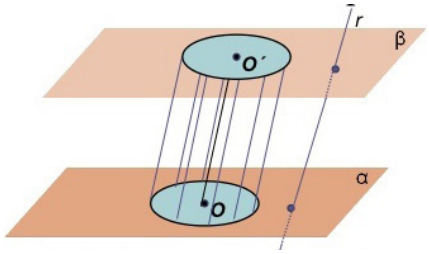
GEOMETRIA ESPACIAL: CILINDROS, CONES E ESFERAS

CILINDRO

Os cilindros são muito parecidos com os prismas, porém as suas bases são regiões não-poligonais, assim, podemos descrevê-los da seguinte forma: considere dois planos paralelos α e β, uma região plana não-poligonal convexa S contida no plano α e uma reta r que intersecta os planos. Dá-se o nome de cilindro à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos à reta r, cujas extremidades estão um na região α e a outra no plano β.

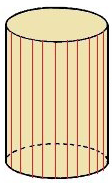


Chamamos de cilindros circulares se as bases forem círculos.

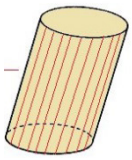
Classificação

Assim como os prismas, os cilindros também são classificados quanto a inclinação podendo ser chamados de retos ou oblíquos.

Cilindro reto

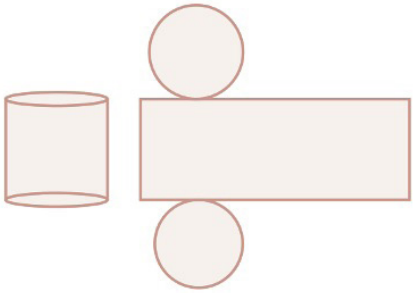


Cilindro Oblíquo



Áreas e Volumes

A área total de um cilindro reto é composta por três partes, as duas bases do cilindro (que são círculos) e a sua parte lateral.



Como a podemos ver a superfície lateral pode ser planificada e gera um retângulo, cuja base coincide com o comprimento do círculo da base e a altura é a mesma do cilindro. Dessa forma, podemos representar a área total por:

$$At = 2.Ab + Al = 2.\ \pi R^2 + 2\pi Rh$$

O volume de um cilindro é calculado pelo produto da área de sua base pela sua altura:

$$V = Ab.h = \pi R^2.h$$

Cones Circulares

Chamamos de cone circular todo sólido convexo que:

I. Possui um círculo chamado base.

II. A superfície lateral é formada por segmentos (geratrizes) que partem do círculo (circunferência) até um ponto fora dele chamado vértice do cone.

Elementos do Cone

Base – S

Raio – r

Vértice – V

Geratriz – g

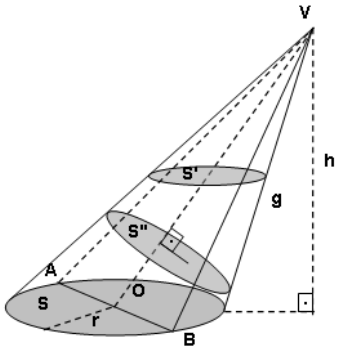
Eixo – OV

Altura – h

Seção transversal – S'

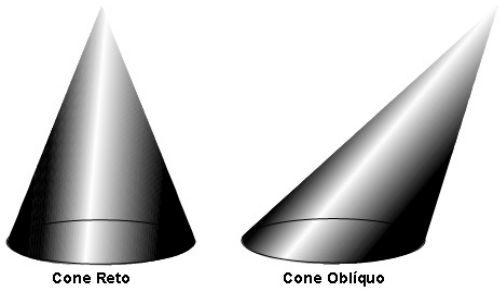
Seção reta – S''

Seção meridiana – AVB



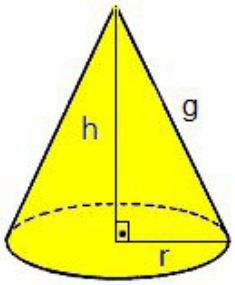
Cones Retos e Cones Oblíquos

Um cone é chamado de cone reto (ou cone de revolução) quando o eixo é perpendicular ao plano da base. Neste caso as suas geratrizes têm todas a mesma medida. Em caso contrário o cone é chamado oblíquo.



Propriedade do Cone de Revolução

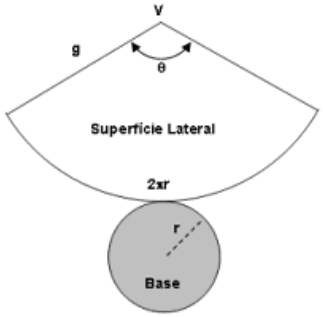
Aplicando o teorema de Pitágoras podemos relacionar as medidas de g, h e r: $g^2=h^2+r^2$



Área do Cone

Área Lateral – é a área da superfície lateral.

Área Total – é a soma da área lateral com a área da base.



$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = \pi rg + 2\pi r^2$$

$$A_T = \pi r(g + r)$$

Também é possível calcular o ângulo θ (em radianos) da planificação do cone reto.

$$\theta = \frac{2\pi r}{g}$$

Volume do Cone

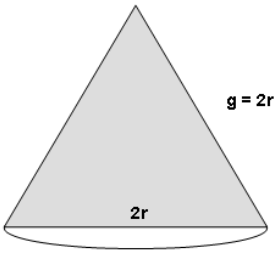
Se considerarmos que o cone é uma pirâmide cujo polígono da base pode ser substituído por uma circunferência, e em consequência forma a superfície lateral redonda, podemos afirmar que:

$$V_{Cone} = V_{Pirâmide}$$

$$V_{Cone} = \frac{A_B.h}{3} \Rightarrow V_{Cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

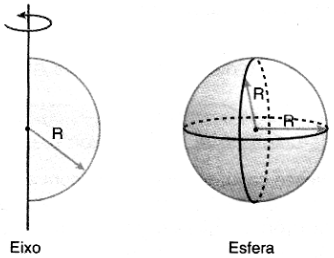
Cone Equilátero

É o cone em que a seção meridiana é um triângulo equilátero.



ESFERAS

Esfera é o sólido gerado por uma rotação completa de um semicírculo de centro O e raio R em torno de um eixo contendo seu diâmetro.

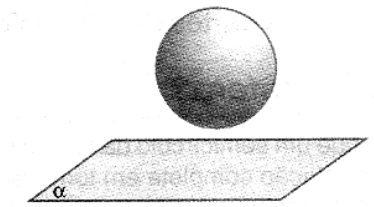


A esfera é constituída por uma região interior (conjunto de pontos, cuja distância ao centro é menor que R) e pela superfície esférica (conjunto de pontos, cuja distância ao centro é igual a R). Os pontos não pertencentes à esfera, constituem a região exterior (conjunto de pontos, cuja distância ao centro é maior que R).

Seção plana em uma esfera

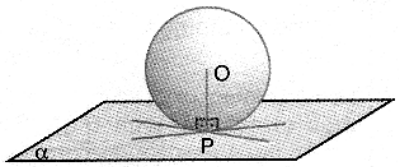
Um plano α e uma esfera podem ocupar as seguintes posições relativas:

- O plano α não intersecta a esfera.



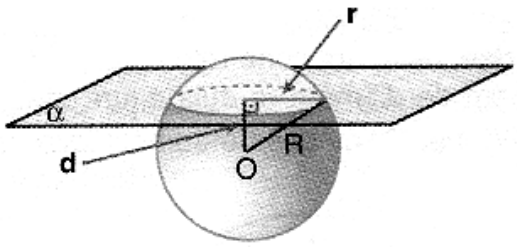
O plano α é tangente à esfera (a esfera e o plano possuem apenas um ponto P em comum). O ponto P em comum é chamado ponto de tangência. O raio da esfera no ponto tangência

- (OP) é perpendicular ao plano α.



