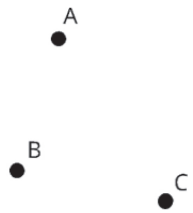
## CONCEITOS INICIAIS

O ponto, a reta, o plano e o espaço (que estudaremos mais a frente) são noções geométricas que não possuem definição formal. Chamaremos esses elementos de noções primitivas da geometria.

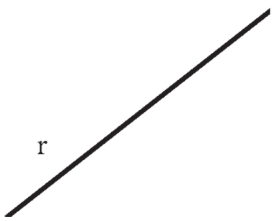
### O PONTO

Os pontos costumam ser representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto.



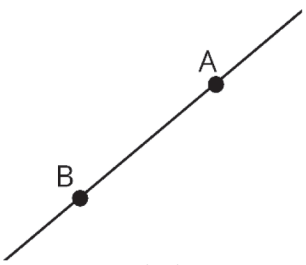

### A RETA

As retas costumam ser representadas por letras minúsculas do nosso alfabeto. É importante lembrar que uma reta possui infinitos pontos.




Reta r

Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa por eles.

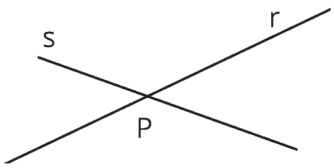



Reta $\overleftrightarrow{AB}$

## POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

### RETAS CONCORRENTES

Quando possuem um único ponto em comum.

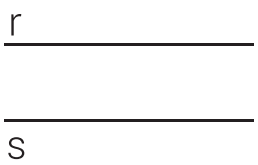



$r \cap s = \{P\}$

$r \cap s = \{P\}$

### RETAS PARALELAS

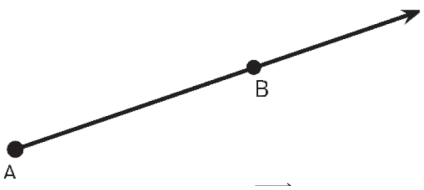
Quando não possuem ponto comum.




$r \cap s = \{\ \}$

## SUBCONJUNTOS DA RETA

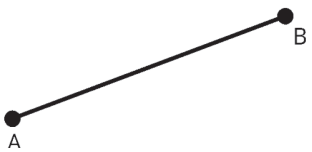
### SEMIRRETA




Semirreta $\overrightarrow{AB}$

Nesse caso, o ponto A é a origem da semirreta.

### SEGMENTO DE RETA




Segmento de reta $\overline{AB}$

Segmento de reta com extremidades nos pontos *A* e *B*.

**PROEXPLICA**

- Apesar da semirreta e do segmento de reta estarem contidos em uma reta, ambos possuem infinitos pontos.
- **Pontos colineares** são pontos que estão sobre uma mesma reta.

## O PLANO

Os planos costumam ser representados por letras do alfabeto grego.

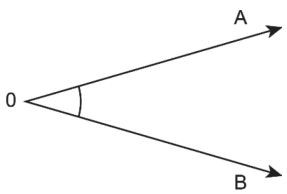
Plano α

**PROEXPLICA**

- Em um plano há infinitos pontos e retas.
- Três pontos não colineares, determinam um único plano que os contém.
- Pontos que estão sobre um mesmo plano são chamados de **coplanares**.

## ÂNGULO

Chamamos de ângulo a parte do plano limitada por duas semirretas de mesma origem.




Ângulo AÔB, de vértice *O* e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

A unidade de medida mais usada para o ângulo em geometria é o **grau**. Algumas medidas de ângulos recebem nomes especiais:

- **Ângulo reto:** ângulo de medida 90º;
- **Ângulo raso:** ângulo de medida 180°;
- **Ângulo agudo:** ângulo de medida menor que 90°, mas não nulo;
- **Ângulo obtuso:** ângulo de medida entre 90° e 180°;

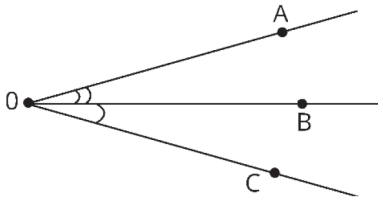
Dados dois ângulos $\alpha$ e $\beta$, dizemos que eles são:

- **Complementares**, quando $\alpha + \beta = 90º$;
- **Suplementares**, quando $\alpha + \beta = 180º$.
- **Replementares**, quando $\alpha + \beta = 360º$.

