PROCESSOS PARA ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA LINEAR

Para escalonar um sistema linear, resolvê-lo e depois classificá-lo, alguns procedimentos podem ser feitos:

- **T1:** um sistema de equações não se altera, quando permutamos as posições de duas equações quaisquer do sistema.
- **T2:** um sistema de equações não se altera, quando multiplicamos ambos os membros de qualquer uma das equações do sistema, por um número real não nulo.
- **T3:** um sistema de equações lineares não se altera, quando substituímos uma equação qualquer por outra obtida a partir da adição membro a membro desta equação, com outra na qual foi aplicada a transformação T2.

PROEXPLICA

- Se no processo de escalonamento, obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente diferente de zero, esta equação é suficiente para se afirmar que o **sistema é impossível**, isto é, tem S = ø.
- Se no processo de escalonamento, obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente igual a zero, esta equação poderá ser eliminada. E todos os termos de números reais são soluções, ou seja, **sistema indeterminado**.

Agora, para escalonarmos um sistema, deve-se seguir um passo a passo, todos eles relacionados com os procedimentos T1, T2 e T3.

1° passo: A primeira equação precisa estar com o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero. Tente colocar o coeficiente igual a 1, se possível.

2° passo: Nesse processo é necessário anular o coeficiente da 1ª incógnita de todas as equações abaixo da primeira equação (a partir da segunda equação, substitua a linha escolhida pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por um número conveniente para que anule a linha escolhida).

3º passo: Deixe de lado a 1ª equação e aplique as ideias do 1º e 2º passos nas equações restantes.

4º passo: Agora deixe de lado a 1ª e a 2ª equação e novamente aplique as ideias do 1º e 2º passos nas equações restantes. E assim por diante, até que todo o sistema esteja escalonado.

Os exemplos a seguir esclarecerão os passos listados acima.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Resolva o sistema abaixo usando o escalonamento.

$x + 3y - 2z = 3$ (Equação 1)

$2x - y + z = 12$ (Equação 2)

$4x + 3y - 5z = 6$ (Equação 3)

Resolução:

$$\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ 2x-y+z=12 \\ 4x+3y-5z=6 \end{cases}$$

1º Tentar colocar o coeficiente do x na 1ª equação, igual a 1.

2º Multiplicar a 1ª equação pelo simétrico do coeficiente x das 2ª e 3ª equações e somar respectivamente.

$$\begin{cases} x+3y-2z=3 \ (-2) \\ 2x-y+z=12 \ +\downarrow \\ 4x+3y-5z=6 \quad +\downarrow \end{cases} \Rightarrow^{+} \begin{cases} 2x-y+z=12 \\ -2x-6y+4z=-6 \\ \hline 0-7y+5z=6 \end{cases} \Rightarrow^{+} \begin{cases} 4x+3y-5z=6 \\ -4x-12y+8z=-12 \\ \hline 0-9y+3z=-6 \end{cases}$$

3º Vamos montar o novo sistema com a 1ª equação original e as 2 novas.

$$\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ -7y+5z=6 \\ -9y+3y=-6 \end{cases}$$

4º Vamos fazer um sistema com as 2 novas.

$$\begin{cases} -7y+z=6 \ (-9) \\ -9y+3z=-6 \ (7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +63y-45z=-54 \\ -63y+21z=-42 \\ \hline -243z=-96 \end{cases}$$

5º Temos então:

$$\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ -7y+5z=6 \\ -24z=-96 \end{cases}$$

6º Usando a última, temos:

$$-24z=-96 \Rightarrow z=\frac{-96}{-24}$$

$$\boxed{z=4}$$

7º Vamos usar o z = 4 na 2ª equação e determinar o y.

