ESTUDO DA RETA

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Seja a reta r definida pelos pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$. Todo ponto P(x,y), pertencente a reta r, deve estar alinhado com A e B.

Logo, desenvolvendo-se o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (y_A - y_B)\,x + (x_B - x_A)y + x_A\,y_B - x_B\,y_A = 0$$

Podemos escrever ax + by + c = 0, onde:

$$\begin{cases} a = y_A - y_B \\ b = x_B - x_A \\ c = x_A y_B - x_B y_A \end{cases}, \text{ sendo } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Dada uma reta r de equação ax + by + c = 0, sua equação reduzida é obtida isolando-se y como mostra o exemplo abaixo.

$$ax + by + c = 0$$
$$by = -ax - c$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ teremos:

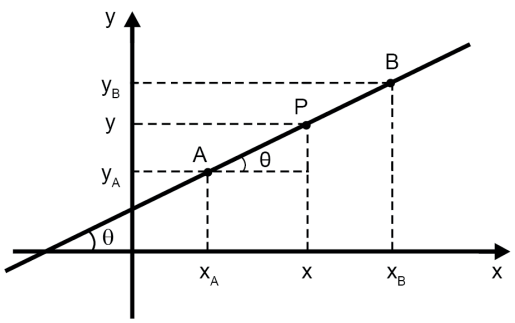
$$\boxed{y = mx + n}$$

Onde:

- m é chamado de coeficiente angular e n é chamado de coeficiente linear.

COEFICIENTE ANGULAR (m)

O coeficiente angular é responsável pela declividade da reta, pois é igual a tangente do ângulo de inclinação.



m = tg θ ou ainda

$$m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

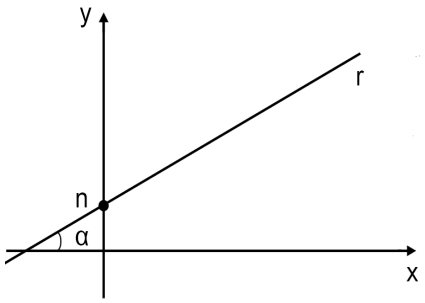
PROEXPLICA

Para descobrir a equação da reta que passa por um ponto $P(x_P, y_P)$ dado e coeficiente angular m conhecido usamos a fórmula:

$$y - y_P = m\,(x - x_P)$$

COEFICIENTE LINEAR (n)

O coeficiente linear é o responsável por nos mostrar a interseção da reta com o eixo y.



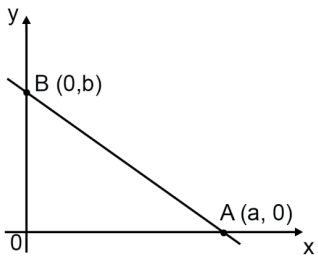
y = mx + n

y = n eixo y → x = 0

Logo, o ponto é (0,n)

EQUAÇÕES SEGMENTÁRIAS

Consideremos uma reta r que não passa pelo ponto (0,0), intercepta o eixo x no ponto A (a,0) e o eixo y no ponto (0,b).



Vamos agora encontrar a equação reduzida da reta acima.

Calculando o coeficiente angular, teremos:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} = \frac{-b}{a}$$

Utilizando a forma reduzida y = mx + n em que $m = \frac{-b}{a}$ e n = b chegaremos a:

$$y = \frac{-b}{a}x + b \rightarrow ay = -bx + ab \rightarrow ay + bx = ab$$

Dividindo os dois membros por ab ($x \neq 0$ e $y \neq 0$), encontraremos:

$$\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab}$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

↑ Ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y.

↑ Abscissa do ponto de interseção da reta com o eixo x.

PROEXPLICA

Podemos chegar ao mesmo resultado considerando um ponto qualquer P(x,y) e fazendo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta é a forma segmentária da equação da reta que não passa por (0,0) e intercepta os eixos nos pontos (a,0) e (0,b).

