler وإذا وضعنا $(-ix)$ بدلا عن ix نجد

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \dots(2)$$

أي أن e^{-ix} هو مرافق e^{ix} .

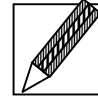
بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

وبطرح المعادلتين (1) و (2) نجد

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

تدريب (1)



1/ أوجد مفكوك تيلور للدالة $f(x) = \tan x$ حول $x = \pi$

2/ أوجد مفكوك مكلورين للدالة $y = \ln(x+1)$

3/ أوجد مفكوك مكلورين للدالة $y = e^x \sin x$

أسئلة التقويم (1)



1/ أوجد مفكوك تيلور للدالة الآتية

$$f(x) = \cos x \text{ عند } x = 2\pi$$

2/ أوجد مفكوك مكلورين في الدالة الآتية

$$f(x) = e^x$$

3/ برهن نظرية تيلور من هذه الدالة

2. قاعدة لوبيتال

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين تحققان $g(a) = f(a) = 0$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* ملاحظة قاعدة لوبيتال أيضا صحيحة إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ تحققان $f(x) \rightarrow \infty$ و

$g(x) \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow a$ وذلك لأن $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$ و $\frac{1}{g(x)} \rightarrow 0$ أي أن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$$

◀ أمثلة

1/ أوجد قيمة النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

بتعويض $x = 0$ نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0}$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\sin x)}{1} = \sin 0 = 0$$

$$2/ \text{ أوجد قيمة النهاية } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$$

بتعويض $x = 2$ نجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{32 - 32}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال والتعويض نجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^4}{2x} = \frac{0}{0}$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى والتعويض نجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5 \times 4x^3}{2} = \frac{20(2^3)}{2} = 80$$

3. نهايات القيم غير المعينة التي على الصور ∞^0 , 0^0 , 1^∞

نحصل على قيم هذه النهايات

أولاً: بأخذ اللوغاريتم الطبيعي .

ثانياً: إيجاد قيمة النهاية

ثالثاً: استخدام الدالة الأسية لإيجاد النهاية المطلوبة .

➤ مثال

أوجد قيمة النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x}$$

بتعويض $x = 0$ نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x} = 0^0$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي نجد

$$y = (\sin x)^{\tan x} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{\tan x} = \tan x \ln \sin x$$

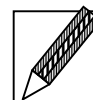
$$\therefore \ln y = \frac{\ln \sin x}{\cot x}$$

وبأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-\cos x \sin x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = 1$$

تدريب (2)



أوجد قيم النهايات الآتية مستخدماً قاعدة لوبيتال:

$$1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{\sin \pi x}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



باستخدام قاعدة لوبيتال أوجد النهايات الآتية

$$1) \lim_{x \leftarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \sqrt{x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

الخلاصة

نأتي معا لوضع تلخيص لأهم أجزاء هذه الوحدة. فيها شرحنا أهم نظريات الحساب والتي لها استخدامات في إيجاد قيم النهايات من هذه النظريات

- ♦ **نظرية تيلور:** وهي نظرية تشرح كيفية تمثيل الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق من أي رتبة بمتسلسلة لا نهاية في قوي $(x-a)$ الموجبة حيث a ثابت (متسلسلة تيلور)
 - ♦ **مفكوك ماكلورين:** وهو حالة خاصة من مفكوك تيلور
 - ♦ **مبرهنة اويلر او معادلة اويلر:** عند وضع $(-ix)$ بدلا عن (ix) في مفكوك ماكلورين
 - ♦ **قاعدة لوبيتال:** وهي قاعدة بين دالتين متصلتين
- لنكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين تحققان $g(a)=f(a)=0$ فان

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وشرحنا أهميتها في إيجاد قيم النهايات غير المعينة التي تأخذ صور ∞^0 , 0^0 , 1^∞ بعد ذلك تعرفنا علي نهايات القيم الغير معينة وشرحنا كيفية إيجاد مثل هذه القيم بأخذ اللوغريثم الطبيعي ثم إيجاد قيمة النهاية واستخدام الدالة الأسية لإيجاد النهاية.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

الحل

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f(\pi) = \tan \pi = 0$$

$$1) f'(x) = \sec^2 x \Rightarrow f'(\pi) = \sec^2 \pi = 1$$

$$f''(x) = 2 \sec^2 x \tan x \Rightarrow f''(\pi) = 2 \sec^2 \pi \tan \pi = 0$$

$$f'''(x) = 2(\sec^4 x + 2 \sec^2 x \tan^2 x) \Rightarrow f'''(\pi) = 2$$

$$f(x) = \tan x = (x - \pi) + \frac{2(x - \pi)^3}{3!} + \dots$$

الحل

$$2) f(x) = \ln(x + 1) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6$$

$$\therefore f(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \dots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

الحل

$$3) f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x + e^x \cos x = 2e^x \cos x \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f(x) = x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots$$

تدريب (2)

الحل

$$1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$$

بالتعويض $x = 0$ نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \frac{0}{0}$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{1} = 1$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

بتعويض $x = 0$ نجد قيمة النهاية $\frac{0}{0}$ وباستخدام قاعدة لوبيتال نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0}$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال للمرة الثانية نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{\sin \pi x}$$

بتعويض $x = 0$ نجد قيمة النهاية $\frac{0}{0}$ وباستخدام قاعدة لوبيتال نجد

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{\sin \pi x} = \frac{2}{(x)(\pi \cos \pi x)} = \frac{2}{-\pi}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3 \times 3^2}{2 \times 3} = \frac{9}{2}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

$$1) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (x - 2\pi)^{2n}$$

$$2) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3. ارجع إلي البرهان في داخل الوحدة .

تقويم ذاتي (2)

$$1) \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \frac{0}{\cos 0} = 0$$

$$3) \left(\frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \right)$$

مسرد المصطلحات

- قاعدة لوبيتال **L' Hospital rule**

هي قاعدة تستخدم لإيجاد قيم النهايات غير المعينة وتكتب في صورة

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- متسلسلة تيلور **Taylor Series**

هي متسلسلة تدرس كيفية تمثيل الدالة المستمرة والقابلة للاشتقاق لجميع الرتب في الفترة

(a,b) لجميع قيم x

- مفكوك ماكلورين **Maclorin**

هي حالة خاصة من متسلسلة تيلور

المراجع

أولا : المراجع العربية

- 1/توماس (1968) ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.
- 2/خالد قاسم سمور (1999) ، الرياضيات والهندسة التحليلية، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 3/خالد قاسم سمور (2002) ، أساسيات التفاضل والتكامل ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.
- 4/محمد عثمان المكي (1999)، الحسبان الأولى ، مطبعة جامعة الخرطوم.
- 5/فرانك أبرز (1977)، حساب التفاضل والتكامل ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا: المراجع الأجنبية

- 1/Caunt, G, W, **Elementary Calculus**, copy right by Carndon , Oxford. U.K
- 2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa
- 3/ Piskunov, N ,**Differential and Integral Calculus**, translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.
- 4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada

رقم الايداع: 2004-144