MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Muitas vezes será mais prático usar um número para representar um conjunto de números. Em geral, é um número que assume perfeitamente as características de todo o conjunto, ou de pelo menos a grande maioria desses números. Ele é um representante desse conjunto. E é isso que as medidas de tendência central fazem.

MÉDIA ARITMÉTICA

Definiremos média aritmética (simples) de uma lista de n números $x_1, x_2, ..., x_n$ por:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Exemplo:

A média aritmética entre os números 13, 17 e 24 é

$$M_a = \frac{13+17+24}{3} = 18$$

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Acabamos de ver como calcular a média aritmética simples dos números $x_1, x_2, ..., x_n$. Suponha agora que o número x_1 ocorre p_1 vezes, o número x_2 ocorre p_2 vezes e assim sucessivamente até o número x_n ocorre p_n vezes. A média aritmética desses números é:

$$M_{ap} = \frac{\overbrace{x_1 + x_1 + ... x_1}^{p_1 \text{ vezes}} + \overbrace{x_2 + x_2 + ...}^{p_2 \text{ vezes}} + ... \overbrace{+x_n + x_n ...}^{p_n \text{ vezes}} + x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Dizemos que essa média é ponderada e que as frequências p_1, p_2,..., p_n dos números respectivamente são os pesos desses números.

Podemos escrever então que a média aritmética ponderada é:

$$M_{ap} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Exemplo:

Num bimestre, um professor de Matemática aplicou 3 provas com pesos 1, 2 e 3. As notas de Davi foram 5,0; 6,5; 8,0. Qual será a média?

Resolução:

1ª prova: 5,0 com peso 1

2ª prova: 6,5 com peso 2

3ª prova: 8,0. Com peso 3

$$X = \frac{5 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 2 + 8 \cdot 3}{1+2+3} = \frac{42}{6} = 7$$

A média aritmética também pode ser representada por $\overline{X}$.

MÉDIA GEOMÉTRICA

Se a característica é o produto dos elementos, obteremos a média geométrica. A média geométrica do produto de uma lista de *n* termos positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é o valor M_g tal que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ ... \ \cdot x_n = \underbrace{M_g \cdot M_g \cdot \ ... \ \cdot M_g}_{\text{n vezes}} = M_g^n$$

Portanto, a média geométrica é definida por

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ ... \ \cdot x_n}$$

Exemplo:

A média geométrica entre 3, 36 e 54 é $M_g = \sqrt[3]{3 \cdot 36 \cdot 54} = 18$.

MÉDIA HARMÔNICA

Dado um conjunto de valores não nulos, os elementos X_1, X_2, X_3, ..., X_n, define-se a média harmônica (M_h) desses valores pela relação:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots + \frac{1}{X_n}}$$

Isto é, a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos de X_1, X_2, X_3, ..., X_n.

Exemplo:

Determine a média geométrica dos números 1, 2 e 3:

$$M_h = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{18}{11} \cong 1{,}64$$

MEDIANA

Se o número de elementos da distribuição é ímpar, Mediana é a medida que ocupa a posição central num conjunto de dados ordenados, ou a média aritmética simples dos dois valores centrais se o número de elementos é par. Representaremos a mediana por M_e.

Exemplos:

a) Durante uma semana, um pesquisador coletou a temperatura média diária numa cidade e obteve tais temperaturas: 20°C, 25°C, 23°C, 23°C, 18°C, 19°C e 22°C.

Note que o número de elementos é ímpar, logo existe um termo central.

Colocando em ordem a amostra temos: 18 – 19 – 20 – 22 – 23 – 23 – 25.

Observemos que o termo que ocupa a posição central é o 22.

Logo a mediana será $M_e = 20$.

b) Se a amostra coletada fosse 18 – 19 – 20 – 22 – 23 – 23, observe que temos agora dois termos centrais, dessa maneira a mediana será a média aritmética entre esses termos centrais. Logo a mediana será: $M_e = \frac{20+22}{2} = 21$

MODA

Em uma amostra, Moda é o valor que aparece mais vezes. Representaremos a moda por M_o.

Exemplos:

a) Num determinado concurso, foram coletadas notas de uma determinada parcela dos candidatos. As notas foram: 4, 6, 9, 6, 6, 3, 6 e 9

Colocando-os em ordem, obtemos 3, 4, 6, 6, 6, 9 e 9.

Neste caso, o valor mais frequente é 6, ou seja, a moda é igual a 6.

b) Determine a moda na sequência: 0, 1, 4, 4, 4, 6, 7, 7, 7 e 9.

Nesse caso 4 e 7 aparecem com mais frequência e o mesmo número de vezes. Dizemos que a amostra é bimodal e que a moda é 4 e 7.

c) Determine a moda na sequência: 1, 4, 5, 7, 9 e 10.

Note que nessa sequência não existe um elemento que mais se repete. Logo não existe moda. Uma amostra que não possui moda é chamada de amostra amodal.

PROEXPLICA

Caso possua 3 ou mais valores de maior frequência, a amostra é chamada de plurimodal.

DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Mostraremos a seguir que, das médias apresentadas nesse módulo, temos que $M_a \geq M_g \geq M_h$.

I. $M_a \geq M_g$

$a > 0$ e $b > 0$.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

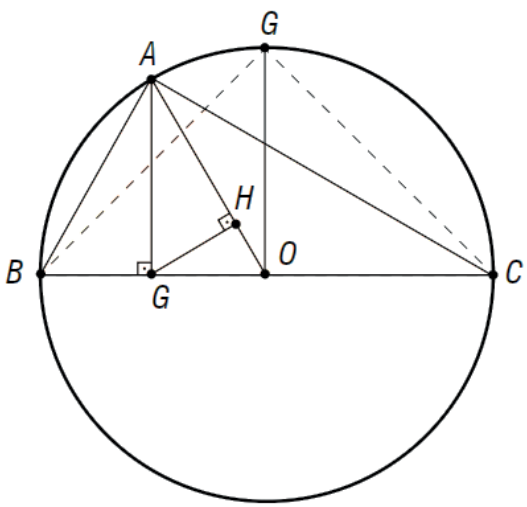
II. $M_g \geq M_h$

$a > 0$ e $b > 0$.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Visão Geométrica

Geometricamente, podemos observar que:



Sabemos que todo triângulo retângulo é inscrito em um semicírculo. Seja triângulo retângulo ABC, de catetos b e c e projeções m e n respectivamente (BG = x e CG = y). O raio AO é a média aritmética entre m e n, o segmento AG é a média geométrica entre eles e o segmento AH é a média harmônica entre x e y. Portanto, podemos ver geometricamente que a média aritmética é maior que a média geométrica ou igual a ela que é maior ou igual que média harmônica. Ou seja, $M_a \geq M_g \geq M_h$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (FAMERP) Sendo x um número inteiro, a mediana do conjunto {3, 7, 2, -3, 13, 9, -1, x} de oito números é igual a 2. Dessa forma, x é igual a

a) 7.
b) 3.
c) 4.
d) 6.
e) 5.

Resolução: C

$-3 \quad -1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 13$

Termo central = 3

$$\text{Mediana} = \frac{3+x}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 4$$

02. (UEG) A tabela a seguir apresenta a distribuição dos pontos de uma avaliação realizada com 100 alunos.

Pontos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alunos	2	5	8	10	15	17	15	12	8	4	4

Analisando-se os dados dessa tabela, a média do número de pontos desses alunos é igual a

a) 5,0
b) 5,1
c) 5,2
d) 5,4
e) 5,5

Resolução: B

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 0+5\cdot 1+8\cdot 2+10\cdot 3+15\cdot 4+17\cdot 5+15\cdot 6+12\cdot 7+8\cdot 8+4\cdot 9+4\cdot 10}{100} = \frac{510}{100} = 5{,}1$$

03. (UPE-SSA 1) As idades dos atletas que participaram da Seleção Brasileira Masculina de Basquete, convocados para a preparação dos Jogos Olímpicos 2016, variaram de 24 a 36 anos, como se pode observar na tabela a seguir:

Idade (anos)	24	26	28	30	32	33	35	36
Número de atletas	3	1	1	1	1	4	1	2

De acordo com a tabela, a *média*, a *mediana* e a *moda* dessas idades são, respectivamente:

a) 30,5; 32,5 e 33
b) 31; 32 e 33
c) 31,5; 31 e 33
d) 30,5; 31 e 24
e) 31; 24 e 33

Resolução: A

$$\text{Média} = \frac{3\cdot 24+26+28+30+32+4\cdot 33+35+2\cdot 36}{3+1+1+1+1+4+1+2} = 30{,}5$$

$$\text{Mediana} = \frac{32+33}{2} = 32{,}5$$

E a moda é o termo que aparece mais, portanto, 33 anos. Logo, a alternativa correta é a A.

04. (ENEM) A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a) 7,00.
b) 7,38.
c) 7,50.
d) 8,25.
e) 9,00.

Resolução: D

$$\text{Bom ou Excelente} \Rightarrow 7 \leq M \leq 10 \Rightarrow M_{mín} = 7$$

$$7 = \frac{12x + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 7{,}5 \cdot 10}{12 + 4 + 8 + 8 + 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = \frac{12x + 195}{42} \Rightarrow x = 8{,}25$$

05. (ENEM) Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

- 1º mês 21;
- 2º mês: 22;
- 3º mês: 25;
- 4º mês: 31;
- 5º mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é

a) 156.
b) 180.
c) 192.
d) 264.
e) 288.

Resolução: B

$$\frac{21 + 22 + 25 + 31 + 21}{5} = 24.$$

Portanto, a quantidade inicial em estoque deve ser igual a $12 \cdot 24 = 288$ unidades e, assim, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é 288 - (228-120) = 180.

06. (ENEM) A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26
b) 29
c) 30
d) 31
e) 35

Resolução: E

$$\frac{21 + 35 + 21 + 30 + 38 + L}{6} \geq 30$$

$$\Leftrightarrow 145 + L \geq 180$$

$$\Leftrightarrow L \geq 35.$$

07. (UNISINOS) Dados a e b, números reais positivos distintos, definimos as médias aritmética, geométrica e heroniana de a e b como sendo, respectivamente, $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ e $H = \frac{a + b + \sqrt{ab}}{3}$.

A partir das definições acima, é correto afirmar que,

a) $A < G < H$
b) $A < H < G$
c) $G < A < H$
d) $G < H < A$
e) $H < G < A$

Resolução: D

Desde que $a > 0$ e $b > 0$ e $a \neq b$, temos

I. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \Leftrightarrow A > G.$

II. $a + b > 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b + \sqrt{ab} > 2\sqrt{ab} + \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+\sqrt{ab}}{3} > \sqrt{ab} \Leftrightarrow H > G.$

III. $a + b > 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b + 2a + 2b > 2a + 2b + 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(a+b) > 2(a+b+\sqrt{ab}) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \frac{a+b+\sqrt{ab}}{3} \Leftrightarrow A > H.$

Logo, temos $A > H > G$.

08. (FGV) Um professor de matemática aplica três provas em seu curso (P_1, P_2, P_3) cada uma valendo de 0 a 10 pontos. A nota final do aluno é a média aritmética ponderada das três provas, sendo que o peso da prova P_n é igual a n^2. Para ser aprovado na matéria, o aluno tem que ter nota final maior ou igual a 5,4.

De acordo com esse critério, um aluno será aprovado nessa disciplina, independentemente das notas tiradas nas duas primeiras provas, se tirar na P_3, no mínimo, nota

a) 7,6.
b) 7,9.
c) 8,2.
d) 8,4.
e) 8,6.

Resolução: D

$$\frac{P_1 \cdot 1^2 + P_2 \cdot 2^2 + P_3 \cdot 3^2}{1+4+9} = \frac{P_1 + 4P_2 + 9P_3}{14} = 5{,}4$$

$$\text{Se} \Rightarrow P_1 = P_2 = 0$$

$$\frac{9P_3}{14} = 5{,}4 \Rightarrow P_3 = 8{,}4$$

09. (INSPER) Sejam x e y dois números reais positivos. Definimos as seguintes médias:

- média aritmética, denotada por MA(x,y), calculada como a metade da soma entre x e y;
- média geométrica, denotada por MG(x, y), calculada como a raiz quadrada do produto entre x e y;
- média harmônica, denotada por MH(x, y), calculada como o inverso da média aritmética entre os inversos de x e y;

Sejam a e b dois números reais e positivos tais que MH(a, b) = A. O valor de a em função de b e a condição que se deve impor sobre o valor de b para que isso aconteça são, respectivamente,

a) $\frac{Ab}{2b-A}$ e $b > \frac{A}{2}$.

b) $\frac{Ab}{2b-A}$ e $b < \frac{A}{2}$.

c) $\frac{A}{2}$ e $b > \frac{1}{A}$.

d) $\frac{A}{2}$ e $b < \frac{1}{A}$.

e) $a = 2A - b$ e $b > 0$.

Resolução: A

Temos:

$$MH(a,b) = \frac{1}{MA\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)}$$

$$A = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow A \cdot (a+b) = 2ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot a + A \cdot b = 2ab \Rightarrow 2ab - A \cdot a = A \cdot b \Rightarrow a(2b - A) = Ab \Rightarrow a = \frac{Ab}{2b-A}$$

Porém, $a > 0$ e $b > 0$, $A > 0$ e $Ab > 0$.

Sendo $a = \frac{Ab}{2b-A}$,

$$\frac{Ab}{2b-A} > 0 \Rightarrow 2b - A > 0 \Rightarrow 2b > A \Rightarrow b > \frac{A}{2}$$

Portanto, $a = \frac{Ab}{2b-A}$ e $b > \frac{A}{2}$

EXERCÍCIOS PROTREINO

01. Encontre a mediana dos seguintes números:

1	1	1	2	4	2	6	3	3	7	2	3	8	9

02. Encontre a moda dos seguintes números:

1	1	1	4	5	6	2	2	2	7	3	4	1	2	7	4	6	4	9	4

03. A idades de 6 pessoas são: 11, 12, 13, 15, 16 e 17 anos. Determine a diferença das médias das idades desse grupo, caso chegue mais duas pessoas com 14 e 18 anos.

04. Determine a média, moda e mediana dos valores abaixo:

36	38	33	42	35
44	36	28	36	35
36	40	36	35	36

05. Um aluno obteve as notas 5,5 e 9,0 nas duas primeiras provas. Determine quanto deve ser sua nota no terceiro teste para que sua média seja 7,0.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (ENEM) Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

a) basquete, basquete, basquete, basquete.
b) futebol, basquete, basquete, basquete.
c) futebol, futebol, basquete, basquete.
d) futebol, futebol, futebol, basquete.
e) futebol, futebol, futebol, futebol.

02. (ENEM) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70.
b) 20,77.
c) 20,80.
d) 20,85.
e) 20,90.

03. (ENEM) Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

a) branca e os de número 38.
b) branca e os de número 37.
c) branca e os de número 36
d) preta e os de número 38.
e) preta e os de número 37.

04. (ENEM) Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

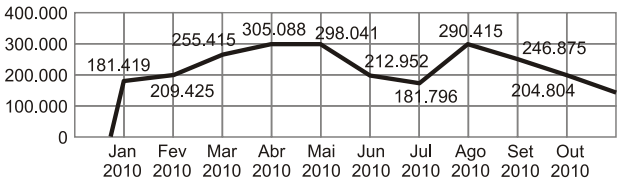
Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será

a) K. b) L. c) M. d) N. e) P.

05. (ENEM) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

BRASIL - Comportamento do Emprego Formal no período de janeiro a outubro de 2010 - CAGED



Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

a) 212 952. c) 240 621. e) 298 041.
b) 229 913. d) 255 496.

06. (ENEM) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

a) 17°C, 17°C e 13,5°C
b) 17°C, 18°C e 13,5°C
c) 17°C, 13,5°C e 18°C
d) 17°C, 18°C e 21,5°C.
e) 17°C, 13,5°C e 21,5°C.

07. (ENEM) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

a) X = Y < Z.
b) Z < X = Y.
c) Y < Z < X.
d) Z < X < Y.
e) Z < Y < X.

08. (ENEM) Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a

a) R$ 73,10.
b) R$ 81,50.
c) R$ 82,00.
d) R$ 83,00.
e) R$ 85,30.

09. (ENEM) Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
b) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
c) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

10. (ENEM PPL) O quadro apresenta a relação dos jogadores que fizeram parte da seleção brasileira de voleibol masculino nas Olimpíadas de 2012, em Londres, e suas respectivas alturas, em metro.

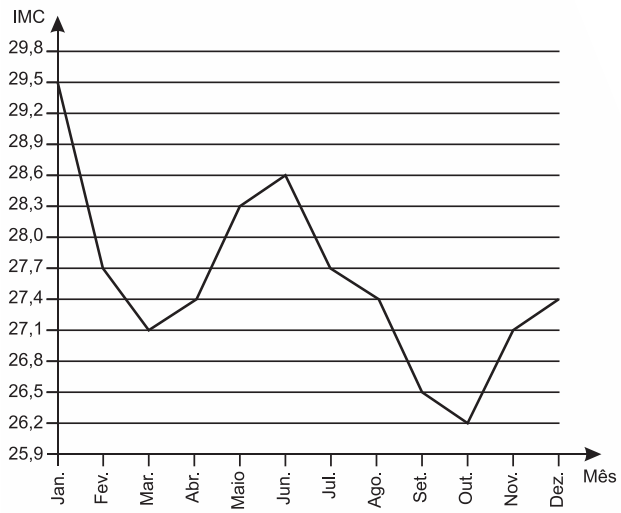
Nome	Altura (m)
Bruninho	1,90
Dante	2,01
Giba	1,92
Leandro Vissoto	2,11
Lucas	2,09
Murilo	1,90
Ricardinho	1,91
Rodrigão	2,05
Serginho	1,84
Sidão	2,03
Thiago Alves	1,94
Wallace	1,98

Disponível em: www.cbv.com.br. Acesso em: 31 jul. 2012 (adaptado).

A mediana das alturas, em metro, desses jogadores é

a) 1,90.
b) 1,91.
c) 1,96.
d) 1,97.
e) 1,98.

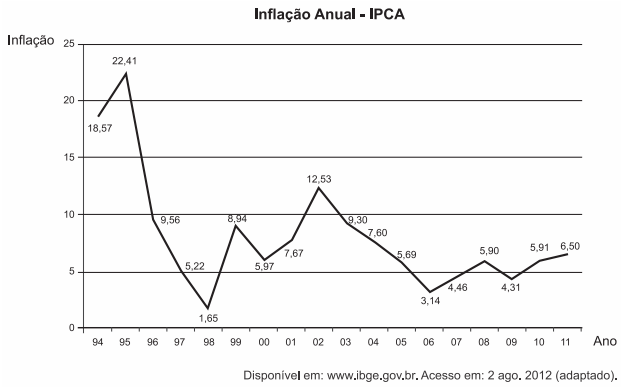
11. (ENEM PPL) O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é definido como o quociente entre a massa dessa pessoa, medida em quilograma, e o quadrado da sua altura, medida em metro. Esse índice é usado como parâmetro para verificar se indivíduo está ou não acima do peso ideal para a sua altura. Durante o ano de 2011, uma pessoa foi acompanhada por um nutricionista e passou por um processo de reeducação alimentar. O gráfico indica a variação mensal do IMC dessa pessoa, durante o referido período. Para avaliar o sucesso do tratamento, o nutricionista vai analisar as medidas estatísticas referentes à variação do IMC.



De acordo com o gráfico, podemos concluir que a mediana da variação mensal do IMC dessa pessoa é igual a

a) 27,40.
b) 27,55.
c) 27,70.
d) 28,15.
e) 28,45.

12. (ENEM PPL) Um dos principais indicadores de inflação é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O gráfico apresenta os valores do IPCA nos anos de 1994 a 2011.



Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor mais próximo da mediana de todos os valores da inflação indicados no gráfico é

a) 5,97.
b) 6,24.
c) 6,50.
d) 8,07.
e) 10,10.

13. (ENEM PPL) Cinco regiões de um país estão buscando recursos no Governo Federal para diminuir a taxa de desemprego de sua população. Para decidir qual região receberia o recurso, foram colhidas as taxas de desemprego, em porcentagem, dos últimos três anos. Os dados estão apresentados na tabela.

Taxa de desemprego (%)					
	Região A	**Região B**	**Região C**	**Região D**	**Região E**
Ano I	12,1	12,5	11,9	11,6	8,2
Ano II	11,7	10,5	12,7	9,5	12,6
Ano III	12,0	11,6	10,9	12,8	12,7

Ficou decidido que a região contemplada com a maior parte do recurso seria aquela com a maior mediana das taxas de desemprego dos últimos três anos.

A região que deve receber a maior parte do recurso é a

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

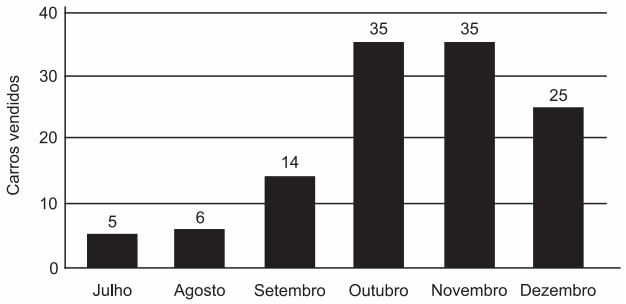
14. (ENEM PPL) Uma partida de voleibol entre Brasil e Itália foi decidida em cinco *sets*. As pontuações do jogo estão descritas na tabela.

	1º *set*	**2º *set***	**3º *set***	**4º *set***	**5º *set***
Brasil	25	25	24	25	18
Itália	16	20	26	27	16

Nessa partida, a mediana dos pontos obtidos por set pelo time da Itália foi igual a

a) 16.
b) 20.
c) 21.
d) 23.
e) 26.

15. (ENEM PPL) Após encerrar o período de vendas de 2012, uma concessionária fez um levantamento das vendas de carros novos no último semestre desse ano. Os dados estão expressos no gráfico:



Ao fazer a apresentação dos dados aos funcionários, o gerente estipulou como meta para o mês de janeiro de 2013 um volume de vendas 20% superior à média mensal de vendas do semestre anterior.

Para atingir essa meta, a quantidade mínima de carros que deveriam ser vendidos em janeiro de 2013 seria

a) 17.
b) 20.
c) 21.
d) 24.
e) 30.

16. Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	**1º Prova**	**2º Prova**	**3º Prova**	**4º Prova**	**5º Prova**
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

a) apenas o aluno Y
b) apenas o aluno Z
c) apenas os alunos X e Y
d) apenas os alunos X e Z
e) os alunos X, Y e Z

17. Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**
Lucro (Em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

a) I.
b) II.
c) IV.
d) V.
e) VII.

18. Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

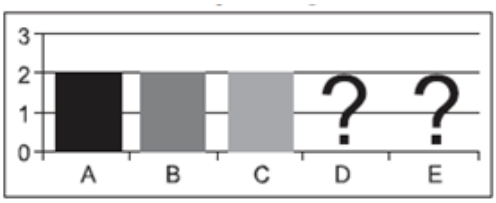
Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

a) 59
b) 65
c) 68
d) 71
e) 80

19. Cinco equipes A, B, C, D e E disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.

Pontuação da gincana



Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente:

a) 1,5 e 2,0.
b) 2,0 e 1,5.
c) 2,0 e 2,0.
d) 2,0 e 3,0
e) 3,0 e 2,0.

20. (FGV) A média aritmética das notas de cinco provas de estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0 Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5. Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é

a) 6,8
b) 7,2
c) 7,4
d) 7,5
e) 8,0

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

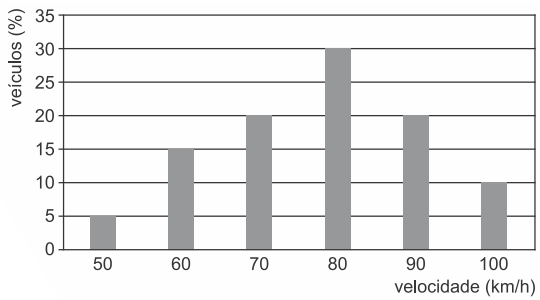
01. (UFPR) Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

Lanchonete	Preço
A	R$10,75
B	R$6,00
C	R$9,50
D	R$11,00
E	R$5,25
F	R$7,00
G	R$10,50
H	R$8,00

a) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela.

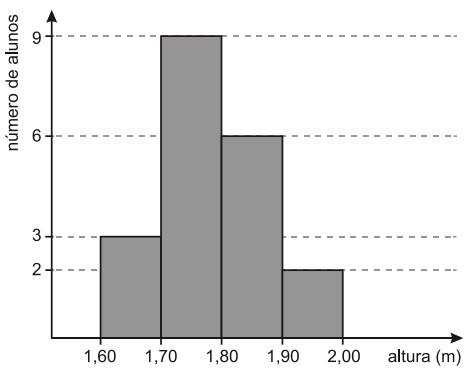
b) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa. Ao considerar todos os 10 estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor.

02. (UERJ) Técnicos do órgão de trânsito recomendaram velocidade máxima de 80 km/h no trecho de uma rodovia onde ocorrem muitos acidentes. Para saber se os motoristas estavam cumprindo as recomendações, foi instalado um radar móvel no local. O aparelho registrou os seguintes resultados percentuais relativos às velocidades dos veículos ao longo de trinta dias, conforme o gráfico abaixo:



Determine a média de velocidade, em km/h, dos veículos que trafegaram no local nesse período.

03. (UERJ) Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:



Sabe-se que, em um histograma, se uma reta vertical de equação $x = x_0$ divide ao meio a área do polígono formado pelas barras retangulares, o valor de x_0 corresponde à mediana da distribuição dos dados representados.

Calcule a mediana das alturas dos alunos representadas no histograma.

04. (UFG) As tabelas a seguir apresentam os casos de dengue no Brasil e na região Centro-Oeste, no período de 1º de janeiro a 16 de fevereiro de 2013.

Casos de dengue por região	
Região	**2013**
Sudeste	80.876
Sul	12.420
Centro-Oeste	80.976
Norte	18.435
Nordeste	11.943
Brasil	**204.650**

Casos de dengue na região Centro-Oeste		
Unidade Federativa	**2013**	**População**
MS	42.015	2.587.269
MT	10.765	3.182.113
GO	27.376	6.434.048
DF	820	2.789.761

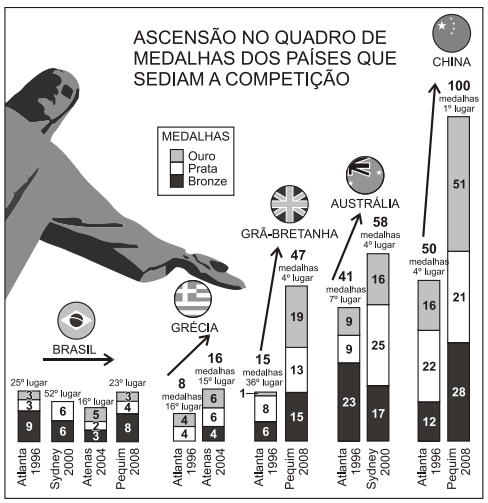
Disponível em: <www.ibge.gov.br> e <g1.globo.com/bemestar/noticia/2013/02/casos-de-dengue-no-pais-190-nocomeco-de-2013-dizgoverno.html>. Acesso em: 20 out. 2013. (Adaptado).

De acordo com essas informações,

a) Calcule a diferença entre a média dos casos de dengue por unidade federativa da região Centro-Oeste e a média dos casos de dengue por unidade federativa do Brasil no período considerado.

b) Sabendo que é considerado estado de epidemia quando há incidência maior do que 300 casos para cada 100 mil habitantes, determine em quais unidades federativas da região Centro-Oeste ocorreu estado de epidemia de casos de dengue no período considerado.

05. (CP2) O Brasil terá que manter uma tradição em 2016. Todo país que sedia as Olimpíadas tem um grande crescimento no quadro de medalhas, como aconteceu com a Grécia, a Austrália e a China, e já está ocorrendo com a Grã-Bretanha.



Fonte: Jornal "O Globo" – 04/10/2009 - Adaptado

Observando as informações contidas no texto e ilustração acima, responda às perguntas abaixo:

a) Complete a tabela abaixo com a quantidade de medalhas obtidas pelo Brasil de 1996 até 2008:

Ano da Olimpíada	Quantidade de medalhas
1996	
2000	
2004	
2008	

b) Qual a quantidade média de medalhas conquistadas pelo Brasil nas últimas quatro Olimpíadas?

c) Observando o resultado dos países que sediaram as últimas Olimpíadas, percebemos que a Austrália teve uma excelente ascensão no número de medalhas. Qual foi o crescimento percentual do número total de medalhas da Austrália? (Escreva sua resposta com aproximação de duas casas decimais)

GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. C	05. B	09. D	13. E	17. D
02. D	06. B	10. C	14. B	18. D
03. A	07. E	11. A	15. D	19. C
04. D	08. D	12. B	16. B	20. D

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. a) Média = 8,5 e Mediana = 8,75 ; b) x = 8,25

02. Média = 77,5 km/h

03. $x_0 = 1,7777...$

04. a) A diferença pedida é 20244 – 7580 = 12664.

b) Mato Grosso do Sul, Mato Grosso e Goiás

05. a)

Ano da Olimpíada	Quantidade de medalhas
1996	15
2000	12
2004	10
2008	15

b) $M = \frac{15+12+10+15}{4} = 13$

c) $\frac{58-41}{41} = 41,46\%$

ANOTAÇÕES