Exemplo:

- A forma segmentária da equação da reta que corta os eixos nos pontos (2,0) e (0,-3) é:
- $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$
- A reta cuja equação segmentária é $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ corta os eixos nos pontos (-4,0) e (0,3).
- Se y = 2x – 3 é a equação reduzida da reta podemos chegar a forma segmentária da seguinte forma:

$$y=2x-3 \rightarrow 2x-y=3 \rightarrow \frac{2x}{3}-\frac{y}{3}=\frac{3}{3} \rightarrow \frac{2x}{3}+\frac{y}{-3}=1 \rightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}=1$$

Equação segmentária da reta que passa nos pontos $(\frac{3}{2}, 0)$ e (0, -3).

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

São estabelecidas duas equações em função de outra variável. Observe abaixo:

Exemplo:

Dada a reta r de equação igual a 2x + 3y – 6 = 0, vamos encontrar as suas equações paramétricas.

$2x = 6 - 3y$

$x = 3 - \frac{3}{2}y$

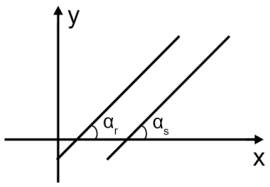
$x = 3\left(1-\frac{y}{2}\right)$. Sendo $t = 1-\frac{y}{2}$, temos que:

$x = 3t$ e $y = 2 - 2t$

que são chamadas de equações paramétricas de r.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

PARALELAS



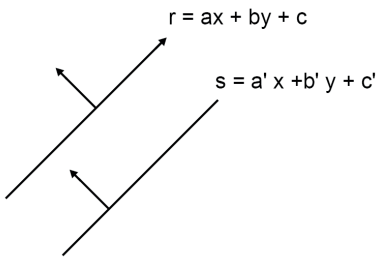
r // s

$\alpha_r = \alpha_s$

$tg\ \alpha_r = tg\ \alpha_s$

$\boxed{m_r = m_s}$

Análise Vetorial:

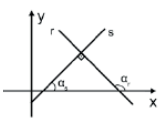


Se duas retas são paralelas, então os vetores normais são paralelos. Logo: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$

PROEXPLICA

Caso os coeficientes lineares sejam iguais, as retas serão coincidentes.

PERPENDICULARES



$r \perp s$

$\alpha_r = \alpha_s + 90^o$

$tg\ \alpha_r = -\ cotg\ \alpha_s$

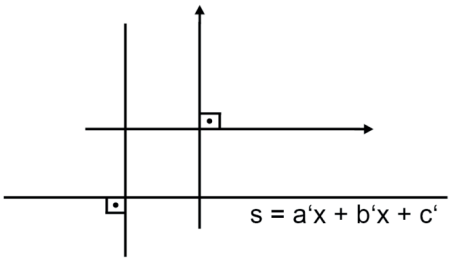
$$tg\ \alpha_r = -\frac{1}{tg\ \alpha}$$

$$mr = -\frac{1}{m_s}$$

ou ainda

Análise Vetorial:

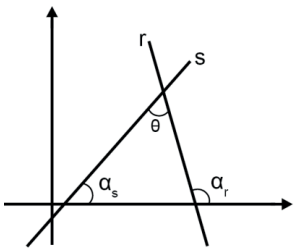
$r = ax + by + c$



$r \perp s \rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

Se duas retas são perpendiculares, então os vetores normais são perpendiculares.

ÂNGULO FORMADO POR DUAS RETAS



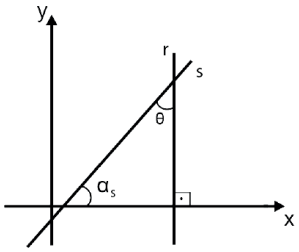
$$\alpha_r = \alpha_s + \theta$$
$$\theta = \alpha_r - \alpha_s$$

$$tg\,\theta = tg(\alpha_r - \alpha_s) = \frac{tg\,\alpha_r - tg\,\alpha_s}{1 + tg\,\alpha_r \cdot tg\,\alpha_s}$$