$$-7y+5(4)=6 \Rightarrow -7y+20=6 \Rightarrow -7y=-14$$

$$\boxed{y=2}$$

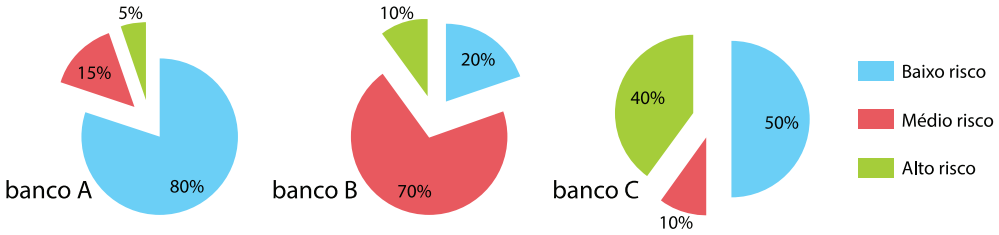
8º Usando z = 4 e y = 2, vamos determinar o x na 1º equação:

$$x+3(2)-2(4)=3 \Rightarrow x+6-8=3 \Rightarrow x-2=3$$

$$\boxed{x=5}$$

$$S=(5,2,4)$$

02. (UNESP) Os gráficos indicam a diversificação de aplicações para um investimento, por grau de risco, sugeridas por cada um dos bancos A, B e C.



Um investidor decidiu aplicar um capital de R$ 6.000,00 em partes que foram distribuídas pelos três bancos, seguindo a diversificação do grau de risco sugerida por cada banco. O capital aplicado foi distribuído da seguinte forma:

- total de R$ 1.000,00 no banco A (considerando os três graus de risco juntos);
- R$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1.850,00 em investimentos de médio risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1450,00 em investimentos de alto risco (nos três bancos juntos).

O gráfico a seguir representa a diversificação da aplicação, por grau de risco, juntando os três bancos.

Investimento total de R$ 6.000,00
(bancos A, B e C)



Calcule os montantes de capital que foram investidos nos bancos B e C, e as medidas dos ângulos α, β e γ, indicados no gráfico.

Resolução:

Sabendo-se que foi investido R$ 1.000,00 no banco A seguindo a diversificação do grau de risco apresentada no gráfico, pode-se escrever:

Banco A:

- baixo risco: 80% $\rightarrow$ 1000 · 0,8 = R$ 800,00
- médio risco: 15% $\rightarrow$ 1000 · 0,15 = R$ 150,00
- alto risco: 5% $\rightarrow$ 1000 · 0,05 = R$ 50,00

Sabe-se ainda que foram aplicados:

- R$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco, sendo 80% no banco A (correspondente a R$ 800,00), 20% no banco B e 50% no banco C;
- R$ 1.850,00 em investimentos de médio risco, sendo 15% no banco A (correspondente a R$ 150,00,) 70% no banco B e 10% no banco C;
- R$ 1.450,00 em investimentos de alto risco, sendo 5% no banco A (correspondente a R$ 50,00), 10% no banco B e 40% no banco C.

Sendo B e C o montante aplicado em cada um dos bancos, respectivamente, e com as demais informações do enunciado, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 50+0,1B+0,4C=1450 \\ 150+0,7B+0,1C=1850 \\ 800+0,2B+0,5C=2700 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,1B+0,4C=1400 \\ 0,7B+0,1C=1700 \\ 0,2B+0,5C=1900 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,8B+0,5C=3100 \\ -0,2B-0,5C=-1900 \end{cases}$$

$$0,6B=1200 \rightarrow B=2000$$

$$0,8\cdot 2000+0,5C=3100 \rightarrow 0,5C=1500 \rightarrow C=3000$$

Assim, os montantes aplicados em cada banco foram de R$ 1.000,00 no banco A, R$ 2.000,00 no banco B e R$ 3.000,00 no banco C.

Para calcular os ângulos α, β e γ, indicados no gráfico pode-se utilizar a regra de três:

Baixo Risco	Médio Risco	Alto Risco
6000 —— 360°	6000 —— 360°	6000 —— 360°
2700 —— β	1850 —— γ	1450 —— α
$\beta=\frac{2700\cdot 360}{6000}\rightarrow\beta=162°$	$\gamma=\frac{1850\cdot 360}{6000}\rightarrow\gamma=111°$	$\alpha=\frac{1450\cdot 360}{6000}\rightarrow\alpha=87°$

03. (UFSC) Se a terna (a, b, c) é solução do sistema $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$, então calcule o valor numérico de (a + b + c).