Dois ângulos são ditos **congruentes** quando têm as mesmas medidas. Assim, se dois ângulos AÔB e BÔC são ditos congruentes, podemos escrever que AÔB ≅ BÔC.

## ÂNGULOS ADJACENTES

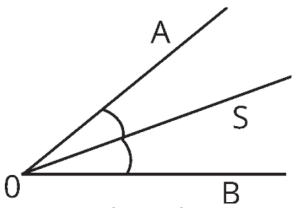
São ângulos que possuem mesmo vértice, um lado comum, mas não possuem região interna comum.




*AÔB* e *BÔB* são adjacentes.

## BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

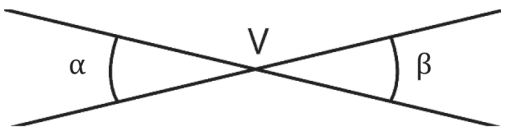
É a semirreta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.




$\hat{AOS} \cong \hat{SOB}$

## ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

São dois ângulos formados por duas retas concorrentes, como os ângulos α e β da figura. Ângulos opostos pelo vértice são sempre ângulos congruentes.

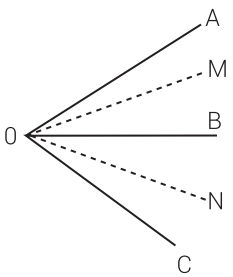



$\alpha \cong \beta$

**Exemplos**

**01.** Na figura, $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ são bissetrizes dos ângulos adjacentes AÔB e BÔC respectivamente.

Sabendo que AÔN = 50° e NÔC = 30°, calcule a medida do ângulo agudo AÔM.




**Resolução:**

Considere que $A\hat{O}M = x$.

Dessa forma, como $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de *AÔB* temos que $M\hat{O}B = x$.

Analogamente, considere que $C\hat{O}N = y$ e como $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz de *BÔC* temos que $N\hat{O}B = y$.

Montamos agora um sistema pois sabemos que $A\hat{O}N = 50º$ e $N\hat{O}C = 30º$.

$$A\hat{O}N = 50º = 2x + y$$
$$N\hat{O}C = 30º = y$$

Temos então que $2x + 30 = 50 \rightarrow 2x = 20$ e finalmente que $x = 10º = A\hat{O}M$.

**02.** $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são bissetrizes dos ângulos adjacentes $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$, respectivamente. Sabendo que o ângulos agudos $P\hat{O}Y$ e $X\hat{O}R$ medem, respectivamente, 50º e 55º, calcule a medida do ângulo agudo $P\hat{O}R$.

**Resolução:**

É muito importante que nesses casos você consiga fazer um esboço da situação problema. Note que esse exemplo é análogo ao anterior (mudamos os valores e as letras!).

Considere que $P\hat{O}X = a$.

Dessa forma, como $\overrightarrow{OX}$ é bissetriz de $P\hat{O}Q$ temos que $X\hat{O}Q = a$.

Analogamente, considere que $R\hat{O}Y = b$ e como $\overrightarrow{OY}$ é bissetriz de $Q\hat{O}R$ temos que $Y\hat{O}Q = b$.

Montamos agora um sistema pois sabemos que

$P\hat{O}Y = 50º$ e $X\hat{O}R = 55º$.

$P\hat{O}Y = 50º = 2a + b$

$X\hat{O}R = 55º = a + 2b$

Para resolver o sistema usaremos que $b = 50 - 2a$ .

$55 = a + 2(50 - 2a)$

$55 = a + 100 - 4a$

$55 - 100 = a - 4a$

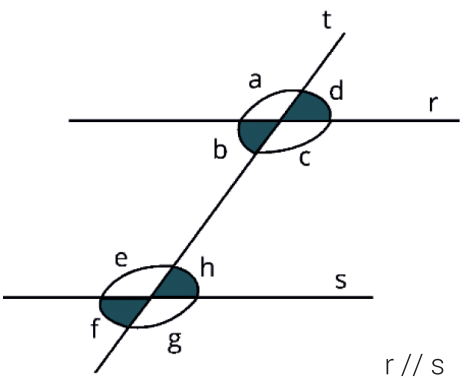
$-45 = -3a$

$a = 15$

Se $a = 15$ então $b = 50 - 2 \cdot 15 = 50 - 30 = 20$ .

O ângulo $P\hat{O}R$ é dado por $2a + 2b$, portanto valerá $2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 30 + 40 = 70$.

## ÂNGULOS FORMADOS POR RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL



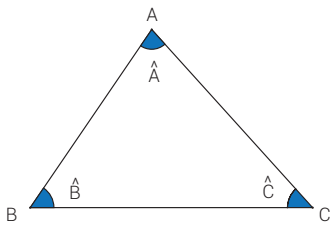

- Pares de ângulos
  Correspondentes: **a** e **e**; **b** e **f**; **d** e **h**; **c** e **g**.
  Alternos Internos: **b** e **h**; **c** e **e**.
  Alternos externos: **a** e **g**; **d** e **f**.
  Colaterais Internos: **b** e **e**; **c** e **h**.
  Colaterais Externos: **a** e **f**; **d** e **g**.

Assim, é possível concluir que

- Um par de ângulos correspondentes são sempre congruentes, isto é, possuem a mesma medida.
- Um par de ângulos alternos são sempre congruentes.
- Um par de ângulos colaterais são sempre suplementares, isto é, somam 180º.

## LEI ANGULAR DE TALES

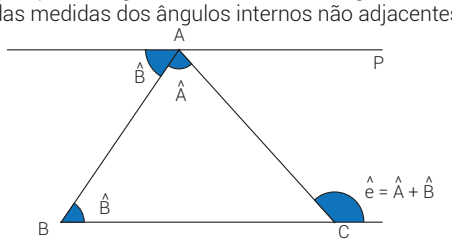
Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos mede 180º.




$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

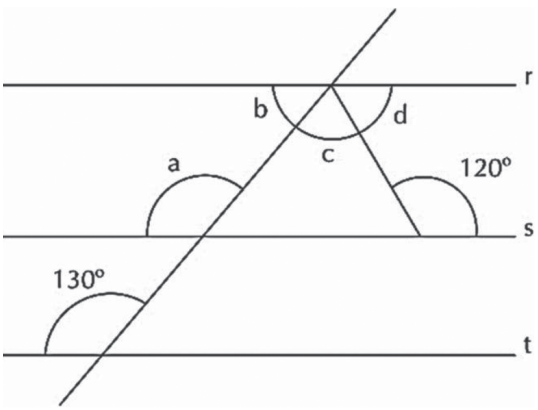
## TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.




**Exemplos:**

**01.** Na figura, r // s // t:




Dessa forma, calcule as medidas dos ângulos indicados.

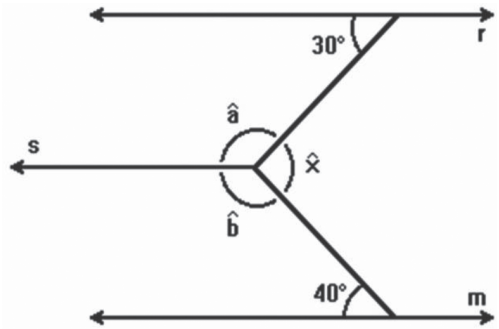
**Solução:**

É imediato que $a = 130º$ (correspondente) e $d = 60º$ (colateral interno do 120°).

Sabendo que a vale 130º fica fácil perceber que $b = 50º$. Como $b + c + d = 180º$ então calcularemos o valor de $c$.

Note que $50º + c + 60º = 180º \rightarrow 110º + c = 180º \rightarrow c = 70º$.