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}}$$

Caso θ seja agudo: $tg\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$

PROEXPLICA

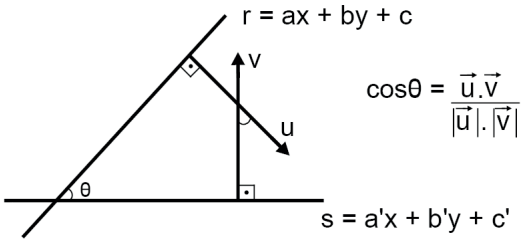


Se uma das retas concorrentes estiver na posição vertical, temos que o ângulo agudo $\theta = 90^\circ - \alpha_s$

e $tg\theta = \left|\frac{1}{m_s}\right|$

Análise vetorial:

O ângulo entre duas retas pode ser calculado utilizando-se os vetores normais da seguinte forma:



$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Exemplo:

Calcule o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 3)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 6 = 5$

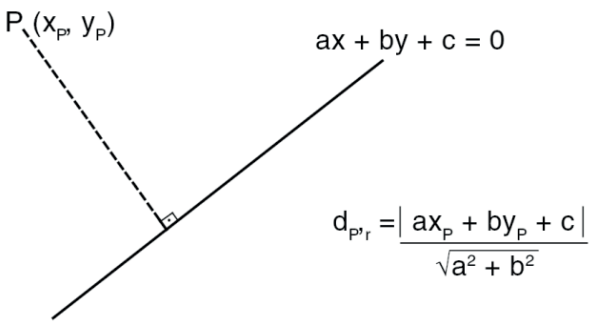
$|\vec{u}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = 45°$

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Seja a reta r de equação ax + by + c = 0 e o ponto $P(x_P, y_P)$. A distância entre a reta r e o ponto P é dada por:



EXERCÍCIOS PROTREINO

01. Determine a posição relativa entre as duas retas a seguir:

r = -3x + y = 0 e s = -x + 2y -1 = 0

02. Expresse a equação da reta que passa pelo ponto P(-2, 4) e que tem inclinação de 45° em relação ao eixo das abcissas.

03. Calcule o coeficiente angular da reta 5x +3y + 13 = 0.

04. Determine o valor da tangente do ângulo agudo α formado pelas retas 3x + 2y + 2 = 0 e -x + 2y + 5 = 0.

05. Calcule a distância do ponto (-2, 3) ao eixo das ordenadas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UPF) Num referencial xy, A e B são dois pontos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. A equação que pode representar a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ é:

a) $3x + 3y = 0$

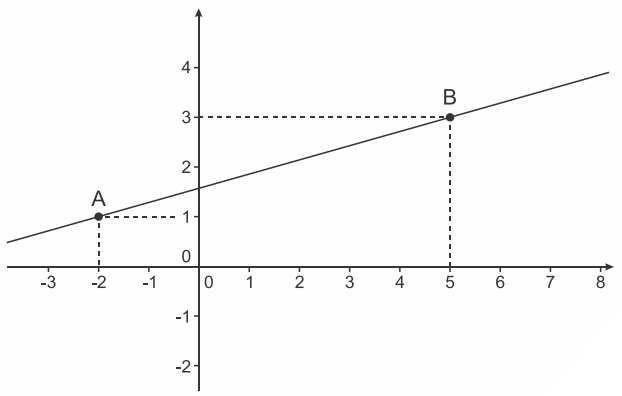
b) $x = 0$

c) $y = 0$

d) $3x - 3y = 0$

e) $\frac{x+y}{2} = 0$

02. (UNISINOS) A equação da reta que passa pelos pontos A e B da figura abaixo é dada por:



a) $2y - 7x = 11$

b) $2x - 7y = -11$

c) $2x - 7y = 11$

d) $2x - 3y = -5$

e) $2x - 3y = 1$

03. (UFPR) Considere a reta r de equação y = 2x + 1. Qual das retas abaixo é perpendicular à reta r e passa pelo ponto P = (4,2)?

