32 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

DEFINIÇÃO

A partir de dois polinômios p (x) e q(x), então a igualdade p(x) = q(x) p(x) – q(x) = 0 é uma equação algébrica. Assim, teremos uma equação de grau n, do qual falaremos posteriormente.

Observe exemplos de equações algébricas:

$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x + 5 = 0$

$-2x^3 + 16 = 0$

$8x^2 + 10x + 8 = 2$

$5x + 4 = 12 - 8x + 3x^4$

O grau da equação algébrica será o maior grau de um dos polinômios que a originaram. Nos exemplos das equações acima, os graus das equações são iguais a 4, 3, 2 e 4, respectivamente.

RAIZ DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

A raiz de uma equação algébrica é o valor que provocará valor numérico igual a zero no polinômio gerado. Em outras palavras, será o valor que vai satisfazer a equação algébrica em questão. Observe o exemplo abaixo:

Na equação algébrica $2x^3 - 10x^2 + 4x + 4 = 0$ temos que 1 será uma de suas raízes, visto que é um valor que satisfaz a esta equação, ou seja, se substituirmos o valor de x por 1 na equação, teremos uma sentença verdadeira.

DETERMINAÇÃO DE RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Existem diferentes métodos e ferramentas para se descobrir as raízes de uma equação algébrica. Devemos estar atentos aos valores e coeficientes envolvidos na equação para que possamos escolher a melhor ferramenta a ser utilizada.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

De acordo com este teorema, temos que "Todo polinômio não constante de grau n possui n raízes complexas, não necessariamente todas distintas". Assim, o que esse teorema nos fala é que para um polinômio com quaisquer coeficientes, reais ou complexos, o número de raízes sempre será igual ao seu grau. Desta forma, temos por exemplo que uma equação algébrica de terceiro grau terá 3 raízes, tal como podemos afirmar que em uma equação algébrica de grau n teremos um total de n raízes, de forma que possa existir no conjunto solução desta equação raízes iguais inclusive.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

A partir deste teorema entendemos que podemos decompor uma equação algébrica de grau superior a 1 em fatores de grau 1. Assim, teremos um produto igual a zero, o que nos levará a entender que a única possibilidade para que o produto seja zero é a situação em que algum dos fatores deve ser nulo. Observe o exemplo abaixo:

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x^2 - 2x - 5x + 10 = 0$

$x(x - 2) - 5(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

Deste produto, decorrem:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

Assim, o conjunto solução desta equação algébrica é S = {2, 5}

MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Dentro do conjunto solução de uma equação algébrica podemos ter todas as raízes diferentes ou podemos ter a repetição de raízes, ou seja, podemos ter uma raiz como solução de uma equação algébrica mais de uma vez. O número de vezes que a mesma raiz aparece indica a sua multiplicidade. Observe o exemplo abaixo:

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \rightarrow (x - 2)^3 = 0$

Nesse caso, dizemos que 2 é a raiz de multiplicidade 3 ou raiz tripla da equação.

Observe o exemplo abaixo, em que temos uma equação algébrica fatorada:

$(x - 1)^3.(x + 2)^2.(x - 4)$

A partir do que foi citado, podemos dizer que:

x = 1 é raiz com multiplicidade 3 ou raiz tripla desta equação algébrica.

x = -2 é raiz com multiplicidade 2 ou raiz dupla desta equação algébrica.

x = 4 é raiz com multiplicidade 1 ou raiz simples desta equação algébrica.

RAÍZES COMPLEXAS NÃO-REAIS

O Teorema da raiz complexa conjugada afirma que P é um polinômio em uma variável com coeficientes reais, e a + bi é uma raiz de P com a e b números reais, então seu complexo conjugado a – bi é também uma raiz de P. Desta forma, se o número complexo não real 3 + 2i é raiz de um polinômio, o seu conjugado (ou seja, 3 – 2i) também será raiz deste polinômio.

PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS

Estabelecer as raízes de uma equação algébrica pode ser bem difícil em alguns cenários. Podemos inspecionar alguns valores inteiros com este intuito, mas por uma questão de sorte, talvez estejamos testando valores que não serão raízes, o que nos demandará mais tempo para novos testes. Dito isto, existe uma técnica de inspeção de raízes racionais em uma equação algébrica de coeficientes inteiros. Tal técnica utilizará o coeficiente de maior e grau e o coeficiente livre desta equação, ambos em módulo.

A partir do exemplo abaixo, colocaremos em prática esta técnica. Observe:

$2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$

Criaremos os conjuntos p e q, cujos elementos serão os divisores do módulo do coeficiente livre e do módulo do coeficiente de maior grau respectivamente (12 e 2). Assim, teremos;

p = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

q = {1, 2}

Utilizamos a expressão ±p/q como possibilidades de raízes para esta equação algébrica, diminuindo o conjunto de possibilidades de uma quantidade infinita para uma quantidade finita. As possíveis

raízes deste exemplo seriam:

Possíveis raízes: ±1, ±1/2, ±2, ± 3, ±3/2, ±4, ±6, ±12

Testando o valor -2, por exemplo, temos:

$2.(-2)^4 + 5.(-2)^3 - 11.(-2)^2 - 20.(-2) + 12 = 0$

$2.(16) + 5.(-8) - 11.(4) + 40 + 12 = 0$

$32 - 40 - 44 + 40 + 12 = 0 \rightarrow 0 = 0$

Assim, como alcançamos uma sentença verdadeira, podemos afirmar que -2 é uma das raízes desta equação algébrica. Os testes dos valores -3, 1/2 e 2 também resultariam em sentenças verdadeiras, tornando-se raízes desta equação, que teria como solução o seguinte conjunto: S = {-3, -2, ½, 2}.