**02.** Na figura a seguir determine x sabendo que *r* // *s* e *s* // *m*.



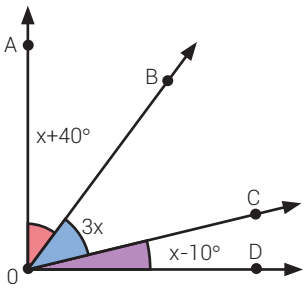

**Resolução:**

Conhecendo o conceito de ângulos colaterais internos é fácil perceber que $a = 150^o$ e $b = 140^o$. Dessa forma, podemos notar que $a + b + x = 360^o$ pois formam uma volta completa. Assim, $150^o + 140^o + x = 360^o \rightarrow 290^o + x = 360^o \rightarrow x = 70^o$.

## EXERCÍCIOS PROTREINO

**01.** Explique com suas palavras a definição do Teorema dos ângulos externos.

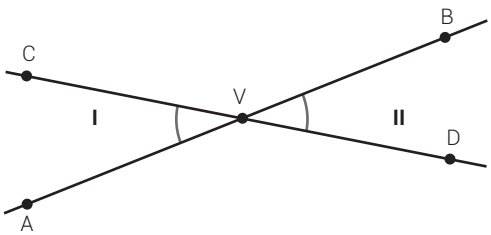
**02.** Sabendo que o ângulo AÔB é um ângulo reto, calcule o valor de x.




**03.** Dado dois ângulos suplementares 2x+40° e 6x-60°, encontre o valor de x.

**04.** Determine o complemento do suplemento de um ângulo que mede 130°.

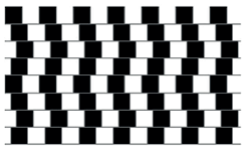
**05.** A imagem abaixo mostra o cruzamento entre duas retas e o vértice V, ponto de encontro entre as duas retas. Calcule o valor de ângulo $A\hat{V}D$ .

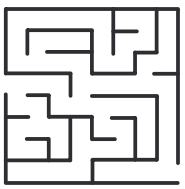


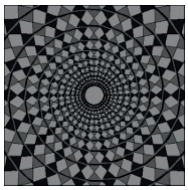

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (ENEM) Simetrias são encontradas, frequentemente, em nosso dia-a-dia. Elas estão nas asas de uma borboleta, nas pétalas de uma flor ou em uma concha do mar. Em linguagem informal, uma figura no plano é simétrica quando for possível dobrá-la em duas partes, de modo que essas partes coincidam completamente.

De acordo com a descrição acima, qual das figuras a seguir é simétrica?

a) 

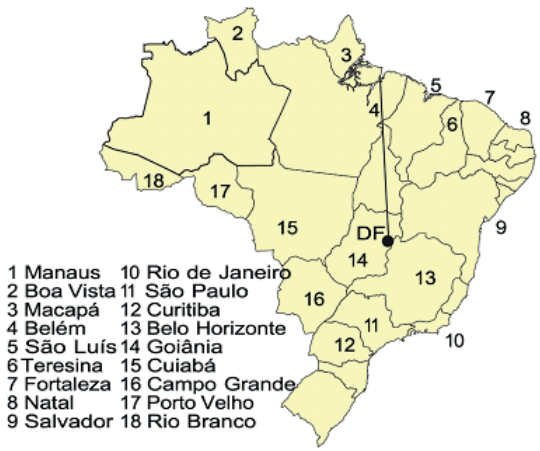
c) 

b) 

d)

**02.** (ENEM) Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília-DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

**Mapa do Brasil e algumas Capitais**



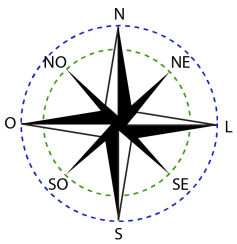

*SIQUEIRA, S. Brasil Regiões. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).*

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135º graus no sentido horário com a rota Brasília-Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo

avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

a) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.
b) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.
c) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.
d) Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.
e) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

**03.** (ENEM) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.




Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

1ª mudança: 135º no sentido anti-horário;

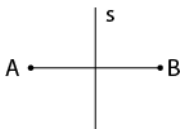
2ª mudança: 60º no sentido horário;

3ª mudança: 45º no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente. Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

a) 75º no sentido horário.
b) 105º no sentido anti-horário.
c) 120º no sentido anti-horário.
d) 135º no sentido anti-horário.
e) 165º no sentido horário.

**04.** (UERJ) Considerando o conceito de simetria, observe o desenho abaixo:



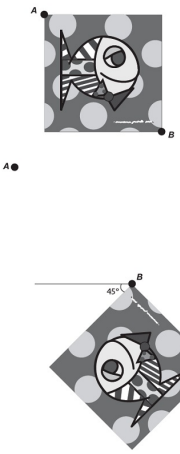

Os pontos A e B são simétricos em relação à reta s, quando s é a mediatriz do segmento AB.

Observe este novo desenho:

Em relação à reta s, a imagem simétrica da letra R representada no desenho é

a)
c)
b)
d)

**05.** (ENEM) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45º com a linha do horizonte.

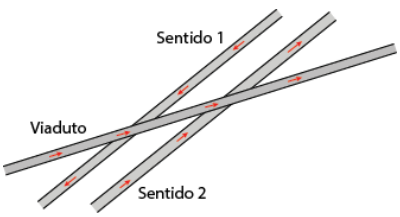



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360º.

Aforma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

a) 90º no sentido horário.
b) 135º no sentido horário.
c) 180º no sentido anti-horário.
d) 270º no sentido anti-horário.
e) 315º no sentido horário.

**06.** (LAPLACE 2020) No esboço de um projeto de construção, um viaduto passará sobre duas avenidas paralelas.




O menor ângulo formado pela avenida que segue pelo sentido 1 e o viaduto é de 30º. Qual é o maior ângulo formado pela avenida que segue no sentido 2 e o viaduto?

a) 60º b) 90º c) 120º d) 150º e) 210º

**07.** (ENEM) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

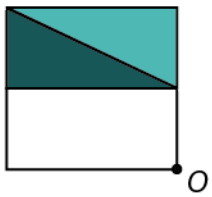
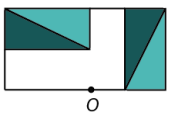
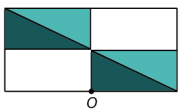
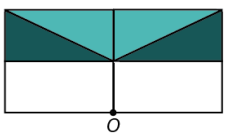


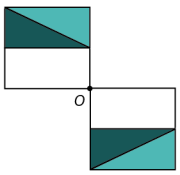

Figura original

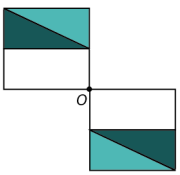
A imagem que representa a nova figura é:

a)


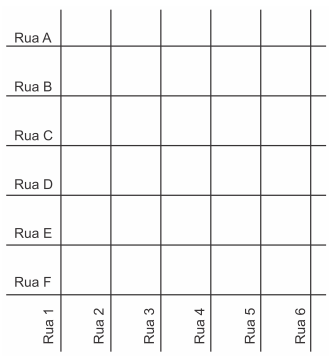

b)



c)



d)



e)



**08.** (ENEM) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.

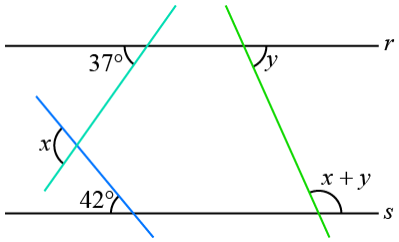



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C. b) 4 e C. c) 4 e D. d) 4 e E. e) 5 e C.

**09.** (COTIL 2014) Sendo r//s, qual o valor de y?




a) 101°
b) 79°
c) 55°50'
d) 50°30'
e) 45°50'

**10.** (ENEM) Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

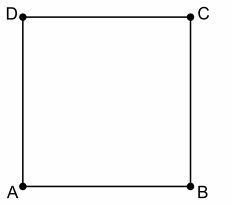



Figura 1

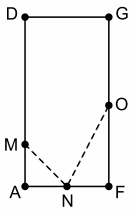
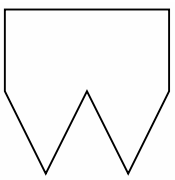
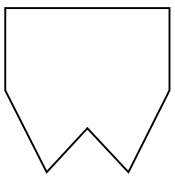


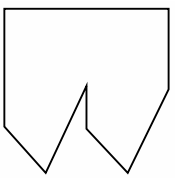

Figura 2

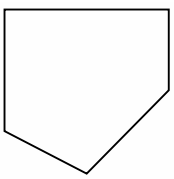
Após os cortes, a folha e aberta e a bandeirinha esta pronta.

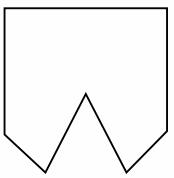
A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é

a)


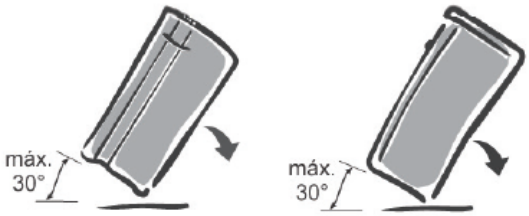
b)


c)


d)


e)


**11.** (IFPE) Analisando o manual de instruções do refrigerador RDE30, observamos um destaque para o momento de transportá-lo. Observe abaixo o trecho desse manual sobre transporte do refrigerador.




**TRANSPORTE**

Caso necessite transportar seu Refrigerador em pequenos deslocamentos, incline-o para trás ou para um dos lados com ângulo máximo de 30°. Caso necessite transportar seu Refrigerador em longos deslocamentos (ex.: mudança), movimente-o em pé.

Disponível em: <https://www.colombo.com.br/produtos/111120/111120.pdf?descricao=...>. Acesso: 02 out.2016

Sabendo que o ângulo máximo de inclinação do refrigerador é 30°, a metade do suplemento desse ângulo é de

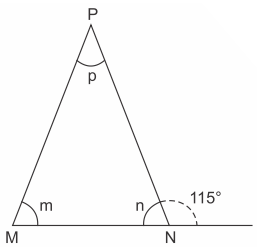
a) 60°. b) 75°. c) 45°. d) 30°. e) 15°.

**12.** (UFRGS) Em um triângulo ABC, BÂC é o maior ângulo e $A\hat{C}B$. é o menor ângulo. A medida do ângulo BÂC é 70º maior que a medida de $A\hat{C}B$. A medida de BÂC é o dobro da medida de $A\hat{B}C$.

Portanto, as medidas dos ângulos são

a) 20º, 70º e 90º
b) 20º, 60º e 100º
c) 10º, 70º e 100º
d) 30º, 50º e 100º
e) 30º, 60º e 90º

**13.** (MACKENZIE)




O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

a) 50º, 60º, 65º
b) 65º, 65º, 50º
c) 65º, 50º, 65º
d) 50º, 50º, 80º
e) 80º, 80º, 40º

**14.** (ENEM) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3' 0'' a leste do Meridiano de Greenwich.

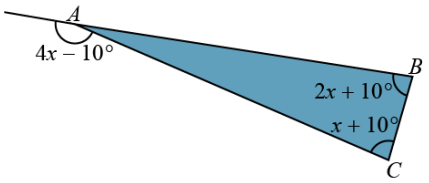
Dado: 1º equivale a 60' e 1' equivale a 60''.

PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é:

a) 124,02°
b) 124,05°
c) 124,20°
d) 124,30°
e) 124,50°

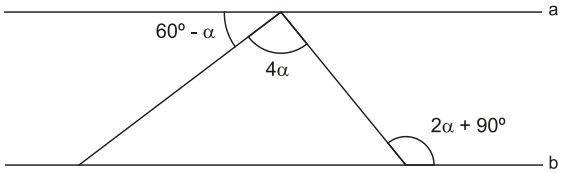
**15.** (COTIL) No triângulo ABC, as expressões indicadas em cada ângulo representam as medidas, em graus, dos respectivos ângulos.




A medida do ângulo B é de:

a) 30
b) 40
c) 50
d) 70
e) 110

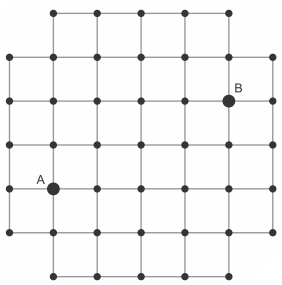
**16.** (MACKENZIE) Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.




A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

a) um número primo maior que 23.
b) um número ímpar.
c) um múltiplo de 4.
d) um divisor de 60.
e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

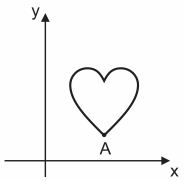
**17.** (ESPM) A figura abaixo representa uma parte de um bairro, onde os segmentos são as ruas e os pontos são as esquinas. Como só podemos caminhar pelas ruas, a distância entre os pontos A e B é de 6 quarteirões.




O número de esquinas assinaladas no mapa, que são equidistantes de A e B, é igual a:

a) 5
b) 6
c) 9
d) 8
e) 7

**18.** (ENEM) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:




1ª. Reflexão no eixo x;
2ª. Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;
3ª. Reflexão no eixo y;
4ª. Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;
5ª. Reflexão no eixo x.

Disponível em: www.pucsp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

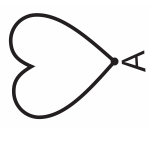
Qual a posição final da figura?

a)

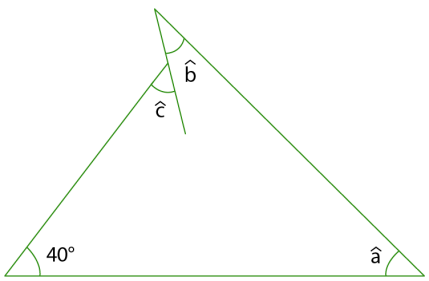
b)

c)

d)

e) 

**19.** (LAPLACE) Se $S = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$, considerando a figura abaixo, podemos afirmar que:




a) S = 180°
b) S = 80°
c) S = 140°
d) S = 360°

**20.** (CFT 2015) Os ângulos AÔB, BÔC e CÔD são adjacentes e tais que AÔB = CÔD = 22°. Sabendo-se que a soma deles é inferior a 180°, qual é a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de AÔC e BÔD?

a) 20°. b) 21°. c) 22°. d) 23°. e) 24°.

## EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

**01.** (CFTCE) Dois ângulos são suplementares. Os 2/3 do maior excedem os 3/4 do menor em 69°. Determine os ângulos.

**02.** Dados dois pontos distintos A e B responda:

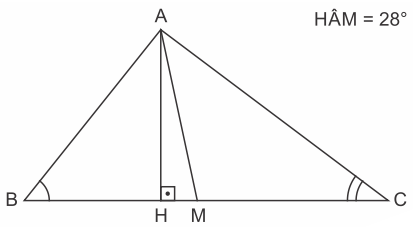
a) Quantas retas você pode traçar passando pelo ponto A?
b) Quantas retas você pode traçar passando pelo ponto B ?
c) Quantas retas você pode traçar passando por A e B ao mesmo tempo?

**03.**

a) A metade de um ângulo menos a quinta parte do seu complemento mede 38°. Qual é esse ângulo?
b) 2/3 do complemento de um ângulo mais 1/5 do suplemento do mesmo ângulo perfazem 70°. Qual é esse ângulo?

**04.** Dois ângulos são complementares. Prove que as bissetrizes desses ângulos formam um ângulo de 45°.

**05.** Um triângulo ABC é retângulo em A. A altura AH forma com a mediana AM um ângulo de 28°. Calcule os ângulos agudos do triângulo ABC.




## GABARITO

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. B | 05. B | 09. D | 13. A | 17. E |
| 02. B | 06. D | 10. E | 14. B | 18. C |
| 03. E | 07. E | 11. B | 15. D | 19. C |
| 04. C | 08. C | 12. D | 16. D | 20. C |

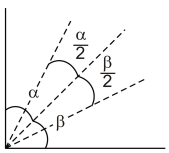
**EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO**

01. 36° e 144°

02.
a) Infinitas; b) Infinitas; c) Uma

03.
a) 80°; b) 30°.

04. $\frac{90-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$




05. ABC = 59° e ACB= 31