a) $y = \frac{1}{2}x$

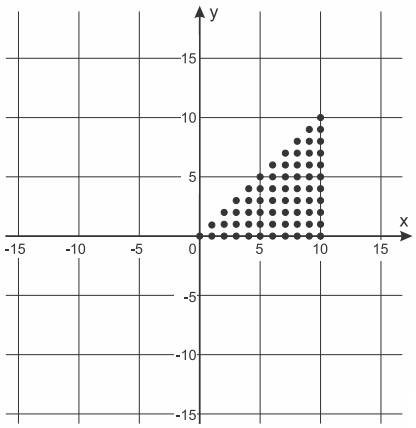
b) $y = -2x + 10$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

d) $y = -2x$

e) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

04. (ENEM) Para criar um logotipo, um profissional da área de *design* gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.



Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que

a) $0 \le x \le y \le 10$

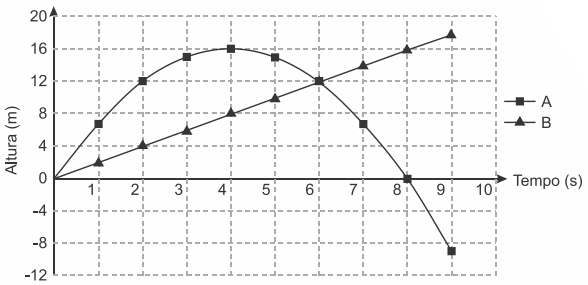
b) $0 \le y \le x \le 10$

c) $0 \le x \le 10, 0 \le y \le 10$

d) $0 \le + y \le 10$

e) $0 \le x + y \le 20$

05. (ENEM) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.

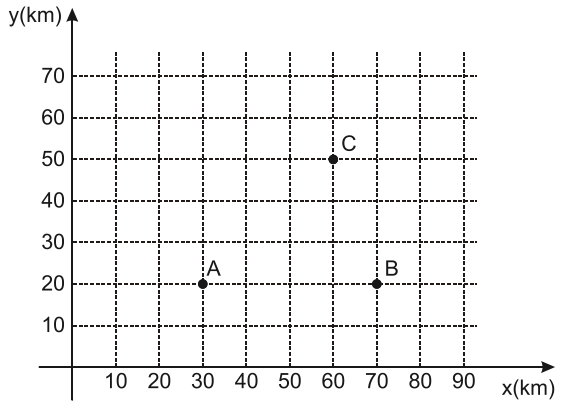
b) diminuir em 4 unidades.

c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

06. (ENEM) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

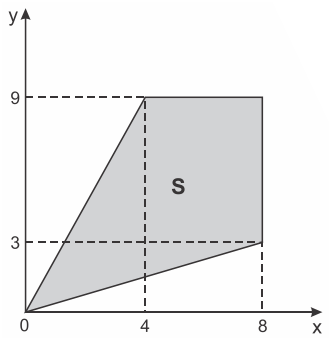


A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65 ; 35).
b) (53 ; 30).
c) (45 ; 35).
d) (50 ; 20).
e) (50 ; 30).

07. (ENEM 2ª APLICAÇÃO) Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.

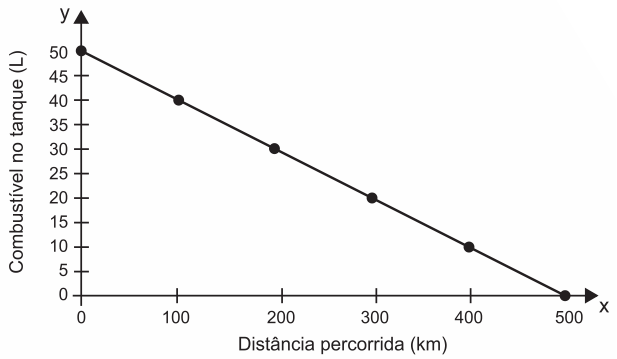


Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, programador utilizará um software que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas.

