
الوحدة الثانية
مقاييس النزعة المركزية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
مقدمة	57
تمهيد	57
أهداف الوحدة	58
1. الوسط الحسابي	59
1.1 تعريف الوسط الحسابي	59
2.1 طريقة حسابه	59
3.1 مزايا وعيوب الوسط الحسابي	65
2. الوسيط	66
1.2 تعريف الوسيط	66
2.2 طريقة حسابه	66
3.2 مزايا وعيوب الوسيط	73
3. المنوال	74
1.3 تعريف المنوال	74
2.3 طريقة حساب المنوال	74
3.3 مزايا وعيوب المنوال	78
4. الوسط الهندسي	80
5. الوسط التوافقي	82
6. الأهمية النسبية للمتوسطات المختلفة	83

الموضوع	الصفحة
الخلاصة	85
لمحة مسبقة عن المقرر	85
إجابات التدريبات	86
مسرد المصطلحات	87

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلي هذه الوحدة وهي الوحدة الثانية في هذا المقرر، وقد انتهينا في الوحدة السابقة من طرق جمع البيانات وعرضها جدولياً. الآن نريد أن نبحث عن مقياس يكون معبراًً عن الظاهرة موضوع الدراسة لها. أي نريد الحصول على قيمة واحدة تعبر عن جميع القيم. فمتوسط الدخل – مثلاً – في بلد ما يعبر عن جميع الدخول في هذا البلد،. أي يعبر عن المستوى العام للدخل. كذلك فإن متوسط طول الطلاب في الفصل يعبر عن جميع الأطوال، أي عن المستوى العام لطول الطلاب السائد في الفصل.

ومن خصائص البيانات – أي بيانات– أن لها (نزعة) أو ميلاً لأن (تتركز) حول قيمة معينة متوسطة. وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية. ففي مثال الطول نجد أن معظم أطوال الطلاب في الفصل تدور أو تتركز حول قيمة، هذه القيمة هي متوسط الطول.

وتتحدث هذه الوحدة عن مقاييس النزعة المركزية وهي الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والوسط الهندسي والوسط التوافقي. حيث قمنا بتعريف لكل من هذه المقاييس ووضحنا كيفية حساب كل مقياس وأخيراً أوضحنا الأهمية النسبية لهذه المتوسطات أرجو أن تكون وحدة مفيدة وان تستفيد من المعلومات الواردة فيها مع خالص تمنياتنا بالتوفيق والنجاح.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن

1. تعرف الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والوسط الهندسي والوسط التوافقي.
2. تحسب قيمة المتوسطات من البيانات المبوبة وغير المبوبة.
3. تعدد مزايا وعيوب كل من الوسيط والوسط الحسابي والمنوال.
4. تذكر الأهمية النسبية للمتوسطات المختلفة.

1. الوسط الحسابي Arithmetic Mean

1.1 تعريف الوسط الحسابي

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة، لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الأصلية. وبالتالي فإن الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها.

2.1 طريقة حسابه

أولاً في البيانات غير المبوبة

كما ذكر في التعريف فإن الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يتم حسابه بجمع كل القيم ثم القسمة على عددها. أي أن:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

مثال (1)

إذا كانت أعمار أربعة أشخاص هي: 8 سنوات، 12 سنة ، 9 سنوات ، 11 سنة أحسب الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص.

الحل

بما أن $\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

إذاً $\text{الوسط الحسابي} = \frac{8+12+9+11}{4} = \frac{40}{4} = 10\ years$

وللانتقال من مجرد مثال محدد إلى الحالة أو القاعدة العامة لحساب الوسط الحسابي، فإنه يمكن التعبير عن ذلك باستخدام الرموز. ففي المثال السابق إذا فرض أن القيم الأربع هي:

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

وإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز $\overline{X}$ (وتقرأ X- *bar*) فإن قيمته حسب التعريف هي:

الوسط الحسابي = $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$

كذلك يمكن الانتقال من حالة أربع قيم إلى الحالة العامة، حيث يكون لدينا أي عدد من القيم. فإذا فرض أن عدد القيم يساوي N وأن القيم هي:

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_N$$

فإن الوسط الحسابي هو:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_N}{N}$$

ويلاحظ أن كتابة الوسط الحسابي بالشكل السابق يأخذ وقتاً وحيزاً أكبر، بينما الاتجاه دائماً إلى الاختصار في التعبير. لذا فإننا سوف نستخدم رمزاً ليعبر عن مجموع القيم، هذا الرمز هو $\sum X$ (ويقرأ X *summation*). وبذلك فإن الوسط الحسابي يأخذ الصورة المبسطة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

حيث $\overline{X}$ تعبر عن الوسط الحسابي ، $\sum_{i=1}^{n} X_i$ تعبر عن مجموع القيم ، N هي عدد القيم.

نشاط



إذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة أشخاص 4000 دينار فما هو مجموع دخولهم؟

مثال (2)

البيانات التالية تمثل درجات بعض الطلاب في إحدى المواد 81، 74، 92، 67، 86، أحسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في هذه المادة.

