
الوحدة الرابعة
الألتواء والتفرطح والعزوم

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
مقدمة	112
تمهيد	112
أهداف الوحدة	113
1. مقاييس الالتواء	114
2. مقاييس التفرطح	117
3. العزوم	117
4. حساب معامل الالتواء باستخدام العزوم	121
5. حساب معامل التفرطح باستخدام العزوم	121
الخلاصة	124
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	124
إجابات التدريبات	125

مقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك في رابع وحدات هذا المقرر. يعتبر المنحنى التكراري المعتدل مرجعا هاما في الدراسات والتحليلات الإحصائية وعليه تعتمد الكثير من النظريات الإحصائية مثل نظرية التقدير ونظرية القرار وغيرها. إلا أنه في الحياة العملية يندر وجود توزيع معتدل اعتدالا تاما بحيث يتماثل حول وسطه الحسابي. والذي نحصل عليه في الواقع عادة هو التوزيع التكراري الذى يكون قريبا من المعتدل أو شبه المعتدل . والمنحني شبه المعتدل إما أن يكون ملتويا نحو اليمين أو نحو اليسار أو تكون قمته أكثر أو أقل تفرطحا من قمة التوزيع المعتدل.

لهذه الأسباب فإنه يهمنا في القياسات الإحصائية أن نتعرف على درجة الالتواء والتفرطح للتوزيع التكراري . تحتوي هذه الوحدة على خمس أقسام في القسم الأول تناولنا مقاييس الالتواء ومعامل الالتواء، وفي القسم الثاني تناولنا مقاييس التفرطح وفي القسم الثالث تناولنا العزوم، وفي القسم الرابع وضحنا كيفية حساب معامل الالتواء باستخدام العزوم، أما في القسم الأخير فتناولنا حساب معامل التفرطح باستخدام العزوم. تتخلل هذه الوحدة العديد من الانشطة والتدريبات والأمثلة التي تعينك على الفهم والاستيعاب. مع خالص تمنياتنا بالتوفيق والنجاح.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن :

1 -تشرح مقاييس الالتواء.

2 -تذكر مزايا وعيوب معامل الالتواء.

3 -تناقش مقاييس التفرطح.

4 -تحسب قيمة العزوم من البيانات المبوبة وغير المبوبة.

5 -تحسب معامل الالتواء ومعامل التفرطح عن طريق العزوم.

1. مقاييس الالتواء

عزيزي الدارس سبق أن ذكرنا في دراستنا لمقاييس النزعة المركزية أنه إذا كانت المنحنيات معتدلة (متماثلة) فإن مقاييس الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متطابقة، أي لها نفس القيم. أما في حالة عدم التماثل فإنها تختلف .

لنرمز للوسط الحسابي و الوسيط و المنوال بـ $\hat{x}, \tilde{x}, \bar{x}$ بالترتيب

1/ إذا كان المنحنى ملتوياً نحو اليسار فيكون الوسط الحسابي أصغرها وتنطبق العلاقة:

$$\overline{X} < \tilde{X} < \hat{X}$$

2/ إذا كان المنحنى ملتوياً نحو اليمين، فيكون الوسط الحسابي أكبرها وتنطبق العلاقة:

$$\overline{X} > \tilde{X} > \hat{X}$$

في الحالة الأولى يكون الالتواء سالباً بحيث يكون ذيل التوزيع الأطول نحو اليسار. أما في الحالة الثانية فيكون الالتواء موجباً بحيث يكون ذيل التوزيع الأطول نحو اليمين . ويتم تحديد نوعية الالتواء باستخدام الفرق بين الوسط والمنوال فإذا كان:

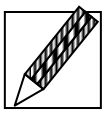
(أ) $\left(\overline{X} - \hat{X}\right)$ قيمة موجبة يكون الالتواء موجبا.

(ب) $\left(\overline{X} - \hat{X}\right)$ قيمة سالبة يكون الالتواء سالبا.

(ج) $\left(\overline{X} - \hat{X}\right)$ تساوي صفر يكون التوزيع معتدلا.

