

التمرين الأول:

أذكر صحة أو خطأ ما يلي مع التعليل :

(1) العدد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل مساحة إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a ; b]$.

(2) التكامل $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ يعطى بالعبارة : $\left[\frac{-1}{x} \right]_{-2}^2 = -1$

(3) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

(4) إذا كانت f دالة مستمرة و تحقق $f(x) > 1$ على المجال $[0 ; 1]$ فإن : $\int_0^1 f(x) dx > 1$

(5) $\int_1^2 (x^2 + 2) dx > \int_1^2 x^2 dx$

(6) $\int_0^1 (x^4 + x^2 + 1) dx > 0$

(7) f دالة مستمرة على المجال $[1 ; 4]$ $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$

(8) $a - b \leq \int_a^b \sin x dx \leq b - a$

(9) $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^5 dx = 0$

(10) $\int_{-a}^a x^4 dx = 2 \int_0^a x^4 dx$

(11) $\int_{\pi}^{3\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx$

(12) $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$

التمرين الثاني:

أحسب التكاملات التالية :

4 . $\int_1^2 x^2 e^x dx$

3 . $\int_0^1 x e^x dx$

2 . $\int_1^3 \frac{dt}{t+1}$

1 . $\int_{-3}^3 x e^2 dx$

8 . $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{e^x + 5} dx$

7 . $\int_1^2 \frac{e^x + 1}{(e^x + x)^2} dx$

6 . $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

5 . $\int_0^1 (x-3) e^{2x} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 e^{-t} dt & . 11 & \int_0^1 (2-t) e^t dt & . 10 & \int_0^2 x e^{(x^2+1)} dx & . 9 \\ \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx & . 14 & \int_1^2 (4x+1+\frac{2}{e^x-1}) dx & . 13 & \int_1^2 (x+1) e^{(x^2+2x)} dx & . 12 \\ \int_{-2}^1 e^x (e^x-1) dx & . 15 \end{aligned}$$

التمرين الثالث:

أحسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x (\ln x)^2 dx & . 3 & \int_1^e x^2 \ln x^2 dx & . 2 & \int_e^{2e} x^3 \ln x dx & . 1 \\ \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx & . 6 & \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx & . 5 & \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t} dt & . 4 \\ \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx & . 7 \end{aligned}$$

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n = \int_{n-1}^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$

1. أحسب U_n بدلالة n .
2. بين أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول U_1 .
3. نسمي S_n مجموع n حدا الأولى للمتتالية (U_n) ، بين أن : $S_n = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$.
4. هل المجموع S_n يقبل نهاية عند $+\infty$.

التمرين الخامس:

1. برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n يوجد التكامل : $2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$

نضع $U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$ (لا يطلب حساب U_n)

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 0$ و $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

إستنتج أن (U_n) متقاربة و ما هي نهايتها .