الحل

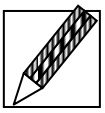
في هذه الحالة فإن (عدد الطلاب) هو: N = 5

والقيم هي: $X_1 = 81,\ X_2 = 74, X_3 = 92, X_4 = 67, X_5 = 86$

وبالتالي فإن الوسط الحسابي هو:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{81+74+92+67+86}{5} = \frac{400}{5} = 80$$

تدريب (1)



إذا كانت أوزان خمسة أشخاص هي: 60، 70، 30، 40 أحسب الوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الأشخاص.

ثانياً في البيانات المبوبة

في المثال رقم (1) كان لدينا شخص واحد عمره 8 سنوات، وشخص واحد عمره 12 سنة، وآخر 9 سنوات، ورابع 11سنة. أي أن كل عمر من هذه الأعمار تكرر مرة واحدة.

ولكن ماذا يكون الوضع لو كان هناك أكثر من شخص واحد أعمارهم 8 سنوات، وأكثر من شخص واحد أعمارهم 12 سنة،...وهكذا ؟.

في هذه الحالة نأخذ المثال التالي:

مثال (3)

افترض أن هناك 3 أشخاص عمر كل منهم 8 سنوات، 5 أشخاص عمر كل منهم 9 سنوات، 4 عمر كل منهم 11 سنة، 2 عمر كل منهما 12 سنة، كما في الجدول التالي:

جدول رقم (1)

العمر	عدد الأشخاص
8	3
9	5
11	4
12	2

أحسب الوسط الحسابي للعمر.

الحل

لحساب الوسط الحسابي للعمر فإنه يجب أولاً حساب مجموع الأعمار، ثم نقسم هذا المجموع على عدد الأشخاص (والذين يبلغ عددهم في هذا المثال 3 + 5 +4 +2 = 14 شخصاً).

ويلاحظ أنه للحصول على مجموع الأعمار يجب ضرب كل عمر من الأعمار المختلفة في عدد الأشخاص المقابل له في الجدول. فالأشخاص الثلاثة الذين يبلغ عمر كل منهم 8 سنوات، يكون مجموع أعمارهم يساوي 3 × 8 = 24 سنة، والخمسة أشخاص التالين لهم أعمارهم يساوي 5 × 9 = 45 سنة،... وهكذا فإننا نحصل على مجموع الأعمار بضرب القيم في خانة العمر في الأرقام المقابلة لها في خانة التكرار (عدد الأشخاص) ثم نجمع حواصل الضرب.

فإذا رمزنا للعمر بالرمز X، ولعدد الأشخاص أو التكرار بالرمز *f*، فإن خطوات الحل يمكن تبسيطها كما هو مبين في الجدول التالي:

جدول رقم (2)

العمر (X)	التكرار (f)	العمر×التكرار (f X)
8	3	3 × 8 = 24
9	5	5 × 9 = 45

11	**4**	**4 × 11 = 44**
12	**2**	**2 × 12 = 24**
المجموع	$\sum f = 14$	$\sum fX = 137$

ومن الجدول السابق يتضح أن:

عدد الأشخاص= $\sum f$ = 14 شخصاً ، ومجموع الأعمار = $\sum fX$ = 137 سنة.

وبالتالي فإن الوسط الحسابي هو: $\overline{X} = \frac{137}{14} = 9.786 \ years$

أي أن معادلة الوسط الحسابي تصبح في هذه الحالة: $\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f}$

حيث $\sum fX$ هي مجموع القيم. ونحصل عليهما بضرب القيم في التكرارات ثم أخذ المجموع.

؛ $\sum f$ هي عدد القيم (أو مجموع التكرارات).

وبالتالي فإن المعنى لم يتغير، وهو أن الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها.

ولنتقدم خطوة أخرى، ونأخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات.

مثال (4)

الجدول التالي يمثل توزيع مائة شخص حسب فئات الوزن (بالكيلوجرام).

جدول رقم (3)

فئات الوزن	عدد الأشخاص
30 –	**9**
40 –	**15**
50–	**22**
60 –	**25**
70 –	**18**
80–90	**11**
المجموع	100

والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن.

الحل

يختلف هذا المثال عن المثال السابق رقم [3] في أن هذا المثال يحتوي على فئات للوزن بدلاً عن قيم محددة. وكما نعلم فإن القاعدة في هذه الحالة هي افتراض أن كل المفردات التي تقع في فئة واحدة متساوية في القيمة، وأن قيمتها تساوي مركز الفئة التي تقع بها.

فمثلاً في الفئة الأولى: يفترض أن وزن كل شخص من الأشخاص التسعة يساوي 35 كجم (مركز الفئة : $\frac{30+40}{2}=35$).

وفي الفئة الثانية : نفترض أن وزن كل شخص من الأشخاص ألـ 15 يساوي 45 كجم (مركز الفئة: $\frac{40+50}{2}=45$) .. وهكذا..