RELAÇÕES DE GIRARD

As relações de Girard são ferramentas que criarão uma relação entre os coeficientes de uma equação algébrica e as suas raízes. Em um polinômio de grau n teremos um total de n relações de Girard, que podem ser expressas com diferentes nomes, mas podem ser compreendidas como a soma das raízes de uma em uma, da soma do produto de duas em duas, da somado produto de três em três e assim sucessivamente. A última relação de Girard de uma equação algébrica será o produto entre todas as raízes da equação.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A partir de uma equação polinomial de grau 2 (em que teremos 2 raízes, denominadas por x_1 e x_2), teremos duas relações de Girard, que chamaremos de soma e de produto, como visto no estudo das equações de segundo grau provenientes das funções quadráticas. Observe:

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ Raízes: x_1 e x_2

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$(x_1) \cdot (x_2) = \frac{c}{a}$$

EQUAÇÃO DO 3º GRAU

A partir de uma equação polinomial de grau 3 (em que teremos 3 raízes, denominadas por x_1, x_2 e x_3), teremos três relações de Girard, que chamaremos de soma, de produto dois a dois e de produto. Observe:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \rightarrow$ Raízes: x_1, x_2 e x_3.

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$$

$$(x_1)\cdot(x_2) + (x_1)(x_3) + (x_2) \cdot (x_3) = \frac{c}{a}$$

$$(x_1).(x_2).(x_3) = \frac{-d}{a}$$

EQUAÇÃO DE 4º GRAU

A partir de uma equação polinomial de grau 4 (em que teremos 4 raízes, denominadas por x_1, x_2, x_3 e x_4), teremos quatro relações de Girard, que chamaremos de soma, de produto dois a dois, de produto três a três e de produto. Observe:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \rightarrow$ Raízes: x_1, x_2, x_3 e x_4.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-b}{a}$$

$$(x_1) \cdot (x_2) + (x_1)(x_3) + (x_1) \cdot (x_4) + (x_2) \cdot (x_3) + (x_2)(x_4) + (x_3) \cdot (x_4) = \frac{c}{a}$$

$$(x_1) \cdot (x_2) \cdot (x_3) + (x_1) \cdot (x_2) \cdot (x_4) + (x_1) \cdot (x_3) \cdot (x_4) + (x_2) \cdot (x_3) \cdot (x_4) = \frac{-d}{a}$$

$$(x_1) \cdot (x_2) \cdot (x_3) \cdot (x_4) = \frac{e}{a}$$

É importante frisar que as relações de Girard das demais equações algébricas permanecerão com a mesma dinâmica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (MACKENZIE) Se a soma de duas raízes de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$ é 3, então o número real k é igual a:

a) – 6 b) – 3 c) – 2 d) 3 e) 6

Resolução: A

Denominando as raízes por x_1, x_2 e x_3, teremos pela primeira relação de Girard que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-(-6)}{1}$$

$3 + x_3 = 6 \rightarrow x_3 = 3$

Assim, temos que uma das raízes desta equação algébrica é 3, que verifica a mesma. Portanto:

$(3)^3 - 6.(3)^2 + 11.(3) + k = 0$

$27 - 54 + 33 + k = 0 \rightarrow$ **k = -6**

02. (CESGRANRIO) O valor real de a para o qual i é raiz do polinômio $P(x) = x^5 + x^4 + ax - 1$ é:

f) -1 g) 1 h) -2 i) 2 j) 3

Resolução: A

Se i é raiz deste polinômio, temos que este valor satisfaz a sentença abaixo:

$i^5 + i^4 + a.i - 1 = 0$

$i + 1 + a.i - 1 = 0$

$a.i = -i$

a = -1

03. (UEL) Se o polinômio $x^3 + (k - 4).x^2 - 8x + 4k$, $k \in \mathbb{R}$, admite a raiz 2 com multiplicidade 2, então a outra raiz é:

a) 1 b) 0 c) -1 d) -2 e) -3

Resolução: E

Inicialmente, encontraremos o valor de k a partir da raiz 2:

$(2)^3 + (k - 4).(2)^2 - 8.(2) + 4k = 0$

$8 + (k - 4).4 - 16 + 4k = 0$

$8 + 4k - 16 - 16 + 4k = 0$

$8k = 24 \rightarrow k = 3$

Assim, a equação poderá ser expressa por:

$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

Se as suas raízes são x_1, x_2 e x_3, teremos a partir da primeira relação de Girard que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-(-1)}{1}$$

$2 + 2 + x_3 = 1$

$4 + x_3 = 1$ **$x_3 = -3$**

ANOTAÇÕES