As desigualdades que devem ser utilizadas no referido software, para o desenho da região de isolamento, são

a) $3y - x \le 0; 2y - x \ge 0; y \le 8; x \le 9$
b) $3y - x \le 0; 2y - x \ge 0; \le 9; x \le 8$
c) $3y - x \ge 0; 2y - x \le 0; y \le 9; x \le 8$
d) $4y - 9x \le 0; 8y - 3x \ge 0; y \le 8; x \le 9$
e) $4y - 9x \le 0; 8y - 3x \ge 0; y \le 9; x \le 8$

08. (ENEM PPL) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

a) $y = -10x + 500$
b) $y = \frac{-x}{10} + 50$
c) $y = \frac{-x}{10} + 500$
d) $y = \frac{x}{10} + 50$
e) $y = \frac{x}{10} + 500$

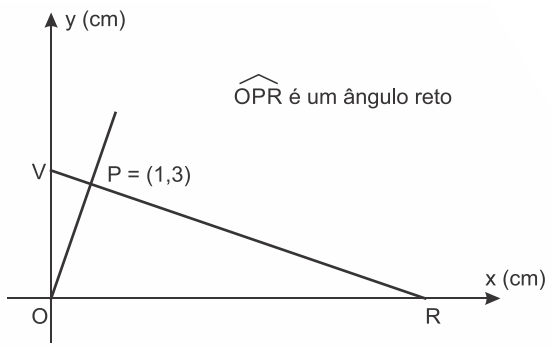
09. (UECE) No referencial cartesiano ortogonal usual com origem no ponto O, a reta r, paralela à reta y = -2x + 1 intercepta os semieixos positivos OX e OY, respectivamente, nos pontos P e Q formando o triângulo POQ. Se a medida da área deste triângulo é igual a 9 m², então a distância entre os pontos P e Q é igual a

a) $\sqrt{5}$ m.
b) $3\sqrt{5}$ m.
c) $4\sqrt{5}$ m.
d) $2\sqrt{5}$ m.

10. (MACKENZIE) A equação da mediatriz do segmento que une os pontos P = (1, -2) e Q = (5, 4) é

a) 2x + 3y − 9 = 0
b) 2x - 3y + 9 = 0
c) 2x - 3y − 3 = 0
d) 3x - 2y − 7 = 0
e) 3x + 2y − 11 = 0

11. (MACKENZIE) Na figura abaixo, a área, em cm², do triângulo ORV é

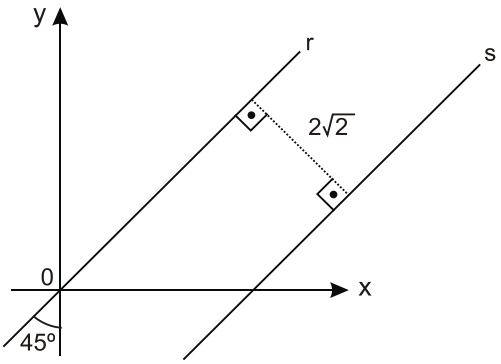


a) $\frac{50}{3}$ b) $\frac{25}{3}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

12. (MACKENZIE) As raízes reais da equação $x^4 - 1 = 10$, dispostas em ordem crescente, formam, respectivamente, os coeficientes *a* e *b* da reta r: ax + by + 1 = 0. A equação da reta *s*, perpendicular à *r* e que passa pelo ponto P(1, 2), será

a) $x - y + 3 = 0$
b) $-x + y - 1 = 0$
c) $x + y - 3 = 0$
d) $-2x + y + 1 = 0$
e) $2x - y - 3 = 0$

13. (MACKENZIE) Na figura, as retas r e s são paralelas. Se (x, y) é um ponto de s, então x – y vale



a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) 4
d) $2\sqrt{2}$
e) $4\sqrt{2}$

14. (MACKENZIE) Os gráficos de y = x - 1 e y = 2 definem com os eixos uma região de área:

a) 6
b) 5/2
c) 4
d) 3
e) 7/2

15. (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual com origem no ponto O, as retas representadas pelas equações y = x e y + 4x – 20 = 0 se cortam no ponto X. Se Y é a interseção da reta y + 4x – 20 = 0 com o eixo dos x (eixo horizontal), então, a medida da área do triângulo YOX é igual a

u.a. = unidades de área.

a) 12 u.a.
b) 14 u.a.
c) 10 u.a.
d) 8 u.a.

16. (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, escolhida uma unidade de comprimento (u·c), a medida em $(u \cdot c)^2$ da área da região do plano limitada pelas retas x – 3y = 0, 3x – y =0 e x + y – 4 =0 é

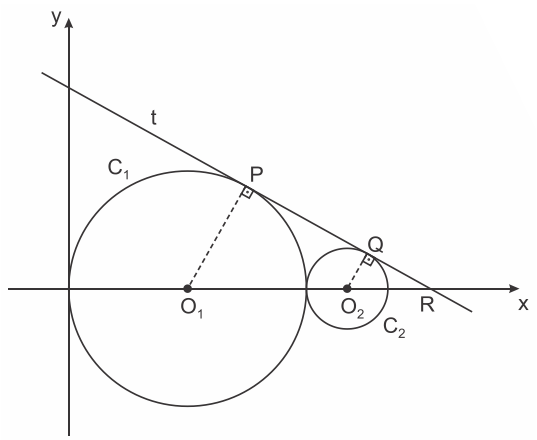
a) 8.
b) 9.
c) 4.
d) 6.

17. (UECE) Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações 3x - 2y + 6 = 0 e 3x + 4y – 12 =0 representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo dos x é

Dados: u.a. ≡ unidade de área

a) 9 u.a.
b) 10 u.a.
c) 11 u.a.
d) 12 u.a.

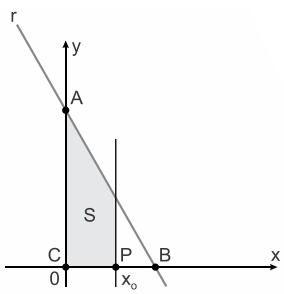
18. (ENEM PPL) Na figura estão representadas, em um plano cartesiano, duas circunferências: C_1 (de raio 3 e centro O_1) e C_2 (de raio 1 e centro O_2), tangentes entre si, e uma reta t tangente às duas circunferências nos pontos P e Q.



Nessas condições, a equação da reta t é

a) $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$
c) $y = -x + 4$
d) $y = -\frac{2}{3}x + 4$
e) $y = -\frac{4}{5}x + 4$

19. (UERJ) Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r, que passa por A(0, 4) e B(2, 0), e pela reta perpendicular ao eixo x no ponto $P(x_0, 0)$, sendo $0 \leq x_0 \leq 2$.



Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices C(0, 0), A e B, o valor de x_0 deve ser igual a:

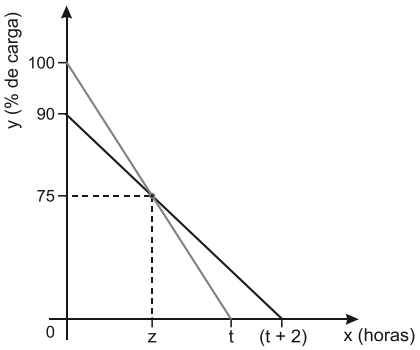
a) $2 - \sqrt{2}$ b) $3 - \sqrt{2}$ c) $4 - \sqrt{2}$ d) $5 - \sqrt{2}$

20. (UERJ) As baterias B_1 e B_2 de dois aparelhos celulares apresentam em determinado instante, respectivamente, 100% e 90% da carga total.

Considere as seguintes informações:

- as baterias descarregam linearmente ao longo do tempo;
- para descarregar por completo, B_1 leva t horas e B_2 leva duas horas a mais do que B_1;
- no instante z, as duas baterias possuem o mesmo percentual de carga igual a 75%.

Observe o gráfico:

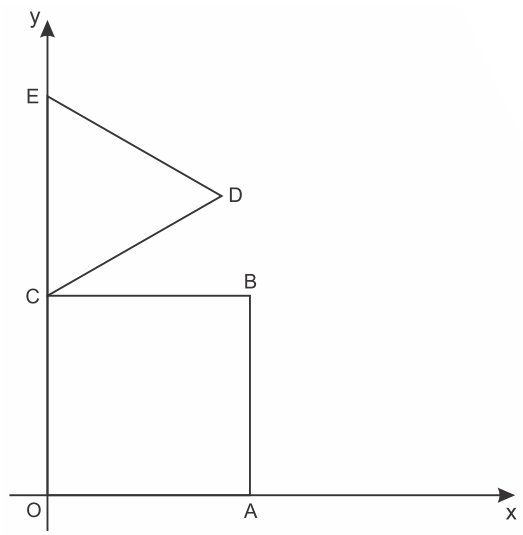


O valor de t, em horas, equivale a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (FUVEST)



Na figura, OABC é um quadrado e CDE é um triângulo equilátero tal que OC = CE = 2.

a) Determine a equação da reta que passa por E e por A.

b) Determine a equação da reta que passa por D e é perpendicular à reta $\overline{AE}$.

c) Determine um ponto P no segmento OA, de modo que a reta que passa por E e por P divida o quadrado em duas regiões, de tal forma que a área da região que contém o segmento OC seja o dobro da área da outra região.

02. (UERJ) As retas r, u e v, construídas em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, apresentam as seguintes equações:

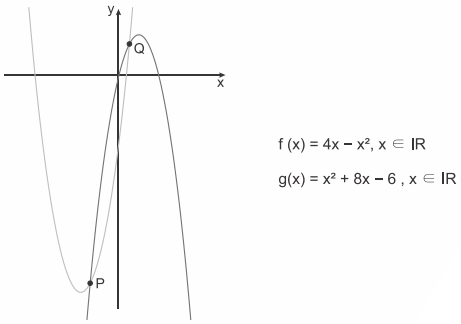
$r: 4x - 3y = 20$

$u: 2x + 3y = 28$

$v: 3x + y = 27$

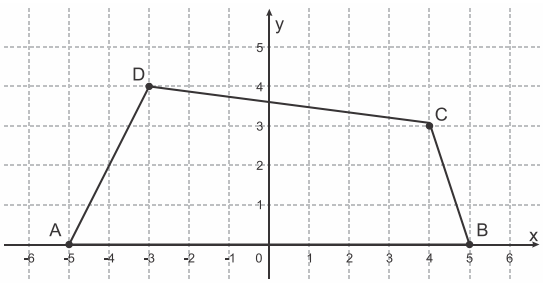
Determine se as três retas são concorrentes em um único ponto. Justifique sua resposta com os cálculos necessários.

03. (UERJ) No plano cartesiano a seguir, estão representados os gráficos das funções f e g, sendo P e Q seus pontos de interseção.



Determine a medida do segmento $\overline{PQ}$.

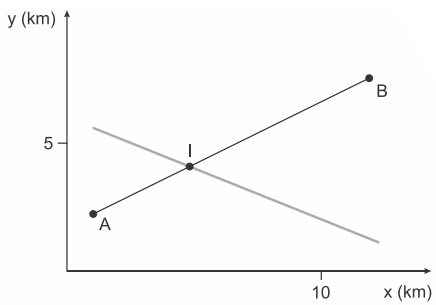
04. (UNICAMP) A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, um quadrilátero com vértices situados nos pontos de coordenadas A = (-5, 0), B(5, 0), C (4, 3) e D = (-3, 4).



a) Determine a área desse quadrilátero.

b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta que passa pelos pontos B e C.

05. (UERJ) No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos A(1, 2) e B(11, 7). O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é x + 3y = 17. Observe abaixo o esboço do projeto.



Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. D	05. C	09. B	13. C	17. A
02. B	06. E	10. A	14. C	18. B
03. E	07. E	11. A	15. C	19. A
04. B	08. B	12. C	16. C	20. D

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. 01.

a) $y = -2x + 4$.

b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{6-\sqrt{3}}{2}$

c) $P = \left(\frac{16}{9}, 0\right)$

02. As três retas não são concorrentes em um único ponto

03. $d_{\overline{PQ}} \approx 24{,}33$

04.

a) 30 u. a.

b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

05. $I(5,4)$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES