

ESFERA

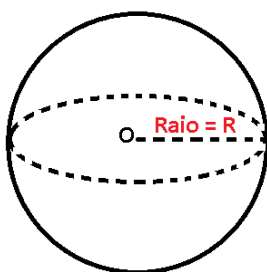
A esfera é um sólido formado por infinitos pontos que possuem uma mesma característica: sendo O o centro da esfera e R o raio da mesma, dizemos que o conjunto de pontos que estão a uma distância para o centro O igual ou menor do que R são pontos que formam a esfera. Assim como o cilindro e o cone, é também um sólido de revolução. Considere a figura abaixo, em que temos um semicírculo de raio R com seu diâmetro alocado sobre um eixo vertical denominado por e.



Assim, fazendo a rotação desta figura em torno do eixo e, todos os pontos interceptados nesta rotação formarão a esfera, que terá o mesmo centro do semicírculo, assim como mesmo raio.

FÓRMULAS PARA UMA ESFERA

Não faz sentido para nós a criação de uma fórmula que expresse a área da base de uma esfera, visto que a mesma tem um ponto como base. Como um ponto é adimensional, não há área da base e consequentemente não há área lateral. As fórmulas que desenvolvemos são as fórmulas de Área Total da Esfera e Volume da Esfera. Para o cálculo do volume da esfera, podemos utilizar o Princípio de Cavalieri, que demonstrou que quando temos dois sólidos de mesma altura e com seções paralelas às bases equivalentes, teremos dois sólidos de volumes iguais. Assim, a fórmula do volume da esfera pode ser calculada com a equivalência a um sólido que possui um cilindro de raio da base igual ao raio da esfera e altura igual ao diâmetro da esfera. Quando fazemos a diferença do volume deste cilindro e dois cones de mesmo raio da base e altura igual ao raio da esfera, encontramos o volume da mesma. A fórmula da área total da esfera pode ser dada pela derivada da fórmula do volume da mesma.

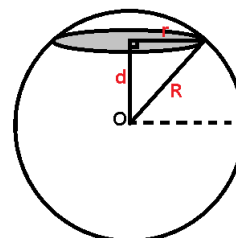


$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

SEÇÃO DA ESFERA

Uma seção feita em uma esfera de raio R a uma distância d do centro da mesma produzirá um círculo de raio r. Observe a figura:



A partir do triângulo retângulo da figura, teremos:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

ÁREA DO FUSO ESFÉRICO

Considerando uma esfera de raio R, consideraremos um fuso criado a partir de uma abertura com ângulo α . A área desse fuso será igual a:

$$A_{\text{FUSO}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi R^2 \rightarrow A_{\text{FUSO}} = \frac{\alpha}{90^\circ} \cdot \pi R^2$$

VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA

A partir de uma esfera de raio R, consideraremos uma cunha esférica criada a partir de uma abertura com ângulo α . O volume dessa cunha será igual a:

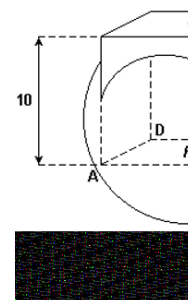
$$V_{\text{CUNHA}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \rightarrow V_{\text{CUNHA}} = \frac{\alpha}{270^\circ} \cdot \pi \cdot R^3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UERJ) Na figura abaixo observa-se que a bola de basquete – supostamente esférica – não vai passar pelo aro da cesta.

Se o raio do aro mede 9 cm e a distância entre os centros do aro e da bola é igual a 12 cm, calcule:

- o raio da bola.
- o perímetro do aro.



Resolução:

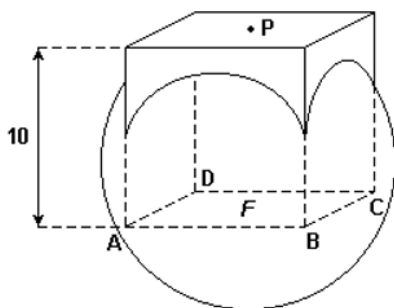
- a) Teremos um triângulo retângulo em que a hipotenusa terá medida igual ao raio da esfera (R) e os catetos terão medidas iguais ao raio do aro (9 cm) e à distância entre o centro da bola e o centro do aro (12 cm). Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$R^2 = 9^2 + 12^2 \quad R^2 = 81 + 144 \rightarrow R^2 = 225 \rightarrow R = 15 \text{ cm}$$

- b) O perímetro do aro será o comprimento de uma circunferência de raio 9 cm. Assim:

$$2p_{\text{ARO}} = 2\pi \cdot 9 = 18\pi \text{ cm}$$

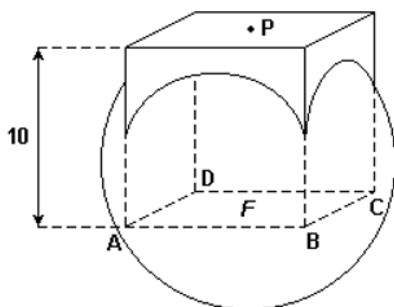
- 02.** (UFRJ) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, F, sobre a superfície de uma esfera S de raio r . Sabendo que a face oposta a F é tangente à esfera S no ponto P, calcule o raio r . Justifique.

**Resolução:**

Ligando o centro da esfera ao centro da face inferior do cubo e deste ponto até o vértice A, teremos um triângulo retângulo cuja hipotenusa terá a mesma medida do raio da esfera (R). Os catetos deste triângulo retângulo terão medidas iguais à metade da diagonal da base do cubo ($5\sqrt{2}$ cm) e à diferença entre a aresta do cubo e o raio da esfera ($10 - R$). Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$R^2 = (5\sqrt{2})^2 + (10 - R)^2 \rightarrow R^2 = 50 + 100 - 20R + R^2 \rightarrow 20R = 150 \rightarrow R = 7,5 \text{ cm}$$

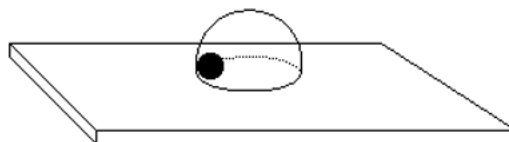
- 02.** (UFRJ) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, F, sobre a superfície de uma esfera S de raio r . Sabendo que a face oposta a F é tangente à esfera S no ponto P, calcule o raio r . Justifique.

**Resolução:**

Ligando o centro da esfera ao centro da face inferior do cubo e deste ponto até o vértice A, teremos um triângulo retângulo cuja hipotenusa terá a mesma medida do raio da esfera (R). Os catetos deste triângulo retângulo terão medidas iguais à metade da diagonal da base do cubo ($5\sqrt{2}$ cm) e à diferença entre a aresta do cubo e o raio da esfera ($10 - R$). Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$R^2 = (5\sqrt{2})^2 + (10 - R)^2 \rightarrow R^2 = 50 + 100 - 20R + R^2 \rightarrow 20R = 150 \rightarrow R = 7,5 \text{ cm}$$

- 03.** (UERJ) Uma cuba de superfície semiesférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:

- a maior área, em cm^2 , pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;
- o volume, em cm^3 , da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

Resolução:

- a) Ligando o centro da esfera ao centro da cuba, traçamos a hipotenusa de um triângulo retângulo, que terá medida igual à diferença entre o raio da cuba e o raio da esfera, ou seja, 3 cm. Os demais catetos terão medidas iguais ao raio da esfera (1 cm) e ao raio da maior circunferência que essa esfera poderá percorrer. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$3^2 = 1^2 + R^2 \quad 9 = 1 + R^2 \rightarrow R^2 = 8$$

A área que poderá ser percorrida pela bola de gude será de:

$$A_{\text{PERCORRIDA}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 8 = 8\pi \text{ cm}^2$$

- b) A maior esfera que pode ser colocada sob a cuba tem diâmetro com a mesma medida que o raio da cuba. Ou seja:

$$2r = 4 \rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

Seu volume será de:

$$V_{\text{ESF}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

