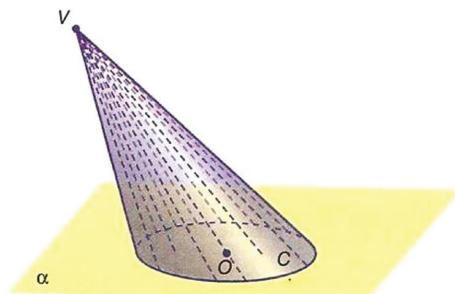


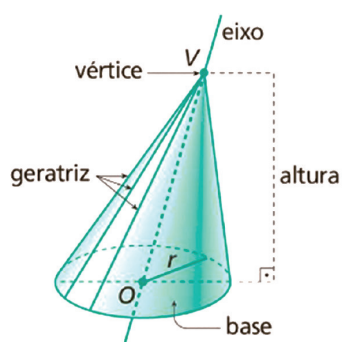


CONE CIRCULAR



Considere agora, um círculo no plano, e um ponto V fora desse plano. Chamamos de cone circular a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

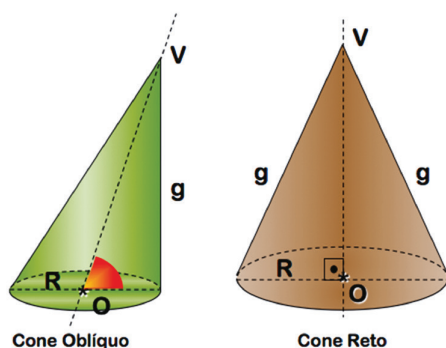
ELEMENTOS DO CONE



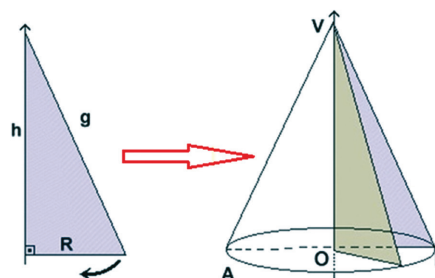
Considere o cone apresentado. Chamamos o ponto V de **vértice** do cone; o círculo de centro O de **base** do cone; o raio r desse círculo é o **raio da base**; o segmento com a extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base de **geratriz**; a distância entre o vértice e o plano da base de altura e a reta que passa pelos pontos V e O de **eixo**.

CLASSIFICAÇÃO

Tomemos o eixo do cone, chamamos o cone de **obliquo** quando seu eixo não é perpendicular ao plano da base, ou seja, quando o eixo forma, com a base, um ângulo diferente de 90° . Chamamos de **cone reto** àquele cujo eixo é perpendicular ao plano da base.

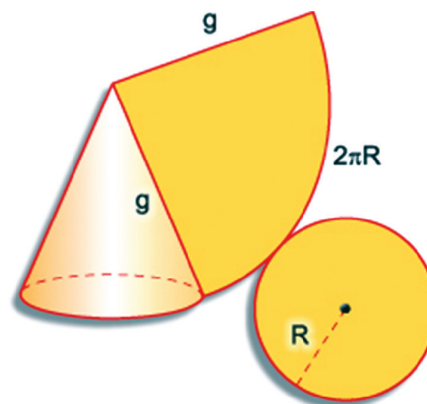


O cone circular reto também é chamado de **cone de revolução**, pois é formado pela rotação de um triângulo retângulo por um de seus catetos.



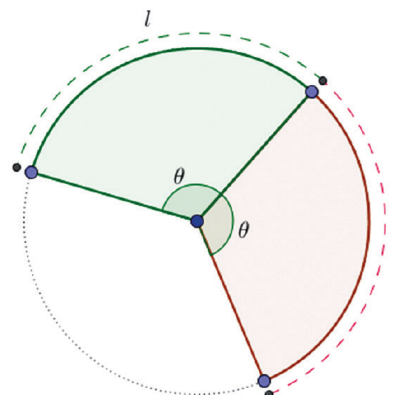
PLANIFICAÇÃO DO CONE CIRCULAR RETO

Considere um cone circular reto, de raio da base R e geratriz g . Sua superfície lateral pode ser desenrolada em um setor de raio g , cujo arco tem comprimento $2\pi R$, assim como sugere a figura.



Dessa maneira, podemos calcular o ângulo do setor planificado e sua área lateral relacionando-os com R e g .

Observe a imagem abaixo. Considere um setor circular de ângulo θ e comprimento de arco ℓ . Observemos que ao dobrar o comprimento ℓ , dobramos também o ângulo do setor e sua área correspondente.



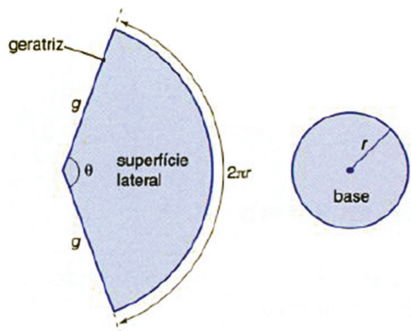
Dessa maneira podemos afirmar que, dado um setor circular são diretamente proporcionais:

- o ângulo θ correspondente a esse setor,
- o seu comprimento de arco;
- a área do setor.

Dessa maneira, por meio de uma regra de três, determinamos as medidas do ângulo θ da planificação da superfície lateral e de sua área lateral.

ÂNGULO DO SETOR DA PLANIFICAÇÃO E ÁREA LATERAL

Considere a planificação da superfície lateral de um cone reto, como mostra a figura abaixo:



Calculando o ângulo θ , temos:

$$360^\circ \rightarrow 2\pi g$$

$$\theta \rightarrow 2\pi r$$

$$\rightarrow \theta \cdot 2\pi g = 360^\circ \cdot 2\pi r \leftrightarrow \theta = \frac{r}{g} \cdot 360^\circ$$

Calculando a **área da superfície lateral**, temos:

arco **área**

$$2\pi g \rightarrow \pi g^2$$

$$2\pi r \rightarrow A_{\text{lateral}}$$

$$\text{logo, } A_{\text{lateral}} \cdot 2\pi g = 2\pi r \cdot \pi g^2, \text{ e portanto } A_{\text{lateral}} = \pi Rg$$

Como a **área total** é a soma da área lateral com a área da base, temos:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = \pi R^2 + \pi Rg$$

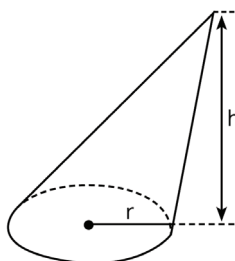
$$A_{\text{total}} = \pi R(R + g)$$

VOLUME

O volume de um cone é calculado assim como o volume de uma pirâmide, ou seja, pela terça parte do produto da área da base pela altura. Dessa maneira:

$$V_{\text{cone}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$$

Considere um cone cujo raio da base é r e altura h .

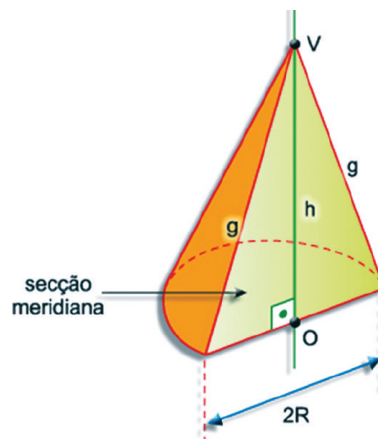


Seu volume é dado por:

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

SEÇÃO MERIDIANA

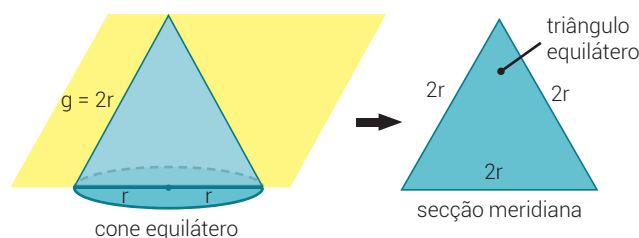
Chamamos de seção meridiana a interseção do cone com um plano que contém o seu eixo.



Observe que a seção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles.

CONE EQUILÁTERO

Chamamos de cone equilátero todo cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, ou seja, é o cone cuja seção meridiana é um triângulo equilátero.



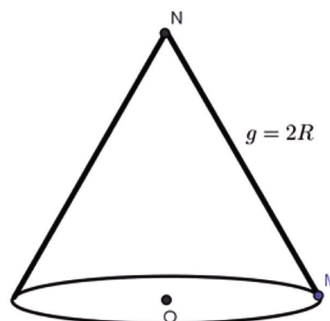
Assim, temos que a geratriz é $g = 2r$ e a altura do cone é $h = r\sqrt{3}$.

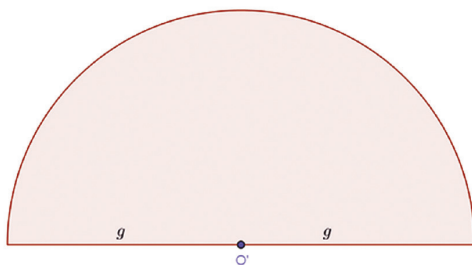
A planificação da superfície lateral do cone equilátero é um semicírculo.

Note que o ângulo na planificação é:

$$\theta = \frac{r}{g} \cdot 360^\circ = \frac{r}{2r} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

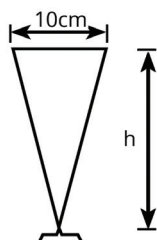
Ou seja, o ângulo da planificação do cone equilátero é 180° e, portanto, um semicírculo.





EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UNIRIO) Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura ao lado. Sabendo-se que a sua capacidade é de 100π ml, a altura h é igual a:



Resolução:

$$\begin{cases} \text{Volume(cone)} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \\ \text{Volume(cone)} = 100\pi \end{cases}$$

$$\frac{\pi(5)^2 \cdot h}{3} = \frac{25\pi \cdot h}{3} \Rightarrow \frac{25\pi \cdot h}{3} = 100\pi \Rightarrow$$

$$25h = 300 \Rightarrow h = \frac{300}{25} = 12\text{cm}$$



EXERCÍCIOS PROTREINO

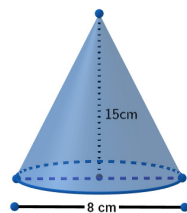
01. Dado um cone reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio da base, determine:

- a medida da geratriz.
- a área total.
- a medida do ângulo central do setor circular correspondente à superfície lateral planificada.

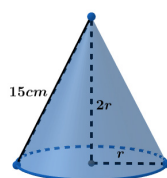
02. Encontre o valor da medida da altura de um cone equilátero cuja área total é 54π m².

03. Calcule o volume em cada cone reto:

a)



b)



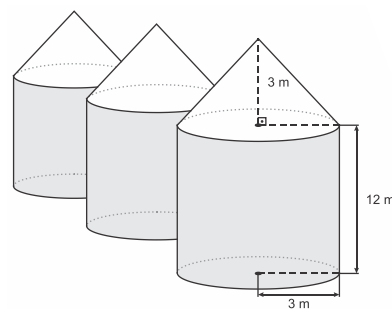
04. Seja um triângulo retângulo com catetos medindo 12 cm e 16 cm. Calcule o volume do cone de revolução obtido pela rotação desse triângulo em torno do maior cateto.

05. Determine o valor da área da base de um cone de revolução de 6 cm de altura cujo volume é 128π cm³.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (ENEM) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

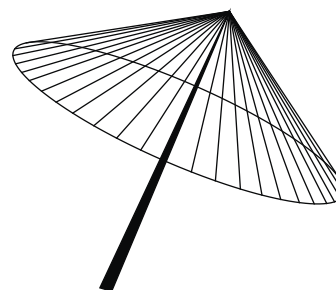


Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- 6.
- 16.
- 17.
- 18.
- 21.

02. (ENEM) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

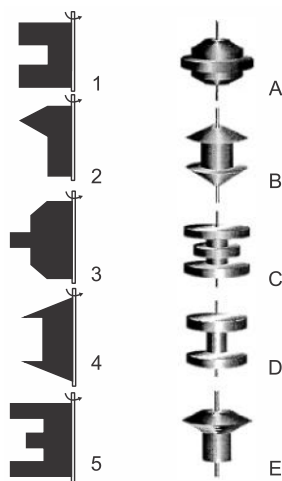


Disponível em: <http://mdmat.psicco.ufrgs.br>, Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

- pirâmide.
- semiesfera.
- cilindro.
- tronco de cone.
- cone.

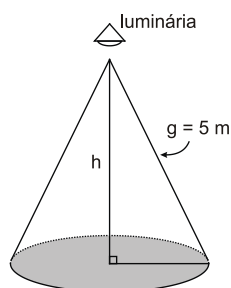
03. (ENEM) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

- a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.
- b) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.
- c) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.
- d) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.
- e) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

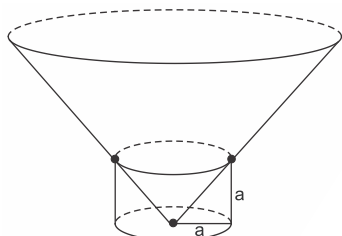
04. (ENEM) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26 \text{ m}^2$, considerando $\pi \approx 3,14$, a altura h será igual a

- a) 3 m.
- b) 4 m.
- c) 5 m.
- d) 9 m.
- e) 16 m.

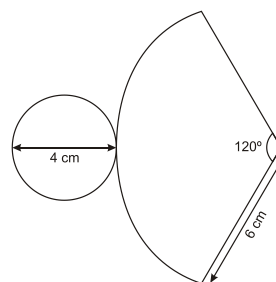
05. (PUCRS) Uma casquinha de sorvete na forma de cone foi colocada em um suporte com formato de um cilindro, cujo raio da base e a altura medem $a \text{ cm}$, conforme a figura.



O volume da parte da casquinha que está no interior do cilindro, em cm^3 , é

- a) $\frac{\pi a^2}{2}$
- b) $\frac{\pi a^2}{3}$
- c) $\frac{\pi a^3}{2}$
- d) $\frac{\pi a^3}{3}$
- e) $\frac{\pi a^3}{6}$

06. (PUCRS) Um desafio matemático construído pelos alunos do Curso de Matemática tem as peças no formato de um cone. A figura abaixo representa a planificação de uma das peças construídas.



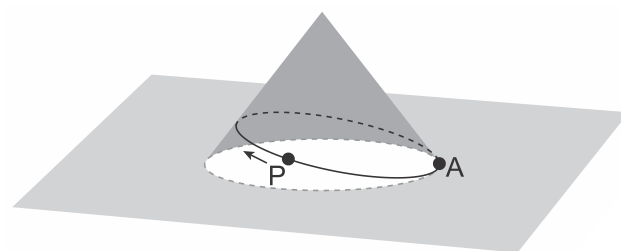
A área dessa peça é de _____ cm^2 .

- a) 10π
- b) 16π
- c) 20π
- d) 28π
- e) 40π

07. (UECE) O volume de uma tradicional casquinha de sorvete, com formato de um cone, feito a partir de um setor circular de 12 cm de raio e ângulo central de 120 graus é igual a

- a) $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3} \text{ cm}^3$.
- b) $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$.
- c) $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3} \text{ cm}^3$.
- d) $\frac{128\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$.

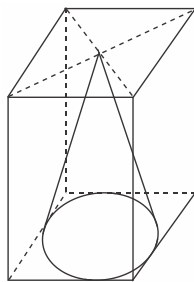
08. (UERJ) A figura a seguir representa a trajetória curva do ponto P sobre a superfície lateral de um cone circular reto cujo raio da base mede 10 cm e a geratriz, 60 cm. O ponto P inicia sua trajetória no ponto A, que pertence à circunferência da base, e dá uma volta completa em torno do cone, até retornar ao ponto A.



Com a planificação da superfície lateral do cone, é possível calcular o menor comprimento da trajetória percorrida por P, que corresponde, em centímetros, a:

- a) 50
- b) 60
- c) 18π
- d) 20π

09. (PUCRS) Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área 400 cm^2 . Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é



- a) 16000
- b) $\frac{4000}{3\pi}$
- c) $\frac{\pi}{12}$
- d) $\frac{\pi}{12}$
- e) $\frac{\pi}{36}$

10. (MACKENZIE) Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é $128\pi \text{ cm}^3$. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm^2 , é

- a) 144π
- b) 120π
- c) 80π
- d) 78π
- e) 64π

11. (MACKENZIE) Se um cone reto tem altura igual a 12 cm e seu volume é $64\pi \text{ cm}^3$, então sua geratriz, em cm, mede

- a) 20
- b) $10\sqrt{2}$
- c) $4\sqrt{10}$
- d) $4\sqrt{2}$
- e) $2\sqrt{10}$

12. (ENEM PPL) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20 % maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

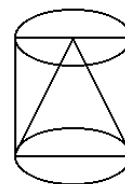
- a) 1,44
- b) 6,00
- c) 7,20
- d) 8,64
- e) 36,00

13. (UERJ) Para revestir externamente chapéus em forma de cones com 12 cm de altura e diâmetro da base medindo 10 cm, serão utilizados cortes retangulares de tecido, cujas dimensões são 67 cm por 50 cm. Admita que todo o tecido de cada corte poderá ser aproveitado.

O número mínimo dos referidos cortes necessários para forrar 50 chapéus é igual a:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

14. (PUCRS) A figura a seguir mostra um cone inscrito num cilindro. Ambos têm raio da base x e altura $2x$. Retirando-se o cone do cilindro, o volume do sólido resultante é

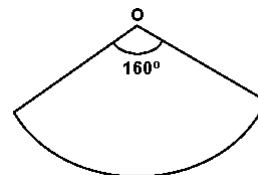


- a) $\frac{2\pi x^3}{3}$
- b) $\frac{4\pi x^3}{3}$
- c) $\frac{8\pi x^3}{3}$
- d) $\frac{2\pi x^2}{3}$
- e) $\frac{8\pi x^2}{3}$

15. (PUCRS) O raio da base de um cone circular reto e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular têm mesma medida. Sabendo que suas alturas medem 4 cm, então a razão entre o volume do cone e o da pirâmide é

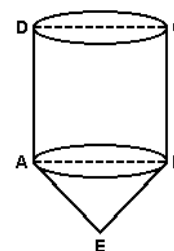
- a) 1
- b) 4
- c) $1/\pi$
- d) π
- e) 3π

16. (MACKENZIE) Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm. Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é:



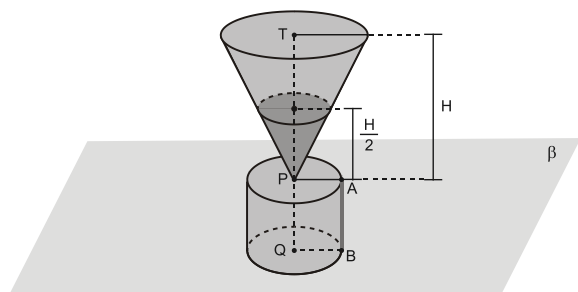
- a) 12 cm
- b) 18 cm
- c) 14 cm
- d) 16 cm
- e) 20 cm

17. (MACKENZIE) No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e $AE = BE = \sqrt{10}$. O volume desse sólido é:



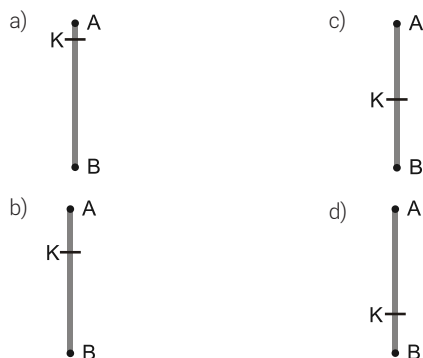
- a) $\frac{5\pi}{2}$
- b) $\frac{4\pi}{3}$
- c) 4π
- d) 5π
- e) 3π

18. (UERJ) Um funil, com a forma de cone circular reto, é utilizado na passagem de óleo para um recipiente com a forma de cilindro circular reto. O funil e o recipiente possuem a mesma capacidade. De acordo com o esquema, os eixos dos recipientes estão contidos no segmento TQ, perpendicular ao plano horizontal β .



Admita que o funil esteja completamente cheio do óleo a ser escoado para o recipiente cilíndrico vazio. Durante o escoamento, quando o nível do óleo estiver exatamente na metade da altura do funil, $\frac{H}{2}$, o nível do óleo no recipiente cilíndrico corresponderá ao ponto K na geratriz AB.

A posição de K, nessa geratriz, é melhor representada por:



19. (FUVEST) Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:

- π é aproximadamente 3,14.
- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

- 4 horas e 50 minutos.
- 5 horas e 20 minutos.
- 5 horas e 50 minutos.
- 6 horas e 20 minutos.
- 6 horas e 50 minutos.

20. (ENEM) Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por $625 \pi \text{ cm}^3$ de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

$$\text{Volume do cone: } V_{\text{cone}} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

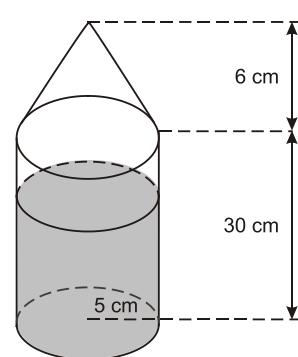


Figura 1

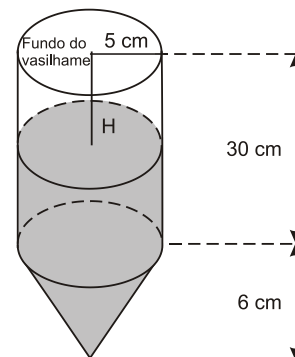


Figura 2

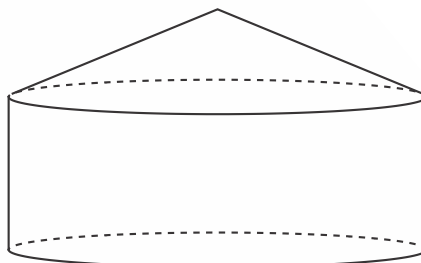
Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H ?

- 5 cm.
- 7 cm.
- 8 cm.
- 12 cm.
- 18 cm.



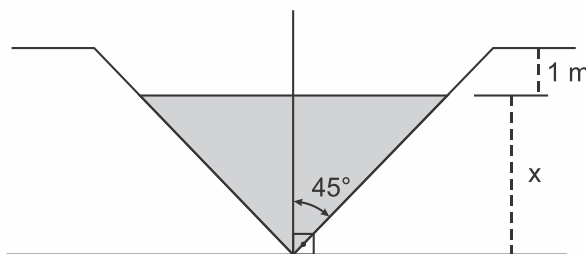
EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (UFPR) Um dos maiores silos do mundo para armazenamento de grãos está localizado na cidade de Primavera do Leste, no Mato Grosso. Suponha que esse silo é constituído por um cilindro circular reto com 24 m de raio e 22 m de altura, no qual está acoplado um cone circular reto com altura de 8 m, conforme indicado na figura a seguir.



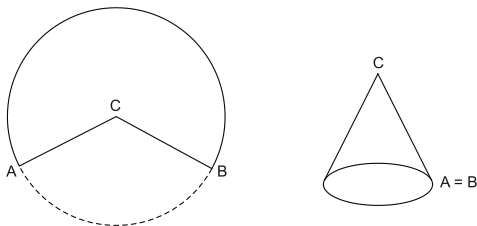
- Calcule o perímetro, em metros, da base do cilindro. Use $\pi = 3,1$.
- Calcule o volume, em metros cúbicos, desse silo. Use $\pi = 3,1$.

02. (UERJ) Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45° . Foram retirados desse depósito 19 m^3 de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em 1 m e passou a ter X metros de altura.



Considerando $\pi = 3$, calcule a altura X do nível de óleo.

03. (PUCRJ) De um disco circular, de raio medindo 6 e centro C, cortamos um setor cujo arco mede 13. Usando o pedaço maior, fazemos um cone reto juntando os lados CA e CB, como nas figuras abaixo.



Não use aproximações para π e determine:

- o perímetro da base do cone;
- o raio da base do cone;
- o volume do cone.

04. (UEL) Considere uma lata, com o formato de um cilindro reto de altura h cm e raio r cm (Figura 1), completamente cheia de doce de leite. Parte do doce dessa lata foi transferido para dois recipientes (Figura 2), iguais entre si e em forma de cone, que têm a mesma altura da lata e o raio da base igual à metade do raio da base da lata. Considere também que os dois recipientes ficaram completamente cheios de doce de leite.

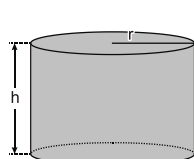


Figura 1

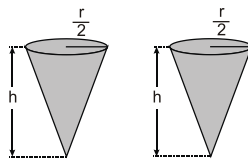


Figura 2

Desprezando a espessura do material de que são feitos os recipientes e a lata, determine quantos outros recipientes, também em forma de cone, mas com a altura igual à metade da altura da lata e de mesmo raio da lata (Figura 3), podem ser totalmente preenchidos com o doce de leite que restou na lata.

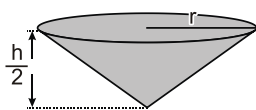
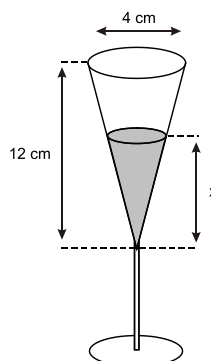


Figura 3

Observação: Na lata e nos recipientes completamente cheios de doce de leite, o doce não excede a altura de cada um deles e, na transferência do doce de leite da lata para os recipientes, não há perda de doce.

05. (UFPR - ADAPTADA) A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.

Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?



GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01. D | 05. D | 09. D | 13. B | 17. E |
| 02. E | 06. B | 10. A | 14. B | 18. A |
| 03. D | 07. A | 11. C | 15. D | 19. C |
| 04. B | 08. B | 12. B | 16. D | 20. B |

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

- a) Perímetro = 148,8 m
b) $V_{\text{total}} = 44044,8 \text{ m}^3$
02. $x = 2$
03. a) Perímetro = $(12\pi - 13) \text{ u.c.}$
b) $r = \frac{12\pi - 13}{2\pi} \text{ u.c.}$
c) $V = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{12\pi - 13}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{13 \cdot (24\pi - 13)} \cdot \text{u.v.}$
- 5 recipientes
- $V = 16\pi$

ANOTAÇÕES

[illegible]