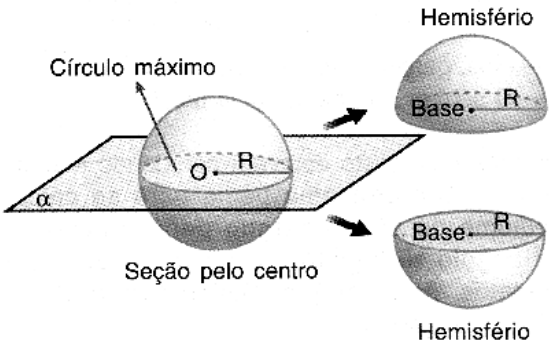
O plano α é secante à esfera Neste caso, o plano α secciona a esfera segundo um círculo de raio r. Supondo que α não passe pelo centro da esfera, r < R e a distância d do centro O da esfera ao plano α pode ser obtida pela relação:

$$R^2 = d^2 + r^2$$



Partes de uma esfera

Suponha que um plano α seccione uma esfera, passando pelo seu centro, como mostra a figura a seguir:

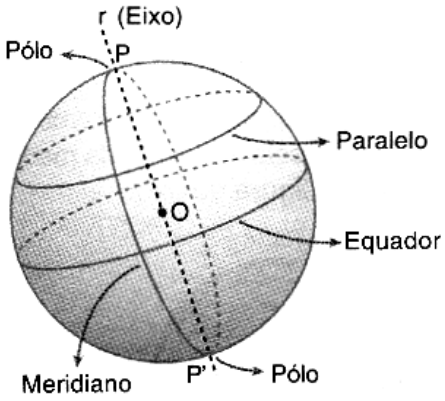


A seção obtida é um círculo de raio igual ao da esfera. Ele é chamado círculo máximo da esfera. Além disso o plano α divide a esfera em duas partes. Cada uma delas é chamada hemisfério, sendo a secção a base dos dois hemisférios.

Numa superfície esférica, alguns pontos e linhas recebem nomes especiais. Observe a figura ao lado em que consideramos a reta r como eixo da esfera. Os pontos P e P′ em que o eixo intersecta a superfície esférica são os polos.

A intersecção da superfície esférica com um plano que contenha o eixo é um meridiano. A intersecção da superfície esférica com um plano perpendicular ao eixo é um paralelo.

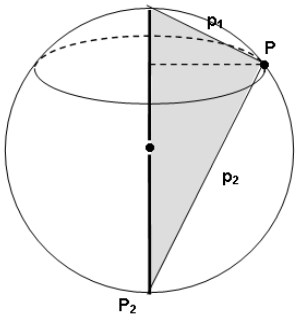
O paralelo cujo plano passa pelo centro da esfera é o equador.



Distâncias polares, em um paralelo de uma esfera, são as distâncias p_1 e p_2 de cada um dos polos a um ponto arbitrário do paralelo.

Relação entre as distâncias polares:

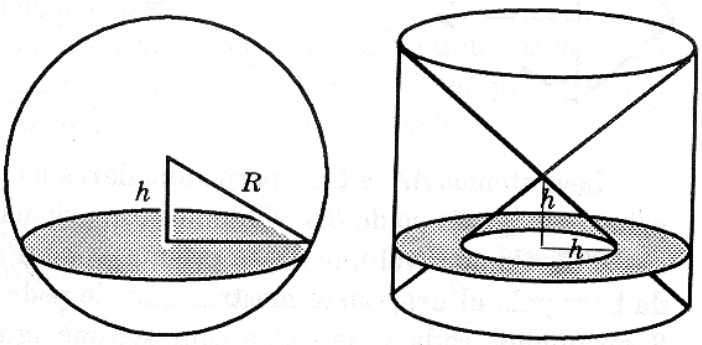
Aplicando o teorema de Pitágoras: $(2R)^2 = (p_1)2 + (p_2)2$



Volume da Esfera

Consideremos um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e cuja altura mede 2R. Com vértices no ponto médio do segmento que liga os centros das bases, construamos dois cones retos com bases coincidentes com as bases do cilindro. O sólido assim obtido é limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e interiormente pelos dois cones. Portanto o volume desse sólido é:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3} \right) = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$$



Todo plano distante h ($0 \leq h \leq R$) do centro da esfera (ou do vértice comum dos cones) produz seções de mesma área nos dois sólidos: um círculo e um anel circular, ambos área igual $\pi\left(R^2 - h^2\right)$.

Segue, então, do Princípio de Cavalieri que o volume da esfera = volume desse sólido

$V = \frac{4}{3}.\pi R^3$.