15 EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

DEFINIÇÃO

São igualdades que apresentam termos desconhecidos nos expoentes dos elementos presentes nas sentenças matemáticas. Teremos equações exponenciais elementares, que são aquelas em que podemos igualar os dois lados da igualdade em função de potências de mesma base e equações exponenciais não-elementares, quando não é possível provocar esta igualdade.

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS ELEMENTARES

São aquela em que será possível expressar os dois lados da equação em função de potências de mesma base. Observe os exemplos abaixo:

Exemplo 1: $32^{x} = 16^{3x-1}$

$(2^5)^{x} = (2^4)^{3x-1}$

$2^{5x} = 2^{12x-4}$

Como temos potências iguais e as bases são iguais, teremos que os dois expoentes serão iguais:

$5x = 12x - 4$

$4 = 12x - 5x$

$7x = 4$

$x = \frac{4}{7} \rightarrow \mathbf{S = \left\{\frac{4}{7}\right\}}$

Exemplo 2: $100^{3x} = 0{,}1^{x-4}$

$(10^2)^{3x} = (10^{-1})^{x-4}$

$10^{6x} = 10^{-x+4}$

Como temos potências iguais e as bases são iguais, teremos que os dois expoentes serão iguais:

$6x = -x + 4$

$6x + x = 4$

$7x = 4$

$x = \frac{4}{7} \rightarrow \mathbf{S = \left\{\frac{4}{7}\right\}}$

Exemplo 3: $27^{x-1} = \sqrt{3}$

$(3^3)^{x-1} = 3^{\frac{1}{3}}$

$3^{3x-3} = 3^{\frac{1}{3}}$

Como temos potências iguais e as bases são iguais, teremos que os dois expoentes serão iguais:

$3x - 3 = \frac{1}{3}$

$9x - 9 = 1$

$9x = 1 + 9$

$9x = 10$

$x = \frac{10}{9} \rightarrow \mathbf{S = \left\{\frac{10}{9}\right\}}$

Exemplo 4: $0{,}25^{2-x} = 1024^{0{,}3x}$

$(2^{-2})^{2-x} = (2^{10})^{0{,}3x}$

$2^{-4+2x} = 2^{3x}$

Como temos potências iguais e as bases são iguais, teremos que os dois expoentes serão iguais:

$-4 + 2x = 3x$

$2x - 3x = 4$

$-x = 4$

$\mathbf{x = -4 \rightarrow S = \{-4\}}$

Exemplo 5: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \frac{256}{81}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{4}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

$x = -4 \rightarrow \mathbf{S = \{-4\}}$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS NÃO-ELEMENTARES

São aquela em que não será possível igualar os dois lados da equação em função de potências de mesma base. Podemos resolver tais equações com o uso de propriedades de potenciação ou por meio de substituições na igualdade com o auxílio de uma incógnita auxiliar para tornar esta equação mais simples. Observe os exemplos abaixo:

Exemplo 1: $2^{x+1}\,2^{x-2} = 9$

$2^{x} \cdot 2^{1} + \frac{2^{x}}{2^{2}} = 9$

$2 \cdot 2^{x} + \frac{2^{x}}{4} = 9$

$8 \cdot 2^{x} + 2^{x} = 36$

$2^{x} \cdot (8 + 1) = 36$

$2^{x} \cdot (9) = 36$

$2^{x} = 4$

$2^{x} = 2^{2}$

$x = 2 \rightarrow \mathbf{S = \{2\}}$

Exemplo 2: $2^{x-4} + 2^{x} = 34$

$\frac{2^{x}}{2^{4}} + 2^{x} = 34$

$\frac{2^{x}}{16} + 2^{x} = 34$

$2^{x} + 2^{x} \cdot 16 = 544$

$2^{x} \cdot (1 + 16) = 544$

$17 \cdot 2^{x} = 544$

$2^{x} = \frac{544}{17}$

$2^{x} = 32$

$2^{x} = 25$

$x = 5 \rightarrow \mathbf{S = \{5\}}$

Exemplo 3: $3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 11$

$3^x + \frac{3^x}{3^1} - \frac{3^x}{3^2} = 11$

$3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 11$

$9 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x - 3^x = 99$

$3^x \cdot (9 + 3 - 1) = 99$

$11 \cdot 3^x = 99$

$3^x = \frac{99}{11}$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2 \rightarrow$ **S = {2}**

Exemplo 4: $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$(3^+)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

Faremos a seguinte substituição: $y = 3^x$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

Teremos as seguintes soluções para esta equação: y = 1 ou y = 3. Assim, para o cálculo de x, teremos as possibilidades:

$3^x = 1 \rightarrow 3^x = 3^0 \rightarrow x = 0$

$3^x = 3 \rightarrow 3^x = 3^1 \rightarrow x = 1$

Logo: **S = {0,1}**

Exemplo 5: $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

$(2^2)^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

Faremos a seguinte substituição: $y = 2^x$

$y^2 - 9y + 8 = 0$

Teremos as seguintes soluções para esta equação: y = 1 ou y = 8. Assim, para o cálculo de x, teremos as possibilidades:

$2^x = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x = 0$

$2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$

Logo, **S = {0, 3}**

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFPB) A solução da equação da $2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-2} = 14$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução: C

$2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-2} = 14 \rightarrow 2^x \cdot 2 - 2^x \cdot 0{,}5 + 2^x \cdot 0{,}25 = 14$

$2^x(2 - 0{,}5 + 0{,}25) = 14 \rightarrow 2x \cdot 1{,}75 = 14 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow$ **x = 3**

02. (UDESC) A solução da equação exponencial $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$ é:

a) 0 e 2
b) 1 e 2
c) -1 e 2
d) 0 e -1
e) 0 e 1

Resolução: A

$25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0 \rightarrow (5^x)^2 - 26 \cdot 5^x + 25 = 0 \rightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 25 \end{cases}$

x = 0 ou **x = 2**

03. (UEL) Considere as soluções reais de $3^a \cdot 3^{7x} \cdot 3^{12} = 1$. Se $a = x^2$, então a diferença entre a maior e a menor dessas raízes é:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

Resolução: D

$3x^2 \cdot 3^{7x} \cdot 3^{12} = 1 \rightarrow 3^{x^2+7x+12} = 3^0 \rightarrow x^2 + 7x + 12 = 0$

x = -3 ou x = -4

Assim: -3 -(-4) = -3 + 4 = **1**

04. (UEL) Se o número real K satisfaz à equação $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, então K^2 é igual a:

a) 0 ou 1/2
b) 0 ou 1
c) 1/2 ou 1
d) 1 ou 2
e) 1 ou 3

Resolução: B

$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$x^2 = 0$ ou **$x^2 = 1$**

ANOTAÇÕES