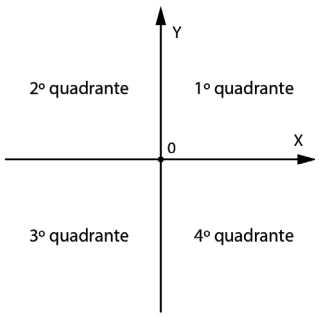
O CONJUNTO R²

Nele, representamos os pares ordenados de números reais. Em outras palavras, o conjunto R² é aquele formado por pares ordenados que tem os valores de x e de y como números reais.



O eixo x também é chamado de eixo das abscissas, assim como o eixo y também é conhecido como eixo das ordenadas. Os pares ordenados são representados no sistema de coordenadas cartesianas, representado na figura abaixo.

PARES ORDENADOS

São os elementos do conjunto R². Vejamos algumas relações entre eles.

PARES ORDENADOS IGUAIS

Dois pares ordenados são iguais quando os valores das abscissas são iguais, o mesmo acontecendo com os valores das ordenadas.

Se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, temos que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

SOMA/SUBTRAÇÃO DE PARES ORDENADOS

Para efetuar essas operações, devemos trabalhar isoladamente com as abscissas e também isoladamente com as ordenadas.

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

MULTIPLICAÇÃO DE PAR ORDENADO POR NÚMERO REAL

Quando multiplicamos um número real por um par ordenado, devemos multiplicar os valores da abscissa e da ordenada pelo número real em questão.

Se $k \in R$, temos que $k.(x_1, y_1) = (k.x_1, ky_1)$

VETOR

É um segmento orientado que possui uma extremidade como origem (início do vetor) e outro ponto como extremidade (final do vetor). Veja a figura abaixo:



O vetor representado nessa figura tem origem A e extremidade em B, podendo ser descrito como o vetor AB. O vetor possui três características principais.

- Módulo: é o tamanho do vetor. No caso, é a distância entre os pontos A e B.
- Direção: é a reta que contém o vetor. No vetor representado, dizemos que a direção é a reta que contém o segmento AB.
- Sentido: Caracteriza de qual ponto para qual ponto o vetor está orientado. Nesse caso, o sentido do vetor é do ponto A para o ponto B.

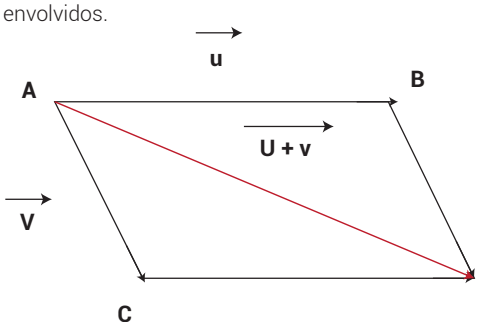
VETORES IGUAIS

Existem duas possibilidades para termos vetores iguais.

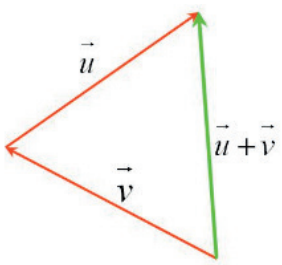
- Dois vetores nulos são sempre iguais.
- Dois vetores não-nulos são iguais se possuírem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

ADIÇÃO DE VETORES

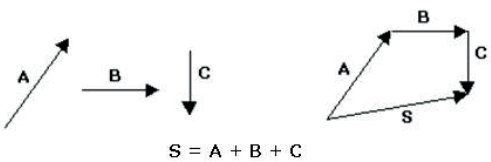
Pela Regra do Paralelogramo: unimos as origens dos dois vetores envolvidos.



- Pela Regra do Triângulo: Unimos a extremidade do primeiro vetor com a origem do próximo vetor.

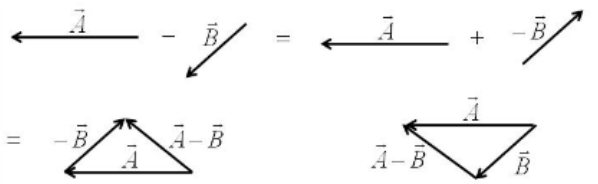


- Pela Regra do Polígono: É uma consequência da Regra do Triângulo para a adição de mais de 2 vetores.



SUBTRAÇÃO DE VETORES:

Trabalharemos com o vetor simétrico. Em outras palavras, criar a subtração u – v é o mesmo que somar os vetores u + (-v). Vejamos:



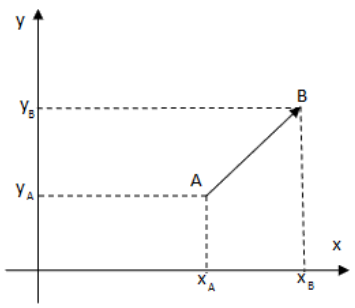
MULTIPLICAÇÃO DE VETOR POR NÚMERO REAL

Na tabela a seguir, k é o número pelo qual multiplicaremos um vetor. Observe:

k	módulo	direção	Sentido
k > 1	Aumenta	Mantém	Mantém
K = 1	Mantém	Mantém	Mantém
0 < k < 1	Diminui	Mantém	Mantém
K = 0	Anula o vetor		
-1 < k < 0	Diminui	Mantém	Inverte
K = -1	Mantém	Mantém	Inverte
K < -1	Aumenta	Mantém	Inverte

VETORES NO PLANO

Posicionando o vetor no plano, podemos calcular os valores envolvidos na composição do mesmo.

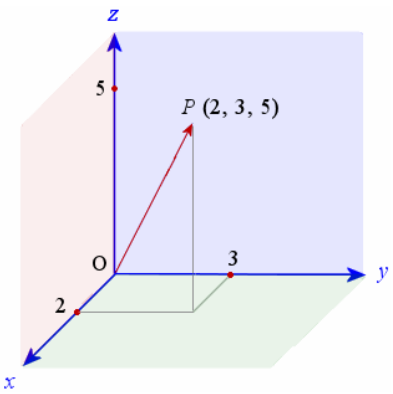


Para calcular as coordenadas do vetor, faremos o seguinte cálculo:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

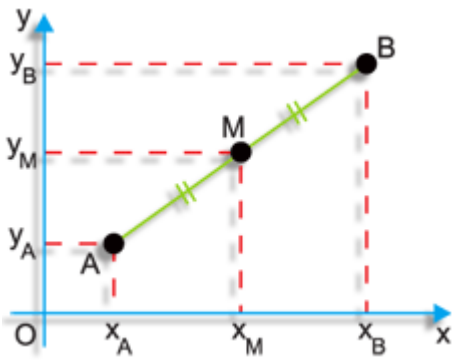
VETORES NO R³

Trabalharemos de maneira análoga ao que foi feito até aqui. As maiores diferenças são a presença de um eixo adicional (eixo z ou eixo das cotas) e o uso de um terno ordenado para cada ponto, como por exemplo A = (x_A, y_A, z_A). Na figura abaixo temos o vetor centrado na origem, cujas coordenadas cartesianas são OP=(2, 3, 5).



PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Observe a figura.



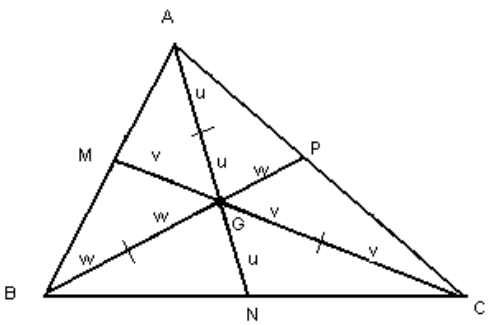
Os vetores AM e MB são iguais. Assim:

$M - A = B - M \rightarrow 2M = A + B \rightarrow M = \frac{A+B}{2}$

BARICENTRO

É o ponto de encontro das medianas de um triângulo.

Observe a figura.



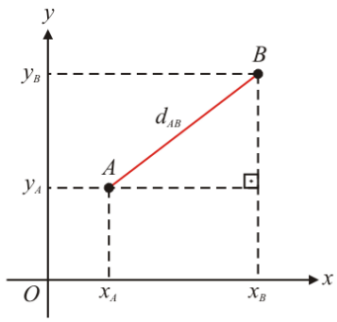
Temos que o vetor AG é o dobro do vetor GN. Assim:

$G - A = 2 \cdot (N - G) \rightarrow G - A = 2N - 2G \rightarrow 3G = A + 2N$

$3G = A + 2 \cdot \frac{(B+C)}{2} \rightarrow 3G = A + B + C \rightarrow G = \frac{A+B+C}{3}$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Criaremos uma fórmula para o cálculo para essa distância a partir do Teorema de Pitágoras.



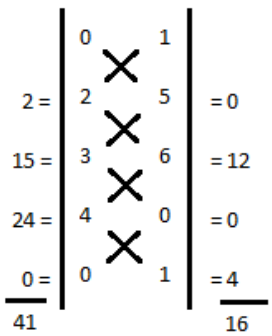
$d = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \rightarrow \mathbf{d_{(A,B)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

ÁREA DE UM POLÍGONO

Se sabemos as coordenadas dos vértices de um polígono no R^2, podemos calcular a sua área por um processo conhecido como regra prática. Para isso, devemos dispor os vértices do polígono em questão um abaixo do outro, de forma a obedecer a disposição sempre de vértices vizinho, seja no sentido horário ou no sentido anti-horário. O vértice que inicia esse processo deve ser repetido no final de tal lista. Criamos os produtos para a direita e para a esquerda, de forma a estabelecer a diferença entre tais somas. Tal diferença é denominada Δ. Finalmente, calculamos o módulo de Δ e dividimos o resultado encontrado por dois. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo:

Calcular a área do polígono cujos vértices são os pontos A=(0,1), B=(2,5), C=(3, 6) e D=(4,0).



$\Delta = 16 - 41 = -25 \rightarrow S = \frac{|-25|}{2} = 12{,}5$ u.a.

PONTOS COLINEARES

São pontos que estão em uma mesma linha. Assim, não produzem área, tendo Δ = 0. Ou seja:

Se A, B e C são pontos colineares → **Δ = 0**

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UNIGRANRIO) Considere, no IR^2, o triângulo de vértices A(6,1), B(1,0) e C(5,3). A medida da mediana relativa ao vértice C desse triângulo é igual a:

a) $\sqrt{97}/2$
b) $\sqrt{37}/2$
c) $\sqrt{37}/2$
d) $\sqrt{23}/2$
e) $\sqrt{41}/2$

Resolução: B

As coordenadas do ponto médio do segmento AB serão:

$M = \frac{A+B}{2} \rightarrow M = \frac{(6,1)+(1,0)}{2} \rightarrow M = \frac{(7,1)}{2} \rightarrow M = (3{,}5;\ 0{,}5)$

A distância deste ponto até o ponto C = (5, 3) será o comprimento da mediana desejada. Assim:

$d_{MC} = \sqrt{(1{,}5)^2 + (2{,}5)^2} \rightarrow d_{MC} = \sqrt{2{,}25 + 6{,}25} \rightarrow d_{MC} = \sqrt{8{,}5} \rightarrow \mathbf{d_{MC}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

02. (SOUZA MARQUES) Qual é o valor de p para o qual os pontos A (2, 3), B (6, −1) e C (p, 2) sejam vértices de um triângulo retângulo de hipotenusa BC?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução: A

Teremos os seguintes comprimentos:

$BC = d_{BC} = \sqrt{(6-p)^2 + (3)^2}$

$AB = d_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$

$AC = d_{AC} = \sqrt{(p-2)^2 + (1)^2}$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$(\sqrt{(6-p)^2 + (3)^2})^2 = (\sqrt{(4)^2 + (-4)^2})^2 + (\sqrt{(p-2)^2 + (1)^2})^2$

$36 - 12p + p^2 + 9 = 32 + p^2 - 4p + 4 + 1 \rightarrow 45 - 12p = 37 - 4p \rightarrow$

$\rightarrow 8 = 8p \rightarrow \mathbf{p = 1}$

03. (PUC-RS) A área do polígono ABCD, onde A (2, 2), B (6, 6), C (4, 8) e D (0, 6) são os seus vértices, é:

a) 3 b) 6 c) 12 d) 18 e) 36

Resolução: D

O determinante será:

$\Delta = 12 + 48 + 24 - 12 - 24 - 12 = 36$

Assim, a área será de:

$A = \frac{|\Delta|}{2} \rightarrow A = \frac{|36|}{2} \rightarrow A = \frac{36}{2}$ → **A = 18 u.a. (Alternativa D)**

ANOTAÇÕES