Resolução:

Tomando a matriz ampliada do sistema e escalonando, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{pmatrix}$$

$$L_2' \leftrightarrow (-2)\cdot L_1 + L_2$$

$$L_3' \leftrightarrow (-3)\cdot L_1 + L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_3'' \leftrightarrow (-2)\cdot L_2' + L_3'$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

$$L_3'' \leftrightarrow L_2'$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$L_3''' \leftrightarrow (-3)\cdot L_2'' + L_3''$$

Portanto, o sistema escalonado equivalente é $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ -y+z=-1 \\ -6z=-12 \end{cases}$.

Resolvendo esse sistema, obtemos facilmente x = 1, y = 3 e z = 2. Portanto, segue que a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6.

REGRA DE CRAMER

Considerando um sistema linear com o número do incógnitas igual ao número de equações, iremos estudar melhor a regra de Cramer para a resolução de uma sistema linear, baseado do cálculo de determinantes.

Gabriel Cramer (1702-1752) foi um matemático suíço que demonstrou em 1750 a resolução por meio dessa regra, que ficou registrada com o seu nome. E acredita-se que ele não tenha sido o primeiro matemático a fazê-lo, pois os cálculos já eram conhecidos por Maclaurin desde 1729.

CASO 2X2

Inicialmente vamos verificar o uso da regra de Cramer para o caso de um sistema 2x2.

Considerando o sistema de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

Seja M a matriz composta pelos coeficientes do sistema. Assim, temos que o determinante de M é:

$$M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix} \text{ e } D=\det(M)=ad-bc$$

Se $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD) e a sua solução (x,y) é dada por:

$$x=\frac{D_x}{D} \text{ e } y=\frac{D_y}{D}$$

em que D_x e D_y são os determinantes das matrizes obtidas a partir da matriz M, substituindo a primeira e a segunda coluna, respectivamente, pela coluna dos coeficientes independentes das equações do sistema.

Observe o exemplo:

Utilizando a regra de Cramer, vamos encontrar a solução desse sistema:

$$\begin{cases} 4x-y=18 \\ 6x+4y=38 \end{cases}$$

Observe que

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=16-(-6)=22\neq 0,$$

logo podemos de fato utilizar a regra de Cramer.

Assim, podemos assumir que este sistema é possível e determinado.

Agora vamos calcular os valores de D_x e D_y:

$$D_x=\begin{vmatrix} 18 & -1 \\ 38 & 4 \end{vmatrix}=72+38=110$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 6 & 38 \end{vmatrix}=152-108=44$$

Então, os valores de x e y são:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{110}{22}=5$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{44}{22}=2$$

Assim, temos a solução do sistema S = {(5,2)}.

CASO 3X3

Agora vamos verificar o uso da regra de Cramer para o caso de um sistema 3x3.

Considerando o sistema de incógnitas x , y e z:

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{cases}$$

Seja M a matriz composta pelos coeficientes do sistema. Assim, temos que o determinante de M é:

$$M=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Se o det (M) = D for diferente de zero ($D \neq 0$), temos que o sistema é possível de determinado. E podemos assim utilizar a regra de Cramer para encontrar a solução do sistema.

Assim, a solução (x, y, z) pode ser calculada por:

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D} \quad \text{e} \quad z=\frac{D_z}{D}$$

em que D_x , D_y e D_z são os determinantes das matrizes obtidas a partir da matriz M, substituindo a colunas dos coeficientes x, y e z, respectivamente, pela coluna dos coeficientes independentes das equações do sistema.

Observe o exemplo abaixo:

Vamos verificar se é possível utilizar a regra de Cramer, e encontrar a solução desse sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=-9 \\ x-3y-z=-2 \end{cases}$$

Primeiramente, vamos calcular o determinante D da matriz incompleta do sistema:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=10$$

Como $D\neq 0$, o sistema é possível e determinado e a sua solução é dada por (x, y, z) que vamos calcular utilizando a regra de Cramer.

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D}\quad e\quad z=\frac{D_z}{D}$$

Calculando o valor de D_x, D_y e D_z, temos:

$$D_x=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=10 \qquad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=20$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-30$$

Segue que:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{10}{10}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{20}{10}=2\quad e\quad z=\frac{D_z}{D}=-\frac{30}{10}=-3$$

Portanto a única solução do sistema é S = {(1, 2, -3)}.

PROEXPLICA

Esta regra se aplica apenas para sistemas lineares nxn, em que o número de equações é igual ao número de incógnitas e o sistema for SPD.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

04. Resolva usando a regra de Cramer: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-2z=1 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$

Resolução:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}=(-1-2-2)-(1-4+1)=-5-(-2)=-5+2=-3$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{matrix}=(0-8-2)-(4+0+1)=-10-5=-15$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix}=(1+0-4)-(-1-8+0)=-3-(-9)=-3+9=6$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}=(-4+1+0)-(0+2+4)=-3-6=-9$$

Temos:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-15}{-3}=5;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{6}{-3}=-2;\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-9}{-3}=3;\ S=\{(5,-2,3)\}$$

- Se $(D\neq 0)$, então o sistema será *possível e determinado* (SPD);
- • Se $(D=0)$, o sistema poderá ser *possível e* indeterminado ou impossível:
  - Se $D_x=D_y=D_z=\cdots=0$, o sistema será *possível e indeterminado* (SPI).
  - Se pelo menos um dos outros determinantes (D_x; D_y; D_z...) é diferente de zero, então o *sistema e impossível* (SI).

EXERCÍCIOS PROTREINO

01. Escalone o sistema abaixo para encontrar o conjunto solução e depois classifique.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+7y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

02. Escalone, classifique e dê o conjunto solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6x+10y=4 \\ 2x-3y=1 \\ 5x+2y=3 \end{cases}$$

03. Encontre a solução do sistema abaixo utilizando a regra de Cramer:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

04. Encontre o conjunto solução do sistema utilizando a regra de Cramer e classifique:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x+3y-z=13 \\ 3x-y+2z=12 \end{cases}$$

05. Utilizando o método de sua preferência, encontre o conjunto solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x+y+z=4 \\ 3x+3y+z=14 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST) No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$, nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:

a) No caso em que a = 1, o sistema tem solução se, e somente se, m = 2.
b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.
c) No caso em que m = 2, o sistema tem solução se, e somente se, a = 1.
d) O sistema só tem solução se a = m = 1.
e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

02. (MACKENZIE) Um teste de matemática tem questões valendo 1 ponto, 2 pontos e 3 pontos. Se um estudante obteve 55 pontos em 30 questões desse teste e acertou 5 questões de 2 pontos a mais do que o número de questões de 1 ponto que ele acertou, o número de questões de 3 pontos, respondidas corretamente por ele, foi

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

03. (UECE) Um hotel possui exatamente 58 unidades de hospedagem assim distribuídas: m quartos duplos, p quartos triplos e q suítes para quatro pessoas. A capacidade máxima de lotação do hotel é 166 pessoas, sendo que destas, 40 lotam completamente todas as suítes. A diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.

04. (UECE) Se x, y e z constitui a solução do sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ x + 4y + 5z = -4 \end{cases}$ então o produto $x \cdot y \cdot z$ é igual a

a) -4.
b) -8.
c) -2.
d) -6.

05. (UECE) O valor de h para que o sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + hy - 6z = 0 \end{cases}$ tenha a solução não nula é

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

06. (UECE) A soma de todos os valores de k para os quais o sistema $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - kz = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$ admita uma infinidade de soluções é igual a:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1

07. (UERJ) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00. Veja na tabela os preços da água por embalagem:

Volume da embalagem (L)	Preço (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a *n*.

O valor de n é um divisor de:

a) 32
b) 65
c) 77
d) 81

08. (UNESP) Uma família fez uma pesquisa de mercado, nas lojas de eletrodomésticos, à procura de três produtos que desejava adquirir: uma TV, um freezer e uma churrasqueira. Em três das lojas pesquisadas, os preços de cada um dos produtos eram coincidentes entre si, mas nenhuma das lojas tinha os três produtos simultaneamente para a venda. A loja A vendia a churrasqueira e o freezer por R$ 1.288,00. A loja B vendia a TV e o freezer por R$ 3.698,00 e a loja C vendia a churrasqueira e a TV por R$ 2.588,00.

A família acabou comprando a TV, o freezer e a churrasqueira nestas três lojas. O valor total pago, em reais, pelos três produtos foi de

a) 3.767,00.
b) 3.777,00.
c) 3.787,00.
d) 3.797,00.
e) 3.807,00.

09. (UNICAMP) Sejam a e b números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ z - y = 1, \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = b. \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, podemos afirmar corretamente que

a) a – b = 0.
b) a + b = 1.
c) a – b = 2.
d) a + b = 3.

10. (UNICAMP) Considere o sistema linear nas variáveis reais x, y, z e w, $\begin{cases} x - y = 1, \\ y + z = 2, \\ w - z = 3. \end{cases}$

Logo, a soma x + y + z + w é igual a

a) -2.
b) 0.
c) 6.
d) 8.

11. (UNICAMP) As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal.

Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

a) $\begin{cases} x+2z=60 \\ y+z=60 \\ 3,5x-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+z=60 \\ y+2z=60 \\ 3,5x-y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2z=60 \\ y+z=60 \\ 3,5x+y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+z=60 \\ y+2z=60 \\ 3,5+y=0 \end{cases}$

12. (IFAL) Em um determinado momento, um estacionamento possui 50 veículos, entre carros, motos e triciclos. Um garoto curioso sai contando o total de rodas em contato com o chão no estacionamento e encontra o valor 165, percebendo também que a quantidade de rodas dos carros era o quádruplo do número de rodas das motos.

Considerando as informações como corretas, podemos dizer que o estacionamento possui

a) 30 motos.
b) 15 carros.
c) 15 triciclos.
d) o número de carros igual ao dobro de triciclos.
e) o número de motos igual ao triplo de triciclos.

13. (FGV) Se o sistema linear $\begin{cases} 3x - 5y = 12 \\ 4x + 7y = 19 \end{cases}$ for resolvido pela Regra de Cramer, o valor de x será dado por uma fração cujo denominador vale:

a) 41
b) 179
c) -179
d) 9
e) -9

14. (UFES-ADAPTADA) Em um livro, o autor fez a seguinte afirmação a respeito de um sistema de equações lineares:

"sistema possível e indeterminado, quando $\det M_i = 0$ e $\det M_{x_1} = \det M_{x_2} = \ldots = \det M_{x_n} = 0$".

Na notação do autor, M_i é a matriz incompleta (ou matriz dos coeficientes) do sistema e $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}$ são as matrizes definidas na regra de Cramer. Determine o valor de a para que a solução do sistema abaixo seja impossível.

$$\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+ay-z=1 \\ x+y-az=-2 \end{cases}$$

a) a =-2
b) a =-1
c) a = 0
d) a = 1
e) a = 2

15. (UEL) Numa loja, os artigos A e B, juntos, custam R$ 70,00, dois artigos A mais um C custam R$ 105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R$ 5,00. Qual é o preço do artigo C?

a) R$ 20,00
b) R$ 25,00
c) R$ 30,00
d) R$ 35,00
e) R$ 40,00

16. (FAC. ALBERT EINSTEIN - MED) Um parque tem 3 pistas para caminhada, X, Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8.420 metros. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de 7.940 metros. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8.110 metros. O comprimento da maior dessas pistas, excede o comprimento da menor pista em

a) 1.130 metros.
b) 1.350 metros.
c) 1.570 metros.
d) 1.790 metros.