وتبين الحالات الثلاثة في شكل (1):

تدريب(1)



وضح متى تكون مقاييس الوسط الحسابي والوسيط والمنوال متطابقة؟

معامل الالتواء

لقد تعرفنا فيما سبق على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال عندما يكون التوزيع التكراري شبه متماثل وأوضحنا أن العلاقة التالية تتحقق:

$$\left(\overline{X} - \hat{X}\right) = 3\left(\overline{X} - \tilde{X}\right)$$

وقد استخدم كارل بيرسون هذه العلاقة في اشتقاق مقياسين للالتواء B_1 , B_2 على النحو التالي:

$$\boxed{\begin{aligned} B_1 &= \left(\overline{X} - \hat{X}\right)/\sigma_X \\ B_2 &= 3\left(\overline{X} - \tilde{X}\right)/\sigma_X \end{aligned}}$$

ويسمي المعامل B_1 معامل بيرسون الأول B_2 معامل بيرسون الثاني للالتواء.

مثال:

في توزيع أجور 65 عاملا في إحدى الشركات (الوحدة الثانية) كان:

الوسط الحسابي $\overline{X} = 79.76$ و الوسيط $\tilde{X} = 79.06$ والمنوال $\hat{X} = 77.5$ وكان الانحراف المعياري $\sigma = 15.6$. أوجد معاملي بيرسون الأول والثاني للالتواء.

لإيجاد معاملي بيرسون نقوم بالتعويض المباشر في المعادلتين السابقتين:

* **معاملا بيرسون الأول والثاني للالتواء:**

$$B_1 = \frac{79.76 - 77.50}{15.60} = 0.14$$

$$B_2 = \frac{3(79.76 - 79.06)}{15.60} = 0.13$$

بما أن B_1 , B_2 موجبة فإن التوزيع ملتوي التواء موجبا أي أنه ملتوي ناحية اليمين ولكن من الواضح أن درجة الالتواء خفيفة للغاية وذلك لان :

$$B1 = 0.14 \quad , \quad B2 = 0.13$$

مما يعني أن لهم قيم متقاربة وعليه فإن العلاقة التقريبية بين الوسط والوسيط والمنوال قد تحققت الأمر الذي يدل على قرب التوزيع من التماثل . ويمكن قياس الالتواء من الانحراف الربيعي عن طريق معامل الالتواء الربيعي B .

$$B = (R_3 - 2R_2 + R_1)/(R_3 - R_1)$$

يمكن حساب معامل المدى الربيعي من بيانات إنتاج الذرة في مثال رقم 2 الفصل الثاني حيث وجدنا أن:

$$R_1 = 34.19$$
$$R_2 = 40.27$$
$$R_3 = 45.44$$

وعليه فإن معامل الالتواء الربيعي :

$$B = (45.44 - 2 \times 40.27 + 34.19)/(45.44 - 34.19) = 0.08$$

والأساس في هذا المعامل هو أنه في حالة التوزيعات المتماثلة تقع الربيعات الأول والثالث على بعدين متساويين من الوسيط، في حين يختلف بعداهما عنه في حالة التوزيعات الملتوية أي أنه عندما يكون قيم B أقرب إلى الواحد الصحيح.

مزايا وعيوب معامل الالتواء

من مزايا هذا المعامل انه يمكن إيجاده بالحساب أو بالرسم باستخدام المنحنى التكراري المتجمع الصاعد . وكذلك يمكن حسابه في حالة الجداول المفتوحة.

ولكن عيبه الأساسي أنه لا يخذ جميع القيم في الاعتبار، بل يعتمد على القيم الواقعة بين الربيعين الأول والثالث فقط. كما أنه لا يمكن استخدامه في التحليل الإحصائي الرياضي.

تدريب(2)



– قارن بين مزايا وعيوب معامل الالتواء.

أسئلة تقويم ذاتي



1. **كيف يتم تحديد نوعية الالتواء؟**
2. **عدد مزايا وعيوب معامل الالتواء؟**
3. **تحدث باختصار عن مقاييس الالتواء؟**

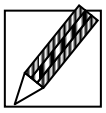
2. مقاييس التفرطح

عزيزي الدارس ماذا تعرف عن كلمة التفرطح ومتى تستخدم؟

ونستعمل كلمة تفرطح لوصف تدبب المنحني التكراري بالنسبة للمنحني المعتدل فإذا كان المنحني أكثر تفرطحا من المنحني المعتدل يوصف بأنه مفرطح وهو الذي يتسع في الوسط وتنحني قمته عن قمة المنحني المعتدل. إذا كان المنحني أقل تفرطحا من المنحني المعتدل يوصف بأنه منحني مدبب وهو الذي يأخذ مدى ضيقا في وسطه وترتفع قمته عن قمة المنحني المعتدل. أما إذا كان المنحني التكراري له قمة مطابقة للمنحني المعتدل فاه يوصف بأن تفرطحه متوسط (Mesokartic) أنظر شكل (2).

وتستخدم العزوم لقياس معاملي الالتواء والتفرطح . لذلك فأننا سنقوم بشرح مفهوم العزوم وطريقة حسابها:

تدريب(3)



– وضح متى يوصف المنحنى بأنه مفرطح.

3. العزوم Moments

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات X_1 , X_2 ..., X_N فان العزم الرائي حول الصفر ويرمز له بالرمز (X_r) يحسب من العلاقة التالية:

$$\bar{X}_r = \frac{\sum X^r}{n}$$

وعلى وجه الخصوص عندما تكون $r = 1$ فان العزم الأول حول الصفر هو الوسط الحسابي $\bar{X}$

كذلك العزم الرائي حول الوسط الحسابي ويرمز إليه بالرمز (m_r) يحسب من العلاقة التالية:

$$m_r = \sum \left(X - \bar{X}\right)^r / n$$

فإذا كانت r = 1 فإن العزم الأول حول الوسط الحسابي = 0 أما إذا كانت r = 2 فان العزم الثاني حول الوسط الحسابي يساوي التباين σ^2.

وهنالك أيضا العزم الرائي حول اى نقطة A ويرمز له بالرمز (m'_r) ويحسب من العلاقة التالية:

$$\boxed{m'_r = \sum (X - A)^r / n}$$

ونلاحظ انه إذا كانت $A = \bar{X}$ فان العزم الرائي حول النقطة A يساوي العزم الرائي حول الوسط الحسابي . وكذلك إذا كانت A = 0 فان العزم الرائي حول النقطة A يساوي العزم الرائي حول الصفر. وعليه فان m'_r أكثر عمومية وتعتمد قيمته على نقطة الأصل A .

ونلاحظ أيضا أن $d_1 = x_1 - A$ هي انحرافات القيم عن اى وسط فرضي A والتي استخدمناها في حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري في الأقسام السابقة.

وستخدم العزم الرائي حول النقطة A في اشتقاق علاقات مختلفة بين العزوم وهى :

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= m'_2 - m'_1 \\ m_3 &= m'_3 - 3m'_1 m'_2 + 2m'^3_1 \\ m_4 &= m'_4 - 4m'_1 m'_3 + 6m'^2_1 m'_2 - 3m'^4_1 \end{aligned}}$$

ونقوم بإثبات m2 فيما يلي:

$$m_2 = \sum (X - \bar{X})^2 / n$$

$$m_2 = \left[\sum X^2 / n - \left(\sum X / n \right)^2 \right]$$

$$d = X - A$$

$$X = A + d$$

$$\bar{X} = A + \bar{d}$$

$$(X - \bar{X}) = (d - \bar{d})$$

$$\sum (X - \bar{X})^2 / n = \sum (d - \bar{d})^2 / n$$

$$= \left\{ \sum d^2 / n - \left(\sum d / n \right)^2 \right\}$$

$$= \left\{ \sum (X - A)^2 / n - \left(\sum X - A / n \right)^2 \right\}$$

$$\therefore m_2 = m'_2 - m'^2_1$$

مثال :

أوجد العزوم الثلاثة الأولى حول الرقم 4 لمجموعة المفردات التالية 10 ، 8 ، 7 ، 3 ، 2 ومن ثم أوجد العزم الثاني والثالث حول الوسط الحسابي:

$$m_1' = \sum (x-4)/n = \frac{(2-4)+(3-4)+(7-4)+(8-4)+(10-4)}{5} = 2$$

$$m_2' = \sum (x-4)^2/n = \frac{(2-4)^2+(3-4)^2+(7-4)^2+(8-4)^2+(10-4)^2}{5} = 13.2$$

$$m_3' = \sum (x-4)^3/n = \frac{(2-4)^3+(3-4)^3+(7-4)^3+(8-4)^3+(10-4)^3}{5} = 59.6$$

ثم تستخدم العلاقة بين العزوم لحساب العزم الثاني والثالث حول الوسط الحسابي كما يلي:

$$m_2 = m_2' - m_2'^2 = 13.2-(2)^2 = 9.2$$

$$m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$$

$$59.6 + 3(2)(13.2) + 2(2)^3 = 3.6$$

حساب العزوم من البيانات المبوبة:

إذا كانت x_1 , x_2 , ..., x_n هي مراكز فئات لها تكرارات f_1 , f_2 , ... ,f_n فان العزوم السابقة يمكن أن تكتب بتكرارات كما يلي:

$$\overline{X}_r = \sum fx^r/n$$

$$m_r = \sum f(X-\overline{X})^r/n$$

$$m_r' = \sum f(X-A)^r/n$$

وبما أن هذه الصيغ غير ملائمة للحساب نسبة لطول العملية الحسابية ولتسهيل الأمر سنلجأ إلى طرق الترميز السابقة وذلك لاستخدامها بصورة مختصرة لإيجاد العزوم .

ولتوضيح هذه الطرق أكثر دعنا نتوصل إليها بالخطوات التالية:

ضع $\boxed{d=x-A}$ عليه فإن $m_r' = \sum fd^r/\sum f$

والآن ضع $u=d/c$ فتصبح :

$$m_r' = c^r\left(\sum fu^r/\sum f\right)$$

ويمكن استخدام هذه الصيغ للحصول على m_r بتطبيق معادلة اشتقاق العزوم.

مثال(4)

أوجد العزوم الأربعة حول الوسط الحسابي لتوزيع إنتاج الذرة بمشروع الجزيرة .

يتم أولا تنظيم العمل وفق الجدول التالي:

جدول رقم (1)

حساب العزوم من بيانات إنتاج الذرة بمشروع الجزيرة

فئات الإنتاج	f	x	d=x-A	u=d/c	fu	fu^2	fu^3	fu^4
-27.5	5	27	−15	−3	−15	45	−132	405
-29.5	8	32	−10	−2	−16	32	−64	128
-34.5	10	37	−5	−1	−10	10	−10	10
-39.5	13	42	0	0	0	0	0	0
-44.5	8	47	5	1	8	8	8	8
-49.5	6	52	10	2	12	24	48	96
المجموع	**50**				**−21**	**119**	**−153**	**647**

$$m_1' = c\left(\sum fu / \sum f\right) = (5)(-21/50) = -2.1$$

$$m_2' = c^2\left(\sum fu^2 / \sum f\right) = (5)^2(119/50) = 59.5$$

$$m_3' = c^3\left(\sum fu^3 / \sum f\right) = (5)^3(153/50) = -382.5$$

$$m_4' = c^4\left(\sum fu^4 / \sum f\right) = (5)^4(647/50) = 8087.5$$

الان نحسب العزوم الرابعة الاولي حول الوسط الحسابي بالاستفادة من هذة النتائج

$m_1 = 0$ (حسب التعريف)

$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 59.5 - (2.1)^2$$

$$m_2 = 54.1$$

$$m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 = 382.5 + (3)(-2.1)(59.5) + 2(2.1)^3$$

$$m_3 = -26.1$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4$$

$$= 8087.5 - (4)(2.1)(-382.5) + (6)(-2.1)^2(3)(-2.1)^4 = 12902.65$$

$$m_4 = 12902.65$$

نشاط



1 -أوجد العزوم حول الصفر:

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع .

لمجموعة الأرقام 2،3،7،8،10 .

2 -أوجد العزوم حول الوسط الحسابي:

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع .

لمجموعة الأرقام بالمسألة 1 .

3 - أوجد العزوم حول النقطة (4) :

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع .

لمجموعة الأرقام بالمسألة 1 .

4 -باستخدام نتائج المسائل 3 و 2 حقق العلاقة بين العزوم :

(أ) $m_2 = m'_2 - m'^2_1$

(ب) $m_3 = m'_3 - 3m'_1 m'_2 (m'_1)^3$

(ج) $m_4 = m'_4 - 4m'_1 m'_3 + 6(m'_1)^2 m'_2 - 3(m'_1)^4$

4. حساب معامل الالتواء باستخدام العزوم

حساب معامل الالتواء باستخدام العزم الثالث حول الوسط الحسابي والعزم الثاني حول الوسط الحسابي ويرمز إليه بالرمز α_3 ، ويعرف كما يلي :

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{\sqrt{(m_2)^3}}$$

مثال

أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم لبيانات إنتاج الذرة بمشروع الجزيرة.

الحل

كنا قد أوجدنا العزوم الأربعة حول الوسط الحسابي لهذا التوزيع وما علينا الآن إلا التعويض في القانون السابق لإيجاد (α_3) معامل الالتواء.

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{(\sqrt{54.1})^3} = \frac{-26.1}{(7.4)^3} = -0.064$$

ونلاحظ أن التوزيع له التواء سالبا أي أنه ملتوي ناحية اليسار كما أن الالتواء خفيفة.

عندما يكون التوزيع معتدلا تكون قيمة $\alpha_3 = 0$

5. حساب معامل التفرطح باستخدام العزوم

لحساب معامل التفرطح بدلالة العزوم فأننا نستخدم العزم الرابع حول الوسط الحسابي . ويرمز لمعامل التفرطح بدلالة العزم بالرمز α_4 ويحسب من العلاقة:

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

مثال

أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم لبيانات إنتاج الذرة بمشروع الجزيرة ؟

الحل

لقد أوضحنا من قبل إن العزم الرابع حول الوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي . وعليه فأن معامل التفرطح يساوي :

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{m_2^2} = 12902.65/(54.1)^2 = 4.41$$

وبما أن تفرطح المنحني المعتدل يساوى (3) فان المنحنى لبيانات إنتاج الذرة بمشروع الجزيرة يعتبر منحنى مدبب تدبباً كبيرا إذ انه يزيد كثيرا عن تفرطح التوزيع المعتدل.

نشاط



1. العزمان الثانيان حول الوسط الحسابي لتوزيعين هما 9 , 16 بينما العزمان الثالثان حول الوسط الحسابي هما 12.8− ، 8.1− على الترتيب. أي التوزيعين أكثر التواء إلى اليسار؟
2. إذا كان العزم الأول حول الرقم (2) هو 5 فما هو الوسط الحسابي ؟
3. متوالية عددية حدها الأول (a) وفرقها الثابت (d) أوجد عزمها الأول والثاني حول الوسط الحسابي.
4. الانحراف المعياري لتوزيع متماثل هو
5. كم يجب أن يكون العزم الرابع لكي يكون هذا التوزيع:

أ/ مدبب ب/ مفرطح ج/ متماثل

أسئلة تقويم ذاتي



1. ناقش باختصار مقاييس التفرطح؟
2. متى يوصف المنحنى بأنه مفرطح / مدبب، متوسط التفرطح؟
3. تحدث باختصار عن العزوم؟
4. أشرح كيفية حساب العزوم من البيانات المبوبة؟
5. أكتب معادلة حساب معامل الالتواء باستخدام العزوم؟
6. كيف يتم حساب معامل التفرطح باستخدام العزوم؟

الخلاصة

عزيزي الدارس مرحباً بك في نهاية الوحدة وهي رابع وحدات هذا المقرر في القسم الأول تحدثنا عن مقاييس الإلتواء وذكرنا أنه إذا كانت المنحنيات معتدلة فإن مقاييس الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متطابقة، أما في حالة عدم التطابق فإنها تكون ملتوية نحو اليسار ويكون الوسط الحسابي أكبرها او ملتوية نحو اليمين ويكون الوسط الحسابي أصغرها. ويتم تحديد نوع الإلتواء باستخدام الفرق بين الوسط والمنوال.

تحدثنا أيضاً عن معامل الإلتواء ووضحنا مزاياه وعيوبه. ثم انتقلنا إلى مقاييس التفرطح وذكرنا أن كلمة تفرطح تستخدم لوصف تدبب المنحنى التكراري بالنسبة للمنحنى المعتدل، حيث يوصف المنحنى بأنه مفرطح أو مدبب أو متوسط التفرطح. ثم تحدثنا عن العزوم وطريقة حسابه من البيانات المبوبة وغير المبوبة ، وتحدثنا أيضاً عن كيفية حساب معامل التفرطح باستخدام العزوم.

مرحباً بك مرة أخرى في نهاية هذه الوحدة أرجو أن تكون موفق في استيعابها . مع خالص تمنياتنا بالنجاح والتوفيق.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس، الوحدة التالية بعنوان الإرتباط والإنحدار الخطي. سنقوم فيها بدراسة أساليب قياس مقدار واتجاه العلاقة بين متغيرين وقوة الإرتباط بينهما ومن ثم تحديد علاقة رياضية تربط المتغيرين وتمكن من التنبؤ.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

تكون مقاييس الوسط الحسابي والوسيط والمنوال متطابقة إذا كانت المنحنيات معتدلة (متماثلة)

تدريب (2)

- المزايا
- يمكن إيجاده بالحساب العادي أو بالرسم البياني باستخدام المنحنى التكراري للمجتمع الصاعد. وكذلك يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.
- العيوب
  - لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار
  - لا يمكن استخدامه في التحليل الإحصائي الرياضي

تدريب (3)

يوصف المنحنى بأنه مفرطح عندما يكون المنحنى أكثر أستواءً من المنحنى المدبب او المنحني متوسط التفرطح.