وبالتالي فإن خطوات الحل تكون كما يلي:

1. حساب مراكز الفئات. وسوف نرمز لها بالرمز X.
2. نضرب مركز كل فئة X في تكرار هذه الفئة f ، أي نكون عموداً لحاصل الضرب fX .

كما في الجدول التالي

جدول رقم (4)

فئات الوزن	التكرار (f)	مراكز الفئات(X)	fX
30–	9	35	315
40–	15	45	675
50–	22	55	1210
60–	25	65	1625
70–	18	75	1350
80–90	11	85	935
المجموع	100		6140

3. نوجد قيمة الوسط الحسابي من العلاقة:

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{6410}{100} = 64.1\ kgs$$

3.1 مزايا وعيوب الوسط الحسابي

المزايا

1. يمتاز بالسهولة والبساطة في العمليات الحسابية.
2. تدخل جميع القيم في حسابه.

العيوب

1. يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة. والقيمة الشاذة هي التي تكون إما كبيرة جداً أو صغيرة جداً بالنسبة لمعظم القيم وبالتالي فهي ترفع قيمة الوسط أو تخفض قيمته عن معظم القيم.
2. لا يمكن إيجاده بيانيا ً(عن طريق الرسم).
3. لا يمكن إيجاده من القيم الوصفية.

أسئلة تقويم ذاتي



1. عرف الوسط الحسابي؟
2. كيف يتم حساب الوسط لمجموعة القيم؟
3. عدد مزايا وعيوب الوسط الحسابي؟

2. الوسيط The Median

1.2 تعريف الوسيط

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً.

يرمز للوسيط بالرمز $\tilde{X}$ ، وتقرأ (X- *wave*) .

2.2 طريقة حساب الوسيط

أولاً من البيانات غير المبوبة

استنتاجاً من التعريف السابق للوسيط فإن أول ما يجب عمله لحساب قيمة الوسيط هو ترتيب القيم ترتيبا تصاعدياً أو تنازلياً، ثم أخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط. هذا بفرض أن عدد القيم فردي. أما إذا كان عدد القيم زوجياً فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوماً على 2.

مثال (5)

أحسب الوسيط للأوزان التالية لبعض المرضى: 52 58 50 63 55

الحل

نرتب أولا القيم تصاعدياً أو تنازلياً.

تصاعدياً 50, 52 , 55, 58, 63

نلاحظ أن القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في الترتيب وأن قيمتها تساوي 55 كيلوجرام.

وبهذا فإن $\tilde{X}=55\ kg$.

وسوف نصل لنفس النتيجة إذا كان الترتيب تنازلياً.

ومن المثال السابق يلاحظ أن هناك فرقاً بين ترتيب الوسيط وقيمة الوسيط. ففي المثال نجد أن: ترتيب الوسيط = 3 ، بينما قيمة الوسيط = 55 كيلوجرام.

وعموماً فإن ترتيب الوسيط هو الذي يحدد لنا قيمته. ويمكن حساب ترتيب الوسيط من العلاقة:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{عدد القيم} + 1}{2}$$

أو:

$$\boxed{\text{ترتيب الوسيط} = \frac{n+1}{2}}$$

ففي المثال السابق كان $n=5$؛ ∴ ترتيب الوسيط $=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$

ثم نبحث في القيم بعد ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً) عن القيمة التي ترتيبها 3، فتكون هي قيمة الوسيط (تساوي 55 كجم في المثال).

مثال (6)

أحسب الوسيط للأوزان التالية لبعض المرضى: 58 52 50 63 57 55

الحل

1. نرتب القيم أولا ترتيباً تصاعدياً كما يلي: 50, 52, 55, 57, 58, 63

2- نحسب ترتيب الوسيط. وهنا نلاحظ أن هناك قيمتين في المنتصف. ويكون ترتيب الأولى هو $\frac{n}{2}$ ، والثانية $\frac{n}{2}+1$. أي أن:

ترتيب القيمة الأولى = $\frac{n+1}{2}$**، ترتيب القيمة الثانية=** $\frac{n}{2}+1$

ومن المثال:

ترتيب القيمة الأولى $=\frac{6}{2}=3=$ ، وترتيب القيمة الثانية $=\frac{6}{2}+1=3+1=4=$

أي أن قيمة الوسيط بين القيمتين الثالثة والرابعة. وبالتالي فإن الوسيطان هما 55، 57 .

ويكون الوسيط هو:

$$\tilde{X}=\frac{\tilde{X}_1+\tilde{X}_2}{2}=\frac{55+57}{2}=56kg$$

تدريب (2)



أحسب الوسيط للأطوال التالية لبعض الطلاب:

187،165،154،169،180

ثانياً من البيانات المبوبة ذات الفئات

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات بطريقتين إما حسابيا أو بيانياً (عن طريق الرسم) كما يلي:

أ) حسابياً

وتكون خطوات الحل بالطريقة الحسابية كما يلي:

1. تكوين الجدول المتجمع الصاعد من الجدول التكراري البسيط (هذه الخطوة تناظر ترتيب القيم تصاعديا).

2. حساب ترتيب الوسيط. وهو في هذه الحالة:

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$

أي أن ترتيب الوسيط = $\frac{\sum f}{2} = \frac{N}{2}$

3. تحديد الفئة التي تحتوى على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد والتي تسمى الفئة الوسيطية، ثم حساب قيمة الوسيط من العلاقة التالية:

$$\tilde{X} = L_1 + \left(\frac{N/2 - \sum f_1}{f_m} \right) C$$

حيث:

L_1: لحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$\sum f_1$: هي التكرار المتجمع الصاعد المقابل للحد الأعلى للفئة قبل الفئة الوسيطية .

C: طول الفئة الوسيطية.

f_m : التكرار المناظر للفئة الوسيطية.

أي أن موقع الوسيط في الفئة الوسيطية يبعد عن بداية الفئة بمقدار يتناسب مع نسبة التكرارات المتبقية لإكمال رتبة الوسيط و تكرار الفئة الوسيطية.

ومن المثال التالي تتضح خطوات الحل السابقة عملياً.

مثال (7)

الجدول التالي يوضح أوزان 100 شخص بالكيلوجرام. أحسب الوسيط للأوزان.

جدول رقم(5)

فئات الوزن C	f
30 –	9
40 –	15
50 –	22
60 –	25
70 –	18
80–90	11
المجموع	100

الحل

تكوين الجدول المتجمع الصاعد كما يلي

جدول رقم (6)

الحدود العليا للفئات	متجمع صاعد
أقل من 30	0
أقل من 40	9
أقل من 50	24
أقل من 60	46
أقل من 70	71

أقل من 80	89
أقل من 90	100

ترتيب الوسيط =50

ترتيب الوسيط: $\frac{\sum f}{2}=\frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$ ← الفئة الوسيطية

ثم نبحث أين يقع ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة الصاعدة. وفي هذا المثال نجد أن ترتيب الوسيط يساوي 50 وبالتالي فهو يقع بين 46 وهي تمثل هنا $\sum f_1$ ، و 71 والتي تسمى التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لترتيب الوسيط. ومنهما الاثنين فإن الفئة الوسيطية هي من 60 وأقل من 70، وتكرارها هو 25 (لاحظ أن تكرار الفئة الوسيطية يساوي أيضاً الفرق بين التكرارين المتجمعين السابق واللاحق). وبهذا فإن الحد الأدنى للفئة الوسيطية يساوي 60 وطولها يساوي 10.

والآن يمكن التعويض مباشرة في المعادلة كما يلي:

$$\tilde{X}=L_1+\left(\frac{N/2-\sum f_1}{f_m}\right)C$$

$$\tilde{X}=60+\left(\frac{50-46}{25}\right)\times 10$$

$$=60+\frac{4}{25}\times 10 \Rightarrow 60+1.6=61.6\,kg$$

نشاط

أحسب الوسيط من بيانات الجدول التالي:

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 10	6
أقل من 20	16
أقل من 30	31
أقل من 40	48
أقل من 50	60
أقل من 60	68

وإذا علمت أن أقل قيمة للبيانات هي صفر، فكون الجدول التكراري الأصلي لهذه البيانات.

ب) بيانياً

وتكون خطوات استخراج الوسيط بيانياً كما يلي:

1- تكوين الجدول المتجمع الصاعد (كما سبق).

2- رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

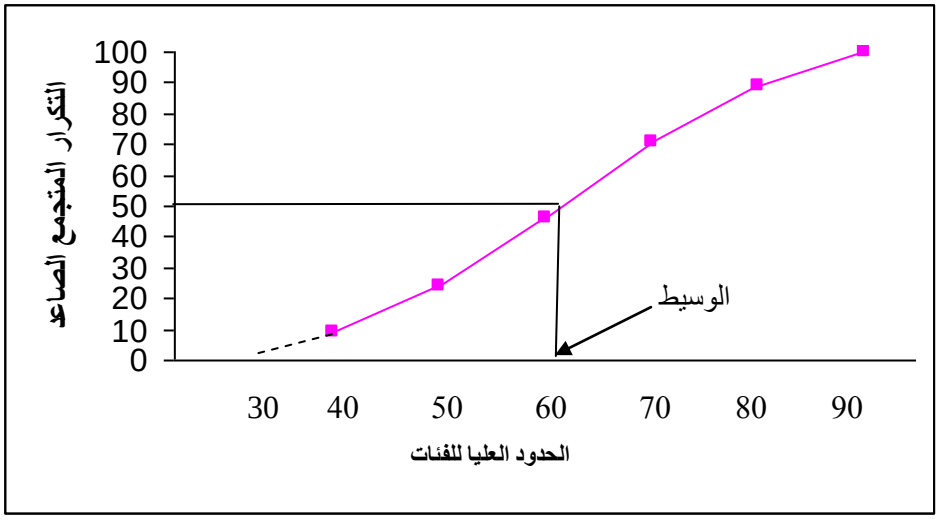
3- حساب ترتيب الوسيط (يساوي مجموع التكرارات مقسوماً على 2).

4- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي. ومن هذه النقطة نرسم خطاً موازياً للمحور الأفقي حتى يلتقي مع المنحنى المتجمع الصاعد. ومن نقطة الالتقاء هذه ننزل عمودا رأسياً على المحور الأفقي. وتكون نقطة تقاطع العمود مع المحور الأفقي هي قيمة الوسيط.

ونلاحظ هنا أن دقة النتيجة تتوقف إلى حد كبير على دقة الرسم.

والشكل التالي يبين خطوات العمل السابقة لإيجاد الوسيط.

شكل (1)إيجاد الوسيط بيانياً من بيانات مثال (7)



ومن الرسم يتضح أن قيمة الوسيط تساوي 61.5 كجم (أو بالضبط 61.6 كجم).

3.2 مزايا وعيوب الوسيط

المزايا:

1. لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
2. يمكن إيجاده بيانيا ً(برسم المنحنى المتجمع الصاعد).

العيوب:

1. لا تدخل جميع القيم في حسابه، إذ أنه يعتمد على قيمة واحدة فقط (أو قيمتين على الأكثر).
2. في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات تستخدم طرق تقريبية في حسابه.
3. لا يمكن إيجاده من القيم الوصفية.

نشاط



أحسب الوسيط لبيانات الجدول التالي (حسابياً وبيانياً):

فئات العمر	5-	10-	15-	20-	25-	30-	40-35	المجموع
التكرار	18	20	12	15	14	11	10	100

(**تنبيــه:** لاحظ أن ترتيب الوسيط هو واحد من التكرارات المتجمعة الصاعدة. وفي هذه الحالة لا يستخدم القانون، بل نحصل على قيمة الوسيط مباشرة من الجدول المتجمع الصاعد).

أسئلة تقويم ذاتي



1 عرف الوسيط؟
2 كيف يتم حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات؟
3 عدد خطوات استخراج الوسيط بيانياً؟
4 عدد مزايا وعيوب الوسيط؟

3. المنوال *The Mode*

1.3 تعريف المنوال

يعرف المنوال لمجموعة من القيم عددها n بأنه القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً. وهو ربما لا يوجد، وإذا وجد ربما لا يكون فريداً

يرمز للمنوال بالرمز $\hat{X}$ ، وتقرأ (X *hat*) .

مثال (8)

إذا كانت القيم التالية تمثل أوزان مجموعة من المرضى بأحد المستشفيات (بالكيلوجرام):

50، 55، 53، 55، 62، 57، 55، 59

فما هو المنوال لهذه الأوزان ؟.

الحل

من التعريف – مباشرة– نجد أن المنوال = 55 كجم.

وذلك لأن القيمة 55 تكررت أكثر من غيرها.

2.3 طريقة حساب المنوال

طريقة حساب المنوال في البيانات المبوبة ذات الفئات:

لاحظنا في المثال رقم [8] أن حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة يتم مباشرة وحسب التعريف بمجرد النظر إلى البيانات. وكذلك بنفس الطريقة في حالة البيانات المبوبة بدون فئات يكون المنوال هو القيمة المناظرة لأكبر تكرار. أما في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات فإن المنوال يقع في الفئة التي تناظر أعلى تكرار وتسمى الفئة المنوالية. وفيما يلي نتناول طريقتين لحساب المنوال، إحداها حسابية والأخرى بيانية.

1/ إيجاد المنوال حسابياً :

يمكن الحصول علي المنوال حسابياً بأكثر من طريقة. وسوف نحسب المنوال وفقاً للقانون التالي:

$$\hat{X} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$$

حيث:

L_1 هو الحد الأدنى للفئة المنوالية، وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار في الجدول.

Δ_1 هو الفرق بين التكرار المنوالي والتكرار السابق.

Δ_2 ، هو الفرق بين التكرار المنوالي والتكرار اللاحق.

C طول الفئة المنوالية.

والتكرار المنوالي هو أكبر تكرار في الجدول.

ولذلك فإنه وقبل استخدام القانون السابق لاستخراج المنوال فإنه يجب أولا تحديد التكرار المنوالي (أكبر تكرار في الجدول) والتكرار السابق له واللاحق أيضاً. وتكون الفئة التي تقابل أكبر تكرار هي الفئة المنوالية.

تدريب (3)



إذا كانت درجات الطلاب في مادة الإحصاء هي:
94،85،89،75،85،85،80
فما هو المنوال لهذه الدرجات؟

مثال (9)

في المثال رقم (7) الخاص بالأوزان أحسب منوال الوزن.

الحل

جدول (7)

فئات الوزن	عدد الأشخاص
30 −40	9
40−50	15
50−60	22
60−70	25
70−80	18
80−90	11
المجموع	**100**

التكرار السابق ← 22

التكرار المنوالي ← 25

التكرار اللاحق ← 18

الفئة المنوالية ← 60−70

من الجدول فإن: $\Delta_1 = 25-22 = 3$ ، $\Delta_2 = 25-18 = 7$

الفئة المنوالية هي: 70−60 ويكون حدها الأدنى هو 60.

$$C = 70-60 = 10$$

إذاً: $\hat{X} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C \quad = 60 + \frac{3}{3+7} \times 10 \quad = 60 + \frac{3}{10} \times 10 \quad = 60 + 3 = 63kg$

نشاط

الجدول التالي يمثل دخول مجموعة من العمال في أحد المصانع في اليوم بالدينارات (مقربة إلى أقرب 5 دينارات) .=

الدخل	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
التكرار	4	7	10	12	9	8	6	5	3	2	1

والمطلوب:

1- حساب الوسط الحسابي للدخل اليومي.

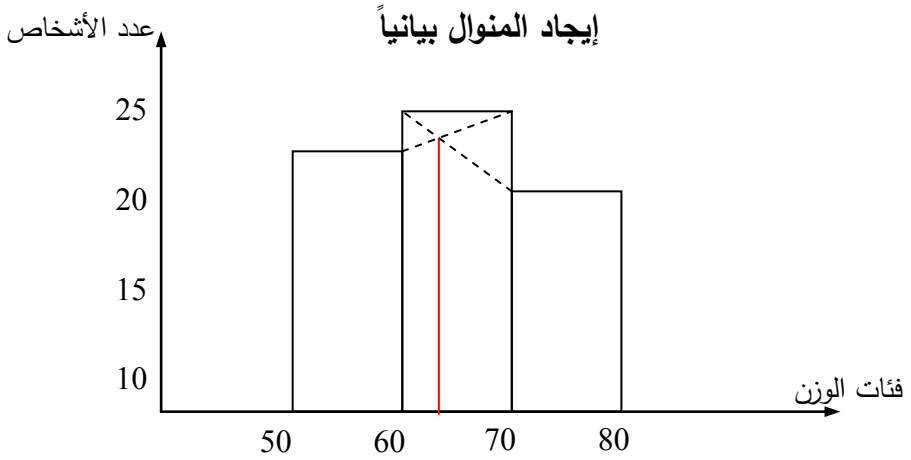
2- حساب منوال الدخل.

2/ إيجاد المنوال بيانياً

يتم إيجاد المنوال بيانياً عن طريق رسم المدرج التكراري، وغالباً ما يكتفى برسم ثلاثة مستطيلات فقط والتي تمثل الفئة المنوالية والفئة السابقة وكذلك اللاحقة، ثم يتم استخراج المنوال من داخل الفئة المنوالية بالطريقة الآتية:

شكل رقم (2)

إيجاد المنوال بيانياً



أي أنه يتم توصيل الرأس الأيمن العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بالرأس الأيمن العلوي لمستطيل الفئة السابقة، وتوصيل الرأس الأيسر العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بالرأس الأيسر العلوي لمستطيل الفئة اللاحقة. ثم من نقطة التقاطع نسقط عموداً على المحور الأفقي فيقابله في نقطة تكون هي المنوال.

ويتضح من الرسم أن قيمة المنوال تساوي 63 كجم تقريباً.

نشاط



الجدول التالي يبين توزيع مجموعة من الطلاب حسب أطوالهم (بالسنتيمتر)

فئات الطول	**150-**	**154-**	**158-**	**162-**	**166-**	**170-**	**178-174**
عدد الطلاب	12	19	35	42	37	22	15

والمطلوب:

1- حساب قيمة الوسط الحسابي للأطوال.

2- حساب قيمة الوسيط.

3.3 مزايا وعيوب المنوال

المزايا

1. بسيط من حيث الفكرة أو طريقة إيجاده.
2. لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
3. يمكن إيجاده من القيم الوصفية.

العيوب

1. رغم تعدد طرق حسابه إلا أنها كلها طرق تقريبية لاسيما في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات.

2. في بعض الحالات – وحسب التعريف – لا يمكن إيجاده؛ أي لا يكون هناك منوال للقيم (إذا لم تكن هناك قيمة متكررة أكثر من غيرها). وفي بعض الحالات الأخرى يوجد أكثر من منوال (كما في حالة تكرار بعض القيم بنفس الدرجة وأكثر من باقي القيم).

نشاط



إذا كان أحد المصانع يتكون من ثلاثة أقسام، وكان توزيع العمال حسب أعمارهم في الأقسام الثلاثة كما يلي:

القسم الأول		القسم الثاني		القسم الثالث	
العمر	عدد العمال	العمر	عدد العمال	العمر	عدد العمال
25	7	30	8	23	4
38	10	35	12	32	11
40	5	42	6	45	5

المطلوب

1 /حساب متوسط العمر في كل قسم.

2 /حساب منوال العمر في كل قسم .

3 /حساب متوسط العمر للعمال في المصنع.

4 /حساب منوال العمر للعمال في المصنع.

أسئلة تقويم ذاتي



1 / عرف المنوال؟

2 / أشرح باختصار طريقة حساب المنوال في البيانات المبوبة ذات الفئات؟

3 / عدد مزايا وعيوب المنوال؟

4. الوسط الهندسي Geometric Mean

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها N هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم. فإذا كان لدينا القيم $X_1, X_2, X_3,..., X_N$ فإن الوسط الهندسي لها– ويرمز له بالرمز G هو:

$$G=\sqrt[N]{(X_1)(X_2)(X_3)...(X_N)}$$

مثال (10)

الوسط الهندسي للأرقام 2، 4، 8 هو:

$$G=\sqrt[3]{(2)(4)(8)}=\sqrt[3]{64}=4$$

في حالة المجتمعات الكبيرة حيث تكثر المفردات يكون من الأفضل استعمال اللوغريتمات لحساب الوسط الهندسي، وذلك بالعلاقة التالية:

$$Log\,G=\frac{1}{N}\{Log\,X_1+Log\,X_2+Log\,X_3+...+Log\,X_N\}$$

وعن طريق جدول اللوغريتمات يمكن إيجاد العدد المقابل للوسط الحسابي للوغريتمات الأعداد ويكون هذا العدد هو الوسط الهندسي.

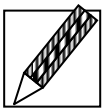
مثال (11)

الوسط الهندسي للأرقام 3، 5، 6، 7، 10، 12 هو:

$$Log\,G=\frac{1}{6}\{Log\,3+Log\,5+Log\,6+Log\,7+Log\,10+Log\,12\}$$
$$=\frac{1}{6}[0.4771+0.6990+0.7782+0.8451+1.0000+1.0792]=0.0808$$

والعدد المقابل لهذا اللوغريتم يساوي 6.43 وهو قيمة الوسط الهندسي للقيم السابقة.

تدريب (4)



أوجد الوسط الهندسي للأرقام 1، 3، 9

الوسط الهندسي للبيانات المبوبة

إذا كانت لدينا التكرارات $f_1, f_2, f_3,.., f_N$ ، $X_1, X_2, X_3,..., X_N$ هي مراكز الفئات المقابلة لها فإن الوسط الهندسي من الجدول التكراري يحسب بالقانون التالي:

$$Log\, G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\, Log\, X_i$$

أي أننا نحتاج لتكوين عمود للوغريتمات مراكز الفئات $Log\, X_i$ ، ثم نقوم بتكوين عمود لحواصل الضرب $f_i\, Log\, X_i$ ثم نطبق القانون.

مثال (12)

من الجدول التالي جد الوسط الهندسي.

C	4-	8-	12-	16-	20-	***sum***
f	3	5	9	5	3	25

الحل:

نكون عمود لكل من مراكز الفئات، و لوغريثماتها، و حواصل الضرب.

جدول رقم (8)

C	f_i	X_i	**Log X_i**	**f_i Log X_i**
4-	3	6	Log 6 = 0.7782	2.3346
8-	5	10	Log 10 =1.0000	5.0000
12-	9	14	Log 14 =1.1461	10.3149
16-	5	18	Log 18 =1.2553	6.2765
20-	3	22	Log 22 =1.3424	4.0272
sum	***25***			***27.9532***

وبهذا فإن:

$$Log\, G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\, Log\, X_i$$

$$\therefore Log\,G=\frac{1}{25}(27.9532)=1.1183$$

والعدد المقابل لهذا اللوغريتم يساوي 13.13 وهو قيمة الوسط الهندسي للقيم السابقة.

نشاط



من الجدول التكراري التالي جد الوسط الهندسي

فئات الطول	150-	154-	158-	162-	166-	170-	178-174
عدد الطلاب	12	19	35	42	37	22	15

5. الوسط التوافقي Harmonic Mean

ويستخدم في قياس النزعة المركزية لمجتمع تتزايد مفرداته تزايداً غير مضطردٍ كالأسعار والسرعة والمعدلات بصفة عامة. الوسط التوافقي يرمز له بالرمز ***H***.

فإذا كان لدينا القيم $X_1, X_2, X_3,..., X_N$ فإن الوسط التوافقي لها هو:

$$H=\frac{N}{\sum\frac{1}{X}}$$

مثال (13)

الوسط التوافقي للمفردات 2، 3، 6 هو:

$$H=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{X_i}}=\frac{3}{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right]}=\frac{3}{\left[\frac{3+2+1}{6}\right]}=\frac{3(6)}{6}=3$$

الوسط التوافقي للبيانات المبوبة:

إذا كانت لدينا التكرارات $f_1, f_2, f_3,.., f_N$ ، $X_1, X_2, X_3,..., X_N$ هي مراكز الفئات المقابلة لها فإن الوسط التوافقي من الجدول التكراري يحسب بالقانون التالي:

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{f_i}{X_i}}$$

أي أننا نحتاج لتكوين عمود لحاصل قسمة كل تكرار f_i على مركز الفئة المقابل له X_i ثم نجمع ونطبق القانون.

مثال (14)

من الجدول التالي جد الوسط التوافقي.

C	4-	8-	12-	16-	20-	***sum***
f	3	5	9	5	3	25

الحل

نكون عمود لكل من مراكز الفئات، و حاصل قسمة كل تكرار f_i على مركز الفئة المقابل له X_i .

جدول رقم (9)

C	f_i	X_i	f_i / X_i
4-	3	6	0.5000
8-	5	10	0.5000
12-	9	14	0.6429
16-	5	18	0.2778
20-	3	22	0.1364
sum	***25***		***2.0571***

وبهذا فإن:

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{f_i}{X_i}} = \frac{25}{2.0571} = 12.15$$

6.الأهمية النسبية للمتوسطات المختلفة

☜ **الوسط الحسابي أفضل مقاييس النزعة المركزية** لأنه يأخذ في الاعتبار جميع مفردات المجتمع، كما يسهل حسابه الجبري، وله استخدامات مهمة في الإحصاء بكافة أنواعه، أذ هو – إضافة إلى ذلك هو الأفضل إذا كان التوزيع منتظماً.

☜ **الوسيط هو أسهل مقاييس النزعة المركزية تحديداً**، لأنه يعتمد على ترتيب المفردات فقط كما يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة ولا يتأثر بالقيم الشاذة كالوسط الحسابي.

☜ **المنوال من مميزاته أنه يعبر عن القيمة الأكثر شيوعا أو تكراراً**، فهو يجذب الانتباه كما أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة إلا أنه ربما لا يوجد وإذا وجد ربما لا يكون فريداً، وهو شديد الاختلاف بين العينات من نفس المجتمع.

☜ **الوسط الهندسي والوسط التوافقي هما متوسطان لهما استخداماتهما المعينة**؛ فهما يعتمدان على نوع البيانات تحت الدراسة كما ذكرنا سابقا، ولا يلجأ إليهما كثيراً لأنهما يتأثران تأثيراً مباشراً وكبيراً بالقيم المتطرفة.

☜ لاختيار المتوسط لوصف مفردات المجتمع يتوجب على الباحث أن يختار المتوسطات التي تمثل البيانات أفضل تمثيل، والتي تتلاءم والتعبير الأقرب إلى الصواب، ولكن دائما يكون الوسط الحسابي هو الأفضل ما لم تكن البيانات موزعة توزيعاً شاذاً أو متطرفاً.

أسئلة تقويم ذاتي



1 / عرف الوسط الهندسي؟

2 / أشرح باختصار طريقة حساب الوسط الهندسي للبيانات المبوبة؟

3 / كيف يتم حساب الوسط التوافقي للبيانات المبوبة؟

4 / تحدث باختصار عن الأهمية النسبية للمتوسطات المختلفة؟

الخلاصة

عزيزي الدارس،

ماذا تعلمت من هذه الوحدة؟ معلومات كثيرة ومفيدة وردت في هذه الوحدة نلخصها فيما يلي:

بدأنا بتعريف الوسط الحسابي وشرحنا طريقة حسابه من البيانات المبوبة وغير المبوبة ثم قمنا بتعريف الوسيط ووضحنا طرق حسابه وعرفنا المنوال وكذلك وضحنا طرق حسابه.

كما وضحنا مزايا وعيوب كل من المتوسطات الثلاثة السابقة (الوسط الحسابي– الوسيط – المنوال) ثم انتقلنا إلي الوسط الهندسي والوسط التوافقي وعرفناهما ووضحنا طريقة حساب كل منهما وأخيراً قمنا بتوضيح الأهمية النسبية للمتوسطات المختلفة.

قدمنا لك العديد من الرسومات والاشكال والجداول التي تعينك في فهم المادة العلمية كما ذودناك بالتدريبات وأسئلة التقويم الذاتي والأنشطة. فارجو أن تكون وحدة مفيدة وممتعة وان تساعدنا في تطوير المادة باسهماتك ومقترحاتك مع خالص تمنياتنا لك بالتقدم والنجاح.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس الوحدة التالية تتحدث عن مقاييس التشتت – المدى،.....، الانحراف المتوسط، نصف المدى الربيعي، التباين، الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

مسرد المصطلحات

- الوسط الحسابي: **Arithmetic Mean**

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في بالمجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الأصلية. يساوي مجموع القيم على عددها.

- الوسيط: **The Median**

هو القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً او تنازلياً.

- المنوال: **The Mode**

هو القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

- الوسط الهندسي: **Geometric Mean**

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها N هو الجزر النوني لحاصل ضرب هذه القيم.

- الوسط التوافقي: **Harmonic Mean**

يستخدم في مقياس النزعة المركزية، لمجتمع تتزايد مفرداته تزايد غير مضطرد كالآسعار والسرعة.

إجابة التدريبات

تدريب (1)

الوسط الحسابي = مجموع القيم / عددها

$$= \frac{40+30+70+60}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

تدريب (2)

الوسيط = $\frac{n+1}{2}$

أولاً نرتب القيم تصاعدياً:

154،165،169،180،187

ترتيب الوسيط = $\frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

الوسيط = 169

تدريب (3)

المنوال للدرجات: 79،80،85،85،75،79،85،94

المنوال هو 85 وذلك لأن 85 تكررت أكثر من غيرها.

تدريب (4)

الوسط الهندسي للأرقام 1،3،9 هو:

$$\sqrt[3]{1 \times 3 \times 9 = 27} = \sqrt[3]{27} = 3$$