17. (UNAERP) Dado o sistema $\begin{cases} mx + 3y - mz = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ para m = 3, o sistema é:

a) determinado
b) possível
c) possível e determinado
d) impossível
e) indeterminado

18. (ESPCEX - AMAN) Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma abcdef – xy, em que a sequência (abcdef) representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores. Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial $A \cdot B = C$, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são

a) 34
b) 41
c) 49
d) 51
e) 54

19. (IFAL) Analise as afirmativas abaixo.

I. O sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

II. O sistema $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-3y+z=-5 \\ x+2y-2z=7 \end{cases}$ é possível e determinado.

III. O sistema $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$ é impossível.

Marque a alternativa correta.

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Apenas I é falsa.
e) Apenas III é falsa.

20. (UPE-ADAPTADA) Considerando o sistema $\begin{cases} 5x+3y+4z=3 \\ 15x+9y+8z=6 \\ 20x+12y+16z=12 \end{cases}$ analise as afirmativas abaixo e assinale a correta.

a) O sistema é impossível.
b) O sistema é possível e indeterminado.
c) O sistema é possível e determinado.
d) O sistema admite como solução única x = 4, y = 8, z = -11.
e) O sistema admite como solução, para qualquer valor de x a terna (x, x, 5x).

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (IME) Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x+2y-z=m+1 \\ 2x+my+2z=m^2+2 \\ 2mx+2(m+1)y+(m+1)z=m^3+3 \end{cases}$$

02. (ITA) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x-2y+3z=-1. \\ 3x+az=5 \end{cases}$$

03. (UFJF-PISM 3) Considere o sistema dado pelas equações:

$$\begin{cases} x-3y+4z=3 \\ 2x-5y+10z=8 \\ x-y+(a^2-1)z=a+10 \end{cases}$$

a) Determine o(s) valor(es) de a para que o sistema seja possível e determinado e encontre seu conjunto solução.
b) Determines o(s) valor(es) de a para que o sistema seja possível e indeterminado.

04. (UEL) A Internet armazena uma quantidade enorme de informações. Ao fazer uma busca na rede, os sites são listados em ordem decrescente segundo o seu grau de importância. Considere que, para calcular o grau de importância, são analisados três fatores: a quantidade de pessoas que se inscrevem no site, a quantidade de atualizações do site e a quantidade de visualizações do site. Cada um desses fatores recebe uma pontuação determinada.

- Para que o site obtenha 9000 pontos e seja considerado de grande importância, são necessárias 600 pessoas inscritas, 600 atualizações e 800 visualizações.
- Para que o site obtenha 6300 pontos e seja considerado de média importância, são necessárias 300 pessoas inscritas, 600 atualizações e 300 visualizações.
- Para que o site obtenha 2000 pontos e seja considerado de importância satisfatória, são necessárias 100 pessoas inscritas, 100 atualizações e 300 visualizações.

A partir dessas informações, determine a pontuação obtida por um site que apresenta 900 pessoas inscritas, 450 atualizações e 700 visualizações.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

05. (UEL) Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

- Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.
- Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.
- Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. A	05. C	09. D	13. A	17. D
02. E	06. B	10. D	14. D	18. E
03. C	07. C	11. A	15. B	19. B
04. A	08. C	12. E	16. A	20. B

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. $m \in \mathbb{R} - \{0,1,2\} \rightarrow$ sistema possível e determinado
$m = 0 \rightarrow$ sistema possível e indeterminado
$m \in \{1,2\} \rightarrow$ sistema impossível
02. a = -6.
03. a) $S = \left\{\left(\frac{9a-37}{a-3}, \frac{2a-8}{a-3}, \frac{1}{a-3}\right); a \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 3\right\}$.
b) O sistema é possível e indeterminado se, e somente se, $a^2 - 9 = 0$ e $a + 3 = 0$, isto é, se a = -3.
04. 8850 pontos
05. 5 padeiros do tipo A, 3 padeiros do tipo B e 2 padeiros do tipo C.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES