R. BOCZKO

CONCEITOS DE ASTRONOMIA



CONCEITOS DE ASTRONOMIA

CIP – Brasil. Catalogação-na-Publicação
Câmara Brasileira do Livro, SP

Boczko, Roberto.
B649c Conceitos de astronomia / R. Boczko – São Paulo, Edgard Blücher, 1984.

Bibliografia.

1. Astronomia 2. Calendário 3. Mecânica celeste I. Título.

CDD-520
-521.1
84-1748 -529.3

Índices para catálogo sistemático (CDD):

1. Astronomia 520
2. Calendário: Cronologia 529.3
3. Mecânica celeste 521.1

R. Boczko
Professor de Astronomia do
Instituto Astronômico e Geofísico da
Universidade de São Paulo

CONCEITOS DE ASTRONOMIA

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

© **1984** *Roberto Boczko*

2ª reimpressão - 1998

É proibida a reprodução total ou parcial
por quaisquer meios
sem autorização escrita da editora

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
Rua Pedroso Alvarenga, 1245 - cj. 22
04531-012 – S. Paulo – SP – Brasil
Fax: (011) 852-2707

Impresso no Brasil ***Printed in Brazil***



EDITORA AFILIADA

Conteúdo

	-	Prefácio	XI
		CAPÍTULO I - NOÇÕES DE CALENDÁRIO	
0	-	Astronomia: passado, presente e futuro.	2
1	-	O dia e a noite.	3
2	-	Fases da Lua. Mês lunar.	4
3	-	Estações do ano. Ano Solar	6
4	-	A semana.	7
5	-	Calendário: objetivos e problemas.	9
6	-	Determinação da duração do ano.	10
7	-	Calendário Egípcio.	12
8	-	Calendário Babilônico.	15
9	-	Calendário Grego.	16
10	-	Calendário Juliano.	17
11	-	Era Cristã.	19
12	-	Definição da data da Páscoa. Festas religiosas cristãs.	21
13	-	Calendário Gregoriano.	22
14	-	Cálculo da data da Páscoa.	25
		CAPÍTULO II - SISTEMAS DE REFERÊNCIA	
15	-	Vertical e horizonte de um local.	28
16	-	Movimento diurno aparente do Sol.	30
17	-	Determinação dos pontos cardeais.	32
18	-	Movimento noturno e movimento anual aparentes das estrelas.	33
19	-	Movimento diário aparente dos astros.	35
20	-	Conceito de esfera celeste.	37
21	-	Sistema horizontal local de referências.	40
22	-	Nascer, ocaso e passagem meridiana de um astro.	44
23	-	Culminação superior e inferior.	46
24	-	Máxima digressão.	49
25	-	Determinação do meridiano pelo método das alturas iguais.	51

26 - Coordenadas geográficas. 52
27 - Relação entre latitude geográfica e astronômica. 54
28 - Diferença entre norte geográfico e magnético. 55
29 - Sistema equatorial de referências. 56
30 - Sistema equatorial horário de referências. 59
31 - Correspondência entre os diversos sistemas de referências. 61

CAPÍTULO III - TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

32 - Triângulos esféricos. 64
33 - Lei do co-seno na trigonometria esférica. 67
34 - Lei dos senos na trigonometria esférica. 70
35 - Fórmula do seno & co-seno na trigonometria esférica. 71
36 - Fórmula do co-seno & co-seno na trigonometria esférica. 72
37 - Fórmula do seno & seno na trigonometria esférica. 73
38 - Fórmulas de Borda. 74
39 - Determinação do ângulo entre 2 astros. 77

CAPÍTULO IV - RELAÇÕES ENTRE SISTEMAS DE REFERÊNCIA

40 - Relação entre coordenadas horizontais e horárias. 80
41 - Relação entre o sistema horário e o equatorial: tempo sideral. 83
42 - Relação entre o sistema horizontal e o equatorial. 86
43 - Passagem meridiana de um astro. 87
44 - Estrelas circumpolares. 90
45 - Nascer e ocaso de um astro. 95
46 - Condições de visibilidade de um astro. 97
47 - Cruzamento com o primeiro e segundo verticais. 101
48 - Condições de máxima digressão ou elongação. 103
49 - Passagem por um almucântar. 106

CAPÍTULO V - PLANIFICAÇÃO DA ESFERA CELESTE

50 - Planificação da esfera celeste. 108
51 - Projeção cilíndrica. 109

52 - Projeção estereográfica. 112

CAPÍTULO VI - MOVIMENTO ANUAL DO SOL. SISTEMA ECLÍPTICO

53 - Movimento anual aparente do Sol. 118
54 - Declinação do Sol ao longo do ano
55 - Duração da parte diurna e noturna de um dia. 123
56 - Sistema eclíptico de coordenadas. 125
57 - Estações do ano: razão. 128
58 - Regiões climáticas da Terra. 130
59 - Relação entre coordenadas equatoriais e eclípticas do Sol. 132
60 - Relações entre coordenadas equatoriais e eclípticas de um astro. 134
61 - Coordenadas galácticas. 136

CAPÍTULO VII - MUDANÇA DE SISTEMAS DE COORDENADAS POR MEIO DE MATRIZES DE ROTAÇÃO.

62 - Relação entre coordenadas esféricas e cartesianas. 140
63 - Conversão entre sistemas diretos e indiretos. 142
64 - Mudança de coordenadas por matrizes de rotação. 144
65 - Escolha da direção dos eixos cartesianos nos diversos sistemas de referências. 148
66 - Mudança entre os sistemas de coordenadas usadas em astronomia por meio de matrizes de rotação. 151

CAPÍTULO VIII - SISTEMAS DE MEDIDAS DE TEMPO

67 - Medição do tempo. 156
68 - Tempo solar verdadeiro. 158
69 - Tempo solar médio; tempo universal. 160
70 - Relógios solares. 163
71 - Tempo do fuso local. 166
72 - Hora de verão. 169
73 - Tempo sideral verdadeiro. 171
74 - Tempo sideral médio. 173
75 - Precessão dos equinócios. 176

76 - Fenômeno da nutação. 179
77 - Ano sideral, ano trópico e ano besseliano. 180
78 - Tempo das efemérides. 183
79 - Tempo atômico internacional. 184
80 - Irregularidades na rotação da Terra. 186
81 - Movimento dos pólos. 187
82 - Variação da latitude de um local devido ao movimento dos pólos. 188
83 - Variação da longitude de um local devido ao movimento dos pôlos. UT0 e UT1. 190
84 - Efeitos sazonais na velocidade de rotação da Terra. UT2. 192
85 - Tempo universal coordenado. 193

CAPÍTULO IX - DESLOCAMENTO DOS PLANOS FUNDAMENTAIS DE REFERÊNCIA.

86 - Deslocamentos dos planos fundamentais de referência. 196
87 - Variação (aproximada) nas coordenadas de um astro devido à precessão. 200
88 - Variação rigorosa nas coordenadas de um astro devido à precessão. 204
89 - Variação das coordenadas de um astro devido à nutação. 208

CAPÍTULO X - ABERRAÇÃO DA LUZ

90 - Efeito de aberração. 214
91 - Ângulo de aberração estelar. 217
92 - Aberração secular das estrelas. 219
93 - Aberração anual. 221
94 - Aberração diária. 226

CAPÍTULO XI - PARALAXE

95 - Efeito de paralaxe. 230
96 - Paralaxe anual. 232
97 - Paralaxe diária. 236

CAPÍTULO XII - MOVIMENTO PRÓPRIO DAS ESTRELAS

98 - Movimento próprio das estrelas. 242

CAPÍTULO XIII - REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA

99 - Refração atmosférica. 246
100 - Crepúsculos. 249

CAPÍTULO XIV - REDUÇÃO AO DIA

101 - Redução ao dia. 252

CAPÍTULO XV - ESTRUTURA E DISTÂNCIAS NO SISTEMA SOLAR

102 - Sistema geocêntrico. 258
103 - Teoria dos epiciclos. 260
104 - Sistema heliocêntrico. 262
105 - Provas do movimento de rotação e do movimento orbital da Terra. 263
106 - Configurações planetárias. 265
107 - Determinação do raio da Terra por Eratóstenes. 267
108 - Fases da Lua. 269
109 - Eclipses. 271
110 - Condição geométrica para a ocorrência de um eclipse. 276
111 - Determinação da distância da Terra à Lua. 280
112 - Distância da Terra ao Sol. 282
113 - Raio orbital e período sideral de planetas interiores. 283
114 - Raio orbital e período sideral de planetas exteriores. 285
115 - Lei de Titus & Bode. 287
116 - Órbita da Terra, segundo Kepler. 288
117 - Leis de Kepler. 290

CAPÍTULO XVI - MOVIMENTO ELÍPTICO DO SOL

118 - Estudo da elípse. 294
119 - Elementos orbitais. 297
120 - Movimento elíptico do Sol. 300
121 - Equação de Kepler. 303

122 - Equações aproximadas do movimento elíptico. 306
123 - Movimento do Sol em ascensão reta. 308

CAPÍTULO XVII - GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

124 - Lei da gravitação universal. 312
125 - Primeira prova da validade da lei da gravitação universal. 316
126 - Marés. 318
127 - Variação da gravidade terrestre com a altura desde o solo. 321
128 - Energia de um corpo num campo gravitacional. 322
129 - Equação da trajetória e velocidade de um corpo num campo gravitacional. 324
130 - Formas geométricas das órbitas. 328
131 - Problema dos 2 corpos. 331
132 - Hodógrafo de um movimento orbital. 334
133 - Movimento elíptico ou kepleriano. 338
134 - Movimento parabólico. 342
135 - Órbita de um satélite artificial da Terra. 345
136 - Coordenadas heliocêntricas de um corpo orbital. 347
137 - Coordenadas geocêntricas de um corpo orbital. 349
138 - Noções sobre perturbações: problema dos 3 corpos. 351

- Apêndice. 355

- Exercícios. 359

- Bibliografia. 408

- Índice Remissivo. 409

Prefácio

O interesse no estudo da Astronomia tem apresentado ultimamente um aumento significativo. A procura de cursos de Astronomia tem ultrapassado, muitas vezes, os limites logísticos disponíveis.

Uma razoável quantidade de publicações estão sendo editadas sobre o assunto, visando essencialmente uma divulgação da Astronomia ao público, em geral, não especializado. É através dessas obras, muitas vezes, que nascem as tendências dos jovens pela Astronomia em nível mais profundo.

A idéia dessa nossa obra é a de permitir que os iniciantes em Astronomia possam se inteirar do vocabulário, das idéias e dos métodos utilizados em Astronomia Fundamental. A obra nasceu dos muitos anos de ensino de Astronomia no Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo, e seu conteúdo visa cobrir a matéria lecionada nos cursos básicos de Astronomia Fundamental. A matemática e física envolvidas raramente ultrapassam o nível de conhecimento obtenível nos cursos de 2º Grau. A matéria é apresentada de modo a não exigir nenhum conhecimento astronômico preliminar.

Seria difícil enumerar as pessoas que tornaram essa obra possível, mas, sem dúvida alguma, houve aquelas que participaram com uma cota maior. Entre estas, gostaria de expressar minha gratidão aos Professores Doutores Abrahão de Moraes (já falecido), Giorgio Ernesto Oscare Giacaglia, Paulo Benevides Soares e Sylvio Ferraz-Mello que foram os responsáveis pela minha formação em Astronomia de Posição. O que essa obra tem de bom deve-se a eles, os erros podem ser computados a minha falha em aborver seus ensinamentos. Muito frutíferas foram também as discussões mantidas com meus colegas de profissão Luiz Bernardo Ferreira Clauzet, Nelson Vani Leister e Ramachrisna Teixeira, sempre procurando determinar a melhor forma de se ministrar os cursos. Duas pessoas muito influiram para que eu tomasse a iniciativa de reunir num livro todas as minhas notas de aula: a Srta. Teresa Cristina Cume Grassi, inicialmente como aluna e depois como colega de trabalho, inclusive re

vendo os manuscritos e apresentando valiosas críticas e sugestões; a outra pessoa que sempre me incentivou foi minha mulher Elisabeth Epov Boczko. Valiosíssima e indispensável foi a colaboração de Maria Neuza dos Santos com o magnífico trabalho de datilografia. A todos meus sinceros agradecimentos.

Aos leitores, desejo que possam nessa obra encontrar algumas respostas a alguns de seus problemas. Desses mesmos leitores e de meus colegas de profissão espero as críticas para que se possa melhorar o conteúdo do livro numa eventual próxima edição.

São Paulo, janeiro de 1984.

R. Boczko

Capítulo 1

Noções de Calendário

0. ASTRONOMIA: PASSADO, PRESENTE E FUTURO

Ao contrário do que muitos supõem, a Astronomia[1] não é razão de deleite de alguns poucos. A Astronomia nasceu e cresceu gradativamente para suprir necessidades sociais, econômicas, religiosas e também, obviamente, culturais.

A implantação de métodos de contagem dos dias, a própria medição da duração do dia, a determinação das estações do ano, a demarcação de terrenos, a navegação, etc., podem ser exemplos da necessidade de aplicação de conhecimentos astronômicos.

No presente, as viagens espaciais são possíveis graças à tecnologia desenvolvida aliada à alta precisão dos dados astronômicos disponíveis. Não há negar a honra que tais viagens causam à humanidade; mesmo os que não vêem nelas aplicação direta imediata, devem reconhecer os avanços tecnológicos que tais eventos incutiram em diversos ramos da atividade humana, como por exemplo a miniaturização, largamente utilizada tanto na vida social como na medicina e outras ciências.

Acreditamos que num futuro, talvez não muito distante, a Astronomia poderá fornecer ao homem auxílio ainda maior no intuito de desenvolver ainda mais nosso intelecto bem como ajudar no melhor viver sobre a Terra e, quem sabe, sobre outros astros.

Vejamos, nos itens seguintes, como a Astronomia se desenvolveu e que ajuda ela pode nos dar. Iniciemos com a aplicação da Astronomia no cômputo do tempo.

No Capítulo XVIII existe uma lista de exercícios de cada um dos ítens abordados.

---

1. Astronomia = Astron + nomos (lei) [grego] = lei dos astros.

1. O DIA E A NOITE

É razoável de se supor que a alternância periódica dos intervalos de tempo claro e escuro tenha orientado a vida social mesmo dos mais primitivos seres humanos. A associação da claridade com o *Sol*[1] e o da escuridão à sua ausência não deve ter sido muito difícil. Assim, a noção de *Dia*[2] atava-se à presença, quase sempre, fulgurante do Sol no *Céu*[3], e a noção de *Noite*[4] era ligada à sua falta e ao aparecimento de *Estrelas*[5].

Para as poucas necessidades sociais existentes, a contagem do tempo era feita pelo cômputo de "sóis" passados. Notar que ainda hoje em várias línguas sol é sinônimo de dia, e que dia é usado indistintamente para o período claro como também para designar o intervalo de tempo entre 2 inícios do período claro, ou seja: dia = período claro + período escuro.

Para evitar confusão na nomenclatura, à parte clara do dia chamaremos de *Dia Claro*; o adjetivo a ele referente será *Diurno*. Ao período completo do Dia Claro mais Noite chamaremos de *Dia*; referir-nos-emos ao Dia com o adjetivo *Diário*.

---

1. Sol [origem latina] ≡ Hélio [grego]
2. Dia [" " : Dies]
3. Céu [" " : caelum]
4. Noite [" " : noctis]
5. Estrela [" " : stella]

2. FASES DA LUA. MÊS LUNAR

Além do Sol, que regia o dia claro, e das estrelas, que só apareciam à noite, logo deve ter-se tornado notória a existência de outro *Astro* cuja aparição alternava-se periodicamente entre o dia claro e a noite: era a *Lua*[1], cuja figura noturna, muito mais espetacular que a diuna, passou naturalmente a ser conhecida como a rainha da noite, honra essa cabível ao rei Sol durante o dia claro.

Verificaram, também, os antigos seres humanos que a forma da Lua nem sempre era a mesma: ela passava por diversos estágios que se repetiam periodicamente. Esses estágios compreendiam desde uma Lua circular completamente brilhante até um mero filete circunferencial levemente iluminado, passando por todas as fases intermediárias, e continuando o fenômeno em ordem inversa até atingir a Lua Cheia novamente, e aí recomeçando o ciclo.

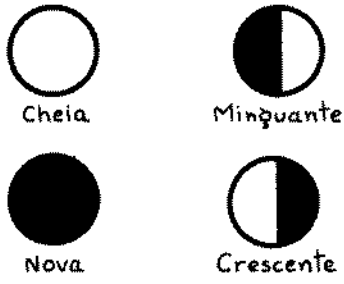


Fig. 1

Definiu-se assim 4 *Fases*[2] da Lua, cada uma iniciando-se nas seguintes condições:

Fase	Início
Cheia	Todo o círculo brilhante
Nova	Apenas uma circunferência ligeiramente iluminada
Minguante	Semi-círculo iluminado, precedendo a Lua Nova
Crescente	Semi-círculo iluminado, precedendo a Lua Cheia

1. Lua = Luna [latim] = Selene [grego]
2. Fase = Phasis [grego] = aparência

A observação sistemática da Lua permitiu que os antigos verificassem que um ciclo completo de suas fases (chamado de *Lunação*) ocorria num *interregno* (intervalo de tempo) de cerca de 29 ou 30 dias.

Sabemos hoje que esse interregno é de 29,530589 dias, período esse que recebe o nome de *Mês*[3] *Sinódico*[4], definido como o intervalo de tempo médio entre 2 fases iguais consecutivas.

A descoberta desse fenômeno periódico permitiu que a contagem dos dias fosse agrupada em blocos de 29 ou 30 dias que coincidiam com uma lunação. Surgiu daí o *Mês Lunar*, como sendo o interregno de dias inteiros correspondentes a uma lunação.

Notar que o mês lunar não corresponde a uma lunação exata, já que aquele tem um número de dias inteiros, e esse consta também de uma parte fracionária.

---

3. Mês = Mensis [latim]
4. Sinódico = Syn (junto) [grego] + hodos (caminho) [grego] = mesmo caminho, mesma configuração.

3. ESTAÇÕES DO ANO. ANO SOLAR

Com o crescer da civilização, as necessidades sociais tornaram-se mais sofisticadas, e o cômputo de grandes intervalos de tempo passou a ser premente. A humanidade descobriu no *Ano*[1] *Solar* um excelente período que poderia ser usado como padrão de medida de tempo.

Mesmo durante uma geração, o homem é capaz de verificar que as condições meteorológicas que o envolvem variam num ciclo bem definido, interpondo períodos agradáveis entre aqueles que apresentam condições extremas de quente ou frio.

Os antigos puderam associar as épocas de quente, frio ou intermediárias (4 épocas chamadas de *Estações*[2] *do Ano*) com algumas particularidades, tais como:

a) verificaram que o tamanho da sombra de um pilar ao meio-dia era muito maior na estação fria (Inverno) que na estação quente (Verão);
b) as estrelas visíveis no Inverno diferiam daquelas observáveis no Verão;
c) enchentes de rios ou secas estavam intimamente relacionadas com as estações do ano; etc.

O intervalo de tempo decorrido para que as estações completassem um ciclo passou a se chamar de *Ano Solar* ou simplesmente *Ano*.

A duração do ano, e seu emprego para a contagem do tempo é o que conhecemos por *Hemerologia*[3], e seu resultado é o *Calendário*[4].

---

1. Ano = annum [latim]
2. Estação = statio [latim] = pausa
3. Hemerologia = hemero (dia)[grego] + logos (tratado)[grego] = tratado sobre a contagem dos dias.
4. Calendário = calendarium [latim] = impresso com os dias, semanas e meses do ano; originário de calendas (primeiro dia de cada mês do ano, no calendário romano).

4. A SEMANA

No organizar dos dias em períodos mais longos para efeitos de contagem dos dias, um período de 7 dias, chamado *Semana*[1], foi um dos primeiros a ser utilizado. Sua origem, porém, não está ligada a nenhum fenômeno astronômico periódico. Poder-se-ia tentar associá-la a cada uma das 4 fases da Lua, já que cada uma delas tem uma duração aproximada de 7 dias. Não há, no entanto, nenhum registro conhecido de tal procedimento.

A semana de 7 dias foi utilizada tanto pelos judeus como pelos romanos. Para os primeiros, sua existência estava associada a razões religiosas que impunham uma abstinência de trabalho de 1 dia em cada 7. Esse proceder foi, também, posteriormente, adotado pelos cristãos. No que concerne aos romanos, esse padrão de medida de tempo foi sendo abraçado de forma gradativa, aparentemente ao se dedicar a cada um dos deuses celestes um dia, ou seja aos deuses Sol, Lua, e aos 5 *planetas*[2] então conhecidos por serem visíveis a olho nu: Mercúrio[3], Vênus[4], Marte[5], Júpiter[6] e Saturno[7] (não se conhecia Urano[8], Netuno[9] e Plutão[10]). A coincidência entre o número de dias da semana judaica e da semana astrológica romana progressivamente estabeleceu a noção de semana de 7 dias, com raízes tão profundas que sobreviveram a qualquer tentativa de modificação.

---

1. Semana = septimana [latim]
2. Planeta = planam [grego] = errante
3. Mercúrio [latim] = Hermes [grego] = mensageiro dos deuses
4. Vênus = deusa da beleza
5. Marte = bravo = deus da guerra
6. Júpiter = Zeus = rei dos deuses
7. Saturno = deus do tempo
8. Urano = Céu (grego)
9. Netuno = deus do mar
10. Plutão = deus do inferno

Conforme resolução 2015 da Organização Internacional de Padronização, sugere-se a adoção da Segunda-Feira como primeiro dia da semana. Assume-se, também, que a primeira semana do ano é aquela que contém a primeira Quinta-Feira do ano.

Enfim, podemos dizer que enquanto o mês e o ano são períodos naturais, a semana parece ser um período artificial de avaliação do tempo.

5. CALENDÁRIO: OBJETIVOS E PROBLEMAS

Definimos *Calendário*[1] como sendo o conjunto de regras e tabelas usadas com a finalidade de agrupar os dias em diversos períodos que possibilitem um fácil cômputo de dias passados ou a passar.

Cada conjunto de diferentes regras dá origem a um diferente calendário.

Deve-se notar que todo e qualquer calendário que siga as regras pré-estabelecidas é correto. Não existe um calendário melhor que outro. O que existe, isso sim, são calendários que mais se aproximam de uma finalidade por ventura definida na sua concepção. Por exemplo, o melhor calendário solar é aquele cuja estrutura é tal que sua duração média melhor se abeire do valor 365,242199 dias, que é a duração do ano solar.

O grande problema na conceituação de um calendário solar é o de achar uma forma de agrupar os dias (inteiros) de modo que em média a duração do ano seja igual à do ano solar. Raciocínio análogo poderia ser feito com relação ao mês, já que durante um ano ocorrem 12,368267 lunações e, portanto, num ano não existe um número inteiro de meses lunares.

A manipulação das pequenas partes fracionárias remanescentes foi sempre um desafio à engenhosidade do homem.

Vejamos como os diversos povos da antiguidade procuravam resolver seus problemas de Calendário.

---

1. Calendário = ver item 3

6. DETERMINAÇÃO DA DURAÇÃO DO ANO

Finquemos uma vara num plano horizontal. Tal associação pode ser chamada de *Gnômon*[1]. Verifica-se que o tamanho da sombra da vara, causada pela luz do Sol, varia durante o dia: é bem longa ao nascer do Sol, passando a diminuir até que atinge um valor mínimo, para logo depois começar a se alongar até atingir um comprimento imenso ao pôr do Sol. Chamemos de *Meio-Dia* o instante em que a sombra da vara tem o menor comprimento do dia.

Se medirmos o comprimento da sombra da vara sempre ao meio-dia, durante vários dias sucessivos veremos que ele varia.

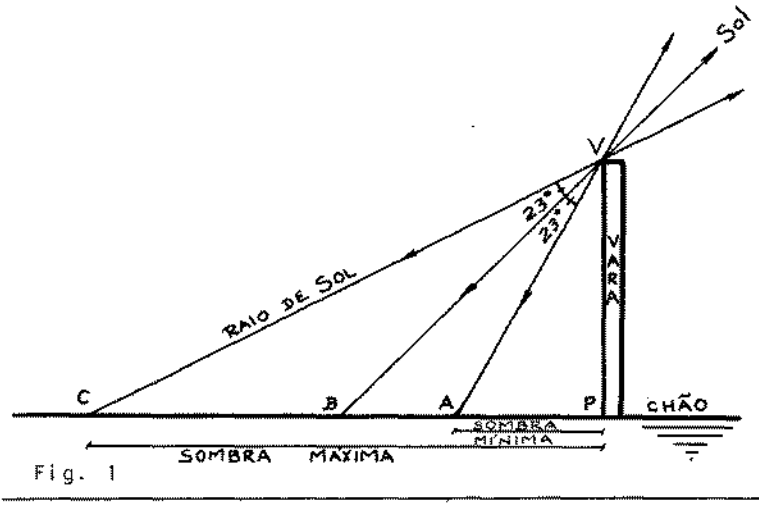


Fig. 1

Já os antigos notaram que quando a sombra era mínima (PA), o clima mostrava-se o mais quente; quando a sombra era a mais longa, estava-se com a temperatura mais baixa.

Convencionou-se dizer que o ano estava dividido em 4 *estações*, com as características definidas na Tabela 1.

---

1. Gnômon = [grego] relógio solar

Estação	Início (sombra em)	Fim (sombra em)
Verão	A	B
Outono	B	C
Inverno	C	B
Primavera	B	A

Tabela 1

Os instantes em que ocorriam as sombras com comprimentos PA e PC recebiam os nomes de *Solstícios*[2]. Os instantes correspondentes às sombras de comprimento PB, onde B pertence à bissetriz do ângulo PVC, receberam o nome de *Equinócios*[3].

Assim:

Solstício do Verão — é o instante em que a sombra é mínima (PA) — define o início do Verão;

Equinócio de Outono — é o instante em que a sombra é (PB), indo de A para C. — início do Outono;

Solstício do Inverno — é o instante em que a sombra é máxima (PC) — início do Inverno;

Equinócio da Primavera — é o instante em que a sombra é (PB), indo de C para A — início da Primavera (equinócio vernal).

Há vários séculos antes de Cristo alguns povos já tinham verificado que o tempo necessário para que a sombra ao meio-dia voltasse a ter o mesmo tamanho era de cerca de 365 dias. Sabemos, hoje, ser de 365,242199 dias.

Vejamos agora como alguns povos agruparam os dias e meses num ano.

---

2. Solstício = Sol estático [latim]

3. Equinócio = duração igual do dia e noite [latim] = aequus (igual) + nox (noite)

7. CALENDÁRIO EGÍPCIO

Numa época bem remota, o ano egípcio consistia de 12 meses com 30 dias cada, e mais 5 dias adicionais ao final do ano para completar 365 dias. Quando comparado com a duração do ano solar, vemos que 1 ano egípcio (AE) é cerca de 0,242199 dias (5 horas 48 minutos 46 segundos) mais curto. Isso significa que, se admitirmos que no início do ano egípcio 1 a sombra do gnômon (item 6) coincidisse em B (o AE1 se inicia no equinócio da Primavera), depois de 1 ano egípcio, o ano egípcio 2 (AE2) começaria em um dia

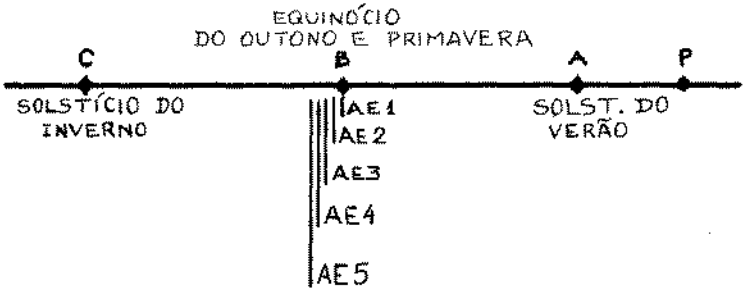
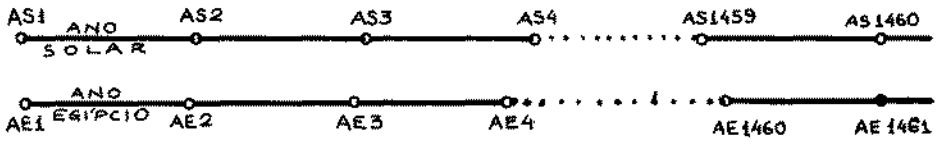


Fig.1

em que a sombra não tivesse ainda retornado ao ponto B (na verdade o dia coincidiria, mas estaria $5^h\,48^m\,46^s$ adiantado com relação ao ano solar). O AE3 começaria $2 \times (5^h48^m46^s)$ antes da sombra atingir o ponto B novamente. É fácil ver que passados 4 anos, isto é, no início do AE5, este ocorrerá cerca de 1 dia $(4 \times (5^h48^m46^s))$ antes. Em outras palavras, a cada 4 anos, o primeiro dia do ano egípcio se antecipa de cerca de 1 dia do início da primavera correspondente. Notar pois que após 120 anos (30x4) haverá já uma defasagem de cerca de 1 mês. Somente após cerca de 1440 (120×12) anos o início do ano egípcio vai novamente coincidir com o começo da Primavera. Fazendo um cálculo mais exato, esse período é de cerca de 1460 anos, chamado *período sótico*.



Defasagem progressiva entre o ano solar e o ano egípcio. Período sótico

Fig. 2

Diferindo de outros povos, os egípcios não dividiam o ano nas 4 estações comumente adotadas. Por razões locais, impostas pelo regime de águas do rio Nilo, os egípcios definiam apenas 3 estações:

- estação das Inundações — correspondente, em nosso calendário, de julho a novembro
- estação da Semeadura — correspondente, em nosso calendário, de novembro a março
- estação da Colheita — correspondente, em nosso calendário, de março a julho.

Como o ano egípcio era mais curto que o solar (este poderia, também, ser chamado de *Ano das Estações*), as estações do ano iniciavam-se em diferentes épocas do ano egípcio.

Assim, para prever o início das cheias, os astrônomos egípcios tinham que se basear realmente em observações astronômicas. Verificaram eles, que, as épocas das cheias costumavam começar após a data em que a estrela Sírius, a mais brilhante do céu, aparecia pela primeira vez, um pouco antes do nascer do Sol. Essa estrela era chamada pelos egípcios de Sotis, e apenas a cada 1460 anos seu aparecimento coincidia com o início do ano egípcio: daí o nome de período Sótico. Costuma-se dizer que uma estrela tem nascimento *heliaco* quando nasce junto com o Sol. Assim, a previsão das enchentes era feita através do nascimento heliaco da estrela Sotis.

Conforme vimos, a cada 4 anos do calendário egípcio estava-se 1 dia atrasado com relação ao solar. Já Ptolomeu Euergetes, em 238 a.C., havia notado esse fato e sugerido a inserção de 1 dia

(intercalação de 1 dia a mais) no calendário egípcio a cada 4 anos, evitando assim a defasagem do calendário egípcio com o ano solar. Sua argumentação, porém, não foi aceita. Apenas entre 26 e 23 a.C. é que o calendário egípcio adotou o procedimento de intercalar 1 dia no final de cada 4 anos, passando a se chamar *calendário Alexandrino*. O antigo procedimento, porém, foi usado ainda em alguns lugares até cerca de 238 d.C.

O calendário egípcio antigo foi adotado também pelos Persas, por volta do ano 500 a.C., e sobrevive ainda hoje, de forma ligeiramente modificada, no calendário Armênio.

O calendário Alexandrino sobrevive no calendário Etíope e no da Igreja Copta.

8. CALENDÁRIO BABILÔNICO

Na Babilônia, região do norte da África, que mais tarde viria a se chamar Iraque, o ano era definido como sendo de 12 meses lunares (cada mês com seu início determinado pelo real aparecimento da Lua Quarto Crescente pela primeira vez no céu noturno), e um décimo terceiro mês adicional, quando necessário, para manter o ano relacionado com as estações. O início do ano babilônico coincidia com o início da primavera local.

Vejamos a razão dessa intercalação. Conforme vimos no item 5, o número de lunações em 1 ano solar é de 12,368267, e como uma lunação contém 29,530589 dias, em 12 meses lunares teremos cerca de 354 dias, ou seja, cerca de 11 a menos que num ano solar. Dessa forma, em cada 3 "anos" estarão faltando cerca de $(3 \times 11) = 33$ dias para completar 3 anos solares. A correspondência novamente pode ser obtida, aproximadamente, com a inserção de 1 mês adicional ao fim de 3 anos. Obviamente ainda não é suficiente, já que ficam faltando cerca de $(33-29) = 4$ dias.

O grego Meton, em cerca de 430 a.C. verificou que em 19 anos solares havia $(19 \times 365,242199) \cong 6940$ dias; verificou também que em 235 lunações existiam $(235 \times 29,530589) \cong 6940$ dias, ou seja, em 19 anos solares ocorriam quase que exatamente 235 lunações. Esse ciclo de 19 anos passou a ser chamado de *ciclo Metônico*. Sabe-se que os babilônicos passaram a usar esse ciclo cerca de 50 anos após Meton tê-lo descoberto, mas não se sabe se os babilônicos descobriram-no por si mesmos ou se o importaram da Grécia. Vejamos qual o procedimento babilônico após 380 a.C. Em 19 anos babilônicos, de 12 meses lunares cada, existem $(19 \times 12) = 228$ lunações; como sabiam que deveriam existir 235, ficava claro que havia a necessidade de se intercalar 7 meses lunares adicionais num período de 19 anos. Essas intercalações eram, inicialmente, feitas sem nenhuma regra fixa. O calendário babilônico, sobrevive ainda hoje no moderno calendário judaico, onde as inserções são feitas segundo padrões muito bem definidos.

9. CALENDÁRIO GREGO

Os antigos calendários gregos eram bastante caóticos. Todos eles se baseavam em meses lunares astronômicos, sendo que a intercalação do 13º mês era feita segundo a vontade da autoridade local. Assim, o calendário diferia de cidade para cidade.

A partir do século VI a.C. os astrônomos gregos procuraram descobrir ciclos que pudessem disciplinar as intercalações. Um desses ciclos foi o *Metônico*, conforme descrito no item 8, consistindo de 235 lunações perfazendo 6940 dias, ou seja 19 anos. Calípio, cerca de 1 século depois, verificou que em 235 lunações existiam 6939,25 dias, e não 6940. Propôs ele, então, um ciclo de (4x19) = 76 anos, com (4x235) = 940 lunações perfazendo (4x6940-1) = 27759 dias, ou seja 1 dia a menos que 4 ciclos metônicos. Esse ciclo de 76 anos e 940 lunações passou a ser chamado de *ciclo Calípico*, mas não se tem notícias de que ele tenha sido aplicado praticamente. O ciclo metônico, por seu lado, foi largamente utilizado inclusive pela igreja católica, conforme veremos mais à frente.

Visto que as observações astronômicas nem sempre podiam ser feitas para se determinar a data da Lua Quarto Crescente, após uma certa época, não muito bem precisa, os gregos passaram a adotar a alternância do mês com 29 e 30 dias, que em média dava 29,5 dias, próximo do mês sinódico de 29,530589 dias.

A grande desorganização do calendário grego torna quase impossível localizar uma data nele citada. Uma ajuda parcial advém quando a data é referida a alguma das Olimpíadas realizadas em Olímpia, que ocorriam sistematicamente a cada 4 anos.

10 CALENDÁRIO JULIANO

Conforme vimos no item 7, já em 238 a.C. havia sido proposta a intercalação de 1 dia adicional a cada 4 anos para não permitir a defasagem do calendário de 365 dias com relação ao ano solar.

O calendário utilizado no Império Romano era o lunar, com a intercalação do 13º mês sob os cuidados dos sacerdotes oficiais. Essas inserções nem sempre foram feitas de forma rigorosa, e sob o governo de Júlio César, elas foram tão amiude negligenciadas que em 46 a.C a discrepância entre o calendário adotado e o ano solar atingia 80 dias.

Sob a orientação do astrônomo alexandrino *Sosígenes*, foi feito um acerto no calendário: o ano 46 a.C. passaria a ter 80 dias a mais ou seja 445 dias (passou a ser conhecido como o *Ano da Confusão*); a partir do ano 45 a.C. passar-se-ia a intercalar 1 dia a mais a cada 4 anos, de modo que após 3 anos com 365 dias cada, o 4º ano teria 366 dias, passando a se chamar *Bissexto*[1]; o ano 45 a.C. seria ano bissexto.

Devido à má interpretação da lei e da confusão que reinou após essa implantação, as intercalações foram tão irregulares que o imperador Otávio teve que sustar todas as inserções que seriam feitas entre 8 a.C. e 8 d.C. Após 8 d.C., essas intercalações foram feitas rigorosamente durante todo o milênio e meio em que o calendário ficou em vigor na maior parte do mundo ocidental.

---

1. Bissexto: a origem do nome pode ser explicada da seguinte forma: o dia representativo do início de cada mês no calendário romano era chamado "calendas"; era costume inserir-se o dia intercalado após o dia 24 de fevereiro, ou seja, 6 dias antes do início das "calendas" de março; assim, esse dia era contado 2 vezes (bis), daí ficando esse dia chamado de: "bis sexto ante canlendas martii"; passou depois para ano "bissexto".

Assim, em média, o *Ano Juliano* tem 365,25 dias, diferindo do ano solar de cerca de 0,007801 dias:

ANO JULIANO = 365,25 dias

11. ERA CRISTÃ

Quando se define um calendário, está se definindo apenas as regras usadas na parte periódica da contagem do tempo; não se faz nenhuma alusão à origem, ou seja à *Época*[1] em que tal calendário começará a ser utilizado.

Define-se *Era*[2] como sendo o intervalo de tempo decorrido desde uma época (geralmente um acontecimento histórico de vulto) até outra *Data*, sendo que essa última pode ser indefinida.

A era mais usada atualmente no mundo ocidental é a *Era Cristã*. Vejamos como ela foi definida.

Em Belém, há muito tempo atrás nasceu Jesus Cristo; cresceu, desenvolveu uma linha religiosa que se disseminou na Terra e cujos seguidores existem ainda hoje. Na época do seu nascimento, ninguém se lembrou de começar a contar os anos a partir desse evento. Nem mesmo logo após sua morte. Muito tempo depois, em Alexandria subia ao trono o imperador Diocletiano. Convencionou-se contar os anos, segundo o calendário Juliano, a partir da data de sua ascensão: iniciava-se a *Era Diocletiana*. No ano 242 da Era Diocletiana, o abade romano *Dionísio*, auto-denominado O Pequeno, estava encarregado de preparar tabelas nas quais se apresentavam as datas das Páscoas seguintes, numa continuação a tabelas já existentes, usando a era Diocletiana. Sugeriu, então, o abade, que dever-se-ia contar os anos segundo uma Era Cristã, já que o nascimento de Cristo era uma data sumamente importante para o mundo religioso ocidental. Segundo cálculos cujo método se perdeu, Dionísio fixou que o ano 248 da Era Diocletiana correspondia ao ano 525 após o nascimento de Cristo. E assim nasceu a *proléptica* Era Cristã (prolépti ca é a Era cuja Época é adotada após a ocorrência do evento que define a Era).

---

1. Época [grego] = parada de tempo = Epi(sobre) + echein(parar)
2. Era [latim] = ponto determinado do tempo para a contagem das datas

O ano iniciava-se em 25 de dezembro, e o ano do nascimento passou a se chamar ano 1 da Era Cristã. O ano imediatamente anterior designava-se como ano 1 antes de Cristo (1 a.C); não existia o ano 0. O primeiro *século* (associação de 100 anos sucessivos) terminou em 25 de dezembro de 100 d.C. O ano utilizado como padrão era o Juliano.

Além de 25 de dezembro, em diversas localidades, outras datas foram usadas para definir o início do ano; essas diferentes maneiras de adotar o início do ano eram chamadas de *Estilos*[3]. Os estilos mais usuais foram:

- Estilo da Natividade = 25 de dezembro
- Estilo da Circuncisão = 01 de janeiro
- Estilo Veneziano = 01 de março
- Estilo da Anunciação = 25 de março.

O estilo da Circuncisão foi finalmente adotado pois coincidia, a partir de 153 a.C., com o início do ano oficial romano, definido pelo início anual dos trabalhos de magistratura.

3. Estilo [latim] = maneira de contar; ponto a partir do qual

12. DEFINIÇÃO DA DATA DA PÁSCOA. FESTAS RELIGIOSAS CRISTÃS

A Páscoa[1] representa para os cristãos a data da Ressurreição de Cristo, e é uma continuação da homenagem em memória à saída dos judeus do Egito.

Tais eventos foram fixados de modo a serem comemorados sempre próximos ao equinócio da primavera boreal (do hemisfério norte).

Assim, o Concílio de Nicea em 325 d.C. fixou a data da Páscoa como sendo "o primeiro domingo após a primeira Lua Cheia que ocorre após ou no equinócio da primavera boreal, adotado como sendo 21 de março".

A Lua Cheia era definida como sendo aquela que ocorre 13 dias após a Lua Nova anterior; a data da Lua Nova era dada pela tabela elaborada segundo o ciclo metônico. Devido a essas 3 imposições, a data da Páscoa calculada nem sempre coincide com a data que seria obtida se a definição da Páscoa seguisse critérios astronômicos reais.

Todas as outras festas religiosas móveis do Calendário Eclesiástico Cristão são definidas tomando-se por base a data da Páscoa; chamemô-la de P. Eis o quadro que define as demais festas religiosas móveis:

-Septuagésima	P-63dias (63 dias antes da Páscoa)
-Domingo de Carnaval	P-49
-Terça-Feira de Carnaval	P-47
-Quarta-Feira de Cinzas	P-46
-Domingo de Ramos	P- 7
-Sexta-Feira da Paixão	P- 2
-Domingo do Espírito Santo	P+49 (49 dias após a Páscoa)
-Santíssima Trindade	P+56
-Corpo de Cristo	P+60

1. Páscoa : do hebreu "pesah"

13. CALENDÁRIO GREGORIANO

Durante mais de 1 milênio e meio o calendário Juliano foi o adotado em grande parte do mundo ocidental.

A data da Páscoa (ver item 12) fora definida utilizando-se a data do equinócio da primavera fixada no dia 21 de março. Ora, a duração do ano Juliano (365,25 dias) era de 0,007801 dias mais longo que o verdadeiro ano solar (365,242199). Isso significa que após cerca de (1/0,007801) ≈ 125 anos o verdadeiro início da primavera se dá a 20 de março e não 21 como fora definido. Desde o Concílio de Nicea em 325 d.C., que impôs o *Equinócio da Primavera Eclesiástico*[1] no dia 21 de março, até 1582 quando reinava o Papa Gregório XIII, haviam passado 1257 anos; se a cada 125 anos a primavera real se iniciava 1 dia antes do dia definido eclesiasticamente, em 1257 anos houve um retrocesso de cerca de 10 dias (1257/125) do equinócio real em relação ao equinócio eclesiástico.

Já em 1414, no Concílio de Constança, haviam sido feitas algumas propostas para a correção dessa defasagem, já que ela tinha implicações religiosas: o período compreendido entre a Quarta-Feira de Cinzas e a Páscoa era um período de abstinência, no qual comer carne era considerado heresia: ora, mas como a Páscoa era definida em função do equinócio vernal eclesiástico e este variava em função do equinócio real, estava-se comendo carne num período em que, rigorosamente, seria proibido. Foi para corrigir tal "pecado" que a Igreja resolveu reformular o calendário vigente.

Decomponhamos a duração do ano solar nas seguintes parcelas:

$$365,242199 = 365 + 0,25 - 0,01 + 0,0025 - 0,000301;$$

podemos escrever as frações decimais em ordinárias:

---

1. Eclesiástico = pertencente à igreja

$$1 \text{ ANO SOLAR} \cong 365{,}242199 \cong 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{3300}, \quad (1)$$

onde o sinal $\cong$ advém da imprecisão da última parcela, que na época (1582), desconheciam.

Assim, o *Ano Gregoriano* foi definido como sendo aquele cuja duração era de

$$\text{ANO GREGORIANO} = 365 + 0{,}25 - 0{,}01 + 0{,}0025 = 365{,}2425 \text{ dias.} \quad (2)$$

Mas, essa melhoria no conhecimento da duração do ano não seria suficiente para regularizar o calendário se não se acertasse também sua origem, de modo que se recoincidisse o dia 21 de março, adotado para a definição da Páscoa, com o real equinócio da primavera.

A *Reforma Gregoriana* ao calendário Juliano, que deu início ao *Calendário Gregoriano*, sob a orientação do astrônomo Lélio, e sob o pontificado de Gregório XIII, imposta em 1582 da era Cristã, consistiu no seguinte:

a) — omissão de 10 dias na contagem do mês de outubro de 1582, de modo que à quinta-feira, dia 4, seguisse a sexta-feira, dia 15 (com isso recoincidia-se o equinócio da primavera com o dia 21 de março);

b) — os anos da era Cristã que fossem múltiplos de 100 (anos centenários) deixariam de ser bissextos, exceto quando fossem também múltiplos de 400 (com isso retirava-se 1 dia a cada 100 anos, e adicionava-se 1 a cada 400 anos);

c) — adoção de uma regra extra no fixar da Páscoa, de modo que ela nunca ocorresse antes de 22 de março e nunca após 25 de abril:

> "A Páscoa ocorre no 1º domingo após a *Lua Cheia Eclesiástica* (13 dias após a Lua Nova Eclesiástica, definida segundo o ciclo metônico) que ocorre após ou no Equinócio da Primavera Eclesiástica (21 de março); caso o dia assim definido esteja além de 25 de abril, a Páscoa ocorre no domingo anterior; caso a Lua Cheia

Eclesiástica ocorra no dia 21 de março e esse dia seja domingo, a Páscoa será no dia 25 de abril".

Devido a essas definições, a Páscoa nem sempre ocorre no mesmo dia em que ocorreria se sua definição fosse puramente astronômica.

Deve-se salientar que o Calendário Gregoriano não foi aceito por todos os povos ocidentais ao mesmo tempo. Alguns países aceitaram-no quando de sua imposição, ou seja, no dia (5 de outubro do calendário Juliano) 15 de outubro de 1582 no calendário Gregoriano: Polônia, Portugal (Brasil), Espanha e parte da Itália. Outros países adotaram-no mais tarde: Inglaterra (1752), Japão(1873), Rússia (1918), Turquia (1927), etc.

14. CÁLCULO DA DATA DA PÁSCOA

A guisa de curiosidade, exporemos a maneira pela qual se pode calcular a data da Páscoa sem se utilizar tabelas astronômicas ou eclesiásticas. As fórmulas são devidas a Gauss. Adotemos a seguinte nomenclatura: $R(x/y)$ significa o resto inteiro quando se divide o número inteiro x pelo número inteiro y. Seja A o ano da era Cristã, no calendário Gregoriano, para o qual se deseja determinar a data do domingo da Páscoa. Definamos os 5 valores seguintes:

$$a = R(A/19) \tag{1}$$

$$b = R(A/4) \tag{2}$$

$$c = R(A/7) \tag{3}$$

$$d = R\left(\frac{19a + M}{30}\right) \tag{4}$$

$$e = R\left(\frac{2b + 4c + 6d + N}{7}\right) \tag{5}$$

onde

M	N	para	$1582 \leq A \leq 1699$
22	3		
23	3		1700 1799
23	4		1800 1899
24	5		1900 1999
24	5		2000 2099
24	6		2100 2199
25	0		2200 2299
26	1		2300 2399
25	1		2400 2499.

Calculemos o valor P dado por

$$P = 22 + d + e; \tag{6}$$

se $P \leq 31$, então a data da Páscoa será no dia P de março.

Caso $P > 31$, então calculamos

$$P' = d + e - 9, \tag{7}$$

e a Páscoa será em P' de abril. Se, no entanto, $P'>25$ então a Páscoa será em

$$P'' = P' - 7 \text{ de abril.} \qquad (8)$$

Em se conhecendo a data da Páscoa, pode-se calcular todas as outras festas móveis segundo a tabela do item 12.

Capítulo 2

Sistemas de Referência

15. VERTICAL E HORIZONTE DE UM LOCAL

Imagine-se num deserto bem plano, ou numa ilha num mar que possa ser considerado calmo.

Para qualquer lado que olhar, parecer-lhe-á que o céu e a terra (ou o mar) se encontram, muito ao longe. À linha que parece ser essa intersecção damos o nome de *Linha do Horizonte*[1], e ao plano que contém essa linha, de *Plano do Horizonte*.

Caso não se esteja num local aberto de modo a se poder observar a linha do horizonte, precisamos definir o plano do horizonte de outra forma.

Definamos primeiro a *Vertical* de um local. Ao suspender num fio um corpo, a direção indicada pela posição do fio (chamado fio de prumo) denomina-se vertical do local. Caso a Terra fosse perfeitamente esférica e a matéria disposta em camadas esféricas homogêneas, essa direção passaria pelo centro da Terra.

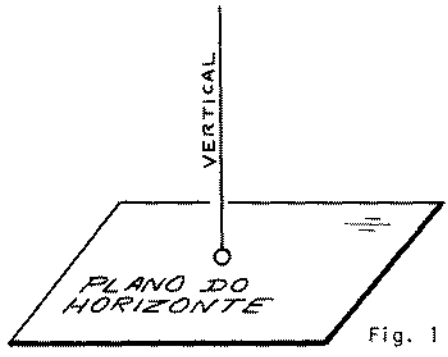


Fig. 1

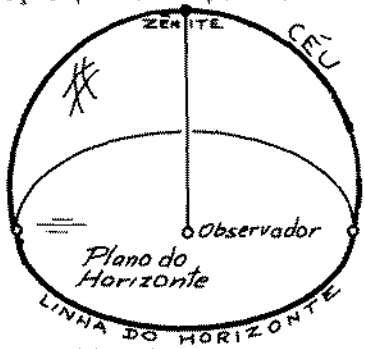


Fig. 2

Ao plano perpendicular à vertical do local, passando pelo olho do observador, chamamos de plano do horizonte.

A vertical do lugar, que passa pelo observador, parece "furar" o céu num ponto bem acima da cabeça do observador. A este ponto chamamos de *Zênite*[2] do ob-

1. Horizonte = horos [grego] = limite
2. Zênite: transcrição mal feita do árabe "samt" (caminho) que se transformou em "senit" (m lido como ni).

servador. O ponto oposto ao zênite, com relação ao observador, recebe o nome de *Nadir*[3]. É costume dizer-se que zênite e nadir estão em direções opostas, quando na verdade dever-se-ia dizer que estão numa mesma direção, mas em sentidos opostos com relação ao observador. Em astronomia está arraigada a utilização do vocábulo "direção" em lugar de "sentido", já que a origem é o observador.

O símbolo  será usado para indicar que a figura deve ser vista no espaço tridimensional.

3. Nadir [árabe] = oposto

16. MOVIMENTO DIURNO APARENTE DO SOL

Não há quem, observando o Sol diurnamente, não tenha notado o seu movimento no céu.

Verifica-se que de manhã o Sol está próximo ao horizonte, e conforme o dia decorre, ele se movimenta de modo a se afastar cada vez mais do horizonte, aproximando-se do zênite do local, para em seguida se aproximar novamente do horizonte, mas do "lado" contrário àquele em que ele estava de manhã. A esse movimento que o Sol parece ter, para um observador na Terra durante a parte clara do dia, chamamos de *Movimento Diurno Aparente* do Sol.

Ao fenômeno do aparecimento do Sol pela manhã, emergindo pelo horizonte, chamamos de *Nascer do Sol* ou *Aurora*[1]. Ao fenômeno de seu desaparecimento, imergindo pelo horizonte, à tarde, denominamos *Pôr do Sol* ou *Ocaso*. *Crepúsculo*[2] é o intervalo de tempo (ver item 100) que precede o nascer e que sucede o pôr do Sol, durante o qual existe uma luminosidade intermediária entre o claro e o escuro.

É costume dizer-se que onde nasce o Sol é o lado *Leste*, ou *Este*, ou *Nascente* ou *Oriente*. O lado do pôr do Sol é o *Oeste*, ou *Poente* ou *Ocidente*. Notar que definimos os "lados" leste e oeste, mas não os "pontos" leste e oeste. Com efeito, se observarmos o nascer do Sol (ou seu pôr) durante vários dias, veremos que este não se dará sempre na mesma direção. Uma forma fácil de comprovar essa variação é observar o Sol Nascente sempre de um mesmo ponto do quarto, assinalando na janela a posição de seu nascer. Conforme os dias vão passando, a posição vai variando, atingindo limites extremos em junho e em dezembro, e passando pelo ponto médio do segmento definido pelos extremos nos meses de março e setembro. Procuremos definir então a direção leste e oeste.

---

1. Aurora: [origem latina] = deusa do amanhecer
2. Crepúsculo = kreper (escuro) [latim] + usco (diminutivo latino) = pequena escuridão.

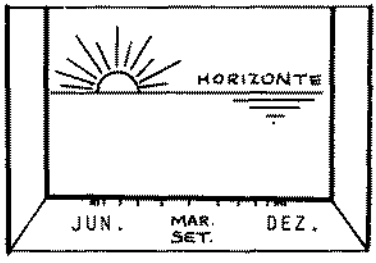


Fig. 1 - Sol visto por uma pessoa através de uma janela.

Se fizermos com os devidos cuidados a observação do nascer do Sol, dia a dia, anotando as direções de seu nascer conforme descrito no parágrafo anterior, a direção leste seria aquela que passando pelo observador, cruzasse o ponto médio do segmento definido pelos nascimentos extremos do Sol (junho e dezembro). A direção oeste estaria na direção (sentido) oposta à da leste.

Se apontarmos ao leste com o braço direito esticado, e para oeste com o esquerdo, definindo a direção leste-oeste, a direção norte-sul será aquela perpendicular à primeira, ainda pertencente ao plano do horizonte. A direção *Norte* estará à frente do observador, enquanto que a *Sul* ficará às costas dele. A essas 4 direções (leste, oeste, norte e sul) costuma-se chamar de *Pontos Cardeais*[3]. A essa posição particular do observador chamaremos de *Posição de Contemplação*.

Vejamos agora como se pode determinar os pontos cardeais de forma mais simples, mais rápida e mais precisa, se bem que ainda não seja a forma mais rigorosa.

---

3. Cardeal = cardinalis [latim] = principal

17. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS CARDEAIS

Procuremos definir os 4 pontos cardeais utilizando um gnômon.

Finquemos, num plano horizontal, uma vara vertical. Vamos apreciar o tamanho e a direção da sombra dessa vara projetada pelo Sol. Ao nascer e pôr do Sol, as sombras serão muito grandes, tendendo, teoricamente ao infinito; na prática limitadas pelo gradual desaparecer do contraste entre sombra e parte luminosa.

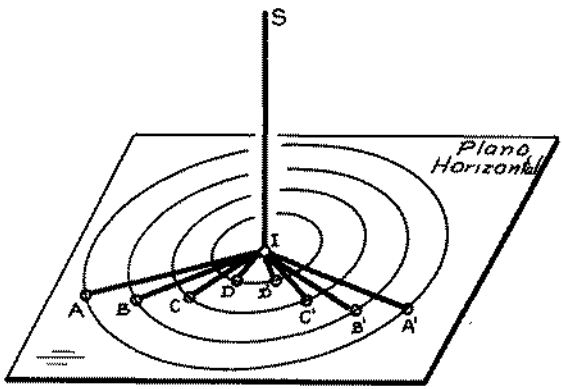


Fig. 1

Seja I a parte inferior da vara e S sua extremidade superior. Num determinado instante seja IA o segmento que representa a sombra do gnômon causada pelo Sol. Com o correr do tempo, verifica-se que a sombra do gnômon vai mudando de direção, bem como diminuindo de tamanho, até que após certo instante, o tamanho da sombra começa a aumentar novamente.

Com um barbante centrado e fixo em I, tracemos circunferências de raios IA, IB, IC, ID, onde os pontos A,B,C e D representam as extremidades distantes das sombras do gnômon. Assinalemos no plano horizontal as direções IA, IB, IC e ID.

Quando novamente a sombra for tal que sua extremidade distante atinja a circunferência de raio ID, assinalemos o ponto D' e a direção ID'. Idêntico proceder adotemos para os pontos C', B' e A', respectivamente correspondentes às circunferências de raios IC, IB e IA (Fig. 1).

Verificaremos que, as bissetrizes dos ângulos DÎD', CÎC', BÎB' e AÎA' coincidem. Notar que a direção dessa bissetriz coincide também com a da sombra de mínimo tamanho.

À direção dessa bissetriz chamaremos de direção da *linha Meridiana*[1] do local. Tracemos, no plano horizontal, a reta perpendicular à linha meridiana, passando por I; o sentido, dessa linha, que aponta para o nascente do Sol chamamos direção do ponto Leste. O ponto Oeste é aquele de sentido oposto ao Leste. O ponto Norte é aquele para o qual olharia, de frente, alguém que apontasse o braço direito esticado para o leste e o esquerdo para o oeste. O ponto Sul estaria diametralmente oposto ao ponto Norte. As abreviaturas geralmente usadas para os pontos Norte, Sul, Leste e Oeste são, respectivamente N, S, E e W.

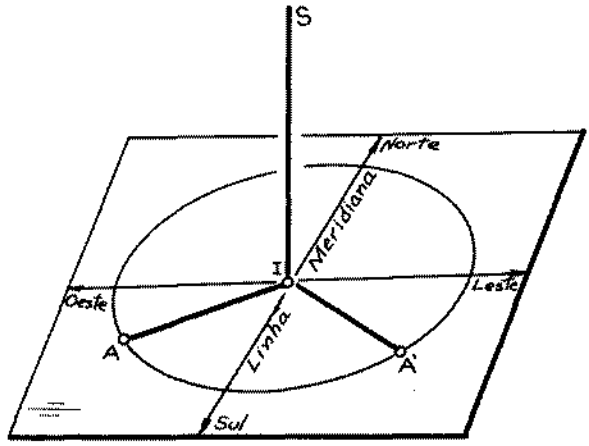


Fig. 2

Por razões que descreveremos mais tarde, tanto melhor será a precisão na determinação da linha meridiana por esse método quanto mais próximo de dezembro ou de junho tal experiência for feita. As épocas menos propícias são aquelas próximas de março e de setembro.

Quando a sombra do Sol for mínima (sobre o meridiano local) em cada dia, diremos que é o *meio-dia verdadeiro*.

---

1. Meridiano = meridianus [latim] = medici die = meio-dia

18. MOVIMENTO NOTURNO E MOVIMENTO ANUAL APARENTES DAS ESTRELAS

Da mesma forma como vemos o Sol se movimentar aparentemente do leste para oeste durante o dia, as estrelas também podem ser vistas realizando tal movimento. Se prestarmos atenção numa estrela pertencente a uma *constelação*[1] (agrupamento aparente de estrelas), veremos seu *movimento noturno aparente*, com a estrela se movendo do lado leste para o lado oeste.

Em regra geral as estrelas nascem ao leste e se põem ao oeste. Dependendo, no entanto, da posição do observador sobre a Terra, algumas não terão nem nascer nem pôr, ficando sempre acima do horizonte: são as chamadas *estrelas circumpolares*[2]

Por outro lado, se mantivermos nossa observação por vários dias ou mesmo meses, veremos que as constelações vistas há algum tempo atrás não são as mesmas que vemos agora. Conforme o mês do ano, as constelações visíveis variam: ora o céu é rico em estrelas, com espécimes bem brilhantes, ora ele é quase que pontilhado por outras de brilho muito fraco. As mesmas constelações voltarão após 1 ano. A esse movimento das estrelas, com periodicidade de 1 ano, damos o nome de *movimento anual aparente* das estrelas. Com o correr dos capítulos, daremos uma explicação a esse fenômeno.

---

1. Constelação = com (aglomerado) [latim] + stella (estrela) [latim]
2. Circumpolar = circum (em torno) [latim] + pólo (ponta de eixo) = em volta do pólo.

19. MOVIMENTO DIÁRIO APARENTE DOS ASTROS

Em itens anteriores falamos do movimento diurno do Sol e do noturno das estrelas. Falemos agora do *Movimento Diário* dos astros, ou seja, o movimento aparente que esses astros parecem realizar em períodos próximos de 1 dia. Em astronomia é comúm chamar esse movimento de movimento "diurno". Procuraremos chamá-lo de "diário" conforme explicação dada no item 1.

Utilizaremos os conceitos de *hemisfério*[1] norte e sul consoante conhecido dos leitores. Mais para frente definiremos precisamente esses termos.

Para um observador no hemisfério Norte, o movimento dos astros parece ser um arco de circunferência que começa no "lado" do nascer do Sol e acaba no "lado" do pôr do Sol (Fig. 1). Durante o movimento, parece que a estrela se desloca para o Sul, isto é, estando na posição de contemplação, devemos inclinar a cabeça cada vez mais para trás, até o astro atingir a posição mais próxima possível do zênite. A partir daí, temos que começar a inclinar a cabeça para a frente até que a estrela se ponha no lado oeste.

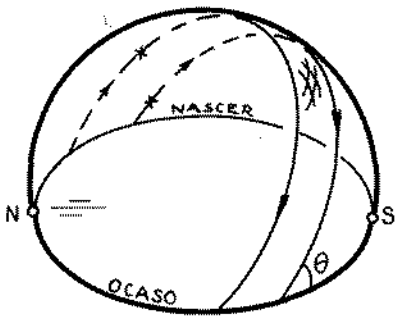


Fig. 1

Para um observador no hemisfério Sul, que é o caso nosso, a estrela também nasce do lado leste e se põe do lado oeste, mas durante a primeira metade do movimento, ela parece se deslocar ao norte do zênite, e não ao sul, como no caso anterior (Fig. 2).

Verificamos que quanto mais ao norte se encontra a estre-

---

1. Hemisfério = hemi (meio) [grego] + sphaira (esfera) [grego] = meia esfera

la, menos tempo ela fica visível. As estrela que se encontram ao sul ficam visíveis mais que 12 horas por dia (supondo que o Sol não atrapalhe sua visão). As estrelas que nascem exatamente no leste ficam visíveis aproximadamente 12 horas.

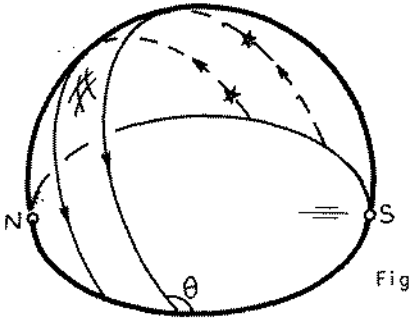


Fig. 2

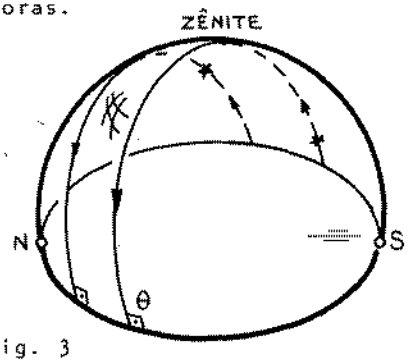


Fig. 3

Se nos deslocarmos para o Equador, verificaremos que todas as estrelas, desde o nascer até o ocaso, ficam visíveis o mesmo tempo: pouco menos de 12 horas. Enquanto que no hemisfério Norte o ângulo que a estrela forma com o horizonte no nascer e no pôr é $\theta < 90^{\circ}$, no hemisfério Sul, $\theta > 90^{\circ}$, e no Equador $\theta = 90^{\circ}$ (Fig. 3).

Para um observador em um dos pólos da Terra, nenhuma estrela nasceria e nem se poria. Todas elas pareceriam girar em torno de um centro (*pólo*) em circunferências com raios tanto maiores quanto mais afastadas estivessem do pólo. Nesse caso não tem sentido falarmos de N, S, E e W (Figura 4).

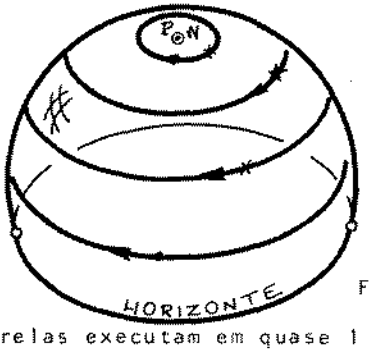


Fig. 4

A esse movimento que as estrelas executam em quase 1 dia, damos o nome de *movimento diário aparente*.

Vamos estudar o porquê de existirem diferenças nesses movimentos em função da posição do observador na Terra.

20. CONCEITO DE ESFERA CELESTE

Como todos os astros que contemplamos estão muito longe de nós, deixamos de ter a noção de "profundidade" e parece-nos que todos eles estão dispostos sobre uma esfera muito grande que chamaremos de *Esfera Celeste*. Temos também a impressão que essa esfera gira ao redor da Terra. Os pólos são então os pontos da esfera celeste que não giram (lembrar que para um observador no pólo, as estrelas parecem girar em torno do pólo). Pelos pólos passa o *Eixo de Rotação* da esfera celeste (Fig. 1).

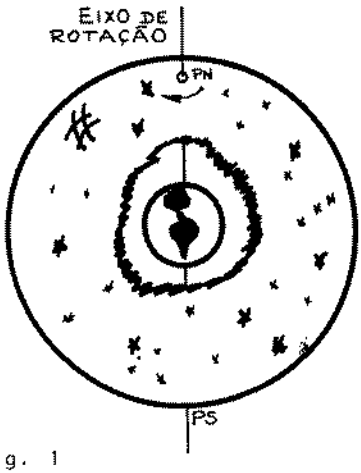


Fig. 1

O plano perpendicular ao eixo de rotação, e que passa pelo centro da Terra, chama-se *Plano do Equador*[1]. A grande circunferência que se forma na intersecção desse plano com a esfera celeste se chama *Equador Celeste* (Fig. 2). Ele divide a esfera celeste em *Hemisfério Norte* e *Hemisfério Sul*. O hemisfério Norte é aquele que contém o pólo Norte. O pólo Norte é aquele que, para um observador colocado fora da esfera celeste, as estrelas parecem realizar um movimento no sentido horário (sentido dos ponteiros do relógio), em torno do pólo. Pólo Sul é o pólo oposto.

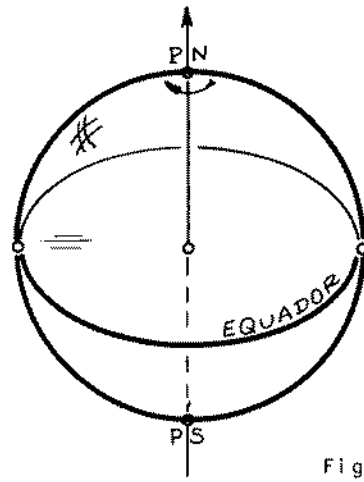


Fig. 2

1. Equador = aequator [latim] = divisor em 2 partes iguais

Pólo de um hemisfério é o ponto da superfície hemisférica equidistante de todos os pontos da circunferência que define essa superfície hemisférica. Não é necessário que um observador se encontre no pólo para poder ver estrelas que não nascem nem se põem. Para um observador situado entre o pólo e o Equador, mas "razoavelmente" distante deste último, existem certas estrelas que nem nascem nem desaparecem no Poente: são as chamadas *Estrelas Circumpolares*. São estrelas que, por estarem muito próximas do pólo, parecem girar em torno desse, sem atingirem os horizontes de observação de uma pessoa na Terra. Em aproximadamente um dia, essa estrelas dão uma volta completa em torno do pólo (Fig. 3).

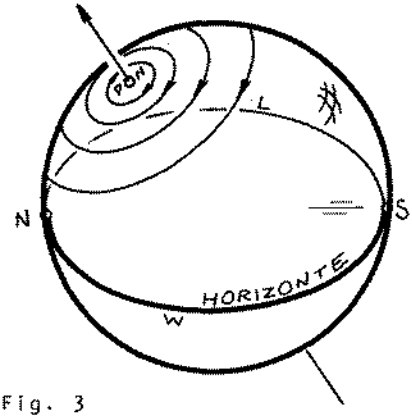
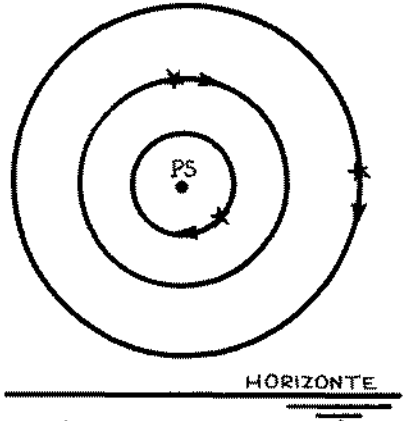


Fig. 3

Para um observador no hemisfério Norte, olhando para o pólo Norte, as estrelas circumpolares parecem girar no sentido anti-horário. No hemisfério Sul, olhando para o pólo Sul, as circumpolares parecem girar no sentido horário. Elas poderiam funcionar como um enorme relógio de "parede". Infelizmente, seu período é de cerca de 4 minutos menos que 24 horas! Definiremos mais tarde uma escala de tempo (tempo sideral) que utilizará essas estrelas como relógio, utilizando seu período de revolução como unidade de tempo, chamado dia sideral, que difere cerca de 4 minutos do dia solar que é o qual estamos habituados a utilizar.



Uma estrela que se localizasse exatamente no pólo, não giraria, ficando sempre no mesmo lugar, servindo como um indicador de direção: seria chamada de Estrela Polar. No hemisfério Norte,

a estrela Polar é, atualmente, a estrela α da constelação da Ursa Menor. No hemisfério Sul, a estrela visível mais próxima do pólo Sul é a estrela β da constelação da Hidra Macho, mas ela dista cerca de 15° do pólo, e além disso tem um brilho pouco acentuado, de modo que ela pouco se presta para que, a olho nu, seja usada como indicadora de direção; a estrela Polar do hemisfério Norte, ao contrário, é uma ótima indicadora de direção já que, além de estar muito próxima do Pólo Norte, ela é bastante brilhante.

21. SISTEMA HORIZONTAL LOCAL DE REFERÊNCIAS

Nosso objetivo nesse item será o de definir um sistema de referências fixo à Terra, com o observador em seu centro. Definamos preliminarmente alguns elementos que serão úteis posteriormente.

Chamemos *plano meridiano* ao plano que: contém a linha norte-sul, passa pelo observador e pelo zênite. Poderia ser definido, também, como sendo o plano que contêm a linha norte-sul e a vertical do lugar. A intersecção desse plano com a ésfera celeste define uma circunferência chamada de *meridiano local* (Fig. 1). A semi-circunferência visível, portanto pertencente ao hemisfério zenital (aquele que pode ser visto), pode ser chamada de *meridiano local visível*. A semi-circunferência no hemisfério nadiral (invisível para o observador seria o *meridiano local invisível*, ou o *anti-meridiano visível*.

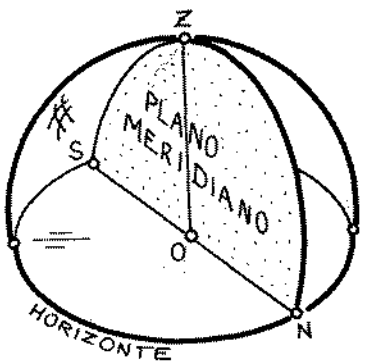


Fig. 1

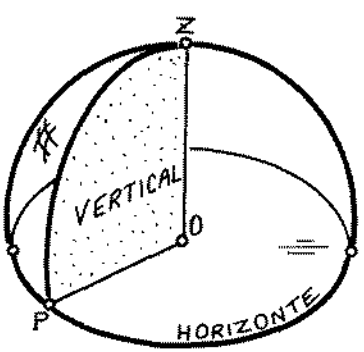


Fig. 2

Qualquer semi-plano definido pela vertical do local se chama *plano vertical* ou *o vertical* do local (Fig. 2). A intersecção do vertical local com a esfera celeste define a semi-circunferência chamada *circunferência vertical*; o semi-círculo definido por essa semi-circunferência e pela vertical do local se chama *círculo vertical*. Notar que tanto a circunferência como o círculo vertical visíveis estão subentendidos por um ângulo de 90°.

Em particular, o meridiano local é formado pelos 2 verticais que passam, um pelo norte e outro pelo sul.

Seja o *Primeiro Vertical* aquele que passa pelo ponto Leste, e *Segundo Vertical* o que contêm o ponto Oeste (Fig. 3).

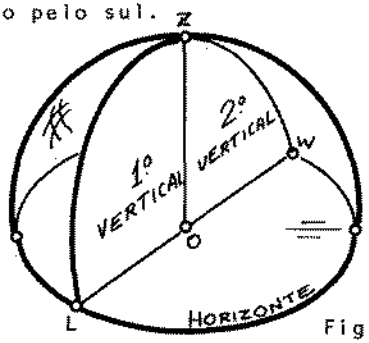


Fig. 3

Definimos *vertical de um astro* como sendo o vertical que contêm a linha de visada OE do observador ao astro (Fig. 4).

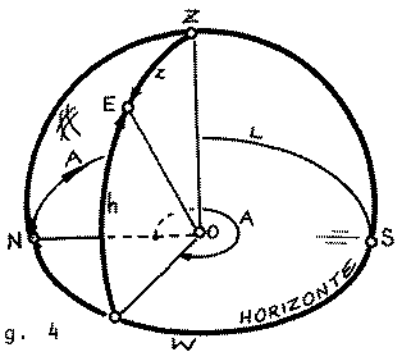


Fig. 4

Para caracterizar a posição desse astro com relação ao observador, definamos o *sistema horizontal de referências*; esse adota como planos fundamentais, o plano do horizonte e o vertical que passa pelo Norte.

As coordenadas que definem a posição do astro E são:

— *Azimute*[1] (A): é o ângulo contado no plano do horizonte, desde a direção Norte, no sentido para Leste, até o vertical do astro. Por convenção o azimute A obedece a relação:

$$0 \leq A \leq 360^{\circ}; \qquad (1)$$

— *Altura*[2] (h): é o ângulo medido no plano vertical do astro, contado a partir do horizonte até o astro. Por convenção, é admitido positivo acima do horizonte (astro visível) e negativo abaixo do horizonte (astro invisível). Assim, vale a relação:

$$-90 \leq h \leq +90^{\circ} \qquad (2)$$

---

1. Azimute = as sumut [árabe] = caminho, direção
2. Altura = altus [latim]

Ao invés de se utilizar a altura do astro, é possível recorrer-se ao ângulo entre o zênite e o astro; a esse ângulo chamamos de *distância zenital* do astro. Sua origem está no zênite, e é válida a relação:

$$0 \leq z \leq 180^{\circ}. \qquad (3)$$

Pela figura é fácil verificar que a altura e a distância zenital são complementares; daí a importante relação:

$$\boxed{h + z = 90^{\circ}} \qquad (4)$$

Eis uma tabela com os valores do azimute, altura e distância zenital de alguns pontos particulares do sistema horizontal:

	Norte	Leste	Sul	Oeste	Zênite	Nadir
A	0°	90°	180°	270°	indefinido	indefinido
h	0°	0°	0°	0°	$+90^{\circ}$	-90°
z	90°	90°	90	90°	0°	180°

Podemos dizer que o lugar geométrico dos astros de dado azimute é o vertical que contém esse azimute. Quanto ao lugar geométrico dos astros com dada altura (ou distância zenital), é uma circunferência num plano paralelo ao plano do horizonte, e centrada na vertical do lugar. A essa circunferência de altura constante é dado o nome de *paralelo*[3] *de altura* ou

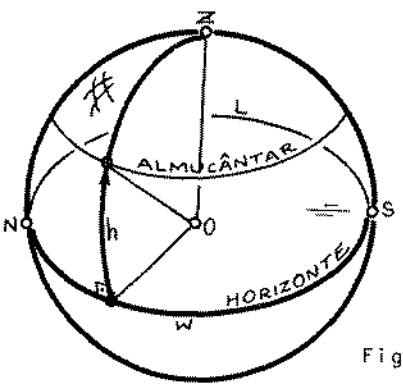


Fig. 5

3. Paralelo = para (ao lado de) [grego] + allelon (outros) [grego]

almucântar[4] (Fig. 5). O almucântar de um astro pode ser definido, também, como sendo a intersecção de uma superfície cônica de semi-abertura igual à distância zenital do astro e eixo coincidindo com a vertical do lugar, com a esfera celeste.

4. Almucântar = al mucantara [árabe]

22. NASCER, OCASO E PASSAGEM MERIDIANA DE UM ASTRO

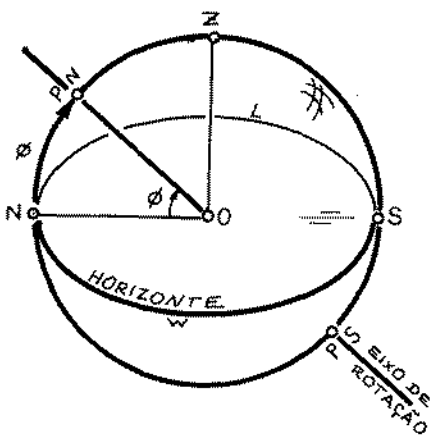
Dizemos que um astro nasceu quando sua altura é nula, começando então a crescer; o astro estará na parte visível *hemisfério oriental* (o hemisfério que tem como pólo o ponto Leste). No ocaso, a altura do astro também é nula, mas a partir desse instante o astro deixa de ser visível; o astro estará então na parte invisível do *hemisfério ocidental* (aquele que tem como pólo o ponto Oeste).

Em resumo:

$$h_{nascer} = h_{ocaso} = 0^{\circ} \qquad (1)$$

Durante se movimento diário, cada estrela cruza o meridiano local; a esse cruzamento chamamos de *passagem meridiana*, ou *trânsito*.

Verifica-se que o intervalo de tempo entre o nascer e a passagem meridiana é igual ao intervalo de tempo entre a passagem meridiana e o ocaso. Em outras palavras, a passagem meridiana ocorre no instante médio entre o nascer e o ocaso. Isso vale para todas as estrelas. Ora, isso significa que o pólo de rotação da esfera celeste deve estar sobre o meridiano local. Assim, o meridiano local contém o observador, o zênite, o Norte, o Sul e os pólos Norte e Sul.



A altura do pólo Norte, num local, chama-se *Latitude*[1] *Astronômica* (ϕ) do

1. Latitude = medida em largura [latim]

local. Veremos depois que a latitude astronômica coincide com a latitude geográfica do local.

Chamemos de *meridiano superior* à parte do meridiano compreendida entre os 2 pólos e que contém o zênite do lugar. *Meridiano inferior* será aquele compreendido entre os 2 pólos e que contém o nadir do local.

No que tange à latitude astronômica, devemos salientar que ela será positiva se o Pólo Norte estiver acima do horizonte; ela será negativa se o Pólo Sul estiver acima do horizonte.

23. CULMINAÇÃO SUPERIOR E INFERIOR

Quando, durante seu movimento diário, um astro cruza o meridiano superior dizemos que houve uma *culminação*[1] *superior* do astro. Nesse instante a altura do astro é máxima. Ao cruzar o meridiano inferior, temos a *culminação inferior*, na qual a altura do astro é mínima (Fig. 1). Chamemos de *distância polar* (p) ao ângulo entre o pólo Norte e o astro. Conforme vimos no item 20, os astros parecem girar em circunferências concêntricas com o pólo. Assim, o ângulo entre o pólo norte e a culminação inferior, bem como o ângulo entre o pólo e a culminação superior são iguais, valendo p cada um.

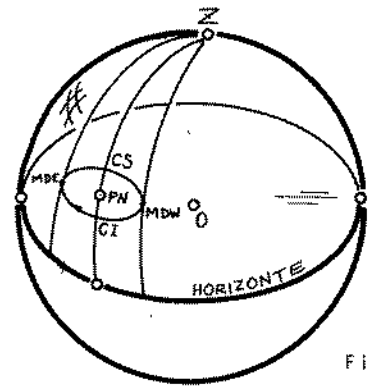
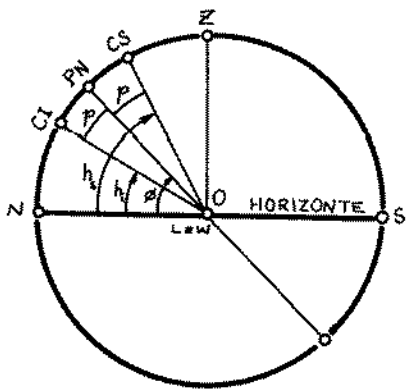


Fig. 1



A Figura 2 representa a esfera celeste vista por um observador externo a ela, na direção do ponto oeste. CS e CI representam, respectivamente, as culminações superior e inferior de uma estrela circumpolar norte (notar que ela está sempre acima do horizonte). Sejam h_s e h_i as alturas em CS e CI. Mostremos que a latitude ϕ do local pode ser obtida simplesmente da mensuração h_s e h_i da estrela.

1. Culminação = culminare [latim] = passar pelo ponto mais alto

Pela figura:

$$h_s = \phi + p \qquad (1)$$

$$h_i = \phi - p \quad . \qquad (2)$$

Somando membro a membro as 2 equações e explicitando ϕ, temos:

$$\phi = \frac{h_s + h_i}{2} \quad , \qquad (3)$$

que é a expressão procurada, e que é imediata caso a culminação superior se dê entre o Pólo Norte e o zênite. Caso CS esteja entre z e S, para essa fórmula continuar válida, é necessário contar-se a *altura da culminação superior* como sendo o ângulo (maior que 90^o) desde o Norte até CS.

Caso o pólo visível seja o Sul, a fórmula (3) é válida, trocando-se seu sinal; para a culminação superior entre o pólo Sul e o zênite, vale:

$$\phi = - \frac{h_s + h_i}{2} \quad ; \qquad (4)$$

caso a culminação superior se dê entre o zênite e o pólo Norte, a fórmula continua válida se contarmos a altura da estrela desde o Sul (será maior que 90^o).

A partir das culminações superior e inferior podemos também obter a distância polar da estrela. Caso o pólo visível seja o Norte, basta subtrairmos membro a membro as equações (1) e (2):

$$p = \frac{h_s - h_i}{2} \quad . \qquad (5)$$

Se o pólo visível fôr o Sul, valem as expressões:

$$h_s = -\phi + (180-p) \qquad (6)$$

$$h_i = -\phi - (180-p) \quad ; \qquad (7)$$

subtraindo-as membro a membro, e explicitando p temos:

$$p = 180 - \frac{h_s - h_i}{2} \quad . \qquad (8)$$

Nas equações (5) e (8) devemos entender h_s com possíveis valores superiores a 90°.

Quando entrarmos na parte de refração atmosférica (Capítulo XIII), veremos quais as dificuldades que fazem com que o método nem sempre seja muito simples de se aplicar.

24. MÁXIMA DIGRESSÃO

Quando a estrela está em culminação, seu azimute é nulo (ou 180°); mas durante seu movimento diário, ela se aproxima e se afasta do meridiano, de modo que seu azimute varia. Se estivermos olhando para uma estrela próxima do pólo, que não precisa ser obrigatoriamente circumpolar, vemos que seu azimute é limitado durante seu movimento diário. Chamamos de *máxima digressão*[1] às posições da estrela quando seu azimute é máximo ou mínimo. Quando a estrela está afastada do meridiano local o máximo à leste, dizemos que é a *máxima digressão oriental*, e se estiver afastada ao máximo para oeste teremos a *máxima digressão ocidental*. Ver Fig. 1 do item 23.

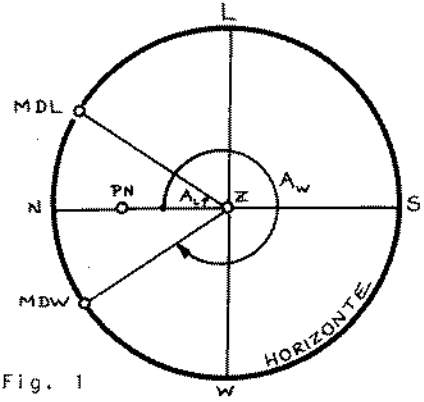


Fig. 1

A Figura 1 representa a esfera celeste vista por um observador na direção do zênite, fora da esfera celeste. A_L e A_W representam os azimutes da máxima digressão oriental e ocidental, respectivamente.

Mostremos agora um método prático que permite a determinação do meridiano local através da observação das 2 máximas digressões de uma estrela.

Admitamos ser Q uma direção qualquer tomada sobre a Terra. Costuma-se chamar essa direção de *Direção da Mira*. Observando a estrela, medimos os ângulos a_W e a_L correspondentes às máximas digressões (Fig. 2). A direção do meridiano local, ou do norte, será a bissetriz interna do ângulo entre as 2

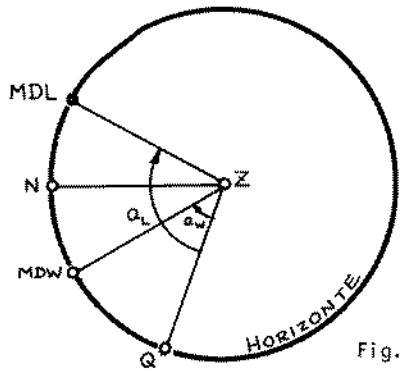


Fig. 2

1. Digressão = digressus [latim] = desvio de rumo

direções das máximas digressões. Assim, o ângulo do meridiano com a mira será dado por:

$$a = a_W + \frac{a_L - a_W}{2} \qquad (1)$$

Essa fórmula vale também para o caso do pólo visível ser o Sul.

Esse problema é muito importante, pois é usado também por topógrafos para determinar o norte geográfico. Tem o inconveniente de que deve haver um intervalo de tempo de cerca de 12 horas entre uma digressão e a outra, de modo que só se pode aplicá-lo, na maior parte das vezes durante os meses de inverno quando a noite é bem longa. Devemos salientar que se o telescópio utilizado para observação for bem potente, poder-se-á observar as estrelas mesmo durante o dia.

25. DETERMINAÇÃO DO MERIDIANO PELO MÉTODO DAS ALTURAS IGUAIS

Esse método é muito parecido com o anterior, mas não exige que a estrela seja circumpolar.

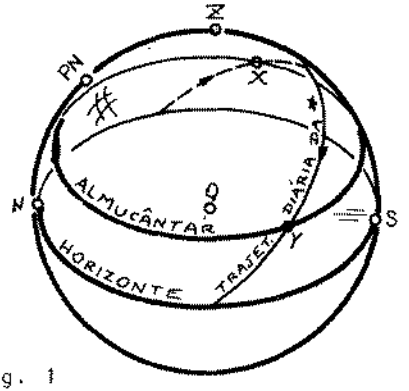


Fig. 1

Antes da estrela passar pelo meridiano (quanto mais distante melhor, se bem que há uma relação inversa com o tempo: quanto mais longe do meridiano, mais tempo levará para podermos terminar a observação, mas melhor será o resultado obtido), observemo-la medindo sua altura e o ângulo de seu vertical com uma mira pré-escolhida; seja a_L esse ângulo. A estrela passará pelo meridiano, e ao se encaminhar para seu ocaso, novamente passará pelo almucântar de altura igual a da primeira observação. Assinalemos o ângulo a_W entre a mira e o vertical da estrela. A direção do meridiano fará um ângulo a com a direção da mira; temos pois, conforme item anterior:

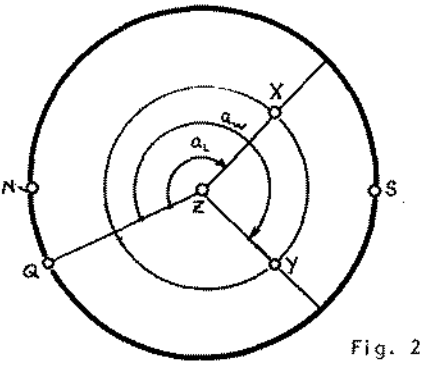


Fig. 2

$$a = a_W + \frac{a_L - a_W}{2} \quad (1)$$

Para saber se essa direção é a Norte ou Sul, deve-se lançar mão de outras evidências, como por exemplo, determinação grosseira do norte e sul pelo nascer do Sol ou movimento aparente dos astros (ver item 20). A Figura 2, na qual aparecem os elementos citados nos parágrafos anteriores, representa a esfera celeste (esquematizada na Figura 1) vista por um observador fora dessa esfera celeste, na direção do zênite.

26. COORDENADAS GEOGRÁFICAS

No item 20 definimos eixo de rotação da esfera celeste, bem como o equador celeste. Admitindo a Terra como esférica, e no centro da esfera celeste, o eixo de rotação da esfera celeste furará a superfície esférica da Terra em 2 pontos diametralmente opostos, chamados *pólos* da Terra. O *Pólo Norte geográfico*[1] será aquele mais próximo do Pólo Norte celeste; o outro será o *Pólo Sul geográfico*. O plano do Equador Celeste interceptará a superfície esférica da Terra segundo uma circunferência que será o *Equador Terrestre*. Todos planos, paralelos ao Equador Terrestre, que interceptarem a superfície terrestre definirão circunferências chamadas *Paralelos Geográficos*. As semi-circunferências centradas no centro da Terra e passando pelos pólos da Terra determinam os *Meridianos Geográficos*. Esses infinitos paralelos e meridianos são usados para se definir um sistema de referências, chamado *Sistema Geográfico de Referências*, que adota 2 planos fundamentais: o plano do Equador e o meridiano passando por Greenwich, na Inglaterra. As coordenadas de um ponto Q sobre a Terra são definidas por:

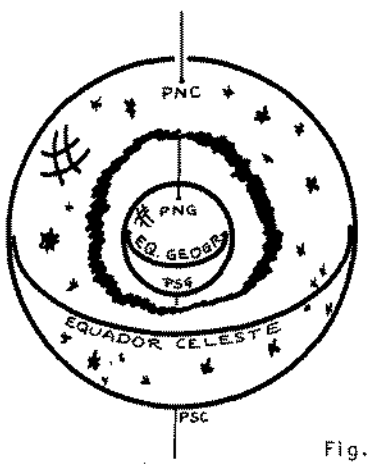


Fig.1

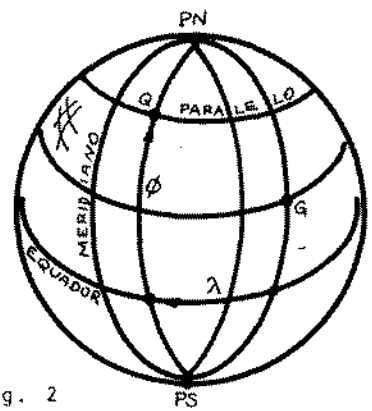


Fig. 2

1. Geográfico = geo (Terra) [grego] + graphos (desenho) [latim]

— *Longitude*[2] *geográfica* (λ): é o ângulo, medido sobre o Equador, entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa por Q; ela é considerada positiva quando medida no sentido horário, ao ser vista do Pólo Norte; isso significa que é positiva a oeste de Greenwich e negativa a leste de Greenwich. Vale a relação:

$$-180^{\circ} \leq \lambda \leq +180^{\circ} \quad . \qquad (1)$$

É costume definir-se que um ângulo de 15° corresponde à *Unidade Angular Hora*, que abreviaremos por 1^{h}. Assim:

$$-12^{h} \leq \lambda \leq +12^{h} \quad . \qquad (2)$$

A unidade angular hora está dividida em 60 minutos que abreviaremos 60^{m} (se bem que a abreviatura oficial é 60 min; por razões práticas é costume usar-se a notação abreviada), e essa, por sua vez, é tal que 1^{m} equivale a 60 segundos os quais assumirão a notação 60^{s}.

— *Latitude geográfica* (ϕ): é o ângulo, medido sobre um meridiano, entre o Equador e o paralelo que passa por Q. Por convenção adota-se que a latitude é positiva quando Q pertence ao hemisfério Norte (ou *Boreal*, ou *Setentrional*), e negativa quando Q estiver no hemisfério Sul (ou *Austral* ou *Meridional*). Assim:

$$-90^{\circ} \leq \phi \leq +90^{\circ} \quad . \qquad (3)$$

Notar que para os pólos não se define longitude geográfica.

---

2. Longitude = comprimento [latim]

27. RELAÇÃO ENTRE LATITUDE GEOGRÁFICA E ASTRONÔMICA

Mostremos que a latitude geográfica, definida no item 26, e a latitude astronômica, definida no item 22, são iguais.

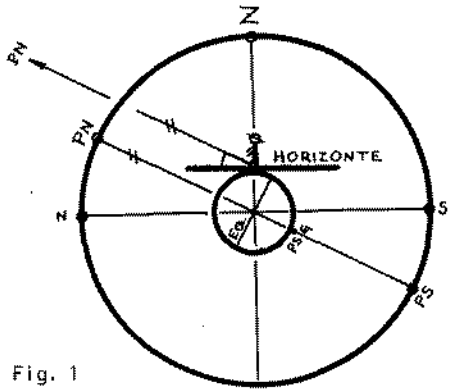


Fig. 1

Imaginemos um observador num ponto da Terra, com latitude geográfica ϕ_G, conforme Figura 2. Na Figura 1 está representada a Terra como uma esfera no centro da esfera celeste. Para efeito prático, podemos perfeitamente supor que o tamanho da Terra é desprezível face ao da esfera celeste (veremos que isso nem sempre é possível quando tratamos com objetos próximos: astros do sistema solar). Ora, se a Terra é tão pequena, podemos admiti-la como um ponto, e o horizonte pode ser assumido como passando pelo centro da esfera celeste, conforme representado na Figura 3.

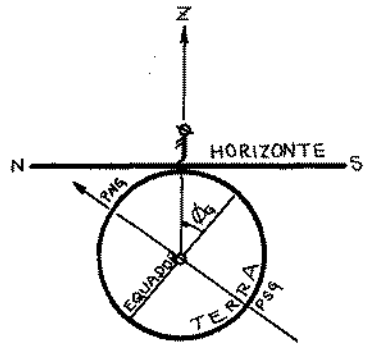


Fig. 2

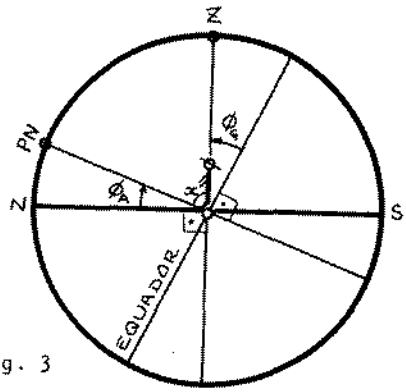


Fig. 3

Por meio da mesma figura, observamos que ϕ_A e ϕ_G são complementos do mesmo ângulo x; portanto ϕ_A e ϕ_G são iguais, que era nossa tese inicial.

28. DIFERENÇA ENTRE NORTE GEOGRÁFICO E MAGNÉTICO

Imaginemos que num dado local determinamos o meridiano geográfico astronomicamente, obtendo o Norte geográfico. Se nessa mesma posição colocarmos uma bússola, verificaremos que muito provavelmente a direção do Norte indicada pela bússola não coincidirá com aquela determinada astronomicamente. Tal desvio tem como origem o fato dos pólos magnéticos da da Terra não coincidirem com seus pólos de rotação. O ângulo entre a direção do Norte Geográfico e do Norte dado pela bússola chama-se *declinação*[1] *magnética*[2] (δ_M). Caso a bússola aponte mais à oeste do Norte geográfico (conforme Figura 1) dizemos que a *declinação magnética é ocidental*; se a bússola apontar à leste do Norte geográfico, dizemos que a *declinação magnética é oriental*. As chamadas *cartas de linhas isógonas*[3] fornecem a declinação magnética de uma dada região. Deve-se notar ainda que a declinação magnética de um local não é constante, mas varia com o tempo.

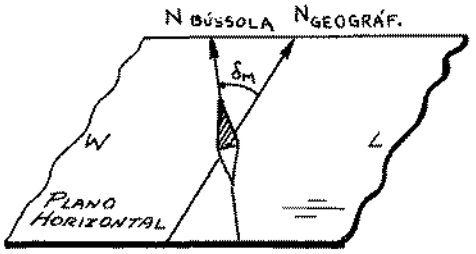


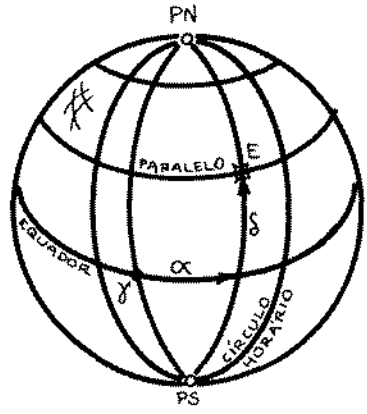
Fig. 1

1. Declinação = declinare [latim] = inclinação
2. Magnético = propriedades iguais à da magnetita (pedra de Magnésia)
3. Isógona = iso (mesma) [grego] + gonio (ângulo) [grego] = mesma declinação

29. SISTEMA EQUATORIAL DE REFERÊNCIAS

Conforme vimos em itens anteriores, devido ao movimento aparente diário dos astros suas coordenadas horizontais (azimute e altura) variavam em função do tempo. Já no caso das coordenadas geográficas de um local sobre a Terra, a longitude e a latitude permanecem constantes em função do tempo. É nosso objetivo definir um sistema de referências no qual as coordenadas de uma estrela se mantenham constantes.

Para isso imaginemos que pudéssemos "desenhar" sobre a esfera celeste (portanto preso à esfera celeste) um sistema de paralelos e meridianos (esses últimos chamados de *Círculos Horários*), em tudo semelhantes ao sistema definido sobre a Terra, para se obter o sistema de referências geográficas. Esse sistema de referências utilizará, por definição, como planos fundamentais o plano do Equador e um plano meridiano passando pelo *ponto* γ, também chamado *Ponto Vernal*[1] ou *Ponto Equinocial da Primavera Boreal*, cuja definição daremos mais à frente (item 56). Por hora podemos admitir o ponto γ como sendo uma "estrela particular" adotada como origem, da mesma forma como adotamos a cidade de Greenwich como origem da contagem das longitudes geográficas.



A posição de uma estrela E nesse sistema é dada pelas coordenadas:

— *Ascensão Reta*[2] (α): é o ângulo, medido sobre o Equador, entre o

1. Vernal = relativo à primavera [latim]
2. Ascensão reta : a tradução correta deveria ser "ascensão direta", ou seja, "progresso no sentido direto", isto é, no sentido do movimento anual do Sol.

meridiano que passa pelo ponto γ e o círculo horário que passa pela estrela E. A contagem é efetuada no sentido anti-horário quando vista desde o Pólo Norte. Assim,

$$0 \leq \alpha \leq 360^{\circ} \quad ; \tag{1}$$

É mais comum, no entanto, a utilização da medida angular em horas, conforme descrito no item 26; portanto:

$$0 \leq \alpha \leq 24^{h} \quad . \tag{2}$$

— *Declinação* (δ): é o ângulo, medido sobre um círculo horário, entre o Equador e o paralelo que passa pela estrela. Por convenção, a declinação é positiva para estrelas do hemisfério Norte e negativa para as do Sul. Assim:

$$-90 \leq \delta \leq +90^{\circ} \quad . \tag{3}$$

Se lembrarmos do item 23, veremos que sendo p a distância polar de uma estrela (ângulo desde o Pólo Norte até à estrela) então p e δ são complementares, ou seja:

$$\boxed{p + \delta = 90^{\circ}} \quad . \tag{4}$$

Como o sistema equatorial é fixo com relação à esfera celeste, as coordenadas α e δ de cada estrela são constantes da estrela. (Veremos, em itens seguintes, que devido ao movimento próprio das estrelas, das variações nos planos fundamentais de referências, etc., as coordenadas α e δ das estrelas não são rigorosamente constantes; por ora admití-las-emos como constantes).

Devemos salientar que para os pólos não se define ascensão reta.

O círculo horário passante pelo ponto γ recebe o nome de *Coluro*[3] *Equinocial da Primavera Boreal*; o círculo horário cuja as

3. Coluro = kolouros (cortado) [grego]

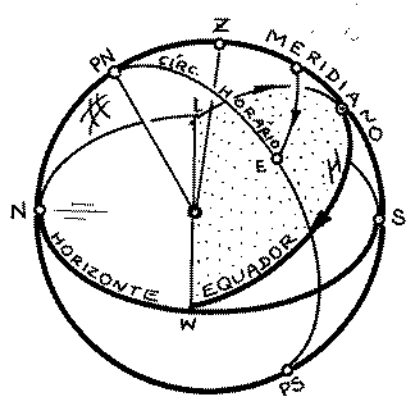
senção reta é 12^h, portanto, oposto ao anterior, recebe o nome de *Coluro Equinocial do Outono Boreal*. Define-se ainda os *Colures Solsticiais do Verão e Inverno Boreais* como sendo os círculos horários de ascensões retas 90° e 180°, respectivamente.

30. SISTEMA EQUATORIAL HORÁRIO DE REFERÊNCIAS

Conforme vimos no item 20, o sistema horizontal de referências era fixo à Terra, e as 2 coordenadas, azimute e altura, de um astro variavam de instante para instante. Já no sistema equatorial, definido no item 29, o qual está fixo à esfera celeste, as 2 coordenadas, ascensão reta e declinação, da estrela não variavam com o tempo (salvo devido aos efeitos citados no fim do referido item).

Construamos um sistema de referências em que, apesar de estar fixo à Terra, uma das coordenadas da estrela permaneça constante, variando apenas a outra. Segundo os itens 19 e 20, a esfera celeste parece girar em torno de um eixo que passa pelos pólos Norte e Sul, e por isso todas as estrelas parecem efetuar movimentos circunferenciais em planos paralelos ao plano do Equador.

Adotemos os seguintes planos fundamentais de referências: o plano do Equador e o plano do meridiano superior. Conforme a estrela realiza seu movimento diário, seu ângulo até ao Equador se mantêm, mas varia o ângulo entre o meridiano local e o círculo horário que contêm a estrela. A posição de uma estrela E num instante dado será definida pelas coordenadas:



— *Ângulo Horário* (H): é o ângulo, medido sobre o Equador, desde o meridiano local, até ao círculo horário que passa pela estrela E, no sentido horário quando visto da extremidade norte do eixo de rotação da esfera celeste. Isso significa que o ângulo horário da estrela cresce conforme o tempo passa. O valor do ângulo horário, por convenção, pode estar definido por uma das 2 relações seguintes:

$$0 \leq H \leq 360^{\circ} \quad , \qquad (1)$$

ou

$$-180^{\circ} \leq H \leq +180^{\circ} , \qquad (2)$$

sendo que o valor de $H = 0$ vale para a estrela em passagem meridiana superior. O sinal negativo indicará estrela no hemisfério oriental, ou seja, antes de passar pelo meridiano local; o sinal positivo valerá para a estrela no hemisfério ocidental, isto é, após a estrela passar pelo meridiano local superior. Utilizando-se a convenção definida no item 26, podemos, e costumamos, medir o ângulo horário em unidades de horas. Assim:

$$0 \leq H \leq 24^{h} , \qquad (3)$$

ou

$$-12 \leq H \leq +12^{h} . \qquad (4)$$

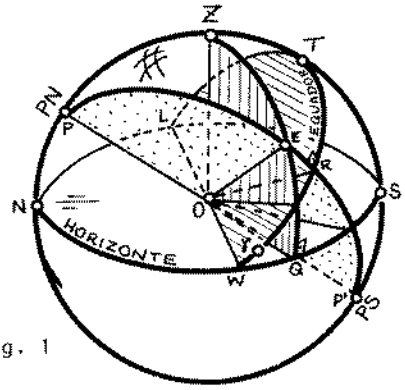
— *Declinação* (δ): é o ângulo entre o Equador e o círculo paralelo que passa pela estrela E. Sua definição já foi dada no item 29. Lembremos que:

$$-90^{\circ} \leq \delta \leq +90^{\circ} . \qquad (5)$$

O ângulo horário de um astro em seu ocaso chama-se *arco semi-diurno* do astro.

31. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS DIVERSOS SISTEMAS DE REFERÊNCIAS

Procuremos posicionar uma estrela nos 3 sistemas de referências que vimos. Seja E a estrela em questão (Fig. 1).



No sistema horizontal, os planos de referência são: o plano do horizonte (NLSW) e o plano meridiano visível (NZS). Tracemos o vertical OZQ que passa pela estrela E. A altura da estrela será o ângulo $\widehat{QE}$, e seu azimute será o arco $\widehat{NQ}$ medido sobre o horizonte, no sentido N,L,S,Q. Assim:

e

$$A = \widehat{NQ},$$

$$h = \widehat{QE}. \qquad (2)$$

No sistema equatorial, os planos fundamentais são o plano do Equador e o círculo horário passante pelo ponto γ (na figura, o ponto γ foi colocado num ponto arbitrário; sua definição será vista mais tarde). A intersecção do plano do Equador com o horizonte local é a reta que passa pelos pontos Leste e Oeste; demonstraremos essa afirmação. Qualquer reta pertencente ao plano do Equador e passando por O é perpendicular ao eixo OP; em particular essa propriedade vale para a reta intersecção x do plano do Equador com o horizonte. Como a reta x está no plano horizontal, ela é perpendicular à reta vertical OZ, então x é perpendicular a qualquer reta do plano meridiano definido pelas retas OP e OZ; em particular, x é perpendicular à reta ON, intersecção do meridiano com o horizonte. Ora, mas a reta ON é a reta meridiana do local, e a reta do plano horizontal perpendicular a essa reta é a reta Leste-Oeste, o que demonstra nossa tese.

No sistema equatorial, a posição da estrela E será definida pela ascensão reta que é o arco $\widehat{\gamma R}$, onde R é o ponto intersecção do Equador com o círculo horário passante por E; a outra

coordenada é a declinação dada pelo arco $\widehat{RE}$ medido desde o Equador até a estrela E, sobre o círculo horário. Logo:

$$\alpha = \widehat{\gamma R} \ , \tag{3}$$

e

$$\delta = \widehat{RE} \ . \tag{4}$$

Finalmente, no sistema horário usa-se como planos de referência o plano do Equador e o meridiano superior local (NZS). A posição da estrela E será dada pelo ângulo horário $\widehat{TR}$ medido desde o meridiano local até ao círculo horário PEP' que passa pela estrela, e pela declinação $\widehat{RE}$ da estrela. Assim:

$$H = \widehat{TR} \ , \tag{5}$$

$$\delta = \widehat{RE} \ . \tag{6}$$

O arco $\widehat{NP}$, que corresponde a altura do Pólo Norte no local é a latitude do local. O arco $\widehat{PZ}$ costuma receber o nome de colatitude, e é, obviamente, o complemento da latitude. Assim:

$$\phi = \widehat{NP} \ . \tag{7}$$

Nosso objetivo seguinte será o de determinar meios de calcular as coordenadas de uma estrela num certo sistema de referências desde que conheçamos suas coordenadas num outro sistema. É um problema fundamental em *Astronomia de Posição*. Existem diversos meios de se obter tais relações; daremos primeiro o método que utiliza as fórmulas da *Trigonometria Esférica*. Posteriormente veremos um outro método: mudança de coordenadas por *Matrizes de Rotação*.

Capítulo 3

Triângulos Esféricos

32. TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Definamos *esfera trigonométrica* como sendo aquela cujo raio será tomado como unitário. Qualquer circunferência dessa superfície esférica, cujo centro contenha o centro da esfera, se chama *grande circunferência* da esfera. Poderíamos definir grande circunferência como sendo aquela resultante da intersecção da superfície esférica dada com um plano que contivesse o centro da esfera; se o plano não contiver o centro da esfera, a circunferência definida sobre a superfície esférica será chamada de *pequena circunferência*.

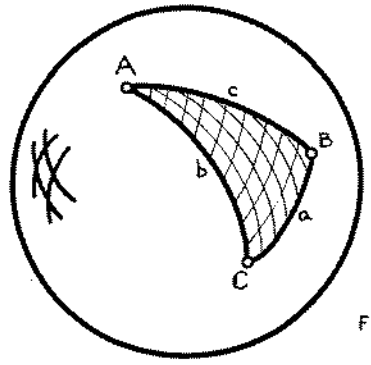


Fig. 1

Imaginemos três pontos (não simultaneamente pertencentes a uma mesma grande circunferência) A, B e C assinalados sobre a superfície esférica. Unemô-los 2 a 2 por meio de arcos de grandes circunferências. A superfície esférica limitada por esses 3 arcos recebe o nome de *Triângulo Esférico* ABC, de *vértices* A, B e C e *lados* formados pelos arcos a, b e c respectivamente opostos aos vértices A, B e C (Fig. 1 e Fig. 2).

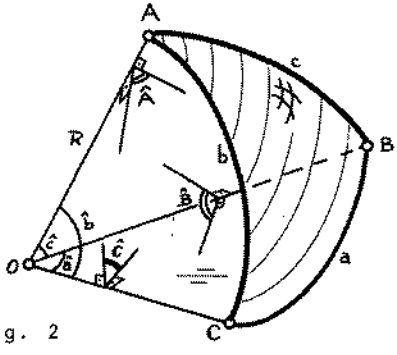


Fig. 2

Se definirmos como O o centro da esfera trigonométrica, podemos dizer que os lados a, b e c são os arcos e ângulos seguintes:

$$a = \overset{\frown}{BC} = \hat{a} \,, \qquad (1)$$

$$b = \overset{\frown}{AC} = \hat{b} \,, \qquad (2)$$

$$c = \overset{\frown}{AB} = \hat{c} \,, \qquad (3)$$

onde o circunflexo indica medida angular. Do ponto de vista prático, vamos confundir o arco a com sua medida angular â, notando apenas a.

Definamos agora os *ângulos diedros* $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo esférico (Fig. 2). Chamamos de *diedro* do triângulo esférico a cada um dos 3 diedros internos ao triedro que define o triângulo esférico.

Diedro é a região do espaço compreendida entre os 2 planos que contêm as 2 grandes circunferências cuja intersecção é o raio da esfera trigonométrica que passa pelo vértice considerado. A intersecção do diedro com a esfera fornece o sólido chamado *cunha*. A intersecção do diedro com a superfície esférica define a superfície chamada *fuso esférico*. Como analogia poderíamos dizer que a cunha representa um gomo de uma laranja, e fuso representa a casca que envolvia apenas esse gomo.

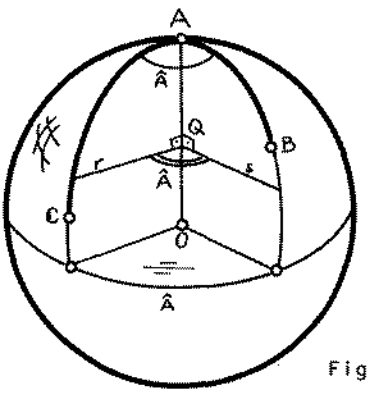


Fig.3

Por um ponto Q qualquer da intersecção OA dos planos definidos por OAB e OAC tracemos 2 retas, uma em cada plano, que sejam perpendiculares a OA. Definimos como *ângulo do diedro* à medida angular entre essas 2 retas; temos, pois (Fig. 3):

$$\hat{A} = r\hat{s} \ . \qquad (4)$$

Poderíamos também definir o ângulo diedro do diedro dado como sendo a medida angular do arco medido sobre a grande circunferência cujo plano fosse perpendicular à *aresta* OA do diedro formado pelas grandes circunferências passantes por AB e AC. Na Figura 3, o arco $\tilde{A}$ inferior esquematiza essa última definição. O ângulo Â intermediário, passando pelo ponto Q esquematiza a representação definida no parágrafo anterior e expressa na equação (4). Do ponto de vista prático, costuma-se representar o ângulo diedro A conforme aparece na parte superior da Figura 3: apenas um arco com o símbolo $\tilde{A}$, ou A, ou apenas o vértice A, subentendendo-se a medida do ângulo diedro.

É interessante notar, também, que se pelo vértice A traçarmos as retas s e r tangentes aos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ respectivamente, o ângulo entre essas retas será igual ao ângulo diedro Â. Isso advém do fato de a tangente ser perpendicular ao raio passante pelo ponto de tangência; em nosso caso o raio é OA. As retas r e s pertencem aos planos que contêm as circunferências que definem os arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{AB}$ respectivamente (Fig. 4).

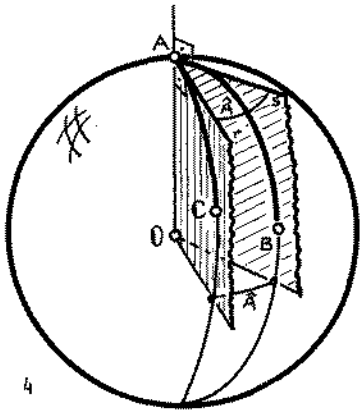


Fig. 4

Assim, pois, na Figura 2 estão representados os ângulos diedros Â, B̂ e Ĉ formados pelos planos que podem assim ser indicados:

$$A = \hat{A} = (OAC)\hat{}(OAB) \ , \tag{5}$$

$$B = \hat{B} = (OBA)\hat{}(OBC) \ , \tag{6}$$

$$C = \hat{C} = (OCA)\hat{}(OCB) \ , \tag{7}$$

onde (OAC) representa o plano definido pelos pontos O, A e C, e o símbolo de circunflexo representa o ângulo diedro formado pelos 2 planos entre os quais se situa. Na prática não se coloca o circunflexo sobre A, B e C; não há no entanto possibilidade de confundir ângulo A com vértice A, já que do ponto de vista numérico só terá sentido a aplicação de A como ângulo.

Caso um triângulo esférico apresente 1, 2 ou 3 lados de 90° ele será chamado de retilátero, biretilátero ou triretilátero respectivamente.

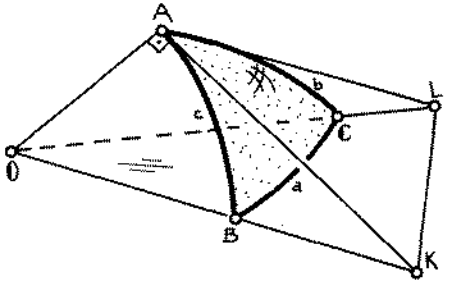
Igualmente, se apresentar 1, 2 ou 3 ângulo retos (90°) será chamado de retiângulo, biretiângulo ou triretiângulo (procurou-se usar o neologismo "retiângulo" em lugar do termo "retângulo" para chamar a atenção que não é um triângulo plano mas sim esférico).

É mister, agora, que encontremos relações matemáticas entre os diversos lados a,b e c e os ângulos A,B e C do triângulo esférico ABC.

33. LEI DO CO-SENO NA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

A trigonometria esférica mostra que podemos resolver um triângulo esférico (conhecer seus 6 elementos: 3 lados e 3 ângulos) conhecendo-se 3 quaisquer de seus elementos. Em todos os casos vamos supor que o raio da esfera seja unitário.

Procuremos deduzir uma fórmula que nos permita obter o valor de um lado em função dos demais e do ângulo diedro oposto a esse lado.



Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O e raios $OA \equiv OB \equiv OC \equiv 1$.

Pelo ponto A, por exemplo, tracemos AK *tangente*[1] ao arco $\overset{\frown}{AB}$ e AL tangente a $\overset{\frown}{AC}$; nesse caso:

$$O\hat{A}K = O\hat{A}L = 90^{\circ} \ . \qquad (1)$$

Aplicando a lei dos *co*[3]-*senos*[2] da trigonometria plana aos triângulos planos AKL e OKL (lembrando que o ângulo $L\hat{A}K$ é igual a A (ver item 32)) temos:

$$KL^2 = KA^2 + LA^2 - 2.KA.LA.\cos A \ , \qquad (2)$$

e

$$KL^2 = KO^2 + LO^2 - 2.KO.LO.\cos a \ . \qquad (3)$$

Igualando as duas expressões, e rearranjando os termos, temos:

$$(LO^2 - LA^2) + (KO^2 - KA^2) - 2.LO.KO.\cos a + 2.LA.KA.\cos A = 0 \ ;$$

$$\therefore \ 2.LO.KO.\cos a = 2.AO^2 + 2.LA.KA.\cos A = 0$$

---

1. Tangente = tangens [latim] = que toca
2. Seno = seio [latim] = curvatura
3. Co-seno = complemento do seno

Dividindo ambos os membros por 2.LO.KO, obtemos:

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\cos a = \cos b.\cos c + \operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c.\cos A} \quad , \qquad (4)$$

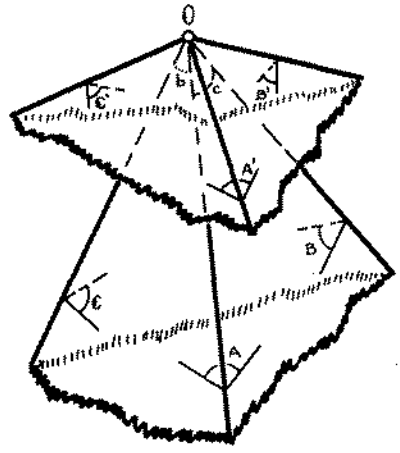
em lembrando que $\frac{AO}{OL} = \cos b$, $\frac{AL}{OL} = \operatorname{sen} b$

$\frac{AO}{OK} = \cos c$ e $\frac{AK}{OK} = \operatorname{sen} b$.

Por mutação cíclica das letras obtemos 2 fórmulas formalmente idênticas:

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\begin{aligned} \cos b &= \cos a.\cos c + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} c.\cos B \ , \qquad (5) \\ \cos c &= \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b.\cos C \ . \qquad (6) \end{aligned}}$$

Poderíamos, também, conseguir uma fórmula que permitisse a obtenção de um ângulo diedro em função dos outros 2 e do lado oposto a esse diedro. Para isso basta lembrarmos da definição de *triedro polar*: o triedro polar de um triedro dado, é aquele formado pelas semi-retas perpendiculares a cada uma das faces do triedro dado, e passando pelo vértice do mesmo. O ângulo formado pelas normais às faces de um diedro, é suplementar do ângulo diedro dado. Por outro lado, as faces de um triedro são suplementares dos diedros correspondentes no seu triedro polar, isto é:



$$A' = 180^\circ - a \qquad e \qquad a' = 180^\circ - A \ , \qquad (7)$$

$$B' = 180^\circ - b \qquad\qquad b' = 180^\circ - B \ , \qquad (8)$$

$$C' = 180^\circ - c \qquad\qquad c' = 180^\circ - C \ . \qquad (9)$$

Assim, se nas 3 fórmulas 33.(4), 33.(5) e 33.(6) substituirmos esses valores, obteremos:

(II)

$$\cos A = -\cos B.\cos C + \operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.\cos a \,, \qquad (10)$$

$$\cos B = -\cos A.\cos C + \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} C.\cos b \,, \qquad (11)$$

$$\cos C = -\cos A.\cos B + \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\cos c \,. \qquad (12)$$

As fórmulas descritas nos grupos (I) e (II) poderiam ser chamadas de *lei do co-seno* da trigonometria esférica.

34. LEI DOS SENOS NA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Podemos obter 3 outras fórmulas que nos permitem, cada uma delas, relacionar 2 lados do triângulo esférico com os 2 ângulos diedros opostos a esses lados. Veremos que essas fórmulas se assemelham à lei dos senos na trigonometria plana.

Rearranjemos os termos da equação 33.(4) de modo a escrever:

$$-\cos A.\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c = \cos b.\cos c - \cos a \ . \qquad (1)$$

Elevemos ambos os membros ao quadrado. Substituamos os $\cos^2 x$ por $(1 - \operatorname{sen}^2 x)$. Da mesma forma, podemos escrever, a partir da equação 33.(6):

$$-\cos C.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b = \cos a.\cos b - \cos c \ . \qquad (2)$$

Efetuando as mesmas operações anteriores, e igualando os dois resultados obtidos, temos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \qquad (3)$$

Partindo de

$$-\cos B.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} c = \cos a.\cos c - \cos b \ ,$$

obteríamos outra equação que poderíamos associar à (3) escrevendo, finalmente:

(III) $$\boxed{\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}} \qquad (4)$$

que é a *lei dos senos* na trigonometria esférica.

35. FÓRMULA DO SENO & CO-SENO NA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Se substituirmos o valor de (cosa) dado na equação 33.(4) na equação 33.(5), obtemos a primeira das equações abaixo; as demais podem ser encontradas por permutação cíclica das letras:

(IV)

$$\sin a.\cos B = \cos b.\sin c - \sin b.\cos c.\cos A, \quad (1)$$

$$\sin a.\cos C = \cos c.\sin b - \sin c.\cos b.\cos A, \quad (2)$$

$$\sin b.\cos C = \cos c.\sin a - \sin c.\cos a.\cos B, \quad (3)$$

$$\sin b.\cos A = \cos a.\sin c - \sin a.\cos c.\cos B, \quad (4)$$

$$\sin c.\cos A = \cos a.\sin b - \sin a.\cos b.\cos C, \quad (5)$$

$$\sin c.\cos B = \cos b.\sin a - \sin b.\cos a.\cos C. \quad (6)$$

Utilizando o triedro polar, obteremos 6 novas fórmulas a partir das 6 anteriores:

(V)

$$\sin A.\cos b = \cos B.\sin C + \sin B.\cos C.\cos a, \quad (7)$$

$$\sin A.\cos c = \cos C.\sin B + \sin C.\cos B.\cos a, \quad (8)$$

$$\sin B.\cos c = \cos C.\sin A + \sin C.\cos A.\cos b, \quad (9)$$

$$\sin B.\cos a = \cos A.\sin C + \sin A.\cos C.\cos b, \quad (10)$$

$$\sin C.\cos a = \cos A.\sin B + \sin A.\cos B.\cos c, \quad (11)$$

$$\sin C.\cos b = \cos B.\sin A + \sin B.\cos A.\cos c. \quad (12)$$

36. FÓRMULA DO CO-SENO & CO-SENO NA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

A partir das equações 35.(3) e 34.(4), ou seja:

$$\text{senb.cosC} = \text{cosc.sena} - \text{senc.cosa.cosB} \quad (1)$$

e

$$\text{senb.senC} = \text{senc.senB}\ , \quad (2)$$

podemos, por divisão membro a membro, obter uma fórmula, e por todo análogo, as outras cinco, perfazendo:

(VI)

$$\text{cosa.cosB} = \text{sena.cotc} - \text{senB.cotC} \quad (3)$$

$$\text{cosa.cosC} = \text{sena.cotb} - \text{senC.cotB} \quad (4)$$

$$\text{cosb.cosC} = \text{senb.cota} - \text{senC.cotA} \quad (5)$$

$$\text{cosb.cosA} = \text{senb.cotc} - \text{senA.cotC} \quad (6)$$

$$\text{cosc.cosA} = \text{senc.cotb} - \text{senA.cotB} \quad (7)$$

$$\text{cosc.cosB} = \text{senc.cota} - \text{senB.cotA.} \quad (8)$$

37. FÓRMULA DO SENO & SENO NA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Utilizando as equações 33.(5) e 33.(11), multipliquemô-las membro a membro; substituamos $\cos^2 x$ por $(1 - \text{sen}^2 x)$: multiplique mos membro a membro 2 equações da lei dos senos; comparando essa equação com aquela encontrada anteriormente obtemos a primeira das 3 fórmulas seguintes. As outras duas decorrem da permutação cíclica das letras da equação (1):

(VII)

$$\text{sena.senc} + \text{cosa.cosc.cosB} = \text{senA.senC} - \text{cosA.cosC.cosb}, \quad (1)$$

$$\text{senb.sena} + \text{cosb.cosa.cosC} = \text{senB.senA} - \text{cosB.cosA.cosc}, \quad (2)$$

$$\text{senc.senb} + \text{cosc.cosb.cosA} = \text{senC.senB} - \text{cosC.cosB.cosa}. \quad (3)$$

38. FÓRMULAS DE BORDA

Procuremos deduzir equações que nos permitam calcular os ângulos diedros de um triângulo esférico em função tão somente dos 3 lados do triângulo.

Pela equação 33.(4) podemos escrever:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c} \quad . \tag{1}$$

Pela trigonometria plana sabemos que (seno de uma soma):

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a.\cos b \pm \cos a.\operatorname{sen} b \tag{2}$$

e (soma de senos):

$$\operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} b = 2.\operatorname{sen} \frac{a \pm b}{2} .\cos \frac{a \pm b}{2} , \tag{3}$$

e (seno do arco metade):

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} \tag{4}$$

e (co-seno do arco metade):

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} \quad . \tag{5}$$

Definamos p como a semi-soma dos lados do triângulo esférico, chamado *semi-perímetro*:

$$p = \frac{1}{2} (a + b + c); \tag{6}$$

nesse caso podemos escrever que:

$$-a + b + c = 2(p - a) \tag{7}$$

$$+a - b + c = 2(p - b) \tag{8}$$

$$+a + b - c = 2(p - c) \quad . \tag{9}$$

Introduzamos a equação (1) nas equações (4) e (5). Com o

auxílio das equações (2) e (3) chegamos a:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b-c).\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b+c)}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c} \qquad (10)$$

e

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(-a+b+c).\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c} . \qquad (11)$$

Utilizando as equações (7), (8) e (9) podemos simplificar a forma das 2 equações anteriores, obtendo:

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b).\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}} \qquad (12)$$

e

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}} . \qquad (13)$$

Logo:

$$\boxed{\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b).\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-a)}}} \; ; \qquad (14)$$

vale, para os outros 2 ângulos do triângulo:

$$\boxed{\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a).\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-b)}}} \qquad (15)$$

$$\boxed{\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a).\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p.\operatorname{sen}(p-c)}}} \qquad (16)$$

Essas 3 últimas fórmulas se chamam *fórmulas de Borda*.

Usando apenas as equações (1), (2), (3), (4) e (5) podemos, também, facilmente chegar a equações que nos permitem obter os ângulos diedro de um triângulo esférico em função de seus 3 lados:

(VIII)

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)}}\ , \qquad (17)$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\cos(a-c) - \cos b}{\cos b - \cos(a+c)}}\ , \qquad (18)$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\cos(a-b) - \cos c}{\cos c - \cos(a+b)}}\ , \qquad (19)$$

Como resumo da técnica de resolução de um triângulo esférico podemos aplicar a tabela seguinte, a qual indica as equações a utilizar em função dos elementos envolvidos:

Relacionar	Usar fórmulas do grupo
3 lados e 1 ângulo,	I
1 lado e 3 ângulos,	II
2 lados e 2 ângulos opostos,	III
3 lados e 2 ângulos,	IV
2 lados e 3 ângulos	V
2 lados, 1 ângulo oposto e 1 ângulo compreendido,	VI
3 lados e 3 ângulos	VII
3 lados e 1 ângulo	VIII

Salientamos que as fórmulas mais usadas são as dos grupos I, III e IV.

39. DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO ENTRE 2 ASTROS

Sejam A e B dois astros cujas coordenadas são (α_A, δ_A) e (α_B, δ_B) respectivamente. Procuremos determinar o ângulo $\theta = \widehat{AB}$ entre os 2 astros. O triângulo PAB (esférico) tem 2 lados (PA e PB) conhecidos, bem como o diedro formado em P: é o ângulo entre os 2 círculos horários que passam por A e B, ângulo esse igual à diferença entre as ascensões retas dos dois astros. Apliquemos, a esse triângulo, a lei do co-seno (equação 33.(4), adotando como a o lado θ:

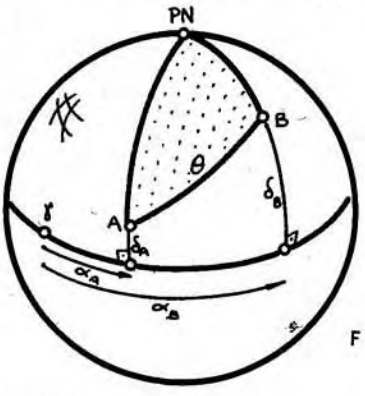


Fig. 1

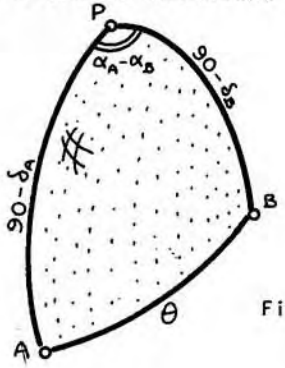


Fig. 2

$$\cos\theta = \cos(90-\delta_A).\cos(90-\delta_B) + \operatorname{sen}(90-\delta_A).\operatorname{sen}(90-\delta_B).\cos(\alpha_B-\alpha_A) \; ; \qquad (1)$$

simplificando, obteremos:

$$\boxed{\cos\theta = \operatorname{sen}\delta_A.\operatorname{sen}\delta_B + \cos\delta_A.\cos\delta_B.\cos(\alpha_B-\alpha_A)} \; . \qquad (2)$$

Se as coordenadas fossem horizontais, teríamos:

$$\boxed{\cos\theta = \cos z_A.\cos z_B + \operatorname{sen} z_A.\operatorname{sen} z_B.\cos(A_B-A_A)} \; . \qquad (3)$$

Capítulo 4

Relações entre Sistemas de Referência

A, H

40. RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS HORIZONTAIS E HORÁRIAS

Apliquemos agora as equações vistas nos [illegible] com o fito de relacionar as coordenadas astronômicas. Imaginemos, por exemplo, que conhecêssemos as coordenadas horizontais A e z de uma estrela E e quisêssemos determinar as coordenadas horárias H e δ, num determinado instante em um local de latitude φ. A Figura 1 esquematiza essa sitação (para referências, ver item 31).

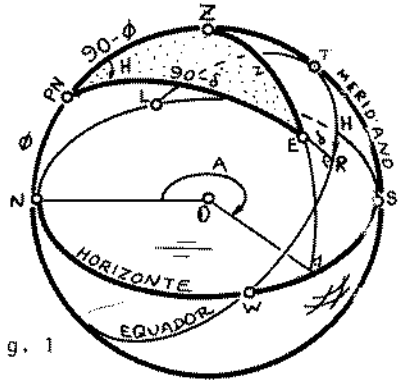


Fig. 1

Na Figura 2 está representado o triângulo esférico PZE que é o triângulo que deve ser resolvido para obtermos as relações desejadas. O único ente novo que ainda não foi definido é o ângulo S entre o vertical do astro e o círculo horário da estrela; a esse ângulo damos o nome de *ângulo paraláctico*[1]. Raramente ele é utilizado na prática. Podemos admití-lo positivo quando contado no sentido anti-horário a partir do vertical $\widehat{ZE}$.

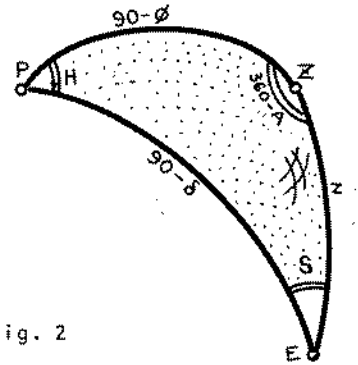


Fig. 2

No triângulo, apliquemos a lei do co-seno 33.(4) para o lado $\widehat{PE}$. Façamos a correspondência dos lados do triângulo A'BC com o triângulo ZPE (chamamos de A' para não confundir com o valor A do azimute):

---

[1] Paraláctico = referente à paralax (ângulo entre o centro da Terra e um ponto de sua superfície, visto do astro). (Ver rodapé do item 95).

$$\begin{array}{lll} & 360-A & a = 90-\delta \\ c = & H & b = z \\ C = & S & c = 90-\phi \ . \end{array}$$

Aplicando a fórmula citada, temos:

$$\cos(90-\delta) = \cos z.\cos(90-\phi) + \operatorname{sen} z.\operatorname{sen}(90-\phi).\cos(360-A).$$

Simplificando essa equação, resulta a primeira relação entre as coordenadas horárias e horizontais:

$$\boxed{\operatorname{sen}\delta = \cos z.\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen} z.\cos\phi.\cos A \ .} \qquad (1)$$

Apliquemos a lei dos senos 34.(4) para obter a segunda relação:

$$\frac{\operatorname{sen}(360-A)}{\operatorname{sen}(90-\delta)} = \frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{sen} z} \ .$$

Simplificando e multiplicando os termos cruzados, temos:

$$\boxed{\operatorname{sen} H.\cos\delta = -\operatorname{sen} z.\operatorname{sen} A \ .} \qquad (2)$$

Poder-se-ia pensar que as 2 equações achadas (1) e (2) resolvem o problema, já que da (1) temos o valor de δ, que substituído na (2) fornecerá H. Ocorre, no entanto, que H pode estar entre 0° e 360° (ou -180° e $+180^{\circ}$) de modo que apenas o valor de seu seno não o define. Necessitamos de uma outra função de H, por exemplo o cosH, de modo que o valor de H fique definido. Para isso aplicamos a lei do seno & co-seno, equação 35.(1):

$$\operatorname{sen}(90-\delta).\cos H = \cos z.\operatorname{sen}(90-\phi) - \operatorname{sen} z.\cos(90-\phi).\cos(360-A);$$

após simplificação obteremos a terceira fórmula que completa a resolução desejada:

$$\boxed{\cos\delta.\cos H = \cos z.\cos\phi - \operatorname{sen} z.\operatorname{sen}\phi.\cos A \ .} \qquad (3)$$

Caso desejássemos calcular as coordenadas horizontais em função das horárias, utilizando a correspondência entre os triângulos já mencionada, aplicaríamos as equações 33.(5), 34.(4) e 35.(4), resultando:

$$\cos z = \operatorname{sen}\phi.\operatorname{sen}\delta + \cos\phi.\cos\delta.\cos H \ , \quad (4)$$

$$\operatorname{sen} z.\operatorname{sen} A = -\operatorname{sen} H.\cos\delta \ , \quad (5)$$

$$\operatorname{sen} z.\cos A = \cos\phi.\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\phi.\cos\delta.\cos H \ . \quad (6)$$

Notar que as fórmulas são válidas quer a estrela esteja antes ou depois do meridiano local. Se ela estiver antes, substituir (360-A) por A durante a demonstração.

41 RELAÇÃO ENTRE O SISTEMA HORÁRIO E O EQUATORIAL: TEMPO SIDERAL

Os elementos da Figura 1 são os mesmos da figura do item 31. Nosso objetivo é achar uma relação entre as coordenadas horárias H e δ da estrela E e as coordenadas equatoriais α e δ dessa estrela. Ora, as segundas coordenadas de cada um dos sistemas é a declinação, de modo que só precisaremos nos preocupar em relacionar H e α. Para isso, definamos *Tempo Sideral*[1] ou *Hora Sideral*, representada por T; tempo sideral é o ângulo horário do ponto γ (ver item 29); assim:

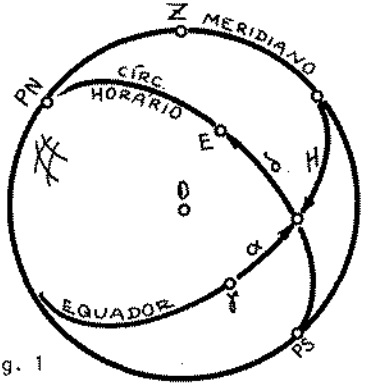


Fig. 1

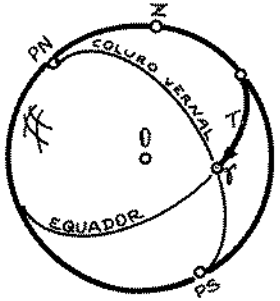


Fig. 2

$$T = H_{\gamma} \ . \qquad (1)$$

Das Figuras 1 e 2 é fácil verificar que:

$$T = \alpha_{\star} + H_{\star} \qquad (2)$$

onde o símbolo ⋆ refere-se à estrela E. O valor de T obedece à relação:

$$0 \leq T \leq 360^{\circ} \ , \qquad (3)$$

ou, usando a noção do ângulo medido em horas (ver item 26),

$$0 \leq T \leq 24^{h} \ . \qquad (4)$$

---

1. Sideral = sideralis [latim] = relativo às estrelas

Conforme vimos, a ascensão reta α da estrela é constante. Assim, como o ângulo horário H da estrela vai crescendo, cresce também o valor do tempo sideral T. Portanto, T é uma medida não só de ângulo, mas também pode ser usado como uma medida de tempo.

Chamamos de *Dia Sideral* ao intervalo de tempo entre 2 passagens consecutivas do ponto γ pelo mesmo meridiano superior de um local. Chamamos de *Dia Solar* ao intervalo de tempo entre 2 passagens sucessivas do Sol pelo meridiano superior de um local. Por convenção, a duração do dia solar é adotada como sendo de 24 horas 00 minutos e 00 segundos, abreviadamente escrita como 24 h 00 min 00 s, ou como se o escreve em Astronomia: $24^h\ 00^m\ 00^s$. Verifica-se que a duração do dia sideral é cerca de $3^m\ 56^s$ mais curta que a do dia solar:

$$\boxed{1 \text{ dia sideral} \cong 23^h\ 56^m\ 04^s\ .} \qquad (5)$$

Consideremos um relógio comum, dos que assinalam 24 horas para cada dia. Se mexermos em seu mecanismo de modo que ele se adiante $3^m\ 56^s$ por dia, teremos um relógio em marcha de tempo sideral. Quando o ponto γ passar pelo meridiano superior local, acertemos esse relógio de modo a indicar $00^h\ 00^m\ 00^s$. Teremos então um relógio marcando horas siderais. Quando lermos o valor apontado por esse relógio devemos mencionar *explicitamente* que se trata de horas siderais. Assim, um dia sideral tem 24 horas siderais, por convenção.

Notar, pela equação (2), que ao passar a estrela pelo meridiano superior local (H = 0), o tempo sideral é igual à ascensão reta dessa estrela:

$$\boxed{T = \alpha} \quad \text{(na passagem meridiana).} \qquad (6)$$

Existe uma relação linear entre o tempo sideral T e o *Tempo Solar* θ. Admitamos que quando temos θ_0, tenhamos também T_0. Se $T_1 = T_0 + 24$ horas sideraís, então:

$\theta_1 = \theta_0 + 23^h\ 56^m\ 04^s$ em horas solares. Assim, pela equação de uma reta:

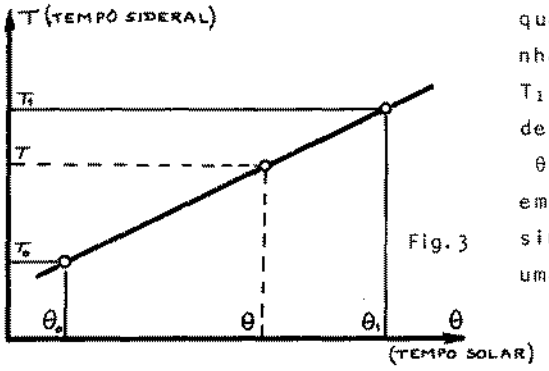


Fig. 3

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\theta_1 - \theta_0}\ (\theta - \theta_0)\ . \qquad (7)$$

O valor de $(T_1 - T_0)/(\theta_1 - \theta_0)$ é 1,0027, aproximadamente.

42. RELAÇÃO ENTRE O SISTEMA HORIZONTAL E O EQUATORIAL

As relações entre esses 2 sistemas é importantíssima já que na prática são muito usadas. Devemos relacionar as coordenadas α e δ com as coordenadas A e z. Ora, no item 40 vimos a relação entre H e δ com A e z, e no item 41 relacionamos α e H através do tempo sideral T. Pela equação 41.(2) podemos escrever:

$$H = T - \alpha \quad ; \tag{1}$$

Substituamos essa equação nas equações 40.(2), (3), (4), (5) e (6); obteremos (reescrevendo a equação 40.(1)):

$$\sin\delta = \cos z.\sin\phi + \operatorname{sen} z.\cos\phi.\cos A \tag{2}$$

$$\operatorname{sen}(T-\alpha).\cos\delta = -\operatorname{sen} z.\operatorname{sen} A \tag{3}$$

$$\cos\delta.\cos(T-\alpha) = \cos z.\cos\phi - \operatorname{sen} z.\operatorname{sen}\phi.\cos A \tag{4}$$

$$\cos z = \operatorname{sen}\phi.\operatorname{sen}\delta + \cos\phi.\cos\delta.\cos(T-\alpha) \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} z.\operatorname{sen} A = -\operatorname{sen}(T-\alpha).\cos\delta \tag{6}$$

$$\operatorname{sen} z.\cos A = \cos\phi.\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\phi.\cos\delta.\cos(T-\alpha) \quad ; \tag{7}$$

as 3 primeiras equações passam do sistema horizontal ao equatorial, e as 3 últimas do equatorial ao local horizontal. Essas 3 últimas fórmulas são muito usadas quando se quer conhecer as coordenadas horizontais de um astro cuja posição é dada, num catálogo, em coordenadas equatoriais.

43. PASSAGEM MERIDIANA DE UM ASTRO

Quando um astro está passando pelo meridiano local importantes relações podem ser obtidas. Uma delas, pela própria definição de ângulo horário, é:

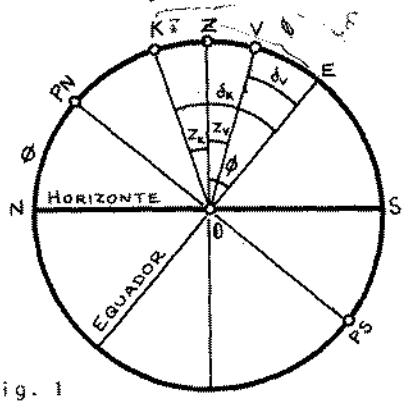


Fig. 1

$$H = 0 \text{ (passagem meridiana).} \qquad (1)$$

Conforme equação 41.(6):

$$T = \alpha \text{ (passagem meridiana).} \qquad (2)$$

Admitamos inicialmente estar o observador no hemisfério norte; portanto:

$$\phi > 0 \ . \qquad (3)$$

Imponhamos ser K uma estrela cuja passagem meridiana superior se dê entre o zênite Z e o Pólo Norte; isso significa que na passagem o azimute da estrela é nulo:

$$A = 0 \ . \qquad (4)$$

Pela Figura 1:

$$\widehat{KZ} = \widehat{KE} - \widehat{ZE}$$

ou seja:

$$z = \delta - \phi \ . \qquad (A = 0). \qquad (5)$$

No caso de uma estrela V passar pelo meridiano superior entre o zênite e o Pólo Sul, seu azimute será 180°:

$$A = 180^{\circ} \ . \qquad (6)$$

Pela Figura 1,

$$\widehat{ZV} = \widehat{ZE} - \widehat{VE}$$

ou

$$z = \phi - \delta \qquad (A = 180^{\circ}) \ . \qquad (7)$$

Admitamos, agora, o caso em que o observador se encontra no hemisfério Sul, isto é:

$$\phi < 0 \ . \qquad (8)$$

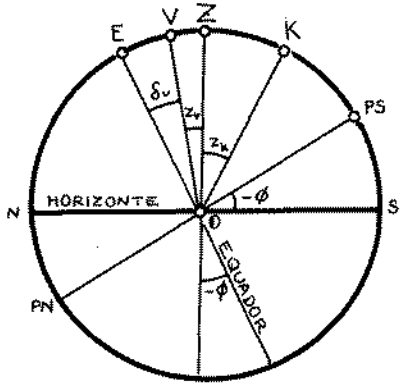


Fig. 2

Pela Figura 2 podemos ver que o PS está acima do horizonte e teremos que analisar 2 casos possíveis, como já o fizemos no hemisfério Norte.

Seja V uma estrela que cruza o meridiano entre o zênite e o Pólo Norte; assim, seu azimute é nulo:

$$A = 0 \ . \qquad (9)$$

Pela Figura 2 vemos que:

$$\widehat{VZ} = \widehat{EZ} - \widehat{EV}$$

ou

$$z = (-\phi) - (-\delta) \ ;$$

os sinais negativos dentro dos parêntesis devem ser usados para se transformar as grandezas negativas δ e ϕ em positivas; logo:

$$z = \delta - \phi \qquad (A = 0) \ . \qquad (10)$$

No caso de K estar entre PS e Z podemos escrever:

$$A = 180^{\circ} \ ; \qquad (11)$$

pela figura tiramos que:

$$\widehat{KZ} = \widehat{KE} - \widehat{ZE} \ ,$$

ou

$$z = (-\delta) - (-\phi) \ ,$$

que fornece:

$$z = \phi - \delta \qquad (A = 180^{\circ}) \ . \qquad (12)$$

Comparando as equações (5), (7), (10) e (12) podemos escrever, independentemente do hemisfério do observador:

$$\boxed{z = \delta - \phi} \qquad (A = 0) \qquad (13)$$

$$\boxed{z = \phi - \delta} \qquad (A = 180^{\circ}) \qquad (14)$$

que são as equações que relacionam os elementos posicionais do astro quando ele estiver em passagem meridiana superior.

44. ESTRELAS CIRCUMPOLARES

Apliquemos o conceito de passagem meridiana do item 43 no caso de estrelas circumpolares.

Na passagem superior e inferior teremos, respectivamente:

$$\boxed{H_S = 0 \quad e \quad H_I = 180^o} \; ; \qquad (1)$$

bem como

$$\boxed{T_S = \alpha \quad e \quad T_I = \alpha + 12^h} \; . \qquad (2)$$

Utilizando a notação do item 23, verificamos que das passagens meridianas podemos obter a latitude do lugar (equações 23.(3) e (4)):

$$\phi = \pm \frac{h'_s + h_i}{2} \; , \qquad (3)$$

onde o sinal positivo vale se o pólo visível for o Norte, e o negativo no caso de ser o Sul (h'_s pode ser superior a 90^o).

Utilizando as equações 23.(5) e (8) e a equação 29.(4) que afirma que $p = 90 - \delta$, podemos determinar a declinação da estrela observada nas 2 culminações:

$$\delta = \pm\left(90 - \frac{h'_s - h_i}{2}\right) \; , \qquad (4)$$

valendo o sinal positivo se o pólo visível for o Norte, e o negativo no caso de ser o Sul.

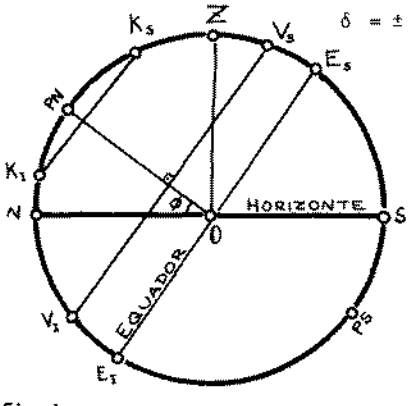


Fig. 1

Sejam K e V duas estrelas, sendo que K culmina superiormente entre PN e Z, e V uma estrela que culmina superiormente entre Z e

PS. Os azimutes são, respectivamente, $A = 0^{\circ}$ e $A = 180^{\circ}$.

Para a estrela K e V valem:

$$\overset{\frown}{E_S K_S} = \overset{\frown}{E_I K_I} = \delta_K \tag{5}$$

$$\overset{\frown}{E_S V_S} = \overset{\frown}{E_I V_I} = \delta_V \tag{6}$$

$$\hat{ZK}_S = z_{K_S} \tag{7}$$

$$\hat{ZK}_I = z_{K_I} \tag{8}$$

$$\hat{ZV}_S = z_V \tag{9}$$

$$\hat{NP} = \phi \tag{10}$$

Para as estrelas K e V podemos escrever, na culminação superior:

$$\boxed{z = \pm(\delta - \phi)} \quad , \tag{11}$$

onde os sinais + ou - valem respectivamente para culminação superior das estrelas K ($A = 0^{\circ}$) e V ($A = 180^{\circ}$).

Para as estrelas K e V na culminação inferior, vale a relação:

$$\boxed{z = 180^{\circ} - (\delta + \phi)} \quad . \tag{12}$$

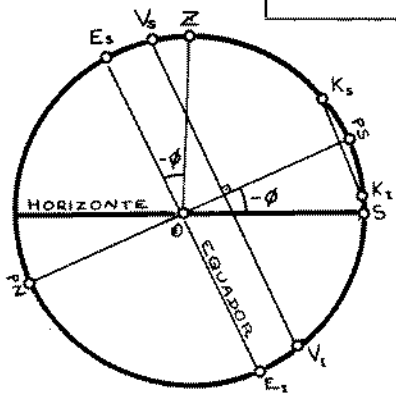


Fig.2

A demonstração dessas 2 fórmulas é óbvia a partir da Figura 1. Demonstraremos, no entanto, fórmulas correspondentes a essas quando o pólo visível é o Sul. Seja K a estrela que culmina superiormente entre Z e PS; e seja V uma que culmina entre Z e PN. Valem as relações:

$$\overset{\frown}{E_S K_S} = \overset{\frown}{E_I K_I} = -\delta_K \qquad (13)$$

$$\overset{\frown}{E_S V_S} = \overset{\frown}{E_I V_I} = -\delta_V \qquad (14)$$

(não esquecer que as declinações das estrelas K e V indicadas são negativas, e daí devemos mudar seu sinal para que o arco esquematizado geometricamente tenha significado positivo). As equações (7), (8) e (9) valem para esse caso também. Finalmente, lembrando que a latitude será negativa, podemos escrever:

$$\overset{\frown}{SP} = -\phi \quad . \qquad (15)$$

Para a estrela K em culminação superior podemos escrever:

$$\overset{\frown}{ZK_S} = \overset{\frown}{E_S K_S} - \overset{\frown}{E_S Z} \quad , \quad \text{ou}$$

$$z = (-\delta) - (-\phi) \quad , \quad \text{ou}$$

$$z = \phi - \delta \quad . \qquad (16)$$

Para a estrela V em culminação superior temos:

$$\overset{\frown}{ZV_S} = \overset{\frown}{E_S Z} - \overset{\frown}{E_S V_S} \quad , \quad \text{ou}$$

$$z = (-\phi) - (-\delta) \quad , \quad \text{ou}$$

$$z = -(\phi - \delta) \quad . \qquad (17)$$

Unindo (16) e (17) numa só equação:

$$\boxed{z = \pm(\phi - \delta)} \quad , \qquad (18)$$

onde o sinal + vale para a estrela K ($A = 180^\circ$) e o - para a estrela V ($A = 0^\circ$), ambas em culminação superior.

Usando a mesma técnica para as culminações inferiores, verificamos valer a relação:

$$\boxed{z = 180 + (\phi + \delta)} \quad . \qquad (19)$$

É importante notar que a partir das medidas de distância zenital em culminação superior e inferior podemos obter a declinação da estrela e a latitude do lugar. A tabela seguinte mostra as entidades que se pode obter ao se somar ou subtrair membro a membro as equações indicadas, usando o sinal + ou - das equações (11) e (18):

Latitude	Operação	Sinal da Eq. (11) ou (18)	Estrela	Ente Resultante
N	(12)-(11)	+	K	δ
N	(12)-(11)	-	V	ϕ
N	(12)+(11)	+	K	ϕ
N	(12)+(11)	-	V	δ
S	(19)-(18)	+	K	δ
S	(19)-(18)	-	V	ϕ
S	(19)+(18)	+	K	ϕ
S	(19)+(18)	-	V	δ

Analisando os resultados obtidos podemos resumir que para a estrela K (culmina entre o zênite e o pólo visível) vale:

$$\delta = \pm\left(90 - \frac{z_i - z_s}{2}\right) \quad , \tag{20}$$

e para a estrela V (culmina superiormente entre o zênite e o pólo invisível) vale:

$$\delta = \pm\left(90 - \frac{z_i + z_s}{2}\right) \quad , \tag{21}$$

onde o sinal + vale para latitudes positivas e o sinal - para latitudes negativas.

Idêntica análise pode ser feita com relação à determinação da latitude; para a estrela K podemos escrever:

$$\phi = \pm\left(90 - \frac{z_s + z_i}{2}\right) , \qquad (22)$$

e para a estrela V vale:

$$\phi = \pm\left(90 - \frac{z_i - z_s}{2}\right) . \qquad (23)$$

45. NASCER E OCASO DE UM ASTRO

Dizemos que um astro nasce quando sua altura é nula, tendendo a crescer, com o azimute entre 0 e 180° (horizonte oriental). No ocaso, a altura do astro é novamente nula, deixando o astro de ser visível no horizonte ocidental, com azimute entre 180° e 360°. Em resumo, ao nascer e no ocaso de um astro temos:

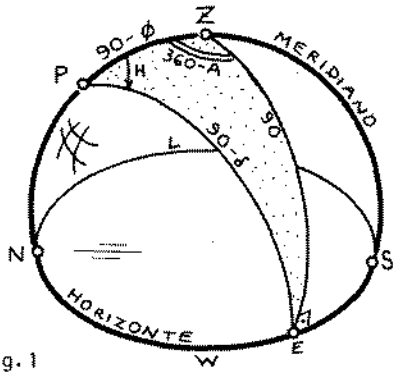


Fig. 1

$$h = 0 \ , \qquad (1)$$

$$z = 90^{\circ} \ . \qquad (2)$$

Definimos *arco semi-diurno* de um astro como sendo seu ângulo horário no instante do ocaso. É óbvio que o ângulo horário do nascer será oposto ao seu arco semi-diurno:

$$\boxed{H_{nascer} = -H_{ocaso}} \ . \qquad (3)$$

Procuremos determinar o azimute do nascer e ocaso. Para isso utilizemos o fato de $z = 90^{\circ}$ e introduzamo-lo na equação 40.(1); obteremos:

$$\boxed{\cos A = \operatorname{sen}\delta . \sec\phi} \ ; \qquad (4)$$

o azimute A fica determinado se soubermos ser o evento em estudo o nascer ou o ocaso.

Determinemos agora o arco semi-diurno. Usando a equação(2), explicitemos H na equação 40.(4); obteremos:

$$\boxed{\cos H = -\tan\phi . \tan\delta} \ ; \qquad (5)$$

adotando o valor de H entre 0 e 12^h (180^o) teremos o ângulo horário do ocaso (arco semi-diurno), e quando H estiver entre 180^o e 360^o ou 0^o e -180^o, ou 0 e -12 horas, teremos o ângulo horário do nascer. Notar que o arco semi-diurno representa, pois, a metade do arco (medido sobre o Equador) descrito pelo astro enquanto ele é visível para um dado observador.

Se conhecermos a declinação do astro e seu arco semi-diurno, podemos determinar seu azimute no nascer e ocaso: basta entrar com $z = 90^o$ na equação **40.**(2):

$$\text{sen}A = -\text{sen}H.\cos\delta \quad . \qquad (6)$$

Inversamente podemos determinar seu arco semi-diurno se conhecermos o azimute do pôr e a latitude local: substituamos $z = 90^o$ nas equações **40.**(2) e (3); dividamos as duas, membro a membro; obteremos então:

$$\cot H = \text{sen}\phi.\cot A \quad . \qquad (7)$$

46. CONDIÇÕES DE VISIBILIDADE DE UM ASTRO

Já vimos que existem estrelas que nunca nascem nem se põem para um determinado observador: são as estrelas circumpolares. Estudemos agora quais as condições que essas estrelas devem satisfazer. Veremos, também, no geral, a visibilidade de outras estrelas. As Figuras 1 a 5 representam o comportamento, quanto à visibilidade, de 7 diversas estrelas nos diferentes locais da Terra. As linhas cheias representam a trajetória durante sua parte visível, ao passo que as linhas tracejadas representam a trajetória enquanto a estrela estiver invisível (abaixo do horizonte). As figuras representam a esfera celeste vista de fora por uma pessoa X que estivesse na direção oeste. As setas representam o sentido do movimento das estrelas para essa pessoa quando essas estrelas estiverem no hemisfério mais próximo dele.

Fig.1

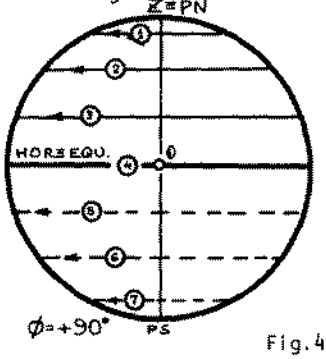


Fig.2

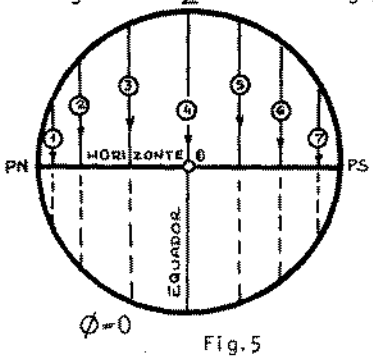


Fig.3

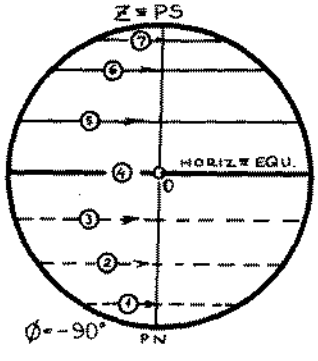


Fig.4

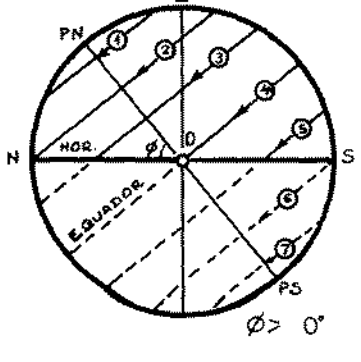
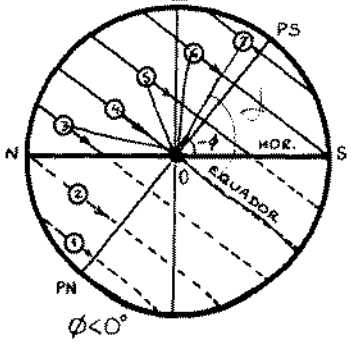


Fig.5



Na Figura 1, o observador O vê as estrelas 1, 2 e 3 realizarem movimentos circulares no sentido anti-horário em torno do zênite: isso significa que o observador se encontra no Pólo Norte (ver itens 19 e 20). Para esse observador, as estrelas 5, 6 e 7 nunca são visíveis. Logo, podemos concluir que para um observador no Pólo Norte só as estrelas boreais ($\delta>0$) são visíveis, e elas permanecem visíveis durante todo o movimento diário. Todas essas estrelas serão circumpolares, não existindo nem nascer nem ocaso de estrelas. A eventual estrela equatorial 4 permaneceria constantemente no horizonte (que coincide com o Equador) realizando aí seu movimento diário.

Na Figura 2, o observador vê todas as 7 estrelas, cada uma delas durante a metade de seus movimentos diários. Todas elas nascem e se põem, realizando trajetórias que são paralelas ao primeiro e segundo verticais. As estrelas que culminam entre o zênite e o ponto Norte parecem girar em torno desse ponto Norte, e portanto aí está o pólo Norte. As estrelas entre o zênite e o ponto Sul parecem girar em torno desse ponto, o que nos leva a concluir ser aí o pólo Sul. Assim, o eixo de rotação da esfera celeste coincide com o eixo norte-sul, e o Equador coincidirá com o primeiro e segundo verticais. Todas as estrelas terão o mesmo arco semi-diurno, e o observador poderá ver todas as estrelas da esfera celeste. O observador estará no Equador Terrestre.

A Figura 3 é em tudo parecida à Figura 1, mas o observador O vê as estrelas 5, 6 e 7 girarem no sentido horário em torno do zênite, o que nos permite concluir que o zênite coincide com o Pólo Sul, e portanto o observador se encontra no Pólo Sul da Terra. As estrelas 1, 2 e 3 nunca lhe serão visíveis: assim, um observador no Pólo Sul vê as estrelas austrais ($\delta<0$) mas não as boreais ($\delta>0$). Para esse observador não haverá nascer e pôr de estrelas, e todas as estrelas visíveis serão circumpolares.

Na Figura 4, o observador O vê as estrelas 1, 2, 3 girarem no sentido anti-horário em torno de um ponto que está a uma altura ϕ acima do horizonte norte. Aí está pois o pólo Norte. Assim, esse observador está no hemisfério Norte da Terra. Ele vê ainda as estrelas 4 e 5, que pela posição que ocupam não parecem gi-

rar em torno de PN: a estrela 5 parece girar em torno de PS, oposto a PN, mas não visível. As estrelas 1 e 2 são circumpolares norte (já que nunca se põem), enquanto que as estrelas 6 e 7 são sempre invisíveis (já que estão sempre abaixo do horizonte. Qual a condição para que uma estrela seja *circumpolar* para esse observador? É fácil ver pela figura que a distância polar da estrela não deve ser superior à latitude. Logo

$$p \leq \phi \qquad (1)$$

ou

$$\boxed{\delta \geq 90 - \phi \ .} \qquad (2)$$

Da mesma forma, para que a estrela *nunca nasça* é necessário que

$$-\delta \geq 90 - \phi \quad ; \qquad (3)$$

(o sinal negativo diante do δ transforma a medida algébrica em geométrica); logo

$$\boxed{\delta \leq -(90-\phi) \ .} \qquad (4)$$

Ora, se excluirmos as estrelas circumpolares (equação(2)) e as estrelas que nunca nascem (equação(4)), teremos a *condição para que um astro nasça e se ponha* num determinado lugar de latitude norte:

$$\boxed{-(90-\phi) \leq \delta \leq (90-\phi) \ .} \qquad (5)$$

Notar que o arco semi-diurno das diferentes estrelas (diferentes declinações) varia: o arco semi-diurno é tanto maior quanto mais próximo a estrela estiver do Pólo Norte.

A Figura 5 repete as mesmas características da figura anterior, mas o observador O vê as estrelas 5, 6 e 7 girarem em torno do pólo no sentido horário, indicando que o pólo visível é o Sul, e portanto o observador se encontra no hemisfério Sul da Terra. As estrelas 6 e 7 serão circumpolares, enquanto que as estrelas 1 e 2

nunca serão visíveis para esse observador.

A condição para que uma estrela seja circumpolar é:

$$-\delta \geq 90 - (-\phi) \quad \text{ou} \tag{6}$$

$$\boxed{\delta \leq -(\phi+90) \ .} \tag{7}$$

Pela figura podemos também tirar a condição para que uma estrela nunca nasça:

$$\delta \geq 90 - (-\phi) \tag{8}$$

ou

$$\boxed{\delta \geq 90+\phi \ .} \tag{9}$$

Se excluirmos as estrelas circumpolares sul (equação(7)) e as que nunca nascem (equação(9)), teremos a *condição de poder nascer e se pôr* para uma estrela num local de latitude sul:

$$\boxed{-(90+\phi) \leq \delta \leq (90+\phi) \ .} \tag{10}$$

47. CRUZAMENTO COM O PRIMEIRO E SEGUNDO VERTICAIS

Durante seu movimento diário as estrelas que culminam superiormente entre o zênite e o pólo não visível cortam o primeiro vertical em V_1 antes de culminarem e depois, simetricamente ao primeiro corte, passam pelo segundo vertical em V_2 (Fig. 1).

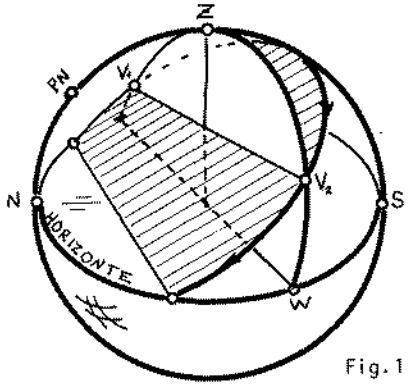


Fig.1

Passagem pelo 1º e 2º verticais

Pela análise das Figuras 4 e 5 do item **46** é fácil verificar que para uma estrela cortar o primeiro e o segundo verticais deve satisfazer a condição:

$$\boxed{\delta \leq \phi} \qquad (\phi>0)\ , \qquad (1)$$

ou

$$\boxed{\delta \geq \phi} \qquad (\phi<0)\ ; \qquad (2)$$

O sinal de igual vale no caso de tangenciamento dos verticais em questão.

Notar que no cruzamento do primeiro vertical temos

$$\boxed{A = 90^\circ\ ,} \qquad (3)$$

e no caso do 2º vertical teremos

$$\boxed{A = 270^\circ\ .} \qquad (4)$$

Substituindo (3) ou (4) nas equações **40.**(1), (2), (3), e (6), obteremos:

$$\operatorname{sen}\delta = \cos z.\operatorname{sen}\phi \quad , \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} z = \mp \operatorname{sen} H.\cos\delta \quad , \tag{6}$$

$$\cos\delta.\cos H = \cos z.\cos\phi \quad , \tag{7}$$

$$\cos H = \cot\phi.\tan\delta \quad ; \tag{8}$$

na equação (6) o sinal - vale para o cruzamento com o 1º vertical, enquanto que o sinal + vale para o 2º vertical.

48. CONDIÇÕES DE MÁXIMA DIGRESSÃO OU ELONGAÇÃO

Se admitirmos a estrela E como sendo uma estrela circumpolar, ou no mínimo, que possua um arco semi-diurno não inferior a 90^o, veremos que essa estrela ao girar em torno do pólo em seu movimento diário, atingirá 2 pontos, diametralmente opostos com relação ao pólo, nos quais os verticais que contêm a estrela estarão o máximo afastados do meridiano local. Dizemos então que ocorreu máxima digressão (ver item 24).

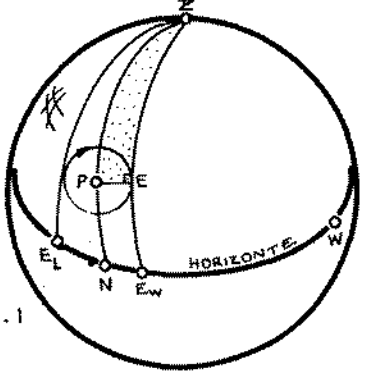
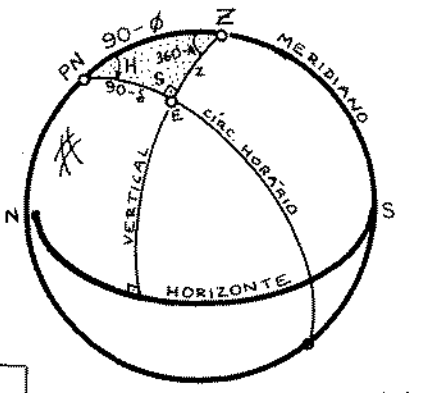


Fig.1

Como o vertical será tangente ao círculo paralelo da estrela, o seu círculo horário $\hat{PE}$ será perpendicular ao vertical. Assim, podemos dizer que um astro está em *elongação* quando o ângulo diedro entre o vertical e o círculo horário, que passam pela estrela, é 90^o; isso equivale a dizer que ocorre elongação quando o ângulo paraláctico do astro (ver item 40) é 90^o, isto é,



$$S = 90^o \ . \qquad (1)$$

Isso só acontece com estrelas que não cruzam o 1º vertical, ou seja, se

$$\delta > \phi (\phi > 0) \quad \text{ou} \quad \delta < \phi (\phi < 0) \ .$$

Se aplicarmos a lei do co-seno (33.(4)) no triângulo PEZ, admitindo como lado a o lado $(90-\phi)$, obtemos:

$$\cos z = \operatorname{sen}\phi . \csc\delta \ . \tag{2}$$

Aplicando a lei dos senos (34.(4)), podemos escrever (para os vértices E e P):

$$\operatorname{sen}H = \pm \operatorname{sen}z . \sec\phi \ , \tag{3}$$

onde os sinais + e - valem respectivamente para as elongações ocidental (W) e oriental (L).

Aplicando novamente a lei dos senos, agora para os vértices E e Z, teremos:

$$\operatorname{sen}A = \mp \cos\delta . \sec\phi \ , \tag{4}$$

(- e + valem respectivamente para elongação W e L).

Utilizemos agora a equação 35.(1), lei do seno & co-seno, sendo a = z e B = S; obteremos:

$$\cos H = \tan\phi . \cot\delta \ . \tag{5}$$

Transformações convenientes entre as 4 últimas equações podem fornecer:

$$\tan H = \pm \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(\delta-\phi) . \operatorname{sen}(\delta+\phi)}}{\cos\delta . \operatorname{sen}\phi} . K \tag{6}$$

$$\tan z = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(\delta-\phi) . \operatorname{sen}(\delta+\phi)}}{\operatorname{sen}\phi} . K \tag{7}$$

$$\tan A = \mp \frac{\cos\delta}{\sqrt{\operatorname{sen}(\delta-\phi) . \operatorname{sen}(\delta+\phi)}} \ , \tag{8}$$

onde o sinal superior, em todas as equações, vale para a máxima digressão ocidental (W) e o sinal inferior para a oriental (L); K é um fator que leva em consideração o sinal da latitude: K assume os valores +1 ou -1 dependendo de ser ϕ positivo ou negativo, respectivamente.

49. PASSAGEM POR UM ALMUCÂNTAR

Procuremos determinar o azimute e o ângulo horário de um astro quando ele cruzar um dado almucântar (círculo de altura), cuja distância zenital seja z. Se na equação 40.(1) e 40.(4) explicitarmos respectivamente A e H, teremos:

$$\cos A = \operatorname{sen}\delta . \operatorname{csc} z . \sec\phi - \cot z . \tan\phi \qquad (1)$$

e

$$\cos H = \cos z . \sec\phi . \sec\delta - \tan\phi . \tan\delta \qquad (2)$$

Poderíamos também obter A, H e S a partir das fórmulas 38.(17), (18) e (19):

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\phi+z) - \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}(\phi-z)}} \qquad (3)$$

$$\tan\frac{H}{2} = \mp\sqrt{\frac{\cos(\phi-\delta) - \cos z}{\cos z + \cos(\phi+\delta)}} \qquad (4)$$

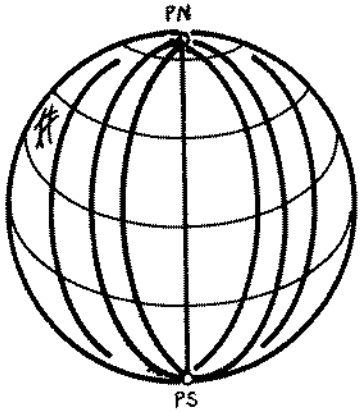
$$\tan\frac{S}{2} = \mp\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\delta+z) - \operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}(\delta-z)}} \quad , \qquad (5)$$

onde o sinal superior e inferior valem respectivamente para o cruzamento com o almucântar antes e depois do meridiano.

Capítulo 5

Planificação da Esfera Celeste

50. PLANIFICAÇÃO DA ESFERA CELESTE



Devido à grande distância em que as estrelas se encontram de nós a noção de "profundidade" deixa de existir, o que nos levou a abraçar a idéia da esfera celeste.

Em todos os desenhos que usamos, procuramos representar a esfera celeste no plano, denotando-lhe tanto quanto possível (às vezes com o sinal ✲) a aparência tridimensional. Urge, algumas vezes, representar a esfera celeste realmente num plano, aí esquematizando as estrelas, as constelações, meridianos, círculos horários, paralelos, Equador, etc. Chamamos de *planificação* da esfera ao processo de representar num plano as configurações existentes sobre essa superfície esférica.

Vejamos 2 desses tipos de planificação que são úteis em Astronomia:

- Projeção cilíndrica de Mercator;
- Projeção estereográfica.

51. PROJEÇÃO CILÍNDRICA

Imagine uma esfera (que pode ser a esfera celeste, para nossos casos) envolta por um papel, em forma cilíndrica. Admita que a esfera seja transparente, exceto os meridianos e paralelos que nela desenharmos (pense-os formando uma "gaiola" esférica sobre a superfície da esfera).

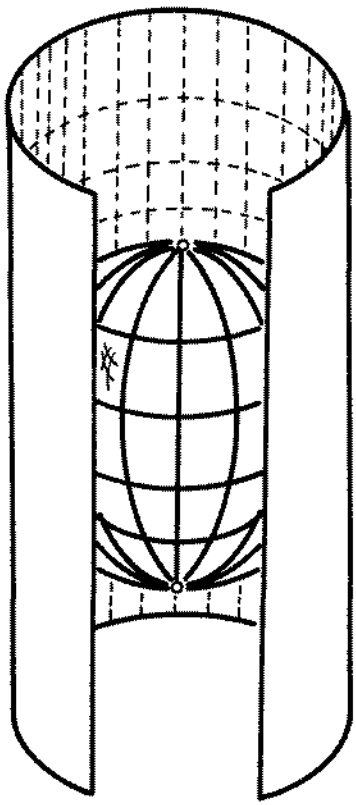
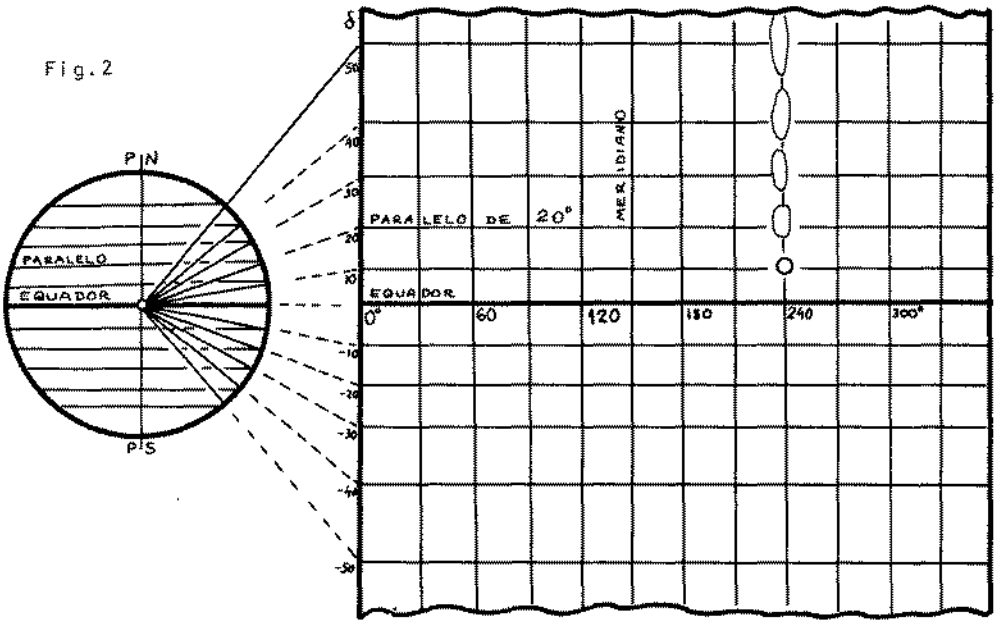


Fig. 1

Se uma lâmpada (*foco*[1] *de projeção*[2]) for colocada no centro da esfera, sobre o cilindro de papel formar-se-ão linhas escuras (na Figura 1 estão representadas por linhas tracejadas) correspondentes às sombras dos meridianos e paralelos. Suponhamos que depois dessas linhas terem sido projetadas, elas se perpetuem no papel cilíndrico. Desenrolemos agora esse cilindro, planificando-o. Teremos então a *projeção cilíndrica* da esfera em questão.

1. Foco = focus [latim] = centro
2. Projeção = projectio [latim] = lançamento

Fig.2

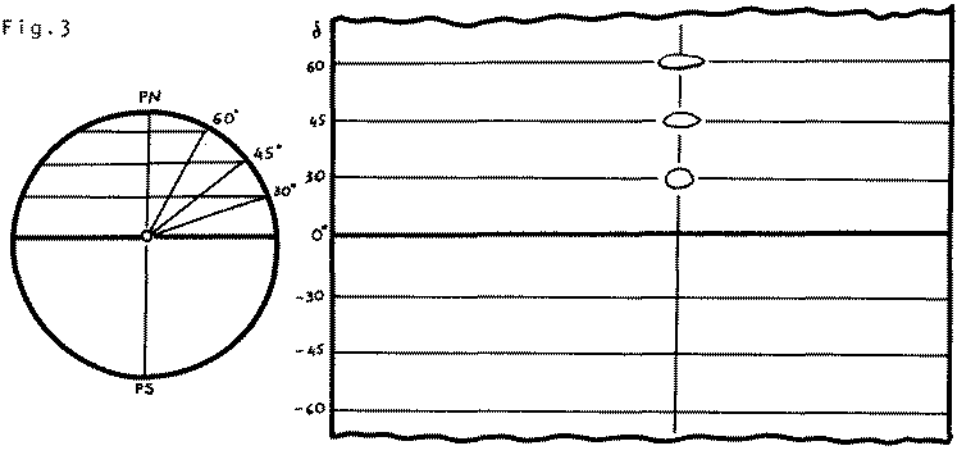


Notar que os paralelos serão retas paralelas ao Equador, enquanto que os meridianos serão retas perpendiculares aos paralelos e ao Equador. Enquanto que meridianos equiespaçados na esfera celeste aparecem também equiespaçados na planificação, o mesmo não se dá com os paralelos: um paralelo a um ângulo δ do Equador encontra-se na planificação a uma distância

$$d = k.\tan\delta \quad , \qquad (1)$$

onde k é apenas uma constante de escala arbitrária. É óbvio que não se pode esperar uma representação da região polar nessa planificação. Se considerarmos pequenas regiões circulares da esfera celeste (por exemplo, um pequeno entorno em volta de uma estrela) essas regiões projetadas dessa forma deixam de ser circulares, e quanto mais nos afastarmos do Equador mais alongada na direção norte-sul ficará a "circunferência".

Fig.3



Se optarmos de desenhar na planificação os paralelos equidistantes, as regiões circulares da esfera celeste projetar-se-ão cada vez mais achatadas na direção norte-sul (e elongadas na direção leste-oeste) à medida que nos afastarmos do Equador. Essa representação é, porém, bastante utilizada em Astronomia.

Para garantir que qualquer circunferência da esfera celeste se projete como circunferência na planificação, Mercator sugeriu usar uma escala vertical que fosse dada por:

$$d = k/\cos\delta \ . \qquad (2)$$

Nesse caso a projeção da circunferência mantém a forma, mas seu raio também fica multiplicado pelo fator $k/\cos\delta$.

A projeção cilíndrica é a mais indicada para representar a esfera celeste nos entornos do Equador e até declinações de $\pm 75^{\circ}$.

52. PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Imaginemos uma esfera celeste na qual estão representados diversos meridianos e paralelos. Considere um plano (folha de papel) tangente à esfera no ponto do Pólo Norte. Admitamos a existência de uma lâmpada (foco de projeção) no ponto F (PS), diametralmente oposto a PN. As sombras dos diversos meridianos e paralelos projetar-se-ão no plano, de modo que os paralelos serão circunferências concêntricas com P enquanto que os meridianos serão semi-retas de origem em P. A essa *projeção* damos o nome de *estereográfica*[1]

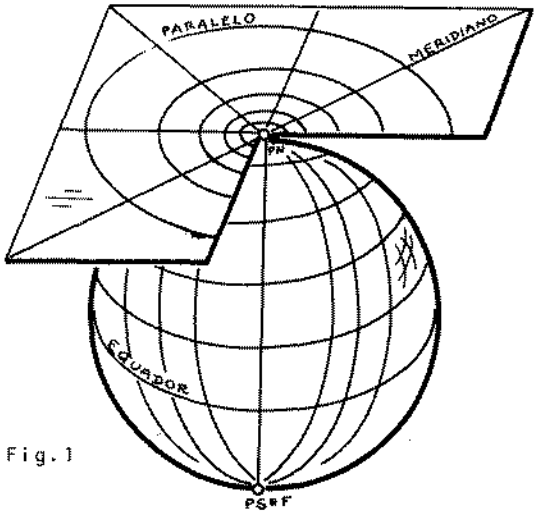


Fig.1

Em Astronomia é comum que o plano de projeção seja aquele que passa pelo centro da esfera e é perpendicular à linha FO (definida pelo centro da esfera e pelo foco de projeção (Fig.2)).

A projeção de um ponto E qualquer da superfície esférica será o ponto E', intersecção da reta FE com o plano de projeção.

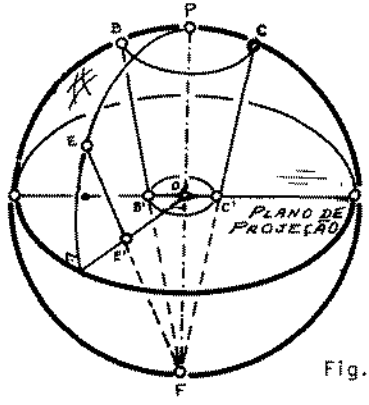


Fig. 2

1. Estereográfica = stereo (volume) [grego] + grafos (desenho) [grego] = desenho de um corpo volumétrico.

Ora, é óbvio que essa é uma boa maneira de se representar a esfera celeste num ponto próximo ao pólo. Assim, utilizando a projeção cilíndrica do item 51 para representar as estrelas com declinação, em módulo inferior, digamos, a 75°, e 2 projeções estereográficas (uma com foco em PS e outra em PN), obteremos as planificações necessárias para representar a esfera celeste num plano.

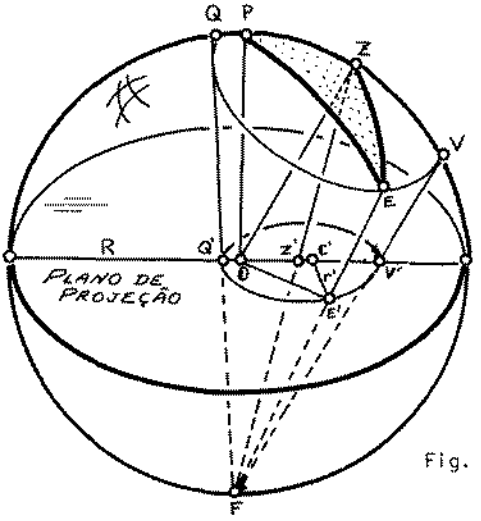


Fig. 3

Uma propriedade interessante da projeção estereográfica é que a projeção de qualquer circunferência da superfície esférica se projeta como uma circunferência (exceto quando degenera num segmento de reta) cujo centro C', porém, nem sempre coincide com a projeção do centro da circunferência original, mas está no ponto médio do segmento que representa as projeções de 2 de seus pontos diametralmente opostos (por exemplo Q e V):

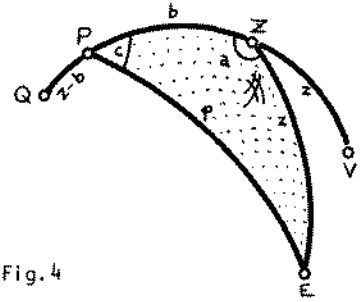


Fig. 4

$$C'Q' = C'V' = \frac{Q'V'}{2} . \qquad (1)$$

A demonstração dessa propriedade é algebricamente trabalhosa; daremos apenas uma seqüência que pode ser obedecida para se chegar a essa conclusão:

a) Cálculo do raio da circunferência projetada:

$$r' = \frac{Q'V'}{2} = \frac{1}{2}\,(Q'O + OV') \qquad (2)$$

com

$$Q'O = R.\tan\left(\frac{z-b}{2}\right) \qquad (3)$$

e

$$QV' = R.\tan\left(\frac{z+b}{2}\right) . \qquad (4)$$

b) Cálculo de OE':

$$OE' = R.\tan\frac{p}{2} \qquad (5)$$

com p (Fig.4) tirada pela lei dos co-senos (33.(4)):

$$\cos p = \cos b.\cos z + \operatorname{sen} b.\operatorname{sen} z.\cos a . \qquad (6)$$

c) Cálculo da distância OC' (usando (1), (2) e (3)):

$$OC' = Q'C - Q'O . \qquad (7)$$

d) Cálculo de r':

O ângulo $\widehat{C'OE'}$ é igual ao ângulo diedro c. Usando a lei dos senos 34.(4) na Figura 4 temos:

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} z.\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} p} , \qquad (8)$$

com p dado pela equação (6) (utilizando a fórmula fundamental da trigonometria plana). Aplicando a regra do co-seno da trigonometria plana no triângulo $C'OE'$ temos, finalmente:

$$r' = \sqrt{OC'^2 + OE'^2 - 2.OC'.OE'.\cos c} . \qquad (9)$$

Veremos que essa última fórmula resulta em função apenas de R, z e b, mostrando que qualquer que seja o ângulo a, a projeção de E estará sempre a uma mesma distância de um ponto C': logo, a projeção da circunferência dada é ainda uma circunferência, que é a tese que nos propúnhamos a mostrar.

Na Figura 5 está representada a projeção estereográfica sobre o plano do Equador (plano de projeção) do horizonte e de um al

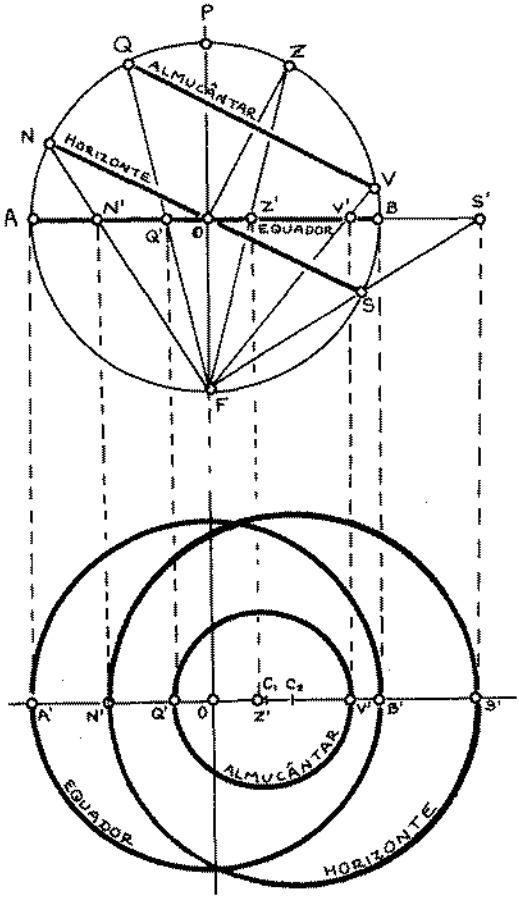


Fig.5

mucântar. A construção é a seguinte: a partir do foco de projeção F, unimos os pontos N, Q, Z, V e S com retas que interceptarão o plano do Equador nos pontos N', Q', Z', V' e S'; transportamos esses pontos para a reta $A'B' // AB$; achamos C_1 e C_2 como os pontos médios dos segmentos Q'V' e N'S' respectivamente; com centros C_1 e C_2 traçamos circunferências de diâmetros Q'V' e N'S' respectivamente, obtendo as projeções estereográficas do almucântar e do horizonte, respectivamente. Notar que a projeção Z' do zênite não está no centro da projeção do almucântar, no entanto O é o centro do Equador projetado.

Procuremos representar agora as projeções dos verticais. Suponhamos que desejásemos representar os verticais V_1 e V_2 cujos azimutes são A_1 e A_2. Conforme construção anterior, representemos o Equador e o horizonte em projeção estereográfica. Em seguida projetemos a circunferência que compreende o primeiro e segundo verticais (seu diâmetro será Z'K' e o centro D). Pelo ponto D tracemos a perpendicular x a DO. Com centro em Z', marquemos, a

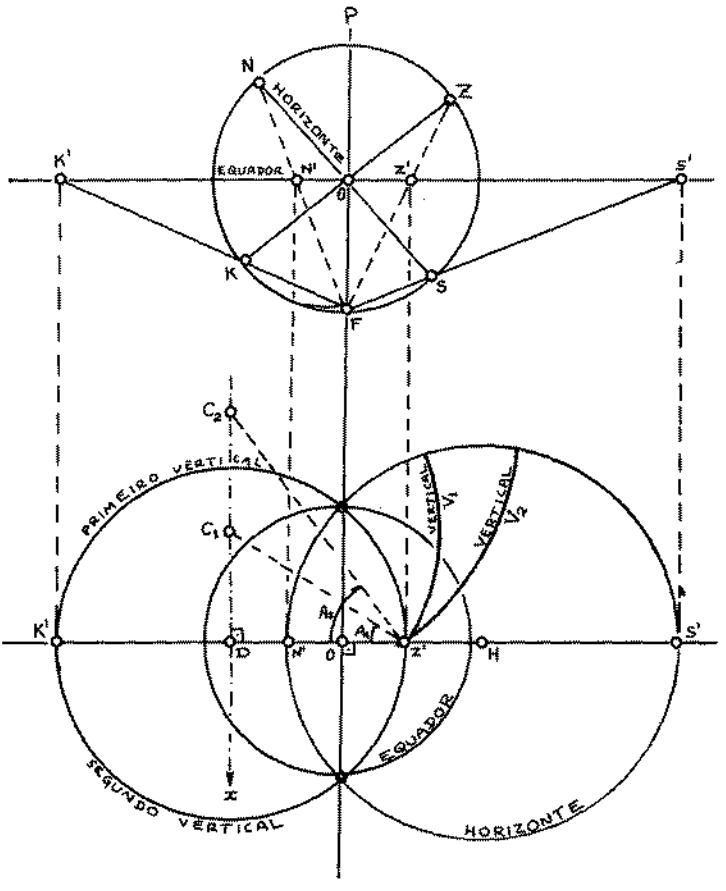


Fig. 6

partir de Z'D, os ângulos A_1 e A_2. Onde os lados superiores desses ângulos interceptarem a reta x, teremos os centros C_1 e C_2; centrado nos quais e com raios C_1Z' e C_2Z' respectivamente traçemos os arcos de circunferência até atingirmos o horizonte: aí estão as projeções estereográficas dos verticais V_1 e V_2 que desejávamos.

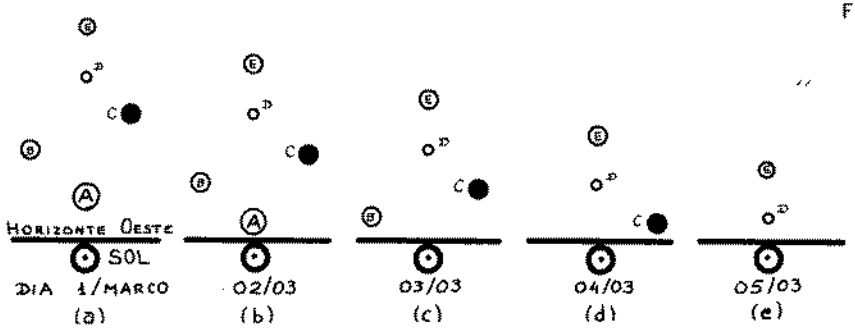
Capítulo 6

Movimento Anual do Sol. Sistema Eclíptico

53. MOVIMENTO ANUAL APARENTE DO SOL

Procuremos observar o movimento aparente do Sol. Já vimos que diariamente ele nasce no horizonte leste e se põe no horizonte oeste. Vamos nos fixar no pôr do Sol.

Fig. 1



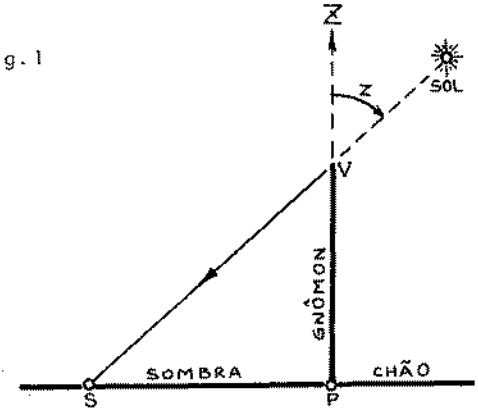
No dia 1 de março, assim que o Sol se põe, admitamos ser o aspecto do céu, na região vizinha ao ocaso, dado pela Figura 1.(a): existem aí 5 estrelas visíveis. No dia 2, novamente ao pôr do Sol, olhamos para a mesma região e constatamos que seu aspecto é semelhante ao do dia anterior, mas as 5 estrelas estão mais próximas do horizonte (ver Fig. 1.(b)). No dia 3, ao pôr do Sol verificamos que a estrela A não é mais visível, e que as outras 4 estão ainda mais perto do horizonte. No dia 4 não mais vemos a estrela B. No dia 5 só vemos as estrelas D e E. Em suma, com o passar dos dias a posição aparente do Sol entre as estrelas (notar que não podemos "ver" o Sol entre as estrelas, mas sabemos onde ele está, já que estamos fazendo as observações assim que ele se põe) varia, e com o passar dos meses tal movimento é ainda mais pronunciado: o Sol, parece, cada dia está numa região estelar mais a leste. Verificamos que somente depois de 1 ano, em 1 de março novamente, teremos a configuração dada na Figura 1.(a). A esse movimento que o Sol parece efetuar entre as estrelas no período de 1 *ano sideral* é que chamamos de *Movimento Anual Aparente do Sol*. O ano sideral é ligeiramente mais longo que o solar:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ano solar} &\cong 365^d\ 05^h\ 48^m\ 46^s \\ 1 \text{ ano sideral} &\cong 365^d\ 06^h\ 09^m\ 10^s\ . \end{aligned} \tag{1}$$

A definição de ano solar está no item 3; ano sideral é o intervalo de tempo para que o Sol passe 2 vezes consecutivamente por uma mesma estrela (veremos mais adiante (item 77) uma definição mais rigorosa).

54. DECLINAÇÃO DO SOL AO LONGO DO ANO

Fig. 1



Conforme vimos no item 6 a sombra de um gnômon varia de comprimento ao longo do ano, mesmo quando medida sempre ao meio-dia. Em outras palavras, isso significa que a distância zenital z do Sol varia ao longo do ano quando aquele estiver cruzando o meridiano local.

No dia em que a distância zenital do Sol fôr mínima* (z_V), dizemos que se inicia o verão naquele hemisfério: é o *Solstício de Verão*. Quando o Sol estiver com sua máxima distância zenital, na passagem meridiana, (z_I) dizemos que começa o inverno naquele hemisfério: é o *Solstício de Inverno*. Durante o ano, 2 vezes o Sol passará pelo meridiano local com uma distância zenital intermediária entre z_V e z_I:

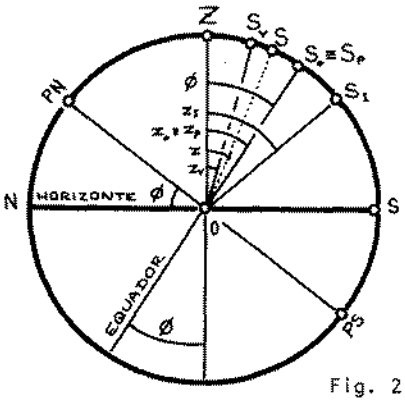


Fig. 2

$$z_o = z_p = \frac{z_I + z_V}{2} \qquad (1)$$

* Se a latitude do observador fôr, em módulo, menor que a obliqüidade da eclíptica, então o verão se inicia quando a sombra do gnômon fôr a maior, projetada no sentido de nome oposto ao do hemisfério do observador.

Caso a passagem se dê no período posterior ao inverno, dizemos que no instante em que a distância zenital do Sol é z_p está se iniciando a primavera: é o *Equinócio de Primavera*. Caso a passagem se dê após o verão, teremos então o início do outono: *Equinócio do Outono*.

O cálculo de z_o e z_p através de dados observacionais permitiu concluir que

$$\boxed{z_o = z_p = |\phi|} \quad , \tag{2}$$

o que nos leva a verificar que nos instantes dos equinócios o Sol se encontra sobre o Equador, ao passo que nos solstícios ele se encontra o mais afastado possível do Equador.

Através das equações 43.(13) e (14) podemos obter a declinação do Sol nos pontos extremantes. Para o solstício de verão, temos:

$$\delta_V = \phi \pm z_V \quad , \tag{3}$$

(+ se $A_\odot = 0^\circ$; - se $A_\odot = 180^\circ$), e para o solstício de inverno:

$$\delta_I = \phi \pm z_I \quad . \tag{4}$$

Verifica-se experimentalmente que:

$$-23^\circ 27' 08'' \leq \delta \leq +23^\circ 27' 08'' \quad . \tag{5}$$

Ao valor extremante de δ costuma-se dar o nome de *obliqüidade*[1] *da eclíptica*[2]:

$$\boxed{\varepsilon \cong 23^\circ 27' 08''} \quad ; \tag{6}$$

---

1. Obliqüidade = obliquitas (inclinado) [latim]
2. Eclíptica = ekleiptikos (lugar onde ocorrem eclipses (desaparecimentos)) [grego].

logo:

$$-\varepsilon \leq \delta_{Sol} \leq +\varepsilon \quad . \qquad (7)$$

Pelo fato da declinação do Sol variar ao longo do ano, seu movimento diurno aparente tem trajetórias diferentes ao longo do ano. Na Figura 3 estão representados os movimentos diurnos nos solstícios de verão e inverno, bem como nos equinócios de outono e primavera. Se admitirmos como sendo um gnômon a parte mais espessa da vertical representada, é fácil ver que o tamanho de sua sombra variará nas passagens meridianas ao longo do ano.

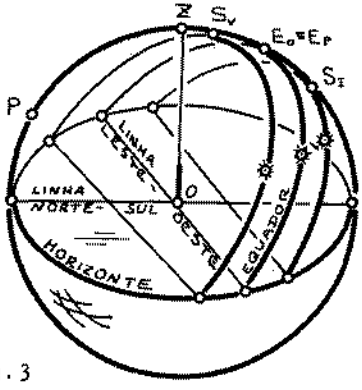


Fig.3

55. DURAÇÃO DA PARTE DIURNA E NOTURNA DE UM DIA

Utilizando a definição de arco semi-diurno dada no item 45, podemos dizer que a duração da parte diurna do dia é o dobro do arco semi-diurno $H_\odot$ do Sol (o símbolo $\odot$ é representativo do Sol):

$$D = 2H_\odot \quad , \tag{1}$$

enquanto que a duração da noite será

$$N = 24 - 2H_\odot \quad , \tag{2}$$

com $H_\odot$, D e N dados em horas solares (item 69).

Ora, a declinação do Sol varia ao longo do ano; como o arco semi-diurno pode ser dado pela equação 45.(5):

$$\cos H_\odot = -\tan\phi . \tan\delta_\odot \quad . \tag{3}$$

vemos que os valores de D e N variarão ao longo do ano para um mesmo observador. Pelas equações (1) e (3) podemos construir a tabela seguinte:

LATITUDE DO OBSERVADOR	DECLINAÇÃO DO SOL		
	$\delta > 0$	$\delta = 0$	$\delta < 0$
$\phi = +90^o$	H = indefinido D = 24	H = indefinido	H = indefinido D = 0
$+90 > \phi > 0$	$12 < D \leq 24$	D = 12	$0 \leq D < 12$
$\phi = 0$	D = 12	D = 12	D = 12
$0 > \phi > -90$	$0 \leq D < 12$	D = 12	$12 < D \leq 24$
$\phi = -90$	H = indefinido D = 0	H = indefinido	H = indefinido D = 24

Durante o verão e a primavera de um hemisfério, o Sol se encontra naquele hemisfério, e portanto ϕ e δ têm os mesmos sinais, fazendo com que o valor de $H_\odot$ na equação (3) seja superior a 6^h: isso significa que na primavera e no verão, a duração do dia claro, é superior a 12 horas, e a da noite é-lhe inferior. Por simples análise da equação (3) vemos que no inverno e outono se inverte: a duração da parte diurna do dia é inferior a 12 horas e a da noite é superior a 12 horas. Resumindo:

No verão $D > 12$ e $N < 12$ horas (4)

No inverno $D < 12$ e $N > 12$ horas . (5)

Pela mesma equação (3) podemos verificar que $H_\odot$ é máximo quando δ é máximo (se $\phi>0$) ou quando δ é mínimo (se $\phi<0$). Isso nos permite concluir que a duração máxima da parte diurna do dia ocorre no solstício de verão do hemisfério considerado: o dia claro mais longo do ano é aquele que ocorre no dia do solstício do verão. Igual análise leva a mostrar que o dia claro mais curto do ano é aquele que se dá no solstício do inverno.

Quando o Sol se encontra no Equador ($\delta=0$), isto é, nos equinócios, o valor de $H_\odot$ será 6 horas, de modo que a duração da parte diurna e noturna do dia será a mesma: 12 horas.

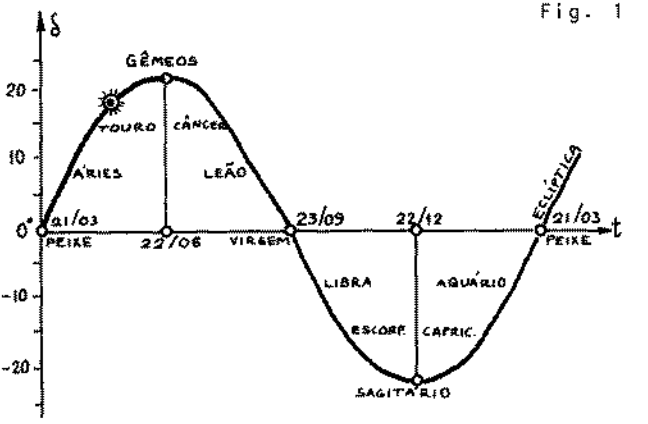
Para um observador no pólo, ou o Sol está acima do horizonte o dia todo (durante 6 meses) ou está abaixo (durante outros 6 meses). Dizemos então que a duração do *dia Polar* é de 6 meses, o mesmo acontecendo com a duração da *noite Polar*. O Sol nascerá apenas 1 vez por ano (equinócio da primavera), e também pôr-se-á uma única vez por ano (equinócio do outono).

Para um observador entre o pólo e a latitude $|90-\varepsilon|$ haverá dias do ano em que não ocorrerá o nascer e o pôr do Sol. Quando isso ocorre, ou seja, o Sol é visível mesmo à meia-noite, o fenômeno é chamado de *Sol da Meia-Noite*.

56. SISTEMA ECLÍPTICO DE COORDENADAS

Esquematizemos, numa projeção cilíndrica do céu, as constelações próximas ao Equador. No eixo vertical coloquemos o valor da declinação (quando positiva, indica estrelas do hemisfério norte, e quando negativa, as do hemisfério sul). O eixo horizontal representa o Equador. Conforme vimos no item 54, o Sol se movimenta entre as constelações durante seu movimento anual aparente. Representemos as posições que o Sol toma entre as estrelas. No eixo horizontal coloquemos a data em que a referida posição é alcançada (Fig.1). Ao caminho percorrido pelo Sol durante um ano chamamos *Eclíptica*.

Fig. 1



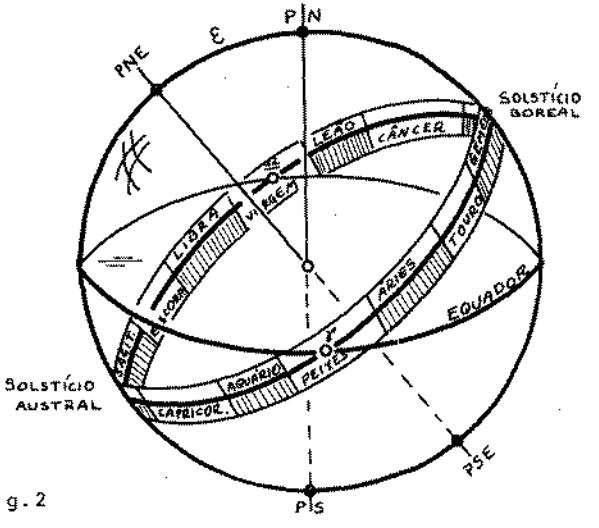


Fig.2

Se representarmos esse movimento anual aparente numa esfera celeste, veremos que o movimento do Sol se dá numa grande circunferência que está inclinada de um ângulo $\varepsilon = 23^{\circ},5$ com relação ao Equador: essa circunferência é a Eclíptica.

Na Figura 2 está representada a Eclíptica e as constelações por onde o Sol aparentemente passa: essas constelações chamam-se *constelações zodiacais*. A reta perpendicular ao *plano da Eclíptica* chama-se *eixo eclíptico*, sendo o *Pólo Norte Eclíptico* sua intersecção com a esfera celeste no ponto mais próximo do Pólo Norte.

Acredito ser pertinente nesse ponto chamar a atenção para um ponto freqüentemente mal entendido: é a diferença entre constelações zodiacais e *signos*[1] *zodiacais*[2]. As constelações zodiacais, em número de 12, são definidas de forma rigorosa, com os limites de cada constelação numericamente definidos; a extensão angular de cada constelação pode diferir da de outra; e o Sol pode permanecer tempos diferentes em cada uma. Pela Figura 2 pode-se ver que o ponto γ não está em nenhum limite extremo, nem no centro da constelação de Peixes. Os signos zodiacais, por seu lado, são 12 arcos de circunferência, com 30° cada, exatamente, cobrindo toda a Eclíptica, começando no ponto γ, sendo Áries o primeiro signo zodiacal (daí o nome do ponto γ ser também Ponto de Áries), seguindo depois por Touro, Gêmeos, etc. As datas da entrada do Sol nas diferentes constelações zodiacais não coincidem com as datas das entradas nos signos.

Durante sua trajetória anual aparente, o Sol, na Eclíptica, cruza o Equador 2 vezes. Uma, próxima a 21/03, na constelação de Peixes; a esse ponto que representa o cruzamento da Eclíptica com o Equador, estando o Sol se deslocando para o hemisfério Norte, chama-se *Primeiro Ponto de Áries*, *Ponto* γ, *Ponto Vernal* ou *Ponto Equinocial da Primavera Boreal*. Esse

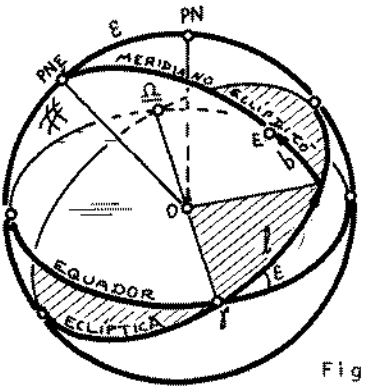


Fig. 3

1. Signo = sinal [latim]
2. Zodíaco = zodiakos [grego] = círculo (de animais) da esfera celeste por onde passam os planetas.

ponto é o ponto de origem para a contagem das ascensões retas (ver item 29). O segundo ponto, diametralmente oposto ao ponto γ, que representa a passagem do Sol para o hemisfério Sul, é o ponto *Libra*[3] (Ω), e ocorre por volta de 23/09, na constelação de Virgem: representa o início do outono boreal. A linha $\gamma\Omega$ recebe o nome de *linha dos Nodos*[4].

Utilizando-se como plano fundamental o plano da eclíptica, e como origem o ponto γ, define-se um novo sistema de referências: o *sistema eclíptico de referências*. As coordenadas de um astro nesse sistema são dadas por (ver Figura 3):

— *Longitude eclíptica* (ℓ): é o ângulo, medido sobre a Eclíptica, a partir do ponto γ, no sentido do movimento anual aparente do Sol, até ao meridiano eclíptico que passa pelo astro considerado: Assim:

$$0^\circ \leq \overset{\lambda}{\ell} \leq 360^\circ \ . \qquad (1)$$

A longitude eclíptica do Sol cresce durante o ano, dando uma volta de $\ell = 360^\circ$ a cada ano solar (ou trópico).

— *Latitude eclíptica* (b): é o ângulo, medido sobre o meridiano eclíptico, desde a Eclíptica até ao astro. É considerado positivo se pertencer ao hemisfério eclíptico que possui o Pólo Norte, e negativo no sentido oposto. Logo:

$$-90^\circ \leq \overset{\beta}{b} \leq +90^\circ \ . \qquad (2)$$

Chamamos de *solstício boreal* à posição (e data) em que $\delta_\odot = +\varepsilon$ e *solstício austral* quando $\delta_\odot = -\varepsilon$.

---

1. Libra = balança (indicando equilíbrio entre as durações das partes clara e escura do dia).
2. Nodo = nodua [latim] = nó

57. ESTAÇÕES DO ANO: RAZÃO

É comum ouvir-se dizer que "no verão o Sol está mais próximo da Terra e no inverno mais longe, e por isso o primeiro é mais quente e o segundo mais frio". Um argumento muito simples permite refutar tal teoria: quando é verão num hemisfério, é inverno no outro, e no entanto para os 2 casos o Sol se encontra à mesma distância da Terra. Assim, a razão do inverno e verão, com suas respectivas características de temperatura média, devem ser atribuídas a outro fato: à diferença das quantidades de calor recebidas pelos 2 hemisférios devido à posição do Sol com relação a eles.

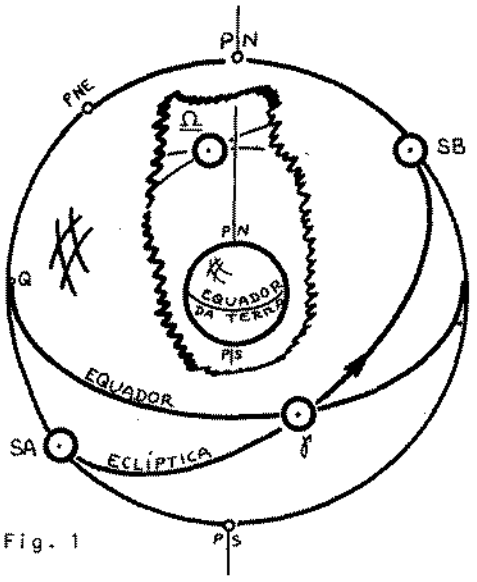


Fig. 1

Na Figura 1 representamos as posições do Sol nos equinócios (γ e Ω) e nos solstícios (boreal = SB, austral = SA), com a Terra estando esquematizada no centro da esfera celeste (não existe proporcionalidade de tamanho entre os elementos da figura).

A Figura 2(a) representa a visão do sistema Terra & Sol como se

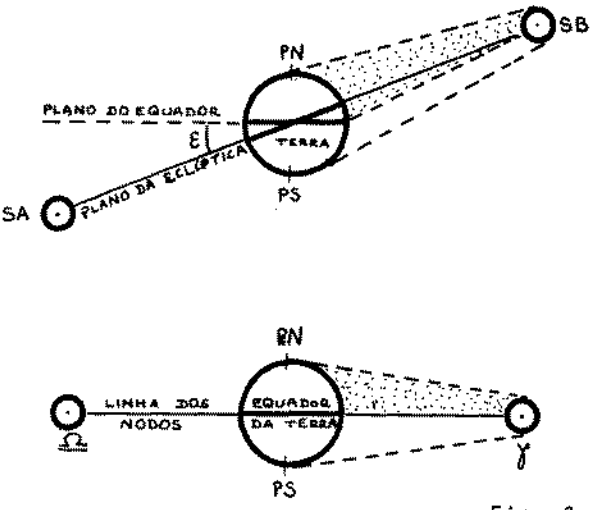


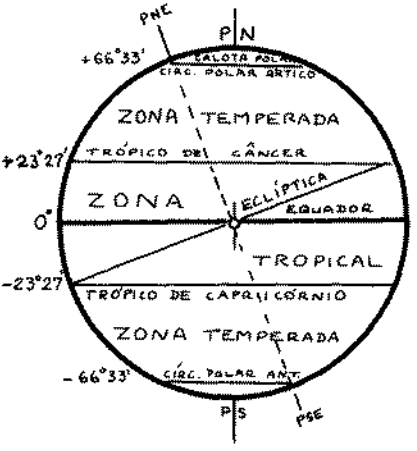
Fig. 2

ria vista por um observador em γ (obviamente quando ele visse o Sol em SB não o veria em SA. e vice-versa). É fácil ver que quando o Sol está no solstício Boreal a quantidade de calor que atinge o hemisfério Norte da Terra é maior que a que atinge o hemisfério Sul, no mesmo intervalo de tempo. Pictoricamente podemos "ver" que a quantidade de calor é maior no hemisfério Norte ao notar que a parte hachurada do tronco de cone que envolve o Sol e a Terra é maior que a parte não hachurada. Ora, recebendo mais calor, o hemisfério Norte deve aquecer-se mais, dando origem à estação mais quente. No hemisfério Sul teremos a estação mais fria nesse instante. "Mutatis mutandis" quando o Sol estiver no solstício austral (SA), o hemisfério Sul será mais quente e o Norte mais frio.

A Figura 2(b) representa o sistema Terra & Sol como visto por um observador no ponto Q do plano do Equador. Notar que a quantidade de calor na parte hachurada do tronco de cone é igual à parte não hachurada, de modo que os 2 hemisférios recebem a mesma quantidade de calor, não dando razão ao aparecimento de estação mais quente num hemisfério em detrimento do outro: teríamos as estações amenas (outono e primavera).

58 REGIÕES CLIMÁTICAS DA TERRA

De acordo com a quantidade de calor total recebida pela Terra ao longo do ano, dividimos a Terra em 5 regiões, definidas a seguir.



— *Calotas polares* são as 2 calotas que contêm os pólos norte e sul geográficos, limitadas pelos *círculos polares* cuja posição é definida pela intersecção do eixo de rotação eclíptico com a face da Terra. O *Círculo Polar Ártico*[1] tem uma latitude geográfica de $(90^{\circ}-\varepsilon)$, e limita a *Calota Polar Ártica*. A *Calota Polar Antártica*[2] é limitada pelo *Círculo Polar Antártico* cuja latitude geográfica é $-(90^{\circ}-\varepsilon)$. São regiões muito frias já que recebem pouco calor durante o ano.

— *Zonas temperadas* são as 2 zonas esféricas compreendidas, cada uma, entre seu círculo polar e seu *trópico*[3], onde trópico é o círculo paralelo de latitude em módulo igual a ε. Chama-se *trópico de Câncer* ao trópico de latitude $+\varepsilon$ (hemisfério Norte da Terra), e de *trópico de Capricórnio* àquele de latitude geográfica $-\varepsilon$ (hemisfério Sul). Existem, pois, as zonas temperadas do Norte e do Sul.

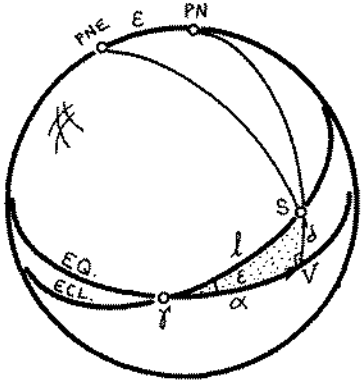
---

1. Ártico = artikos [grego] (relativo ao norte)
2. Antártico = anti [grego] (oposto) + Ártico = oposto ao Ártico
3. Trópico = tropikos [grego] = que completa uma volta (no caso, do Sol, retornando novamente ao mesmo solstício).

— *Zona Tropical* é a zona esférica compreendida entre os 2 trópicos. É uma região bastante quente já que recebe luz e calor solares em quantidade razoável o ano todo.

59. RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS EQUATORIAIS E ECLÍPTICAS DO SOL

Já que a eclíptica é definida como sendo a trajetória anual aparente do Sol na esfera celeste, e como latitude eclíptica é o ângulo entre a eclíptica e o astro, a latitude eclíptica do Sol será nula ao longo de toda a trajetória:



$$b_{\odot} = 0 \quad ; \qquad (1)$$

(sempre que o símbolo $\odot$, representativo do Sol, for facilmente subentendido, será suprimido para simplificação na apresentação das fórmulas).

Procuremos resolver o triângulo $S\gamma V$.

Pela lei dos senos, equação 34.(4), temos:

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varepsilon . \operatorname{sen}\ell \quad . \qquad (2)$$

Pela lei dos co-senos 33.(4), aplicada ao lado ℓ, temos:

$$\cos\ell = \cos\delta . \cos\alpha \quad . \qquad (3)$$

Apliquemos a equação 36.(8) das fórmulas do co-seno & co-seno, na qual fazemos $A = \varepsilon$, $c = \alpha$ e $B = 90^{\circ}$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\delta . \cot\varepsilon \quad . \qquad (4)$$

Fazendo $a = \delta$ e $B = 90^{\circ}$ apliquemos a equação 35.(1), obteremos:

$$\tan\alpha = \tan\ell . \cos\varepsilon \quad . \qquad (5)$$

Notar que dada uma das 3 grandezas α, δ ou ℓ, as outras estão perfeitamente definidas, já que ε é praticamente constante em primeira aproximação.

Se admitirmos, como estimativa grosseira, que o movimento aparente anual do Sol é uniforme, de modo a podermos escrever:

$$\ell = \ell_0 + \Omega(t - t_0) \quad , \tag{6}$$

onde Ω seria a *velocidade angular média do Sol* durante seu movimento anual aparente, então bastaria conhecermos a longitude ℓ_0 num dado instante t_0 para que pudéssemos determinar suas coordenadas em qualquer outro instante t.

60. RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS EQUATORIAIS E ECLÍPTICAS DE UM ASTRO

Seja E um astro com coordenadas equatoriais α e δ e coordenadas eclípticas ℓ e b. Procuremos correlacionar essas grandezas. Lembremos que a linha dos nodos $\gamma 0 \Omega$ é a intersecção dos planos do Equador e e da Eclíptica, (item **56**) e portanto é perpendicular aos eixos de rotação equatorial e eclíptica: logo a linha dos nodos é perpendicular ao meridiano que passa por PE e PNE (coluro solsticial). Assim, o diedro formado por esse meridiano e aquele que passa pelo ponto γ é reto. O mesmo ocorre com o meridiano eclíptico que passa por γ.

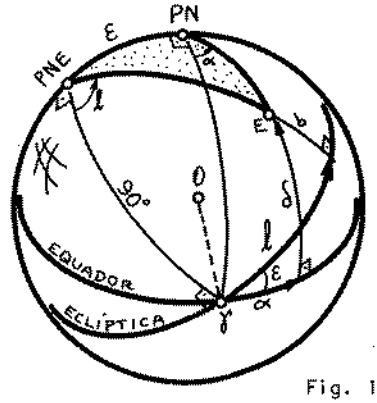


Fig. 1

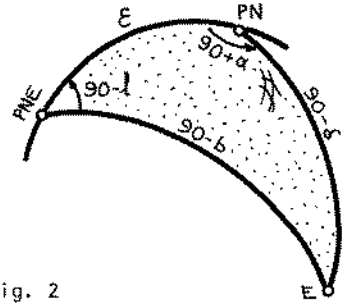


Fig. 2

Resolvamos o triângulo esférico definido pelos vértices PNE, PN e E (Fig. 2). Se convencionarmos ser:

A = PN
B = PNE
C = E ,

então aplicando as equações **33.(4)**, **34.(4)** e **35.(1)** teremos a transformação de coordenadas equatoriais em eclípticas:

$$\operatorname{sen} b = \cos\varepsilon.\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varepsilon.\cos\delta.\operatorname{sen}\alpha \qquad (1)$$

$$\cos b.\cos\ell = \cos\delta.\cos\alpha \qquad (2)$$

$$\cos b.\operatorname{sen}\ell = \operatorname{sen}\varepsilon.\operatorname{sen}\delta + \cos\varepsilon.\cos\delta.\operatorname{sen}\alpha \quad . \qquad (3)$$

Apliquemos as mesmas equações admitindo agora que:

$$A = PNE$$
$$B = E$$
$$C = PN \quad ;$$

obteremos a transformação de coordenadas eclípticas em equatoriais:

$$\operatorname{sen}\delta = \cos\varepsilon.\operatorname{sen}b + \operatorname{sen}\varepsilon.\cos b.\operatorname{sen}\ell \qquad (4)$$

$$\cos\delta.\cos\alpha = \cos b.\cos\ell \qquad (5)$$

$$\cos\delta.\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\varepsilon.\operatorname{sen}b + \cos\varepsilon.\cos b.\operatorname{sen}\ell \qquad (6)$$

61 COORDENADAS GALÁCTICAS

O *sistema galáctico*[1] *de referências* é usado para o estudo da estrutura e conteúdo da *Via Láctea*[2] (aglomerado de cerca de 100 bilhões de estrelas visto à noite como uma faixa leitosa cobrindo parte da esfera celeste). O plano fundamental adotado é aquele que passa pelo *Centro da Galáxia*[3] (CG) e contém o *plano central da Galáxia* (PCG). Verifica-se que esse plano está inclinado de cerca de $62^{\circ}4$ com relação ao plano do Equador (Fig. 1):

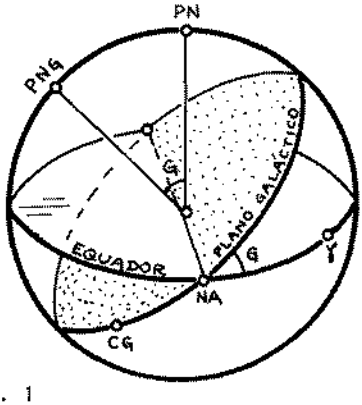


Fig. 1

$$\boxed{G \cong 62^{\circ}4} \quad ; \tag{1}$$

o nodo ascendente (NA) do PCG tem ascensão reta de

$$\boxed{\alpha_{NA} \cong 18^{h}49^{m}} \quad . \tag{2}$$

O *pólo norte galáctico* (PNG) tem coordenadas:

$$\alpha_{PNG} = 12^{h}49^{m} \tag{3}$$

e

$$\delta_{PNG} = 27^{\circ}24' \quad . \tag{4}$$

As coordenadas galácticas são:

— *Longitude Galáctica* (l): medida sobre o plano da Galáxia, no sentido direto, desde o centro da Galáxia até o meridiano galáctico passando pelo astro:

---

1. Galáctico = galaktos [grego] = relativo ao leite
2. Via Láctea = Caminho Leitoso [latim]
3. Galáxia = galaxias [grego] = círculo de leite

$$0 \leq \Lambda \leq 360^{\circ} \quad . \tag{5}$$

O centro da Galáxia está no hemisfério Sul Celeste, e suas coordenadas são (quando visto da Terra):

$$\alpha_{CG} = 17^{h}43^{m} \tag{6}$$

$$\delta_{CG} = -28^{\circ}55' \quad . \tag{7}$$

— *Latitude Galáctica* (B): medida, sobre o meridiano galáctico passante pelo astro, desde o plano da Galáxia até o astro. É positivo no hemisfério galáctico Norte e negativo no hemisfério galáctico Sul:

$$-90^{\circ} \leq B \leq +90^{\circ} \quad . \tag{8}$$

O nodo ascendente (NA) do plano Galáctico tem coordenadas galácticas:

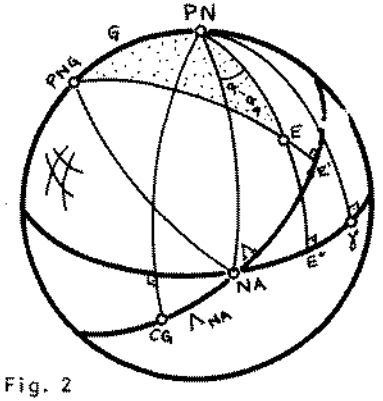


Fig. 2

$$\boxed{\Lambda_{NA} = 32^{\circ}3} \tag{9}$$

e

$$\boxed{B_{NA} = 0 \ .} \tag{10}$$

Para relacionar o sistema equatorial com o galáctico, basta aplicar as equações 52.(1), (2), (3), (4), (5) e (6) onde substitui-se ε por G, α por $(\alpha - \alpha_{NA})$, e ℓ deve ser substituído por $(\Lambda - \Lambda_{NA})$; teremos pois:

$$\boxed{\operatorname{sen}B = \cos G.\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}G.\cos\delta.\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_{NA})} \tag{11}$$

$$\boxed{\cos B.\cos(\Lambda - \Lambda_{NA}) = \cos\delta.\cos(\alpha - \alpha_{NA})} \tag{12}$$

$$\boxed{\cos B.\operatorname{sen}(\Lambda - \Lambda_{NA}) = \operatorname{sen}G.\operatorname{sen}\delta + \cos G.\cos\delta.\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_{NA})} \tag{13}$$

e

$$\operatorname{sen}\delta = \cos G.\operatorname{sen}B + \operatorname{sen}G.\cos B.\operatorname{sen}(\Lambda - \Lambda_{NA}) \quad (14)$$

$$\cos\delta.\cos(\alpha - \alpha_{NA}) = \cos B.\cos(\Lambda - \Lambda_{NA}) \quad (15)$$

$$\cos\delta\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_{NA}) = -\operatorname{sen}G.\operatorname{sen}B + \cos G.\cos B.\operatorname{sen}(\Lambda - \Lambda_{NA}) \; . \quad (16)$$

Poderíamos chegar às mesmas conclusões se tivéssemos aplicado as fórmulas 33.(4), 34.(4) e 35.(1) ao triângulo esférico (PNG)(PN)E, conforme Figura 3.

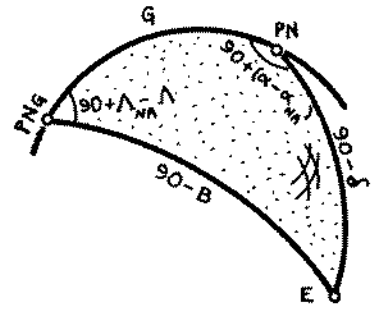


Fig.3

Capítulo 7

Mudança de Sistemas de Coordenadas por meio de Matrizes de Rotação

62. RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS ESFÉRICAS E CARTESIANAS

Até agora, vimos uma série de fórmulas, oriundas da trigonometria esférica, para passar de um sistema de referência para outro. Para facilitar, ou pelo menos, mecanizar essas transformações, foi idealizada uma técnica por meio de *cálculo matricial*. Vamos, neste capítulo, apresentar o método, sem demonstrá-lo totalmente.

Dizemos que um sistema de coordenadas é *direto*, ou da *mão direita*, ou *anti-horário*, se seus eixos estiverem dispostos conforme Figura 1.(b): colocando o polegar no sentido do eixo z, e a mão direita aberta, no sentido de x, se fecharmos a mão, ela passará pelo lado positivo do eixo y.



Fig. 1

Dizemos que um sistema é *indireto*, ou *da mão esquerda*, ou *horário*, quando, colocando o polegar no sentido do eixo z, e a mão aberta no sentido de x, ao fechar a mão, ela passará pelo lado positivo do eixo y (Fig. 1.(a)).

Matematicamente,

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \qquad (1)$$

no sistema anti-horário, e

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{z} \qquad (2)$$

no sistema horário, sendo $\wedge$ o símbolo indicativo de produto vetorial.

Admitamos agora, um sistema direto; neste, um ponto P terá coordenadas x,y,z. Num sistema esférico, esse mesmo ponto terá coordenadas μ (medido no plano xy, no sentido anti-horário, a partir de x) e ν (medido a partir do plano xy, em direção ao la

do positivo de z).

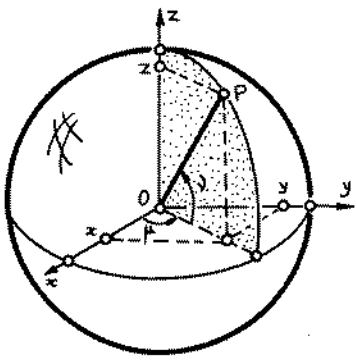


Fig.2

Se adotarmos o raio OP com valor unitário, as coordenadas do ponto P serão:

$$x = \cos\nu.\cos\mu \qquad (3)$$

$$y = \cos\nu.\operatorname{sen}\mu \qquad (4)$$

$$z = \operatorname{sen}\nu \ . \qquad (5)$$

Inversamente,

$$\mu = \operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x} \qquad (6)$$

$$\nu = \operatorname{arc\,tan}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ ; \qquad (7)$$

o quadrante de μ será dado pelo sinal de x e y.

Sabemos que a condição para que as duas matrizes de mesmo tipo sejam iguais, é que seus elementos correspondentes sejam iguais; então, o sistema de equações (3), (4) e (5) pode ser escrito conforme esquema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\nu.\cos\mu \\ \cos\nu.\operatorname{sen}\mu \\ \operatorname{sen}\nu \end{pmatrix} \ . \qquad (8)$$

63. CONVERSÃO ENTRE SISTEMAS DIRETOS E INDIRETOS

Vamos admitir dois sistemas de referências de modo que x coincida com x', e y com y'. Seja (x,y,z) um sistema direto e (x',y',z') um indireto. Qualquer ponto do espaço terá:

$$x = x' ,$$

e

$$y = y' ,$$

mas

$$z = -z' .$$

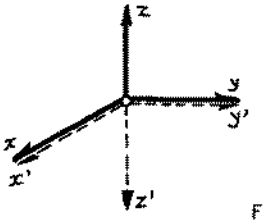


Fig.1

Então a passagem do sistema (xyz) para o (x'y'z') pode ser obtido pela igualdade matricial seguinte:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

Igualmente se

$$x = x'$$
$$y = -y'$$
$$z = z'$$

então:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

Finalmente, se

$$x = -x'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

então,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

64. MUDANÇA DE COORDENADAS POR MATRIZES DE ROTAÇÃO

Admitamos agora, o sistema (xyz) e o (x'y'z') conforme figura, onde um dos eixos, x no nosso caso coincide com x'. O eixo z' está deslocado de θ, no sentido anti-horário (visto de x) em relação ao eixo z. O mesmo acontece com y' em relação a y. Tudo se passa como se o sistema (x'y'z') fosse obtido a partir de uma rotação θ, no sentido anti-horário, do sistema (xyz), em torno do eixo x.

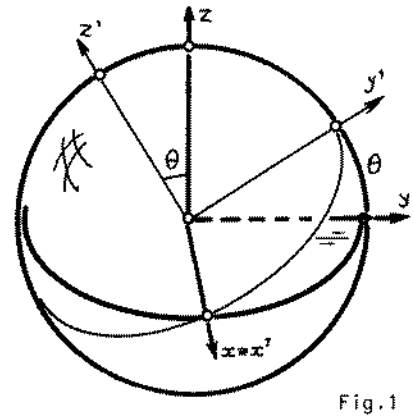


Fig.1

Um ponto qualquer do espaço teria, no sistema (xyz), coordenadas dadas pela equação matricial (8). Esse mesmo ponto, no sistema (x'y'z') teria

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\nu'.\cos\mu' \\ \cos\nu'.\operatorname{sen}\mu' \\ \operatorname{sen}\nu' \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Verifica-se que se relacionarmos (z,y,z) com (x',y',z') obteremos equações que também poderiam ser obtidas pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

Formalmente podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_x(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

onde $R_x(\theta)$ é a matriz de rotação de ângulo θ em torno do eixo x. Temos então

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Se quisessemos uma rotação de ângulo θ no sentido anti-horário em torno do eixo y, terfamos que utilizar a matriz de rotação:

$$R_y(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 & -\operatorname{sen}\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\Phi & 0 & \cos\Phi \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Se a mesma rotação fosse feita em torno do eixo z, de um ângulo ψ, então utilizarfamos:

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Em todas essas 3 últimas equações θ, Φ e ψ são considerados *positivos* quando os sistemas são girados no sentido anti-horário em sendo vistos da extremidade positiva do eixo em torno do

qual a rotação está sendo feita. Rotações no sentido horário serão com ângulos $-\theta$, $-\Phi$ e $-\psi$.

Se a rotação fosse feita num sistema indireto, de mão esquerda, então rotações de ângulos θ Φ e ψ seriam *positivas* no sentido horário; se não, usaremos $-\theta$, $-\Phi$ e $-\psi$. As rotações devem ser medidas no próprio sistema que gira. Quando várias rotações precisam ser feitas, devendo girar o sistema dado primeiro em torno de um eixo (1) depois, (2) e depois (3), nessa ordem; então:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad . \tag{7}$$

Observação: a ordem deve ser mantida, uma vez que o produto de matrizes não é comutativo. Na equação (7) isso significa que devemos indicar o produto matricial na ordem que aparece na equação. Como o produto de matrizes possui a propriedade associativa, podemos efetuá-lo na seqüência que quisermos. Caso devamos, ainda, passar de um sistema direto a um indireto, ou vice-versa, utilizemos uma das equações 63.(1), (2) ou (3).

Se quisermos obter os valores x, y e z a partir de x', y' e z', usamos a matriz R^{-1}, inversa de R. Assim, se

$$A' = RA \quad , \tag{8}$$

então

$$A = R^{-1}A' \quad . \tag{9}$$

Lembrar que o inverso de um produto de matrizes é o produto (na ordem inversa) dos inversos de cada matriz:

$$(R_i . R_j)^{-1} = R_j^{-1} . R_i^{-1} \quad ; \qquad (10)$$

vale também que:

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta) \quad . \qquad (11)$$

Como resumo da adoção do sinal do ângulo de rotação, podemos considerar a tabela seguinte:

TIPO DE SISTEMA	SENTIDO DE ROTAÇÃO	
	Horário (mão esquerda)	Anti-Horário (mão direita)
Direto	-	+
Indireto	+	-

65. ESCOLHA DA DIREÇÃO DOS EIXOS CARTESIANOS NOS DIVERSOS SISTEMAS DE REFERÊNCIAS.

A colocação dos eixos cartesianos correspondentes ao sistema esférico utilizado segue algumas regras:

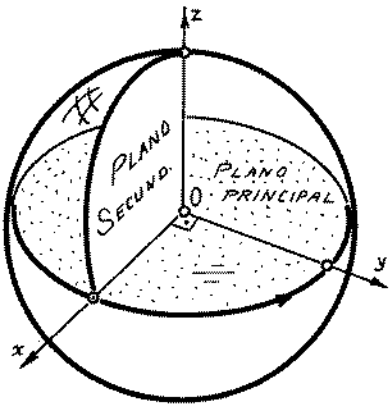


Fig.1

- o *plano fundamental* (ou principal) de referências é aquele adotado como plano fundamental no sistema esférico;
- o eixo z é perpendicular ao plano fundamental de referências, passando pelo pólo positivo (pólo primário) do sistema esférico;
- o eixo x está contido no plano principal, sendo a intersecção desse com o plano secundário de referências (aquele a partir do qual se medem os ângulos do plano fundamental);
- o eixo y pertence ao plano fundamental e está a 90° do eixo x, 90° esses computados, a partir de x, no sentido para o qual cresce a contagem dos ângulos no plano fundamental (se crescer no sentido horário, y está a 90° de x também no sentido horário; se fôr anti-horário, y estará a 90° no sentido anti-horário, que é o caso representado na Figura 1).

Para os sistemas usados em Astronomia, o quadro a seguir resume a colocação dos eixos cartesianos:

SISTEMA	ORIENTAÇÃO DO SISTEMA	x	y	z	CORRESPONDENTES ESFÉRICOS		FIGURA
		PÓLO SECUNDÁRIO		PÓLO PRIMÁRIO	μ	ν	
Horizontal	Indireto (mão esquerda)	Direção Norte	$A = 90^{\circ}$ Direção Leste	Zênite	A	h	2(a)
Horário	Indireto	Intersecção do meridiano superior com o Equador	$H = 90^{\circ}$ Direção Oeste	Pólo Norte	H	δ	2(b)
Equatorial	Direto (mão direita)	Direção do Ponto γ	$\alpha = 90^{\circ}$	Pólo Norte	α	δ	2(c)
Eclíptico	Direto	Direção do Ponto γ	$\ell = 90^{\circ}$	Pólo Norte da Eclíptica	ℓ	b	2(d)

As figuras a seguir mostram a colocação dos eixos nos quatro sistemas mencionados; os planos hachurados são os planos fundamentais de referência.

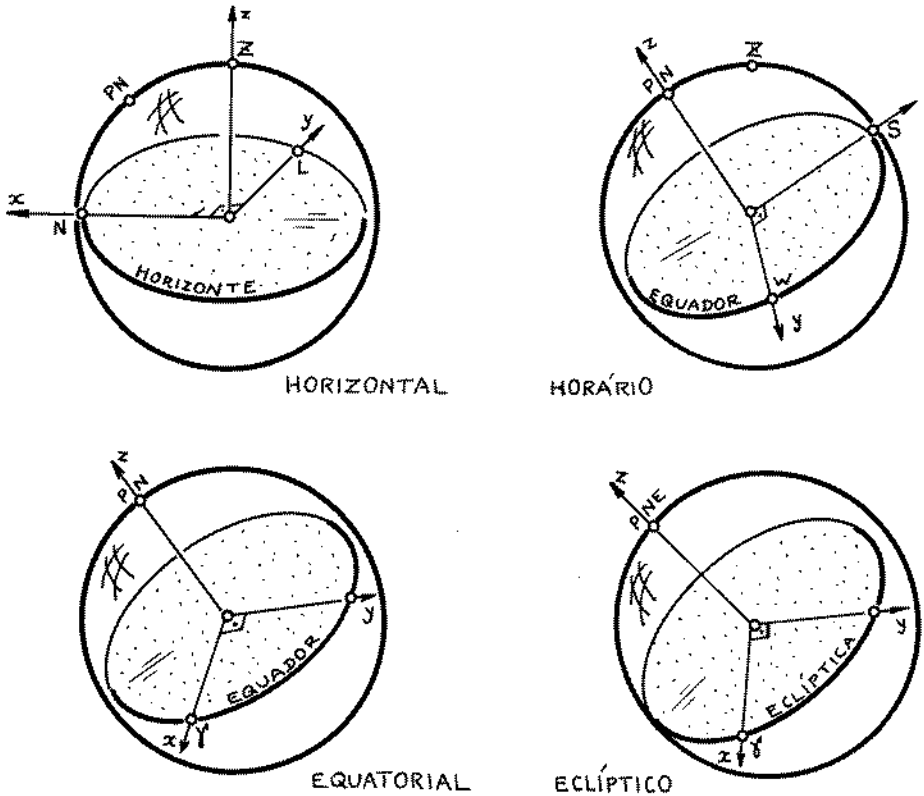


Fig. 2

66. MUDANÇA ENTRE OS SISTEMAS DE COORDENADAS USADAS EM ASTRONOMIA, POR MEIO DE MATRIZES DE ROTAÇÃO.

a) *Conversão do sistema equatorial ao eclíptico.* Sejam (x,y,z) as coordenadas de um ponto no sistema equatorial. Para obter as coordenadas eclípticas (x',y',z') desse ponto, devemos girar o eixo z no sentido direto, em torno do eixo x. Assim x' coincidirá com x, e y girará de ε também até assumir a posição y' (Figura 1). Desta forma, basta uma rotação de um ângulo $\theta = +\varepsilon$ em torno do eixo x (equações 64.(3)):

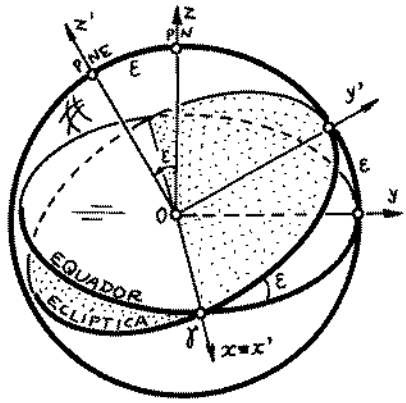


Fig.1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\ell,b} = R_x(+\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} \quad . \qquad (1)$$

b) *Conversão do sistema eclíptico ao equatorial.* Usando a nomenclatura do sub-item (a), vemos que para (x',y',z') coincidir com (x,y,z) basta girarmos (x',y',z'), no sentido horário, em torno de x'; de um ângulo $\theta = -\varepsilon$; pela equação 64.(3) temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = R_{x'}(-\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\ell,b} \quad . \qquad (2)$$

c) *Conversão do sistema horário em equatorial.* Sejam (x,y,z) as coordenadas no sistema horário. Desejamos obter (x',y',z') no sistema equatorial. Veremos que haverá a necessidade de 2 transformações. Para o eixo x atingir γ (x'), devemos girar x de um ângulo T (tempo sideral) no sentido horário, em torno de z; obteremos os eixos x_1, y_1, z_1 conforme Figura 2. Pela equação 64.(3) teremos:

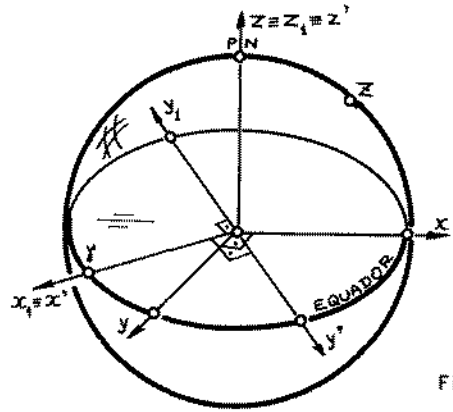


Fig.2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R_z(T) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad . \qquad (3)$$

Com isso, $x_1 \equiv x'$ e $z_1 \equiv z'$, mas $y_1 = -y'$. Assim, devemos mudar o sistema indireto (x_1,y_1,z_1) no sistema direto (x',y',z') através da equação 63.(2); teremos, finalmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R_z(T) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{H,\delta} \quad . \qquad (4)$$

d) *Conversão do sistema equatorial em horário.* Usando as notações do sub-item (c), podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)_{H,\delta} = R_{z_1}(-T)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right)_{\alpha,\delta} , \qquad (5)$$

ou, também:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)_{H,\delta} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_z(T)\left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right)_{\alpha,\delta} . \qquad (6)$$

e) *Conversão do sistema horizontal ao horário.* Sejam (x,y,z) as coordenadas no sistema horizontal. Urge obter as coordenadas (x',y',z') no sistema horário. Deveremos passar por um estágio intermediário (x_1,y_1,z_1) obtido pela rotação de x, no sentido horário, de um ângulo de 180°, em torno de z. Pela equação 64.(3) temos (Figura 3):

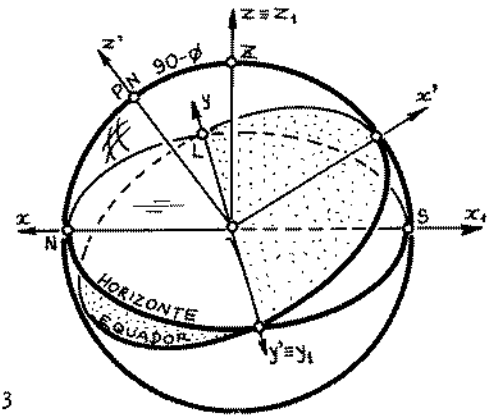


Fig.3

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right) = R_z(+180^\circ)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)_{A,h} . \qquad (7)$$

Com isso $y_1 \equiv y'$, mas nem $x_1 \equiv x'$ nem $z_1 \equiv z'$. Para obter essas coincidências é necessário girar x_1 em torno de y_1, no

sentido anti-horário, de um ângulo $(90-\phi)$. Assim, aplicando 64.(7), temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{H,\delta} = R_{y_1}\left(-(90-\phi)\right) R_z(180) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{A,h} \quad . \qquad (8)$$

f) *Conversão do sistema horário ao horizontal.* Com a nomenclatura do sub-item (e) podemos deduzir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{A,h} = R_{z_1}(-180).R_{y'}(90-\phi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{H,\delta} \quad . \qquad (9)$$

Capítulo 8

Sistemas de Medidas de Tempo

67. MEDIÇÃO DO TEMPO

Em Astronomia de Posição não se costuma estar interessado na definição *Tempo*[1] do ponto de vista filosófico, mas sim em estabelecer critérios para medir sua passagem. Para tal, consideremos os seguintes elementos:

a) *Instante* é um conceito primitivo que representa "o quando" um fenômeno ocorreu;

b) *Época* é o instante em que ocorreu determinado fenômeno que será utilizado como origem para a contagem de tempo;

c) *Data* é o instante da ocorrência de um fenômeno particular que se quer registrar;

d) *Intervalo de tempo* ou *Interregno* é o tempo decorrido entre a época e a data;

e) *Escala de tempo* é o particular padrão que se adota para medir intervalos de tempo; deve-se basear em fenômenos repetitivos (e contáveis) ou contínuos (e mensuráveis);

f) *Relógio*[2] é a materialização do sistema de medição do tempo.

Os astros, observados da Terra, apresentam movimentos periódicos que podem ser utilizados como relógios. Durante muito tempo foram os únicos relógios disponíveis; mais tarde passaram a ser os melhores, mas não únicos; atualmente existem sistemas mais precisos.

Os sistemas de medidas de tempo fornecidos pelos astros são:

a) *Tempo Solar:* baseado na alternância do dia e da noite; poder-se-ia dizer que é baseado no movimento diário aparente do Sol;

---

1. Tempo = tempus [latim]
2. Relógio = horologion [grego]

b) *Tempo Sideral*: baseado no período de rotação da Terra com relação às estrelas; poderia ser descrito como aquele baseado no movimento diário das estrelas;

c) *Tempo das Efemérides*[3]: baseado no movimento orbital dos corpos do sistema Solar; é o tempo teoricamente uniforme utilizado nas equações da Mecânica Clássica (efemérides, em astronomia, tem o significado de "tabelas astronômicas").

Além desses sistemas *Naturais*, a Astronomia, como muitas outras ciências, utiliza o tempo medido por relógios atômicos baseados nas oscilações eletromagnéticas produzidas pelas transições quânticas de um átomo: é o *Tempo Atômico*[4].

Passemos a estudar cada um dos sistemas em detalhes.

---

1. Efemérides = ephemeris [grego] = passageiro; que dura apenas 1 dia
2. Átomo = atomos [grego] = indivisível

68. TEMPO SOLAR VERDADEIRO

Desde há muito o homem aprendeu a confiar no invariável repetir do nascer e pôr do Sol e das estrelas. Nada mais natural do que utilizar, pois, o mais magnífico desses astros para contar a passagem do tempo.

Chama-se de *Tempo Solar Verdadeiro* à escala de tempo baseada no movimento diário do Sol.

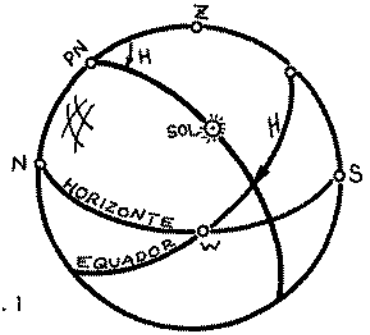


Fig.1

O intervalo de tempo nessa escala é medido pelo ângulo entre o meridiano local e o meridiano que passa pelo Sol. Costuma-se dizer que: a *Hora Solar Verdadeira* ou o Tempo Solar Verdadeiro é o ângulo horário do Sol verdadeiro acrescido de 12 horas:

$$TVL = H_L + 12^h \quad , \qquad (1)$$

onde os símbolos têm o seguinte significado:

TVL = tempo solar verdadeiro local;

H_L = ângulo do Sol verdadeiro a partir do meridiano local.

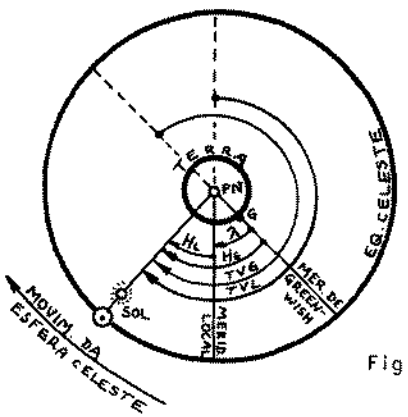


Fig.2

O fato de se somar 12 horas ao ângulo horário local, deve-se à conveniência de se colocar a origem 0 (zero) horas não ao meio-dia (passagem meridiana superior do Sol) mas à meia-noite (passagem meridiana inferior do Sol). Assim, o *Dia Solar Verdadeiro* inicia-se à meia-noite (0 horas) e é o intervalo de tempo entre 2

passagens meridianas consecutivas do Sol. Notar que durante muito tempo o dia iniciava-se ao meio-dia; tal prática ainda é seguida no calendário Juliano (item 10), e nesse caso o dia se chama *Dia Astronômico*.

Caso o meridiano local seja o meridiano que passa por Greenwich, então temos o Tempo Solar Verdadeiro de Greenwich (TVG):

$$\boxed{TVG = H_G + 12} \quad , \tag{2}$$

onde H_G é o ângulo horário do Sol verdadeiro medido a partir do meridiano de Greenwich.

Pela análise da Figura 2 podemos concluir facilmente que:

$$\boxed{\lambda = H_G - H_L} \quad , \tag{3}$$

e

$$\boxed{\lambda = TVG - TVL} \quad , \tag{3}$$

onde λ é a longitude geográfica do local ($\lambda > 0$ à oeste de Greenwich e $\lambda < 0$ à leste) definida no item 26.

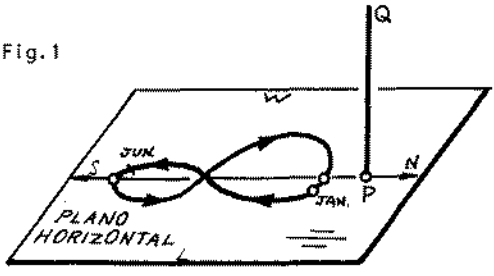
A nomenclatura "Sol verdadeiro" parece estranha, e poderíamos usar apenas "Sol", mas estamos procurando chamar a atenção para o fato de ser o Sol que vemos realmente, já que no item seguinte vamos "definir" um "novo" Sol.

Notar também que, conforme foi definido, medida de tempo é medida angular. Veremos no item 69 que o movimento do Sol verdadeiro é irregular, de modo que a escala de tempo baseada no relógio Sol verdadeiro não seria uniforme. Daí porque não se usam relógios baseados no Sol verdadeiro.

69. TEMPO SOLAR MÉDIO; TEMPO UNIVERSAL.

Admitamos o gnômon PQ. Definimos *meio-dia verdadeiro* ao instante do dia em que é menor a sombra, projetada pelo Sol, desse gnômon. O plano que contém o gnômon vertical e a sombra mínima é o plano do meridiano local. Suponhamos dispor de um relógio que possua um movimento uniforme. Anotemos nesse relógio o intervalo de tempo entre 2 passagens consecutivas do Sol verdadeiro pelo meridiano local, por exemplo em 25 de dezembro: teremos, pois, a duração do dia verdadeiro em 25 de dezembro.

Fig.1



A ponta da sombra do gnômon estará sobre o meridiano local às 12 horas marcadas pelo relógio. Conforme os dias vão passando, verificamos que apesar de nosso relógio indicar 12 horas, a ponta da sombra não estará mais sobre o meridiano local: ela se desloca gradativamente para o oeste. Em outras palavras, o "Sol se atrasa", já que a sombra do gnômon não atingiu ainda o meridiano local. Com o passar dos dias verificamos que a partir dos meados de abril

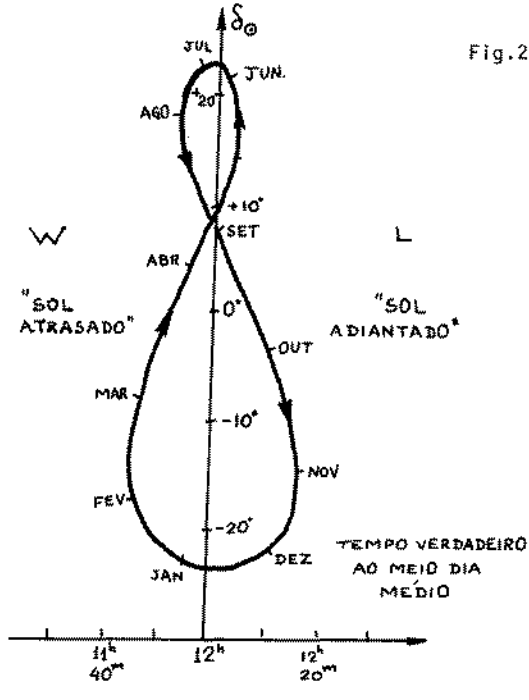


Fig.2

ocorre o inverso: a sombra está à leste do meridiano antes do meio-dia indicado pelo relógio, isto é, o "Sol está adiantado". Essa defasagem pode atingir quase 17 minutos, conforme indicado esquematicamente nas Figuras 2 e 4.

A Figura 2 representa não só a posição da ponta da sombra do gnômon G, como também fornece a diferença entre o tempo verdadeiro em função do "tempo médio", que definiremos a seguir.

Dia Médio é o dia cuja duração é a média das durações dos dias verdadeiros ao longo de um ano. Por definição, um dia médio tem $24^h00^m00^s$:

$$\text{Dia Médio} = 24^h00^m00^s \text{ (tempo solar)}. \qquad (1)$$

Ora, como a duração do dia verdadeiro varia com relação ao dia médio, isso significa que durante seu movimento diário o Sol tem velocidades angulares diferentes ao longo do ano. Definamos *Sol Fictício* como sendo o ponto do Equador celeste cujo movimento diário se dê com velocidade angular constante ao longo do ano e cujo período seja igual ao de um dia médio. Chama-se *Tempo Solar Médio Local* (TL) ao ângulo horário H'_L do Sol fictício acrescido de 12 horas:

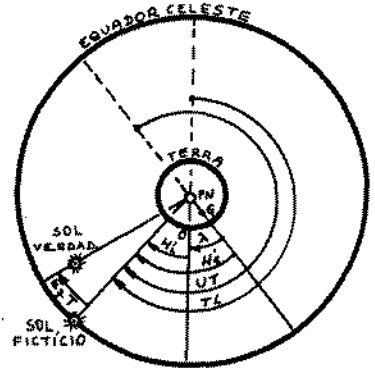


Fig.3

$$TL = H'_L + 12^h \qquad (2)$$

Caso nosso local seja Greenwich, então o Tempo Solar Médio Local passa a receber o nome de *Tempo Universal* (por convenção internacional, ele é representado por UT):

$$UT = H'_G + 12^h \qquad (3)$$

Pela Figura 3 vê-se que:

$$\lambda = H'_G - H'_L \quad . \tag{4}$$

e

$$\lambda = UT - TL \quad . \tag{5}$$

À diferença entre o tempo verdadeiro e o tempo médio damos o nome de *Equação dos Tempos*:

$$Eq.T = TVL - TL \tag{6}$$

ou

$$Eq.T = TVG - UT \quad . \tag{7}$$

A Figura 4 representa os valores que a equação do tempo pode assumir ao longo do ano. Quando $Eq.T > 0$ o Sol está adiantado, ou seja, passa pelo meridiano local antes de meio-dia médio; quando $Eq.T < 0$ o Sol estará atrasado com relação ao Sol fictício.

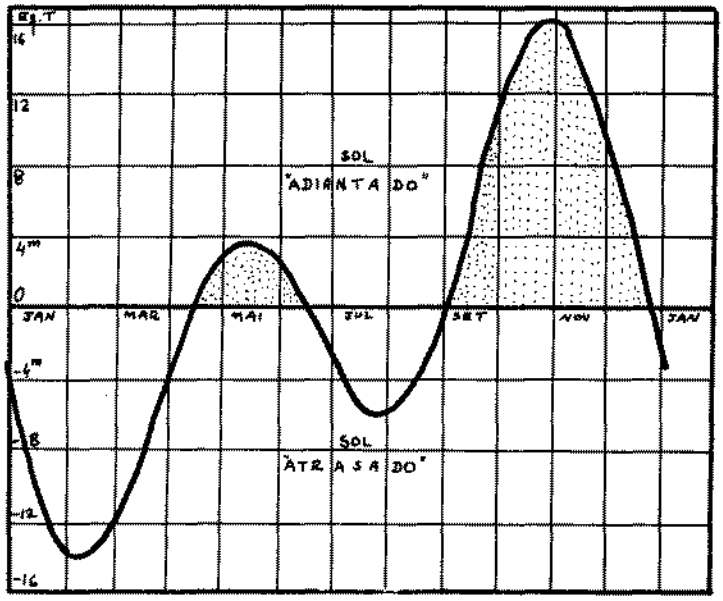


Fig.4

70. RELÓGIOS SOLARES

Relógios solares são dispositivos, geralmente rudimentares, que fornecem por leitura direta o tempo solar verdadeiro local. Dispondo da tabela fornecida pela Figura 4 do item 69, podemos calcular o tempo solar médio pela equação 69.(5).

O mais simples relógio solar, no que tange à sua graduação, é o solar de "*mostrador*" *equatorial*: sua concepção (Fig.1) baseia-se em um estilete (gnômon) colocado na direção do eixo de rotação da Terra. Do ponto de vista prático, o estilete é colocado perpendicularmente a uma placa que por sua vez é fixada com um ângulo $90^{\circ}-|\phi|$ com o horizonte, sendo que a base horizontal da placa fica na linha Leste-Oeste. Devido ao movimento quase uniforme de rotação da Terra, basta graduar a placa de 6 a 18 horas com intervalos equi-espaçados de 15° cada, sendo que a graduação 12 deve estar no plano meridiano local. Se a base for opaca, esse tipo de relógio de Sol só serve enquanto o Sol estiver no hemisfério do observador. Para sanar esse problema, basta utilizar um semi-ci-

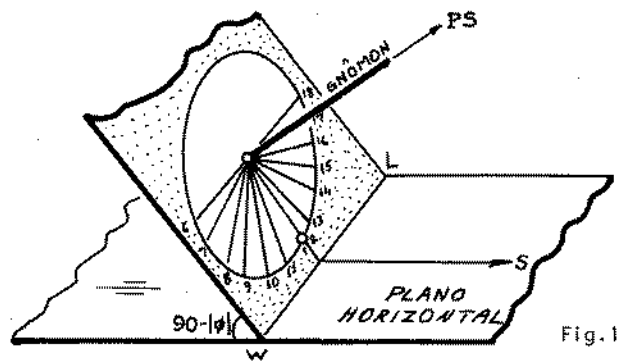
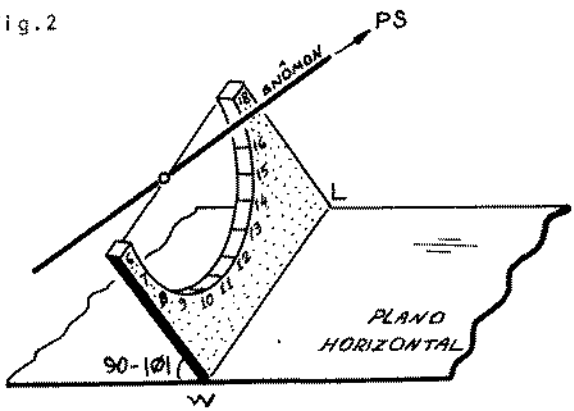


Fig.1

Fig.2



lindro graduado, fixando o estilete no seu centro (Figura 2).

Outro tipo de relógio solar é o de *"mostrador" horizontal* (Fig.3): o estilete faz um ângulo $|\phi|$ com o plano do horizonte, sendo paralelo ao eixo de rotação da Terra. O exemplo da Figura 3 corresponde a esse tipo de relógio solar para o hemisfério Norte; a Figura 4 representa-o para o hemisfério Sul. Calculemos qual deve ser o ângulo a, no plano

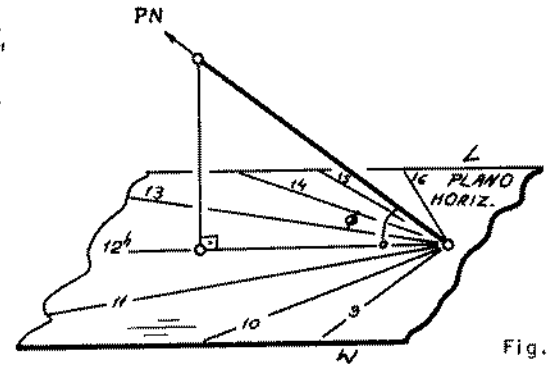


Fig.3

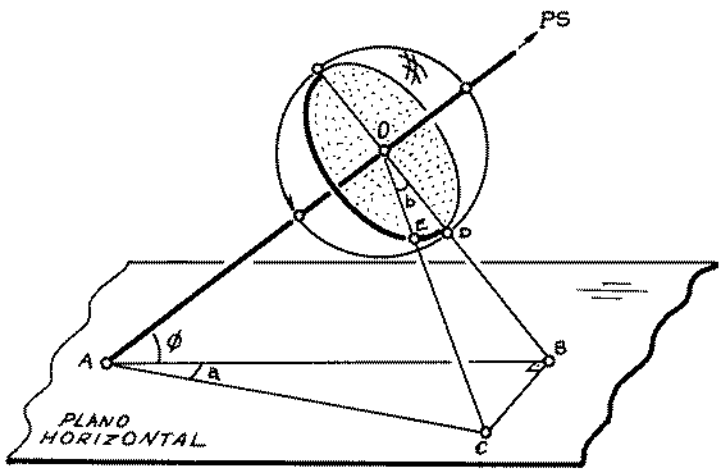


Fig.4

do horizonte, correspondente ao ângulo horário b do Sol. No triângulo plano OAB, retângulo em O, podemos escrever:

$$\overline{OB} = \overline{OA}.\tan\phi \qquad (1)$$

$$\overline{AB} = \overline{OA} / \cos\phi \ . \qquad (2)$$

No triângulo ABC, retângulo em B, podemos escrever:

$$\text{tana} = \overline{BC} / \overline{AB} \ . \qquad (3)$$

No triângulo OBC, retângulo em B, podemos escrever:

$$\text{tanb} = \overline{BC} / \overline{OB} \ . \qquad (4)$$

Substituindo (1) e (2) em (3) e (4), e igualando $\overline{BC}$ explicitado das 2 equações assim obtidas, temos:

$$\text{tana} = \text{tanb}.\text{sen}\phi \ . \qquad (5)$$

Fazendo $b = 15^{o}$ $(b = 1^{h})$, poderemos achar os valores a_h para os diversos valores hb correspondentes às horas inteiras:

$$a_h = \text{arc tan}\left(\text{tan}(hb).\text{sen}\phi\right) \ , \qquad (6)$$

onde $h = 0,1,2,\ldots 6$. Quando a sombra do estilete estiver sobre a graduação h, teremos a correspondente hora solar verdadeira local.

À ciência que estuda a construção de relógios de Sol chama-se *Horologia*[1].

1. Horologia = horo [grego] (hora) + logos [grego] (estudo) = estudo de medida da hora.

71. TEMPO DO FUSO LOCAL

A definição de tempo local conforme item 69 não é muito prática para ser utilizada na vida social e econômica de uma região. Imaginemos 2 cidades A e B próximas entre si (poder-se-ia imaginar que A e B fossem até 2 casas vizinhas). Num dado instante, os ângulos horários do Sol fictício para essas 2 cidades seriam diferentes, e portanto pela equação 69.(1) seus tempos locais médios também o seriam. Em outras palavras, cada vez que se mudasse de meridiano local necessitar-se-ia acertar o relógio para aquele meridiano! Pouco prático!

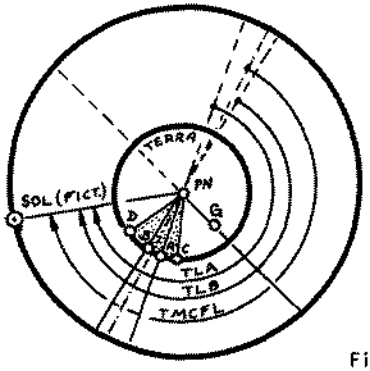


Fig.1

Contornaram o problema assumindo que numa dada região a hora seria a mesma, apesar de estar-se em meridianos diferentes. A generalização foi convencionada de forma tal que, no fuso esférico que contivesse a região em questão, a hora seria a mesma, qualquer que fosse o ponto do fuso. A hora adotada seria aquela do *meridiano central do fuso local* (TMCFL) e a hora chamar-se-ia *Tempo do Fuso Local* (TFL):

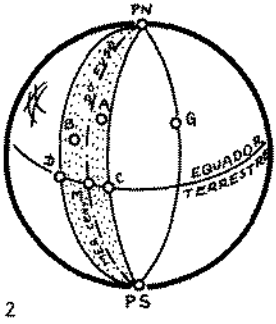


Fig.2

$$TFL = TMCFL \ . \qquad (1)$$

A superfície da Terra foi dividida em 24 fusos onde o fuso 0 (zero) era aquele cujo meridiano central passava por Greenwich. Cada fuso compreendia 15° do Equador Terrestre. Os fusos foram numerados de 0 a +12 para o oeste e de 0 a -12 para o leste, recebendo cada um dos números a designação de *Número do Fuso* ou *Correção Zonal*, geralmente representada por ΔZ. Essa notação nos per

mite facilmente calcular o tempo universal; pela equação 69.(4)

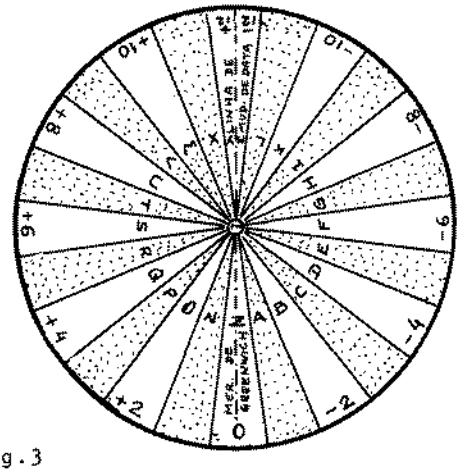


Fig.3

$$UT = TL + \lambda \; ; \qquad (2)$$

mas para o fuso, pela equação (1)

$$TF = TL \; ; \qquad (3)$$

Logo:

$$UT = TF + \lambda_F \; . \qquad (4)$$

Como os meridianos centrais dos fusos estão sempre a um múltiplo inteiro de 15^{o} (1 hora a partir de Greenwich, podemos substituir a longitude do fuso central pela correção zonal; assim:

$$\boxed{UT = TF + \Delta Z} \; . \qquad (5)$$

Portanto, conhecendo o número do fuso (ou a correspondente *Designação Zonal*) podemos calcular o tempo universal a partir do tempo do fuso, ou vice-versa. Designação zodiacal são as letras que se fazem corresponder aos diferentes fusos; a Tabela 1 fornece essa correspondência.

Tabela 1

Correção Zonal	+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	0	-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12
Designação Zonal	Y X W V U T S R Q P O N	Z	A B C D E F G H I K L M

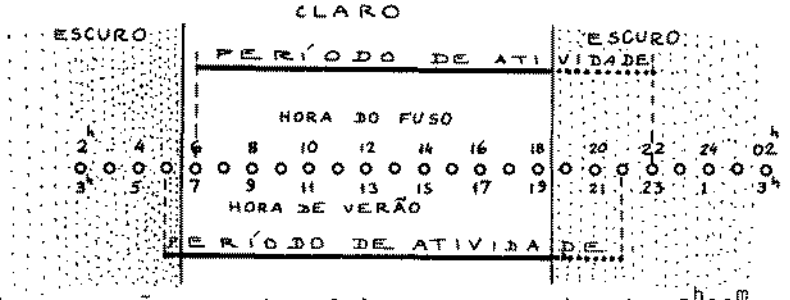
O meridiano central da zona ± 12 chama-se *Linha de Mudança de Data*.

Freqüentemente, por razões práticas, costuma-se englobar na hora de um fuso uma região geográfica geometricamente não pertencente ao fuso. Nesse caso, ao invés de hora do fuso deve-se denominar a hora da região de *Hora Legal*. Assim;

$$HL_g = TF_{associado} \cdot \qquad (6)$$

72. HORA DE VERÃO

Como durante o verão a declinação do Sol tem o mesmo sinal da latitude, o arco semi-diurno do Sol é maior que 6^h, e portanto o Sol nasce bem cedo e se põe bem tarde (itens 45 e 55). Em geral, a parte do dia em que todas as atividades são realizadas, pela maior parte da população, é entre 6 horas e 18 horas. Poucos estão acordados antes das 6 horas, mas poucos vão dormir antes das 22 horas.



Assim, no verão, quando o Sol nasce por volta das 5^h30^m, por exemplo, haverá 30 minutos de tempo claro não aproveitado; por outro lado, gastar-se-á energia elétrica desde às 18^h30^m até 22^h para iluminação noturna, até que o homem complete cerca de 16 horas acordado. Suponhamos que adiantássemos os relógios de modo que as 5 horas da manhã correspondessem, nesse relógio, à 6 horas. Assim, a pessoa que acordasse às 6 horas, nesse relógio, acordaria ainda no escuro, e só após 30 minutos clarearia: ele usaria 30 minutos de energia elétrica de manhã. À tarde, entretanto escureceria por volta das 19^h30^m. Para ir deitar às 22^h, ele gastaria 2^h30^m de iluminação. Com os 30 minutos que ele gastou de manhã, teríamos um gasto de 3 horas, meia hora menos do que se ele acordasse às 6^h do tempo de fuso. Vemos, portanto, que poder-se-ia economizar algo em energia destinada à iluminação. Tal procedimento é muito comum em vários países. Matematicamente:

$$\boxed{TV = TF + 1^h} \quad , \qquad (1)$$

onde TV é o chamado *Tempo de Verão*. (Notar que ao invés de 1^h poder-se-ia usar 2^h).

73. TEMPO SIDERAL VERDADEIRO

Conforme definido no item 41, tempo sideral é o ângulo horário do ponto γ. Seja γ_V o *ponto γ verdadeiro* ou seja, a intersecção do Equador pela Eclíptica. Chamamos *tempo sideral verdadeiro de um local* (TSVL) ao ângulo horário do ponto γ verdadeiro com relação ao meridiano local:

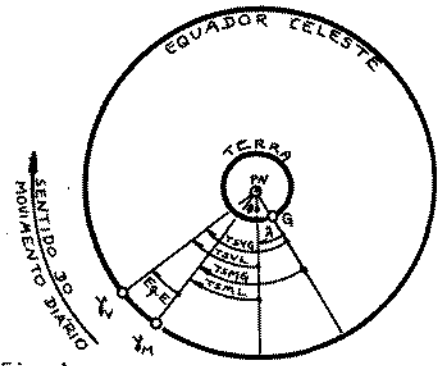


Fig. 1

$$TSVL = H_{\gamma_V} \quad . \qquad (1)$$

Caso o local fosse Greenwich, teríamos o *Tempo sideral verdadeiro de Greenwich* (TSVG). Sendo λ a longitude geográfica do local (item 26), então, pela figura vê-se que:

$$\lambda = TSVG - TSVL \quad ; \qquad (2)$$

(notar que λ estará em unidades de horas siderais; para passar a graus deve-se multiplicar por 15/1,0027).

Mas como medir o ângulo horário do ponto γ_V se ele é um ponto geométrico sem materialização que o permita observar? Costuma-se definir a posição do ponto γ_V em função das observações do Sol: conforme equação 59.(4),

$$\operatorname{sen}\alpha_\odot = \tan\delta_\odot . \cot\varepsilon \ , \qquad (3)$$

vemos que observando a declinação do Sol podemos obter sua ascensão reta. Assim, quando o Sol estiver passando pelo círculo horário H, pela equação 41.(2) temos

$$TSVL = \alpha_\odot + H_\odot \quad . \qquad (4)$$

Geralmente, o mais prático é quando o Sol estiver passando pelo meridiano local ($H_\odot = 0$):

$$TSVL = \alpha_\odot \text{ . (passagem meridiana superior)} \quad (5)$$

Chamamos de *dia sideral verdadeiro* ao intervalo de tempo decorrido entre 2 passagens consecutivas do ponto γ_V pelo meridiano superior local. O dia sideral inicia-se (0^{hS}) quando o ponto γ passa pelo meridiano superior local. Da mesma forma como o Sol verdadeiro não possui movimento uniforme, o mesmmo acontece com o ponto γ_V; daí, ele não ser usado como relógio.

74. TEMPO SIDERAL MÉDIO

Admitamos dispor de um relógio baseado no Tempo Solar Médio, ou como mais geralmente se usa dizer, graduado em Tempo Universal. Anotemos pois, os instantes, em dias sucessivos, da culminação superior do ponto γ_V (item 73). Veremos que a duração do dia sideral verdadeiro varia ao longo do ano. Definiremos *dia sideral médio* ao intervalo de tempo correspondente ao valor médio dos dias siderais verdadeiros ao longo do ano. Sua duração é:

$$\text{Dia Sideral Médio} = 23^h56^m04^s \ . \qquad (1)$$

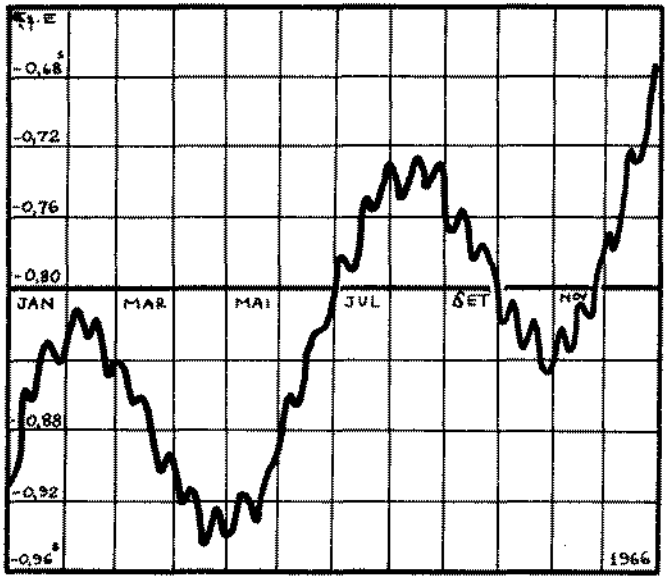


Fig.1

A Figura 1 representa a diferença entre a duração do dia sideral verdadeiro e a do dia sideral médio, para o ano de 1966.

Definamos um *ponto* γ *médio* (γ_M) cujo movimento diário aparente não contenha as irregularidades apresentadas pelo ponto γ_V. Ao movimento do ponto γ_M na esfera celeste chamamos de *Preces*

são[1] e ao movimento do ponto γ_V em torno da posição média (γ_M) chamamos de *Nutação*[2].

Assim, *tempo sideral verdadeiro* é o ângulo horário do ponto γ_V (incluindo precessão e nutação), enquanto que *tempo sideral médio* é o ângulo horário do ponto γ_M (só levando em conta a precessão, e excluindo a nutação). Veremos no Capítulo IX e nos itens 75 e 76 as definições e razões da precessão e nutação.

Pela Figura 1 do item 73 concluímos:

$$\boxed{TSML = H\gamma_M} \quad . \tag{2}$$

Se o local for Greenwich:

$$TSMG = H^G_{\gamma_M} \quad . \tag{3}$$

Do conhecimento do TSML e TSMG temos a longitude geográfica local:

$$\boxed{\lambda = TSMG - TSML} \quad . \tag{4}$$

Definimos *Equação dos Equinócios* (Eq.E) ao ângulo diferença entre o TSV e o TSM:

$$\boxed{Eq.E = TSVL - TSML} \tag{5}$$

ou

$$\boxed{Eq.E = TSVG - TSMG} \quad . \tag{6}$$

Podemos dizer que a equação dos equinócios é a correção que se deve somar ao tempo sideral médio para se obter o tempo sideral verdadeiro.

---

1. Precessão = precedere [latim] = chegar antes
2. Nutação = nutatio [latim] = oscilar

Dizemos que 1 dia sideral médio possui 24 horas siderais, que abreviamos por:

$$1 \text{ Dia Sideral} = 24^{hS} \; ; \tag{7}$$

cada hora sideral possui 60 minutos siderais (60^{mS}) e cada minuto sideral possui 60 segundos siderais (60^{sS}). Quando não há o risco de confusão não colocaremos o símbolo S referente a sideral.

75. PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS

Conforme descrevemos no item 73, o ponto γ não pode ser observado diretamente já que não é um ponto material. Assim, a determinação do tempo sideral deve ser feita por meio de outros astros, por exemplo, o Sol. Notar que no caso de estrela visível apenas após o pôr do Sol, a determinação de sua ascensão reta (ou longitude celeste) apresentava problemas graves na antiguidade quando ainda não dispunha de relógios confiáveis. Para contornar tal problema, os astrônomos antigos utilizavam astros intermediários entre o Sol e as estrelas: astros que podiam ser observados junto com o Sol de modo a medir as distâncias angulares que os separavam; por exemplo, utilizava-se a Lua, Vênus, eventualmente Júpiter. Vejamos o método engenhoso utilizado por Timocharis e Hiparcos para determinar a longitude eclíptica da estrela Spica (α Virgem).

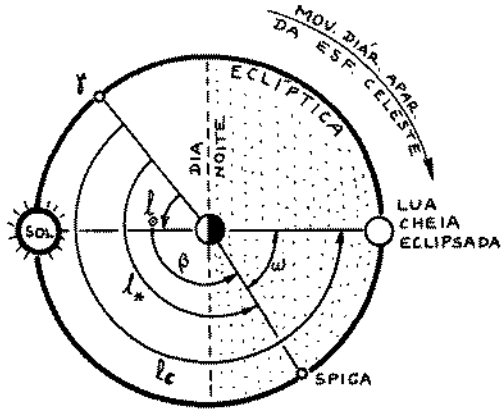


Fig.1

Em 273 a.C Timocharis mediu a longitude eclíptica ℓ_* da estrela Spica durante um eclipse lunar. Um eclipse lunar ocorre quando a Terra fica entre o Sol e a Lua Cheia; como a Lua é brilhante apenas pelo fato de ser iluminada pelo Sol, a Terra, estando entre os dois, barra a luz proveniente do Sol e que refletindo-se na Lua chegaria à Terra (ver item 109): assim a Lua fica escurecida. Pela Figura 1 vê-se que:

$$\ell_c - \ell_\odot = 180^\circ \quad . \tag{1}$$

A longitude do Sol podia ser conhecida se se conhecesse o

dia de sua passagem pelo equinócio da primavera (observações da sombra de um gnômon podiam fornecer tal dado), bastando usar a fórmula 59.(6):

$$\ell_{\odot} = \ell_0 + \Omega(t - t_0) \quad ; \tag{2}$$

pela equação (1) obtinha-se a longitude da Lua.

O ângulo ω entre a Lua e Spica era facilmente medido. Assim:

$$\ell_{\star} = \ell_{c} - \omega \quad , \tag{3}$$

o que forneceria a longitude da estrela. Para Spica, Timocharis encontrou $\ell_T = 172^{\circ}$.

Hiparcos, 144 anos depois, em 129 a.C., refez a mesma medida usando o mesmo processo. Achou, para a estrela Spica $\ell_H = 174^{\circ}$.

Pelo menos 3 alternativas podiam ser admitidas para se explicar essa diferença de 2° entre ℓ_T e ℓ_H:

a) erros na determinação das longitudes; esses erros tanto podiam ser nas medidas de Timocharis como nas de Hiparcos; Hiparcos, no entanto, acreditou que ambas as medidas estavam corretas;

b) movimento da estrela Spica sobre a esfera celeste; essa hipótese foi descartada por Hiparcos pois a noção de "estrela fixa" era muito forte;

c) deslocamento na origem do sistema de medidas de longitude: o ponto γ retrogradou, isto é, moveu-se sobre a Eclíptica no sentido oposto ao do movimento anual aparente do Sol. A esse movimento do ponto γ no sentido oposto ao do movimento anual aparente do Sol chama-se *Retrogradação do ponto* γ (Fig.2). Foi essa a hipótese adotada por Hiparcos.

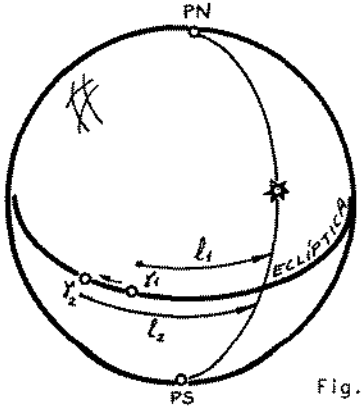


Fig.2

Ora, se em 144 anos o ponto

γ retrogradou 2°, fica fácil determinar sua retrogradação em 1 ano: $2^{\circ}/144 = 50''$. Verificações atuais mostram que esse valor é aproximadamente de $50''{,}2$ por ano. Ao fenômeno de retrogradação do ponto γ dá-se o nome de *precessão dos equinócios*. A causa física desse fenômeno será tratada no Capítulo IX.

Conhecendo-se a longitude ℓ_0 de uma estrela numa época t_0, fica fácil calcular sua longitude ℓ_1 num instante t qualquer:

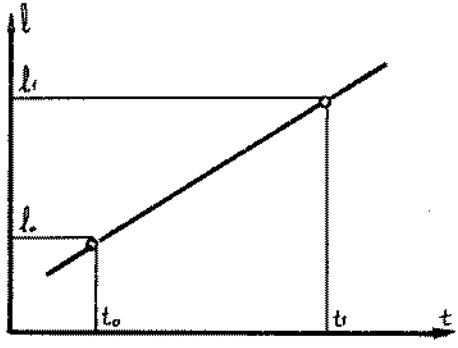


Fig.3

$$\ell_1 = \ell_0 + p(t_1 - t_0), \quad (4)$$

onde p é a *precessão anual em longitude* que é a retrogradação anual do ponto γ; seu valor é:

$$p = 50{,}2''/\text{ano}. \quad (5)$$

Por regra de três simples verifica-se qual o intervalo de tempo necessário para que o ponto γ de uma volta completa sobre a Eclíptica: cerca de 26 000 anos.

76. FENÔMENO DE NUTAÇÃO

Em 1725, Bradley estudando a estrela γ Draconis verificou que sua posição, mesmo excluindo-se o fenômeno da precessão (item 75), apresentava variações aproximadamente regulares, descrevendo entre as constelações, movimento aproximadamente oscilatório com amplitude máxima de cerca de 9". Verificou-se que todas as estrelas possuiam movimentos desse tipo, e sincronizados, de modo que a causa não poderia ser dela, mas sim do sistema de referências.

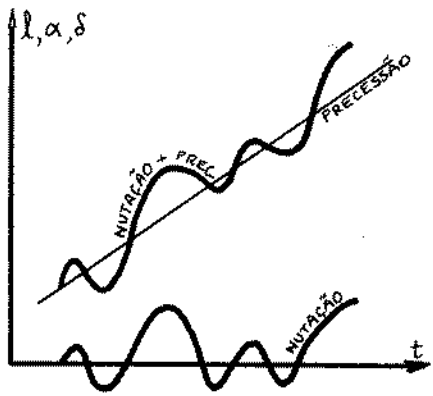


Fig.1

A longitude eclíptica (e a latitude) bem como a ascensão reta (e a declinação) das estrelas variavam em torno de uma posição média. A essa variação de pequeno período (o máximo é de 18,6 anos) chamamos de *Nutação*.

Veremos mais tarde (Capítulo IX) que as causas da precessão e da nutação são basicamente as mesmas, separando-se apenas o efeito de longo período (efeito secular) que recebe o nome de precessão, e englobando todos os movimentos de pequeno período (efeito periódico) no que se chama nutação. Quanto ao efeito da nutação podemos dizer que ocorre uma oscilação do ponto γ *verdadeiro* (γ_V) em torno do ponto γ *médio* (γ_M) da data.

77. ANO SIDERAL, ANO TRÓPICO E ANO BESSELIANO.

Até há pouco consideramos que os planos fundamentais de referência (especificamente o Equador e a Eclíptica) fossem fixos na esfera celeste. Por razões dinâmicas (gravitacionais), que descreveremos no Capítulo IX, veremos que tanto o Equador como a Eclíptica mudam suas posições com relação à esfera celeste. Seja γ_1 o ponto Vernal numa época t_1, definido pela intersecção do Equador 1 com com a Eclíptica 1. Numa data posterior t_2 veremos que o novo ponto Vernal γ_2 mudou de posição já que, tanto o Equador 2, como a Eclíptica 2 não mais coincidem com seus predecessores, devido à precessão e nutação (itens 75 e 76).

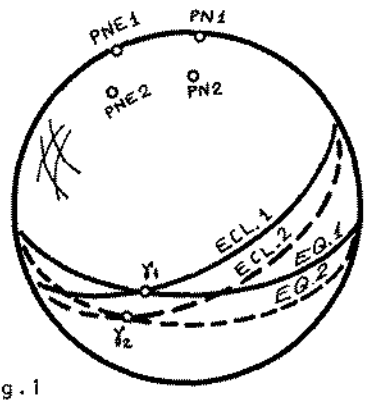


Fig.1

Define-se *ano sideral* como sendo o intervalo de tempo necessário para que o Sol passe pelo ponto γ_1 duas vezes sucessivamente (dê uma volta completa na esfera celeste) ao longo de seu movimento anual aparente:

$$AS = \circlearrowright_{\gamma_1} \quad . \tag{1}$$

A duração do ano sideral é de aproximadamente:

$$AS = 365^d\ 06^h\ 09^m\ 09^s,5 \quad . \tag{2}$$

Chamamos de *ano Trópico*[1] ao intervalo de tempo para que o Sol passe 2 vezes consecutivamente pelo ponto γ médio da data,

1. Trópico = relativo aos Trópicos (círculos paralelos ao Equador pelos pontos mais afastados que o Sol atinge do Equador); tropikos [grego] .

isto é, é o intervalo de tempo para o Sol passar por γ_1 e γ_2 on de γ_2 é o γ_M no instante $t_2 = t_1 + 1$ ano:

$$AT = \overset{\frown}{\gamma_2\ \gamma_1} \quad . \tag{3}$$

A duração do ano Trópico é, aproximadamente:

$$AT = 365^d\ 05^h\ 48^m\ 46^s,0 \quad . \tag{4}$$

É óbvio que a duração do ano trópico deva ser menor que a do ano sideral, já que com a retrogradação do ponto γ, o Sol o atin ge antes do que o faria se ele estivesse imóvel.

Define-se, também, um outro ano, cuja duração é praticamen te igual a do ano trópico, mas cujo início ocorre quando a ascen- são reta do Sol fictício (item 69), afetada pela aberração anual (item 93), e medida a partir do equinócio médio da data, seja $18^h\ 40^m$. Esse fenômeno ocorre perto do início do ano no calendário gre goriano. Tal ano se chama *ano Besseliano*. Chama-se *fração do ano trópico* (τ), à razão entre o Tempo decorrido (em anos trópicos) des de o início do ano Besseliano (t) e o ano trópico (AT):

$$\tau = \frac{t}{AT} \quad . \tag{5}$$

Mostremos que em um ano sideral existem aproximadamente 366,25 dias siderais. Imagi nemos o observador O_0 que num determinado instante (Fi gura 2) tem tempo solar e sideral de 0 horas. Depois de exatamente 1 dia solar ele estará na posição O_1; com relação ao Sol, girou de 360°. Com relação ao ponto γ, porém, ele girou mais de 360°; teria girado de 360° quando a Terra es- tivesse na posição que o

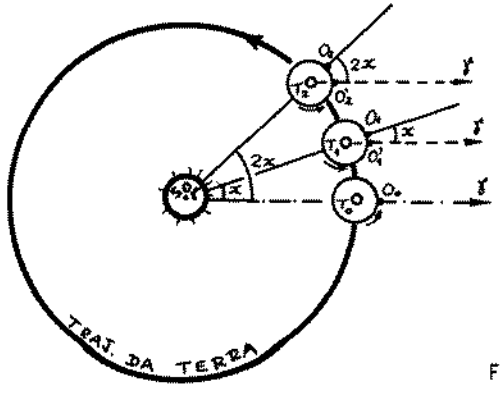


Fig.2

deixasse em O_1' na figura; com relação ao ponto γ girou pois de $360^{\circ}+x$, onde x é o ângulo que a Terra percorre em 1 dia solar:

$$x \cong 360^{\circ}/365^{d},25 \quad . \qquad (6)$$

No dia seguinte, 1 dia solar a mais, o observador está em O_2, tendo percorrido, com relação ao Sol, um ângulo total de $720^{\circ}=(2 \times 360^{\circ})$; com relação ao ponto γ percorreu $720^{\circ}+2x$. E assim sucessivamente. Podemos escrever:

DATA	Ângulo percorrido pelo observador com relação ao Sol desde o instante inicial:	Ângulo percorrido pelo observador com relação ao ponto γ desde o instante inicial:
Dia 0(solar)	0°	0°
1	360°	$360^{\circ}+x$
2	$2.(360^{\circ})$	$2.(360^{\circ})+2x$
3	$3.(360^{\circ})$	$3.(360^{\circ})+3x$
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
n	$n.(360^{\circ})$	$n.(360^{\circ})+nx$
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
365,25	$365,25.(360^{\circ})$	$365,25.(360^{\circ})+365,25x$

Ora, mas $365,25.x$ é igual a 360° (equação (6)); logo, em dias siderais teremos $365^{d},25 + 360^{\circ}$, ou seja, $365^{d},25 + 1^{d}$, dando pois os 365,25 dias siderais. Assim,

$$1 \text{ Ano Sideral} \cong 366,25 \text{ Dias Siderais} \quad . \qquad (7)$$

78. TEMPO DAS EFEMÉRIDES

Nas equações da Mecânica Clássica um argumento é sempre considerado como independente: o tempo. Ora, nem o tempo Universal (solar) nem o Sideral podem ser considerados uniformes já que dependem do movimento diário aparente, o qual não é uniforme.

Para contornar esse problema define-se *Tempo das Efemérides* (TE) como sendo o tempo teoricamente uniforme utilizado nas equações da Mecânica Clássica. Ele é computado de forma a que os resultados observacionais coincidam com os valores preditos pela resolução das equações que definem o movimento dos astros; costuma-se dizer que eles são definidos para que as *Efemérides* (tabelas astronômicas) coincidam com os valores observacionais.

A unidade fundamental para o cômputo do tempo das efemérides é o *Segundo*[1] *das Efemérides* (sE), definido como sendo a fração 1/ 31 556 925,9747 da duração do ano trópico de 1900 (item 77).

Do ponto de vista teórico, o tempo das efemérides é baseado no movimento da Terra em redor do Sol, mas pode, e é, calculado também a partir do movimento de outros corpos do sistema Solar. Na prática, sua determinação é feita através do movimento da Lua em torno da Terra.

---

1. Segundo = secunda minuta [latim] = 2º minuto = minuto indireto

79. TEMPO ATÔMICO INTERNACIONAL

A necessidade do aumento da precisão nos trabalhos científicos levou os pesquisadores e técnicos à utilização de um relógio baseado nas oscilações eletromagnéticas produzidas pelas transições quânticas que podem ocorrer num átomo. Vários padrões foram utilizados de 1967 em diante. O padrão atualmente aceito é aquele em que o segundo SI é definido por:

> "1 *segundo do Sistema Internacional* é o tempo decorrido para que ocorram 9 192 631 770 ciclos de transição entre níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de Césio 133".

O valor do *segundo atômico*, definido acima, é tal que coincida com o valor experimental do segundo das efemérides (item 78) observado entre 1956 e 1965.

A escala do *Tempo Atômico Internacional* (TAI) baseia-se no segundo do SI e foi definida para que ficasse o mais próximo possível da escala do tempo das efemérides. Assim:

$$TAI = TE - 32^{s},184 \quad . \qquad (1)$$

Do ponto de vista prático, a equação é utilizada no outro sentido:

$$\boxed{TE = TAI + 32^{s},184} \quad , \qquad (2)$$

já que, o tempo atômico internacional pode ser lido diretamente a partir dos relógios que o definem, e o problema astronômico que se deseja resolver é o de determinar o tempo das efemérides.

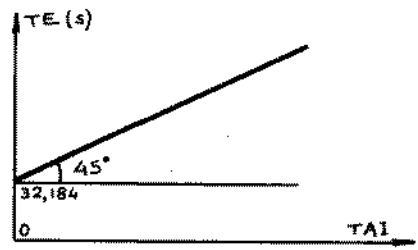


Fig.1

Na Figura 1 está o grá

fico que representa a medida do TE em função do TAI: a escala é a mesma em TE e TAI, mas deslocada da origem.

Para todos os efeitos práticos a escala do tempo atômico pode ser usada como a escala do tempo uniforme requerido pelas equações da Mecânica Clássica (Fig.2)

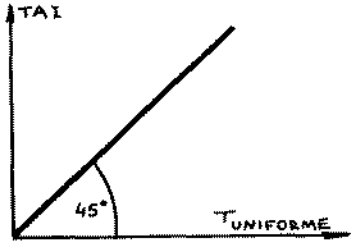


Fig.2

80. IRREGULARIDADES NA ROTAÇÃO DA TERRA

Nós temos até agora descrito o movimento diário aparente como sendo o resultado da rotação da esfera celeste em torno do eixo de rotação dessa esfera. Sabemos, porém, que o movimento real é o de *rotação da Terra* em torno do eixo da esfera celeste. (Sobre provas de rotação da Terra, ver item 105).

Se utilizarmos um relógio baseado num tempo uniforme, por exemplo, um relógio atômico, veremos que a rotação da Terra não é uniforme. Em outras palavras, o Tempo Universal e o Tempo Sideral, que se baseiam na rotação da Terra (o primeiro com relação ao Sol e o segundo com relação ao ponto γ), não são uniformes. O *tempo universal* obtido diretamente da *observação* do movimento diário aparente do Sol costuma ser representado por UT0 e não é perfeitamente uniforme. As irregularidades podem ser classificadas em 2 tipos:

a) Variações na posição do eixo de rotação da Terra com relação à parte sólida da Terra: é o chamado *Movimento dos Pólos*;

b) Variações intrínsecas na velocidade angular de rotação da Terra.

Nos itens seguintes estudaremos cada um desses efeitos.

81. MOVIMENTO DOS PÓLOS

Vamos admitir que num certo dia, no Pólo Norte, pudéssemos determinar a posição, na crosta da Terra, do eixo de rotação da Terra. Se fizéssemos novas observações no dia seguinte, de modo a redeterminar a posição do pólo, verificaríamos que ela estaria deslocada da do dia anterior. A Figura 1 representa esquematicamente as posições ocupadas pelo *pólo instantâneo de rotação* (PNI) em relação ao *Pólo Norte Convencional* (PNC) durante o intervalo de tempo de 1965 a 1967. Verifica-se, pois, que o eixo de rotação da Terra muda de posição com relação à crosta "sólida" da Terra. Desde 1900, o PNI nunca esteve a mais de 30 m do PNC.

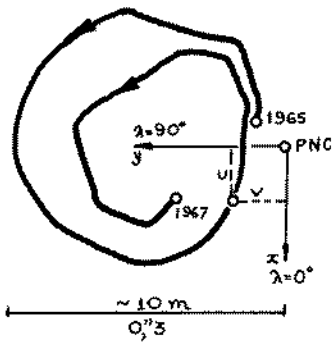


Fig.1

Ora, se mudar de posição o pólo, muda também a posição do meridiano de um local, já que ele passa pelo zênite e pelo pólo (Figura 2). Mudando a posição do meridiano, muda também o ângulo horário do astro, já que há uma variação na longitude do lugar. O mesmo ocorre com a latitude geográfica, pois variando o pólo, varia a posição do Equador. Procuremos deduzir as equações que fornecem as variações na latitude e longitude de um local conhecendo-se as coordenadas U e V do pólo instantâneo em função do PNC.

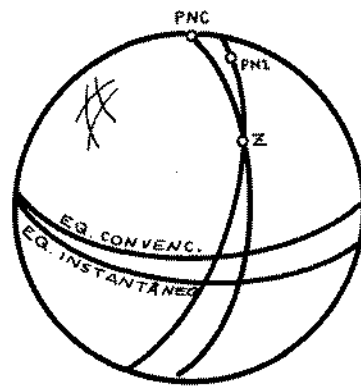


Fig.2

82. VARIAÇÃO DA LATITUDE DE UM LOCAL DEVIDO AO MOVIMENTO DOS PÓLOS

Admitamos ser PNC o Pólo Norte Convencional (item 81); ele define um Equador convencional. Seja (x',y',z') um sistema de eixos de mão esquerda (indireto) associado ao PNC e ao Equador convencional.

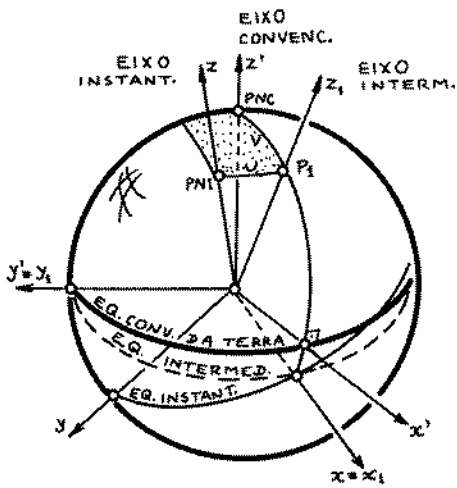


Fig.1

Seja PNI o Pólo Norte instantâneo com coordenadas angulares U e V relativas ao PNC, conforme Figuras 1 dos itens 81 e 82. Um ponto qualquer da Terra, terá coordenadas geográficas locais convencionais ϕ_c e λ_c (item 26). Com relação ao PNI, esse mesmo ponto da Terra terá coordenadas ϕ e λ. Queremos determinar as coordenadas convencionais a partir das coordenadas ϕ e λ obtidas por métodos observacionais.

Seja (x,y,z) um sistema indireto com pólo primário em PNI (o fato de escolhermos sistemas indiretos se justifica por ser o sistema geográfico um sistema indireto, conforme definição do item 62). Procuremos fazer coincidir o sistema (x,y,z) com o (x',y',z') através de 2 rotações:

$$\underset{\text{convencional}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = R_{y_1}(-V).R_x(+U) \underset{\text{instantâneo}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \quad ; \qquad (1)$$

a rotação em torno do eixo intermediário y_1 é negativa pois se dá no sentido oposto ao do fechamento da mão esquerda.

Utilizando as equações 26.(8), 64.(4), (5) e (6), e considerando que U e V são pequenos de modo a podermos substituir seus senos pelos seus próprios valores e seus co-senos por 1, e finalmente, desprezando o produto UV, teremos:

$$\cos\phi_c.\cos\lambda_c = \cos\phi.\cos\lambda + U.\operatorname{sen}\phi \qquad (2)$$

$$\cos\phi_c.\operatorname{sen}\lambda_c = \cos\phi.\operatorname{sen}\lambda + V.\operatorname{sen}\phi \qquad (3)$$

$$\operatorname{sen}\phi_c = -U.\cos\phi.\cos\lambda - V.\cos\phi.\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}\phi \ . \qquad (4)$$

A expansão da função $\operatorname{sen}\phi_c$ em torno do ponto ϕ pode ser escrita, segundo Taylor (Apêndice I), por:

$$\operatorname{sen}\phi_c = \operatorname{sen}\phi + \cos\phi.(\phi_c - \phi) \ ; \qquad (5)$$

substituindo essa equação na equação (4), e fazendo simplificações imediatas, vem:

$$\boxed{\phi_c - \phi = -U.\cos\lambda - V.\operatorname{sen}\lambda} \ , \qquad (6)$$

que é a equação procurada, a qual nos permite calcular a latitude convencional ϕ_c a partir de dados observacionais (ϕ e λ) e das coordenadas do movimento dos pólos; (na verdade o sinal de "igualdade" deveria ser substituído por um de "aproximadamente igual", já que fizemos uma série de aproximações).

83. VARIAÇÃO DA LONGITUDE DE UM LOCAL DEVIDO AO MOVIMENTO DOS PÓLOS. UTO E UT1.

Utilizando a mesma notação e figura do item 82, substituamos, na equação 82.(2) os valores das funções $\text{sen}\phi$, $\cos\phi$, e $\cos\lambda$ expandidos em séries de Taylor (1ª ordem):

$$\text{sen}\phi = \text{sen}\phi_c + \cos\phi_c(U.\cos\lambda + V.\text{sen}\lambda) \quad (1)$$

$$\cos\phi = \cos\phi_c - \text{sen}\phi_c(U.\cos\lambda + V.\text{sen}\lambda) \quad (2)$$

$$\cos\lambda = \cos\lambda_c + (\lambda_c - \lambda)\text{sen}\lambda \; ; \quad (3)$$

desprezando os termos de 2ª ordem U^2, UV, $U(\lambda_c - \lambda)$ e $V(\lambda_c - \lambda)$, teremos:

$$\boxed{\lambda_c - \lambda = (V.\cos\lambda - U.\text{sen}\lambda).\tan\phi} \; , \quad (4)$$

que é a equação que permite a obtenção da longitude convencional λ_c a partir de dados observacionais; (devido às aproximações, o certo seria substituir o sinal de "igual" por um de "aproximadamente igual").

Ora, se variar a longitude de um local, variará o ângulo horário de um astro (por exemplo, o Sol fictício); isto significa que haverá uma modificação no Tempo Universal. Seja UT0 o Tempo universal observado segundo o meridiano instantâneo:

$$UT0 = h_0 + 12 \; , \quad (5)$$

onde h_0 é o ângulo horário do Sol fictício, em Greenwich. Se o meridiano utilizado fosse o meridiano convencional, o tempo universal seria:

$$UT1 = h_1 + 12 \; , \quad (6)$$

onde h_1 é o novo ângulo horário do Sol fictício.

Das equações (6) e (5) podemos obter:

$$UT1 = UT0 + (h_1 - h_0) \quad . \tag{7}$$

Ora, a diferença de ângulos horários adveio da mudança do meridiano: quando o ângulo horário aumenta é porque o meridiano se deslocou no sentido oposto. Logo:

$$UT1 = UT0 - (\lambda_c - \lambda) \quad , \tag{8}$$

ou, usando a equação (4):

$$\boxed{UT1 = UT0 + (U.\mathrm{sen}\lambda - V.\cos\lambda).\tan\phi} \quad . \tag{9}$$

Costuma-se dizer que UT1 é o tempo universal corrigido dos efeitos do movimento dos pólos:

$$\boxed{UT1 = UT0 + \text{CORREÇÃO DO MOV. DOS PÓLOS}} \quad . \tag{10}$$

84. EFEITOS SAZONAIS NA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DA TERRA. UT2.

Uma das causas da irregular rotação da Terra é a redistribuição de sua massa (principalmente atmosfera) devido a efeitos das estações do ano: quando é verão num hemisfério existe aquecimento acentuado dos gases atmosféricos que procuram se expandir. Ora, como o momento da quantidade de movimento deve se manter constante, a distribuição de massa exige uma modificação na velocidade angular da Terra: resultam, daí, variações na velocidade de rotação.

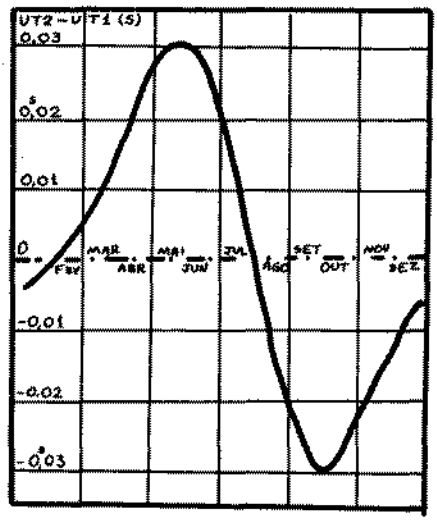


Fig. 1

A Figura 1 mostra que com relação a um tempo mais uniforme UT2, o valor de UT1 (item 83) é variável.

Costuma-se definir UT2 como sendo o tempo universal corrigido dos efeitos *sazonais*[1], cujos valores estão na Figura 1:

$$\text{UT2} = \text{UT1} + \text{COR. EFEITOS SAZONAIS} \quad . \qquad (1)$$

Existem outros efeitos de menor valor, como por exemplo, aqueles causados por dissipação de energia devido às marés, e outros ainda devidos à atividade solar.

1. Sazonal = statio [latim] = relativo às estações

85. TEMPO UNIVERSAL COORDENADO

Conforme visto no item 84, o UT2 é o tempo, obtido por meios astronômicos, mais uniforme possível. Mas, devido às dissipações de energia por marés e outros fenômenos desconhecidos, verifica-se que ele não é uniforme com o tempo dado por um relógio atômico (Fig.1).

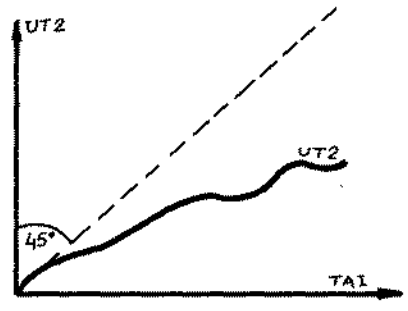


Fig.1

Verifica-se que o UT2 vai se atrasando com relação ao TAI. Obviamente poderíamos dizer que o relógio de TAI vai se adiantando com relação ao UT2. Do ponto de vista prático, essa segunda visão é mais razoável, visto que ainda se procura manter a noção de horas do dia relacionada com a posição do Sol (movimento de rotação Diária da Terra). Assim, o relógio de TAI deve ser atrasado para mantê-lo próximo de UT2. Quando o relógio de TAI é atrasado dessa forma, cria-se uma nova escala de medida de tempo: essa escala chama-se de *Tempo Universal Coordenado*[1] (UTC) e ela é definida da seguinte forma: o Tempo Universal Coordenado é calculado por:

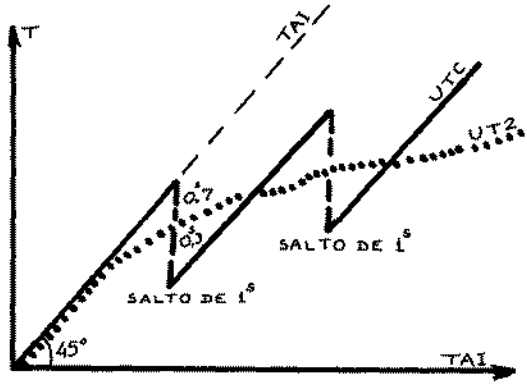


Fig.2

$$\boxed{UTC = TAI + b}, \quad (1)$$

onde b é um número inteiro tal que:

1. Coordenado = coordinare [latim] = organizado

$$|UTC - UT2| < 0^{s},7 \quad . \qquad (2)$$

Assim, continua o padrão do Segundo Internacional (SI) (item 79), mas o UTC pode diferir de um número inteiro do TAI de modo que o UTC nunca defira mais de $0^{s},7$ do UT2 obtido astronomicamente (Figura 2).

Quando a diferença $|UTC - UT2|$ atinge $0^{s},7$, os relógios baseados na escala UTC são atrasados ou adiantados de 1 segundo. Quando o relógio é atrasado, o *segundo intercalado*[2] se chama positivo: depois do segundo 60 vem o segundo 0 (Fig.3). Quando o relógio de UTC deve ser adiantado, o segundo intercalado se chama negativo: depois do segundo 58 vem o segundo 0 (elimina-se o segundo 59). Na parte central da Figura 3 estão representados os instantes

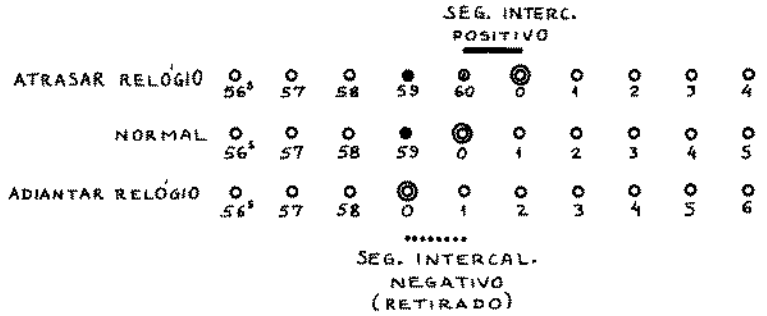


Fig.3

dos pulsos com a numeração seqüencial que deria adotada caso não houvesse necessidade de intercalação de segundo. Na parte superior nota-se que a numeração seqüencial foi "quebrada" no instante 60, repetindo-se o valor 0 (que do ponto de vista de hora normalmente coincide com o 60 do minuto anterior). Na parte inferior nota-se a falta do número correspondente ao pulso 59: pulou-se do 58 ao 0.

Normalmente o acerto dos relógios é feito às 24 horas do dia 31 de dezembro, ou eventualmente em 30 de junho, quando necessário.

---

2. Intercalado = intercalare [latim] = inserir

Capítulo 9

Deslocamento dos Planos Fundamentais de Referência

86. DESLOCAMENTOS DOS PLANOS FUNDAMENTAIS DE REFERÊNCIA

Nos itens 75, 76 e 77 descrevemos um fato: o da modificação da posição do ponto γ por entre as estrelas; chamamos o fenômeno de "*retrogradação do ponto* γ". Nosso intuito, neste item, é o de procurar a razão de tal retrogradação com o tempo.

Admitamos apenas a Terra e o Sol em interação, abstendo-nos de incluir os efeitos gravitacionais (itens 124 e seguintes) dos outros astros do Sistema Solar. Caso a Terra fosse perfeitamente esférica e homogênea, a ação gravitacional do Sol sobre ela poderia ser entendida como uma força aplicada ao centro da Terra (teorema T6 do item 124). Ora, mas a Terra não é esférica: ela se apresenta, grosseiramente, como um elipsóide de revolução, onde o diâmetro polar é menor que o equatorial; poderíamos dizer que a Terra é "achatada" nos pólos e "bojuda" na parte equatorial. Chamaremos de *bojo* à parte excedente da Terra que a deforma de ser uma esfera. Sejam F_1 e F_2 as forças gravitacionais agentes no bojo distante e no bojo próximo ao Sol; pela lei de Newton vemos que (Fig.1.(a)):

$$F_1 < F_2 \quad , \qquad (1)$$

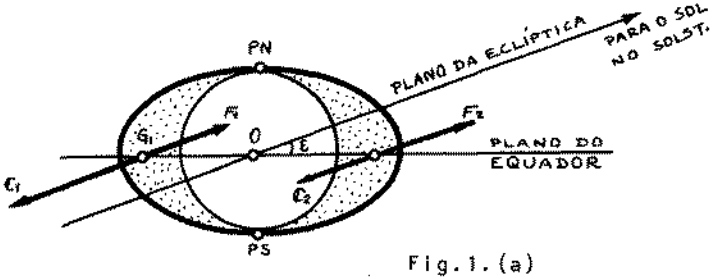


Fig.1.(a)

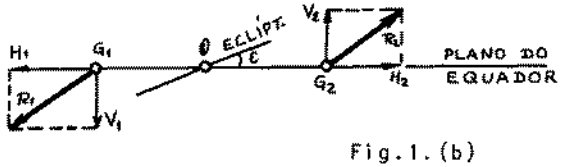


Fig.1.(b)

já que o bojo 1 está mais distante (estamos admitindo as forças agindo nos centros de gravidade dos 2 bojos).

Devido ao movimento orbital da Terra em torno do Sol, os bojos ficarão sujeitos a forças centrífugas C_1 e C_2, onde

$$C_1 > C_2 \qquad (2)$$

já que 1 está mais afastado do centro de revolução orbital (Sol). As forças R_1 e R_2 resultantes de cada bojo estão na Figura 1.(b). Decomponhamos essas forças nas componentes verticais (V_1 e V_2) ao plano do Equador e nas horizontais (H_1 e H_2) paralelas ao mesmo plano.

A tendência das forças H_1 e H_2 é deformar ainda mais a Terra, alargando seu raio equatorial.

As forças V_1 e V_2 formam um par conjugado cujo momento tende a fazer o Equador da Terra se deslocar de modo a coincidir com o plano da Eclíptica; isso resultará numa progressiva diminuição do ângulo de Obliqüidade da Eclíptica; essa diminuição é muito pequena: cerca de 46",8 por século. Notemos que a rotação do Equador se faz em torno do eixo $\gamma\Omega$ definido pela intersecção do Equador e Eclíptica, mesmo quando o Sol não está nos solstícios.

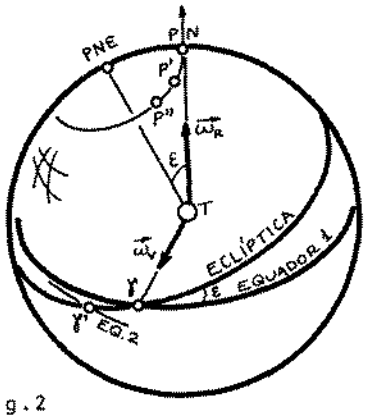


Fig.2

A Terra possui um movimento de rotação em torno do eixo de rotação que passa pelos pólos Norte e Sul; caracterizemos essa velocidade pelo vetor velocidade angular de rotação $\vec{\omega}_R$, conforme Figura 2. Além dessa rotação, vimos que as forças V_1 e V_2 geram uma rotação da Terra em torno de $T\gamma$: seja essa rotação caracterizada pelo vetor velocidade angular do decréscimo da obliqüidade $\vec{\omega}_V$. Ora, a composição vetorial (Fig.3) dessas 2 velocidades dará uma nova velocidade $\vec{\omega}_R'$ num novo eixo de rotação diária (TP'). Como o plano do Equador é perpendicular ao eixo de rotação da Terra,

esse plano variará já que TP' não mais coincide com TPN. A partir desse novo P' e do novo γ' recomeça (ou continua) o mesmo fenômeno, passando P' para P'' e assim sucessivamente. Como resultado, o eixo de rotação da Terra descreverá uma superfície cônica de vértice no centro da Terra e eixo coincidente com o eixo da eclíptica. Assim, os pôlos celestes deslocar-se-ão entre as estrelas com o passar do tempo (Fig.4). A volta completa do eixo de rotação dar-se-á apenas cerca de 26000 anos depois. Não só o Sol mas também a Lua influem no bojo terrestre: ao efeito combinado desses 2 astros chamamos de *Precessão Luni-Solar*, que causa um deslocamento do Equador da Terra.

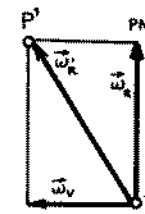


Fig.3

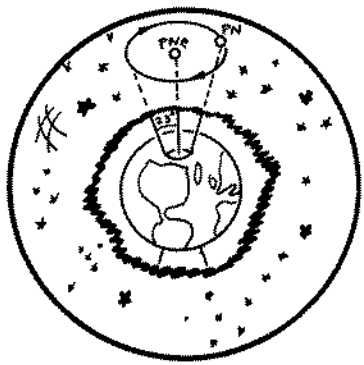


Fig.4

Na Figura 1 do item 77 mostramos também um deslocamento da eclíptica. Como explicá-lo? Bem, nós tínhamo-nos atido a apenas o Sol e a Terra, mas existem outros corpos no Sistema Solar, e todos eles interagem entre si gravitacionalmente. Assim, Júpiter, por exemplo, atrairá a Terra, mudando o plano da Eclíptica (Fig. 5). A esse efeito de deslocamento do plano da Eclíptica por ação dos outros astros (geralmente os planetas) do Sistema Solar chamamos de *Precessão Planetária*.

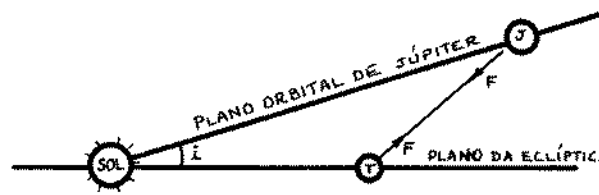


Fig.5

Ao efeito combinado da precessão Luni-Solar e Planetária chamamos de *Precessão Geral*. Sua esquematização está na Figura 1 do item 77.

Ao se observar atentamente o movimento do eixo de rotação da Terra em torno do eixo da eclíptica, verifica-se que o movimento não é uniforme, mas sim sujeito a pequenas variações quase-periódicas: a essas flutuações em torno de uma posição média chamamos de *Nutação* (Figura 6).

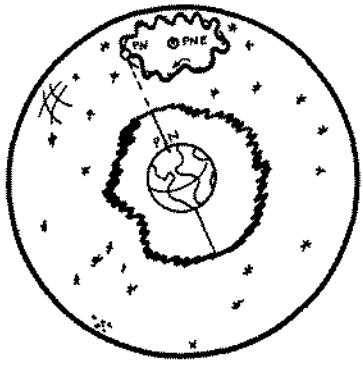


Fig.6

No item 76 são feitas algumas considerações sobre a nutação. Assim, o eixo de rotação instantâneo da Terra realiza um movimento que parece o de um pião, que gira em torno da vertical do lugar, e além disso "bamboleia" em torno da posição média.

87. VARIAÇÃO (APROXIMADA) NAS COORDENADAS DE UM ASTRO DEVIDO À PRECESSÃO

Conforme visto no item 86, devido à precessão geral ocorrem mudanças nas posições do Equador e da Eclíptica. Isso significa que variam também as posições dos pólos celeste e eclíptico. Pela Figura 1 é fácil ver que a precessão acarretará modificações na ascensão reta e declinação de um astro A; já que as coordenadas iniciais

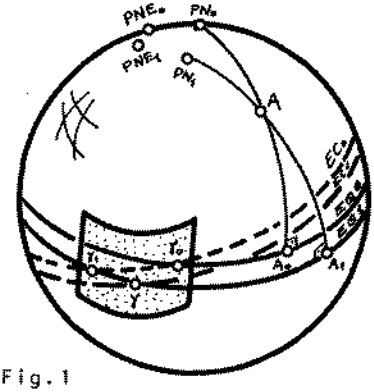


Fig. 1

$$\alpha_0 = \gamma_0 \hat{A}_0 \ , \qquad (1)$$

$$\delta_0 = \hat{A_0 A} \qquad (2)$$

passarão a ser:

$$\alpha = \gamma \hat{A}_1 \qquad (3)$$

$$\delta = \hat{A_1 A} \ . \qquad (4)$$

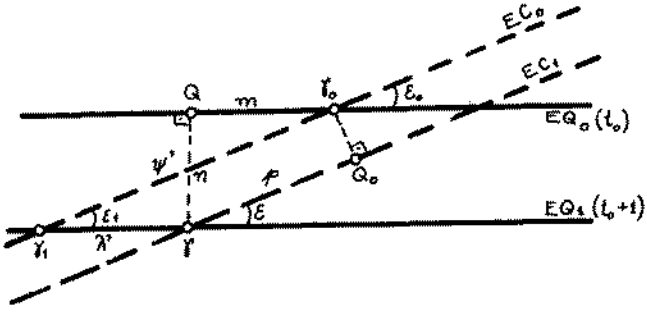


Fig. 2

Definamos as variações em ascensão reta e declinação por:

$$\boxed{\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0} \qquad (5)$$

$$\boxed{\Delta\delta = \delta - \delta_0} \ . \qquad (6)$$

Procuremos fórmulas aproximadas que nos dêem os valores de $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$.

Como as variações na posição de γ são muito pequenas, podemos imaginar que a região de entorno a ele seja passível de ser considerada plana. A Figura 2 representa a ampliação da região hachurada da Figura 1, onde t_0 é a época inicial e t, dado por:

$$t = t_0 + 1 \text{ ano} \quad , \tag{7}$$

é a data 1 ano trópico depois (item 77).

Denominemos alguns dos elementos constantes na Figura 2:

m : precessão geral anual em ascensão reta = $Q\gamma_0$
n : precessão geral anual em declinação = γQ
p : precessão geral anual em longitude = γQ_0
Ψ': precessão luni-solar anual = $\gamma_0\gamma_1$
λ': precessão planetária anual no Equador = $\gamma_1\gamma$
ε_0: obliqüidade da eclíptica na época t_0
ε : obliqüidade da eclíptica na data $t = t_0+1$ (muito parecido a ε_0 e ε_1 já que as variações em ε são muito pequenas).

Podemos relacionar esses elementos por fórmulas imediatas a partir da Figura 2:

$$p = \psi' - \lambda' . \cos\varepsilon_1 \tag{8}$$

$$m = \psi' . \cos\varepsilon_1 - \lambda' \tag{9}$$

$$n = \psi' . \operatorname{sen}\varepsilon_1 \ . \tag{10}$$

Para obtermos as variações de coordenadas, coloquemos um sistema direto de eixos cartesianos com x coincidindo com γ_0, e z coincidindo com PN_0 (Fig. 1). Devemos rodar esse sistema até que ele passe a ter x' coincidindo com γ e z' coincidindo com PN_1. Existem vários métodos, mas os 2 mais evidentes são:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\lambda').R_x(-\varepsilon_1).R_z(-\psi').R_x(\varepsilon_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \qquad (11)$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(-m).R_y(n)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .} \qquad (12)$$

Desenvolvendo o produto matricial e retornando a coordenadas equatoriais, obtém-se:

$$\cos\alpha.\cos\delta = \cos\alpha_0.\cos\delta_0 - m.\mathrm{sen}\alpha_0.\cos\delta_0 - n.\mathrm{sen}\delta_0 \qquad (13)$$

$$\mathrm{sen}\alpha.\cos\delta = m.\cos\alpha_0.\cos\delta_0 + \mathrm{sen}\alpha_0.\cos\delta_0 \qquad (14)$$

$$\mathrm{sen}\delta = n.\cos\alpha_0.\cos\delta_0 + \mathrm{sen}\delta_0 \ ; \qquad (15)$$

se a fórmula inicial for a (11), para chegar às 3 últimas equações, deve-se usar as equações (9) e (10), desprezando efeitos correspondentes ao produto $\psi'\lambda'$.

A equação (15) pode ser simplificada se substituirmos δ por $\delta_0+\Delta\delta$, conforme equação (6); desenvolvendo o seno da soma resultante, e fazendo as aproximações

$$\mathrm{sen}\Delta\delta \cong \Delta\delta \qquad (16)$$

e

$$\cos\Delta\delta \cong 1 , \qquad (17)$$

obtemos:

$$\Delta\delta \cong n.\cos\alpha_0 . \qquad (18)$$

Usando o mesmo método na equação (13), substituindo também α por $\alpha_0+\Delta\alpha$, e usando aproximações do tipo (16) e (17), bem como o resultado (18), obteremos:

$$\Delta\alpha \cong m + n.\mathrm{sen}\alpha_0.\tan\delta_0 . \qquad (19)$$

As fórmulas (18) e (19) são válidas para um período de 1 ano exatamente; caso o período seja diferente, teremos que multiplicar pelo intervalo de tempo $(t-t_0)$ em anos trópicos:

$$\Delta\alpha_p \cong (m + n.\text{sen}\alpha_0.\tan\delta_0)(t - t_0) \tag{20}$$

$$\Delta\delta_p \cong n.\cos\alpha_0.(t - t_0) \quad , \tag{21}$$

que são as equações procuradas.

Os valores aproximados de m e n são:

$$m = 3^{s},07234, \tag{22}$$

e

$$n = 20'',0468 \ . \tag{23}$$

88. VARIAÇÃO RIGOROSA NAS COORDENADAS DE UM ASTRO DEVIDO À PRECESSÃO

Vamos estudar os efeitos da precessão geral nos sistemas equatoriais e eclípticos.

Procuremos relacionar o sistema equatorial de uma data, com o correspondente de uma época (aqui simbolizado pelo índice 0), uma vez que a precessão geral fá-lo variar com o tempo.

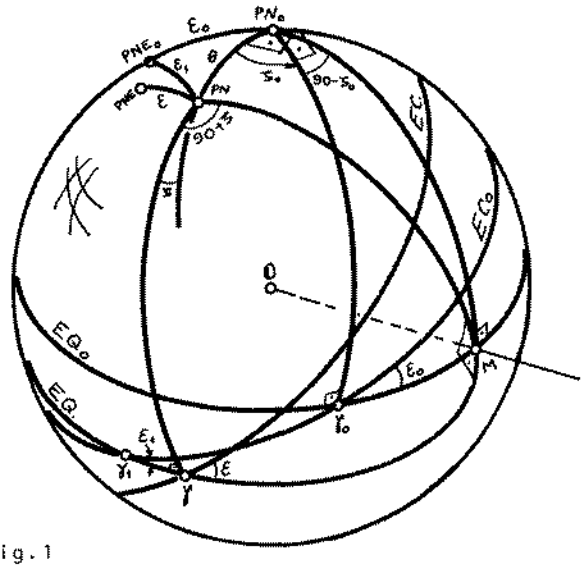


Fig. 1

Se admitíssemos que não houvesse variação na obliqüidade da eclíptica, então haveria a necessidade de girar o eixo de rotação de um ângulo ε_0 no sentido anti-horário (visto de γ_0), até coincidir com o eixo de rotação da eclíptica PNE_0. Em seguida girar o ponto γ_0 até sua nova posição, no sentido horário, (visto de PNE_0) se for para uma data futura em relação à época (sentido inverso no caso contrário). Finalmente girar, em torno de $O\gamma$, no sentido horário (visto de γ), o eixo de rotação da Terra de um ângulo ε_0.

Ocorre, no entanto, que a obliqüidade da eclíptica varia também, de modo que os pólos celestes não realizam, apenas, movimento de rotação, mas sim um movimento grosseiramente espiralado em torno do pólo da eclíptica. Além disso, por motivo de forças provindas dos outros corpos do Sistema Solar (principalmente Lua) o eixo da eclíptica não se mantém sempre na mesma direção.

Admitamos inicialmente como sendo PN_0, γ_0 e PNE_0 o pólo Norte, o ponto Vernal e o pólo Norte da Eclíptica, respectivamente,

no instante da época. A época geralmente é $T_0 = 1900,0$; caso não seja, definamos t_0 de modo que:

$$t_0 = T_0 - 1900 \tag{1}$$

onde t_0 é o intervalo de tempo entre 1900 e o instante tomado como época; t_0 é medido em anos trópicos.

No instante T, dado por

$$T = T_0 + t \tag{2}$$

onde t é o intervalo de tempo (medido em anos trópicos) desde a época T_0 até o instante t, haverá uma nova posição dos pontos acima citados. O pólo Norte PN_0 se desloca até PN, distante de PN_0 de um ângulo θ. Este deslocamento faz variar o plano do Equador até nova posição, passando o ponto γ_0 para a posição γ_1, na mesma eclíptica da época. Como o pólo Norte da Eclíptica também varia, o plano da Eclíptica se desloca a uma nova posição. O cruzamento da nova Eclíptica com o novo Equador define a nova posição γ do ponto Vernal. A nova obliqüidade da Eclíptica passa a ser ε em vez de ε_0.

Chamemos de M o nodo ascendente do novo Equador em relação ao antigo. Sua ascensão reta, no sistema da época, é $90-\zeta_0$, onde ζ_0 é o ângulo diedro entre o ponto γ_0 e a direção do plano de deslocamento do PN_0 (plano que contém θ). Chamemos de $90+\zeta$ a ascensão reta do ponto M no novo sistema de coordenadas.

Baseando-se em teoria, mas principalmente em fatos de observação, Simon Newcomb, achou as seguintes equações que dão os valores de ζ_0, ζ e θ em função do tempo:

$$\zeta_0 = \left(2304''{,}250 + 1''{,}396\,\frac{t_0}{100}\right)\frac{t}{100} + 0''{,}302\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0''{,}018\left(\frac{t}{100}\right)^3 \tag{3}$$

$$\zeta = \zeta_0 + 0''{,}791\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0''{,}001\left(\frac{t}{100}\right)^3 \tag{4}$$

$$\theta = \left(2004''{,}682 - 0''{,}853\,\frac{t_0}{100}\right)\frac{t}{100} - 0''{,}426\left(\frac{t}{100}\right)^2 - 0''{,}042\left(\frac{t}{100}\right)^3 \tag{5}$$

O fato de aparecer o fator 100 em denominador é que o tem

po deve ser dado em séculos trópicos. Assim, nas equações (3), (4) e (5), t deve ser em anos trópicos, com início em 31 de dezembro de 1899 ao meio-dia de Greenwich.

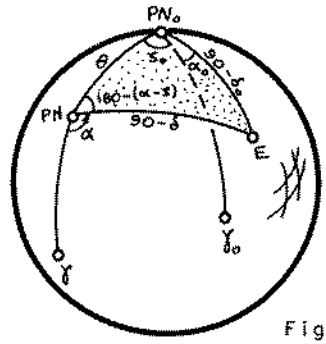


Fig.2

Vamos, agora, verificar como variam a ascensão reta e a declinação (α_0, δ_0) de uma estrela E quando se as passam do sistema da época para o da data. Para isso vamos resolver o triângulo esférico dado por PN, PN_0, E.

Aplicando a equação 34.(4), (lei dos senos), teríamos:

$$\cos\delta.\operatorname{sen}(\alpha-\zeta) = \cos\delta_0.\operatorname{sen}(\alpha_0+\zeta_0) \quad . \qquad (6)$$

Aplicando a equação 33.(4) teremos (lei do co-seno):

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\theta.\cos\delta_0.\cos(\alpha_0+\zeta_0) + \cos\theta.\operatorname{sen}\delta_0 \quad . \qquad (7)$$

Aplicando a equação 35.(1), obtemos:

$$\cos\delta.\cos(\alpha-\zeta) = \cos\theta.\cos\delta_0.\cos(\alpha_0+\zeta_0) - \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\delta_0 \quad . \qquad (8)$$

Os mesmos resultados poderiam ser obtidos por matrizes de rotação (item 64). Admitamos que desejemos obter novas coordenadas (α, δ) de uma estrela cujas coordenadas eram (α_0, δ_0).

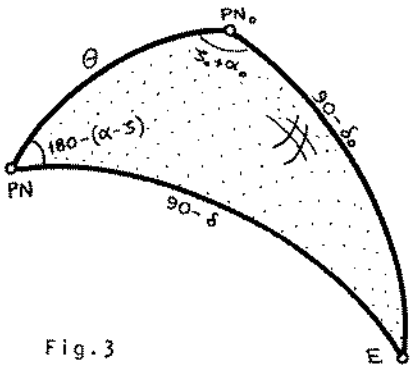


Fig.3

Utilizando as informações do início deste item, veremos que o antigo sistema deveria inicialmente girar de $(90-\zeta_0)$ no sentido anti-horário em torno de $z_0(0,PN)$; em seguida girar de θ no sentido an

ti-horário em torno de $x(x_0)$, e finalmente girar de $(90+\zeta)$ no sentido horário em torno de z; como o sistema equatorial é direto, o ângulo de rotação será $-(90+\zeta)$; obteremos, então:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = R_z(-\zeta-90)R_x(\theta)R_{z_0}(90-\zeta_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha_0,\delta_0} \tag{9}$$

ou, simplificando:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = R_z(-\zeta)R_x(\theta)R_z(-\zeta_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha_0,\delta_0}} \tag{10}$$

onde

$$\boxed{R_z(-\zeta)R_x(\theta)R_z(-\zeta_0) = P} \tag{11}$$

chama-se *matriz de precessão*. Assim,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha_0,\delta_0} . \tag{12}$$

89. VARIAÇÃO DAS COORDENADAS DE UM ASTRO DEVIDO À NUTAÇÃO

Conforme descrito no item 86, a nutação representa a flutuação dos planos de referência em torno de um plano médio. As causas principais dessas flutuações dependem dos movimentos periódicos do Sol e da Lua em torno da Terra, causando forças de interação gravitacional variáveis com o tempo já que, além das órbitas não serem circulares, a Terra nem é esférica nem homogênea, nem sólida.

Chamamos de *Equador Médio*, *Pólo Médio* e *Ponto γ Médio* àquelas grandezas afetadas somente pela precessão. Às coordenadas de um astro referidas a esses elementos chamamos de *coordenadas médias* (α_M, δ_M).

Quando, além de levarmos em consideração os efeitos precessionais, utilizarmos os efeitos de nutação, os elementos definidos no parágrafo anterior trocam a nomenclatura média para *Verdadeira*. Assim, *coordenadas verdadeiras* (α_V, δ_V) são aquelas corrigidas da precessão e da nutação.

Define-se *nutação em longitude* ($\Delta\psi$) à correção que se deve somar à longitude média para se obter a longitude eclíptica verdadeira; representa o ângulo, medido sobre a eclíptica, entre o ponto γ_M (médio) e o verdadeiro (γ_V).

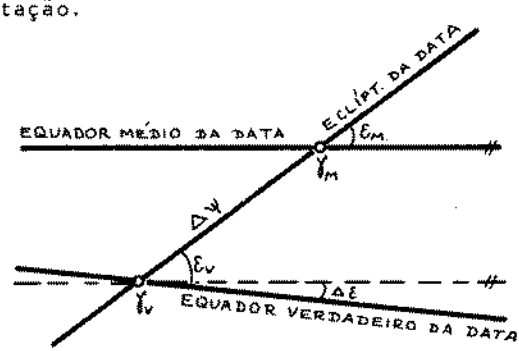


Fig.1

Denomina-se *nutação em obliqüidade* ($\Delta\varepsilon$) à diferença entre a obliqüidade verdadeira e a média:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_V - \varepsilon_M \quad . \qquad (1)$$

Seja (x_0, y_0, z_0) um sistema de coordenadas cartesianas li-

gado ao sistema médio da data. Procuremos determinar as coordenadas (x,y,z) de um sistema cartesiano ligado ao sistema verdadeiro da data. Pela Figura 1 vemos que para levar o sistema (x_0,y_0,z_0) até (x,y,z), teremos que:

- rodar (x_0,y_0,z_0) em torno de $x_0(\gamma_M)$ de um ângulo ε_M no sentido anti-horário;
- rodar o novo sistema (x',y',z') em torno de $z'(PNE)$ de um ângulo $\Delta\psi$ no sentido horário;
- rodar o novo sistema (x'',y'',z'') em torno de $x''(\gamma_V)$ de um ângulo $\varepsilon_V = \varepsilon_M + \Delta\varepsilon$ no sentido horário; matematicamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_V = R_{x''}(-\varepsilon_M-\Delta\varepsilon).R_{z'}(-\Delta\psi).R_x(\varepsilon_M).\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}_M \quad ; \qquad (2)$$

a equação anterior pode ser escrita:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_V = N.\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}_M \quad , \qquad (3)$$

onde

$$N = R_{x''}(-\varepsilon_M-\Delta\varepsilon).R_{z'}(-\Delta\psi).R_x(\varepsilon_M) \qquad (4)$$

é a chamada *matriz de nutação*.

Utilizando as equações 64.(4), (5) e (6), obtemos:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi.\cos\varepsilon & -\Delta\psi.\operatorname{sen}\varepsilon \\ \Delta\psi.\cos\varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi.\operatorname{sen}\varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} . \qquad (5)$$

Utilizando 62.(8) tanto para as coordenadas médias como verdadeiras, e utilizando nas equações resultantes o mesmo procedimento descrito na resolução do sistema de equações (13), (14) e (15) do item 87, obteremos:

$$\Delta\alpha_N \cong (\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon.\operatorname{sen}\alpha.\tan\delta)\Delta\psi - \cos\alpha.\tan\delta.\Delta\varepsilon \qquad (6)$$

$$\Delta\delta_N \cong \operatorname{sen}\varepsilon.\cos\alpha.\Delta\psi + \operatorname{sen}\alpha.\Delta\varepsilon \quad . \qquad (7)$$

Quanto aos valores de $\Delta\psi$ e $\Delta\varepsilon$, eles são obtidos por meio de equações quase que só experimentais, que consistem na soma de uma série de valores. As equações (8) e (9) dão uma idéia dessa série:

$$\begin{aligned}\Delta\psi = {} & -(17''{,}2327 + 0''{,}01737t).\operatorname{sen}\Omega + (0''{,}2088 + 0''{,}00002t).\operatorname{sen}2\Omega + \\ & + 0''{,}0045 \operatorname{sen}(2\omega_M+\Omega) - 0''{,}0010 \operatorname{sen} 2\omega_M - 0''{,}00004 \operatorname{sen}(2\omega_S-\Omega) + \\ & - 0''{,}0003 \operatorname{sen} 2(\omega_M-\Omega) + \ldots\end{aligned} \qquad (8)$$

e

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon = {} & (9''{,}2100 + 0''{,}00091t).\cos\Omega - (0''{,}0904 - 0''{,}0004t).\cos2\Omega - \\ & - 0''{,}0024 \cos(2\omega_M+\Omega) + 0''{,}0002 \cos(2\omega_S-\Omega) + 0''{,}0002 \cos 2(\omega_M+\Omega) + \\ & + (0''{,}5522 - 0''{,}00029t).\cos2\lambda_S + \ldots\end{aligned} \qquad (9)$$

onde:

t : intervalo de tempo em séculos julianos de 36525 dias, a partir de $0^d{,}5$ TE de janeiro de 1900.

Ω : é a longitude celeste do nódo ascendente médio da órbita lunar na Eclíptica, medida desde o equinócio médio da data.

ω_M : é o argumento (ângulo) da posição em que a Lua está o mais próximo da Terra (perigeu lunar).

ω_S : longitude média do perigeu do Sol, medida desde o equinócio médio da data.

λ_S : é a longitude média geométrica do Sol, medida desde o equinócio médio da data.

A nutação causa essa oscilação do pólo verdadeiro em torno do médio num período aproximado de 19 anos, fazendo com que o pólo verdadeiro descreva uma órbita grosseiramente elíptica ao redor do pólo médio; essa órbita tem amplitude de cerca de $9''{,}210$, sendo ela chamada de *constante da nutação*.

Capítulo 10

Aberração da Luz

90. EFEITO DE ABERRAÇÃO

Já lhe deve ter ocorrido de ouvir o som de um avião, e quando tentou procurá-lo na direção emissora do ruído, não o encontrou lá, mas bem mais adiante. Este fato ocorre porque o avião emitiu o som na direção em que se olhou, há algum tempo atrás, e durante o intervalo de tempo que o som percorreu a distância que o separava do observador o avião se deslocou. Em outras palavras, enquanto o som viajava com cerca de 340 m/s, o avião se deslocava, digamos com 300 m/s. Assim, não se vê o avião onde o som parece acusá-lo.

Igual fenômeno ocorre com uma fonte luminosa. Em nosso caso, essas fontes serão os astros. Seja A_1 a posição do astro quando emitir o fóton correspondente a um fenômeno qualquer. Para atingir o observador O, percorrendo o caminho A_1O, esse fóton necessita de um certo tempo, devido a sua velocidade ser finita. Como o astro gira em torno do observador com certa velocidade, durante o mesmo intervalo de tempo que o fóton necessita para atingir o observador, o astro se desloca de A_1 até A_2.

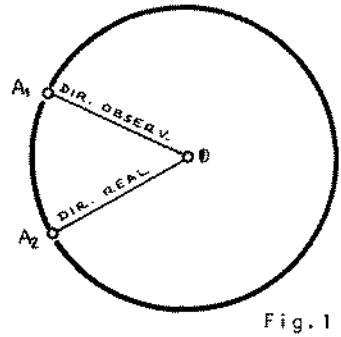


Fig. 1

Isso significa que, quando "vemos" um astro, na realidade estamos vendo a posição em que ele se encontrava no instante da emissão daquele fóton.

Ocorre, pois, um deslocamento angular entre a posição observada do astro e aquela em que ele realmente se encontra no instante da observação; esta última chama-se *posição geométrica*. Notar que essa diferença angular ocorre por 2 causas:

a) velocidade de deslocamento relativo entre fonte emissora e receptora;
b) velocidade finita da luz.

Ao efeito combinado dos fenômenos (a) e (b) chamamos de *aberração*[1].

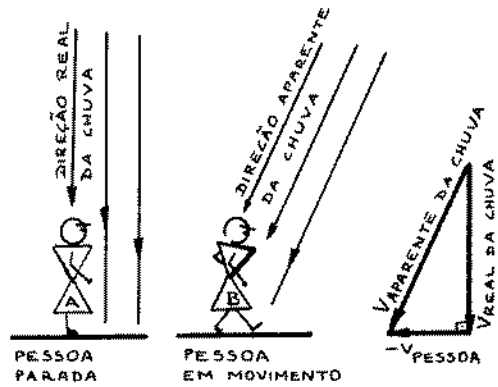
Chamamos de *correção de tempo de luz* ao efeito de vermos, com certo atraso, a ocorrência de um fenômeno devido ao tempo que a luz leva para viajar desde a fonte emissora até à fonte receptora. Como geralmente não conhecemos esse tempo para as estrelas, ele será ignorado, não nos importando, pois, quando ocorreu o fenômeno causador do fóton que está sendo recebido. Para os astros do Sistema Solar, porém, esse efeito deve ser considerado devido à menor distância até a Terra e às maiores velocidades angulares envolvidas.

Chamamos de *aberração estelar* à variação angular entre a posição geométrica e a observada (se não houvesse a atmosfera terrestre) causada pela velocidade relativa entre astro e observador.

Geralmente a soma dos dois efeitos (correção de tempo de luz + aberração estelar) chama-se *aberração planetária* (exatamente por ser aplicada essencialmente aos astros do Sistema Solar).

Criemos um modelo para procurar explicar melhor a diferença entre correção de tempo de luz e aberração estelar. Imagine que, num dia sem vento perto do chão, de uma nuvem bem alta cai uma chuva. Para a pessoa A, parada (Fig. 2), a chuva estará caindo na vertical, e ela se molha igualmente em todos seus lados. Se olhar para cima, talvez nem mais veja a nuvem: devido ao "tempo de chuva" (tempo para a chuva chegar da nuvem até ao chão),

Fig.2



1. Aberração = aberratione [latim] = desvio

a nuvem já pode ter se deslocado. Para a pessoa B em movimento na chuva, a direção aparente da chuva não é mais vertical, mas sim inclinada, parecendo provir de um ponto à sua frente; tanto isso é verdade que a pessoa realmente ficará mais molhada na parte frontal. Se substituirmos a palavra "chuva" por "luz", teremos, no segundo caso, a aberração estelar devido à velocidade relativa do observador com relação ao emissor, e no primeiro caso, o tempo de luz. Devido apenas à aberração estelar, vemos o astro estelar sempre deslocado para a direção e sentido da velocidade relativa resultante entre emissor e receptor.

Considerando que a Terra tem movimento diário de rotação, movimento anual orbital em torno do Sol, e movimento secular (período de aproximadamente 250 000 000 anos em torno do centro da Galáxia), teremos aberrações diária, anual e secular, as quais estudaremos nos itens 92, 93 e 94.

Ressaltemos o fato de que em Astronomia Estelar o efeito de Tempo de Luz será desprezado, utilizando-se apenas correções devido à velocidade relativa entre observador e emissor.

91. ÂNGULO DE ABERRAÇÃO ESTELAR

Vamos ver a lei geral da aberração estelar. Definamos alguns elementos por meio da Figura 1:

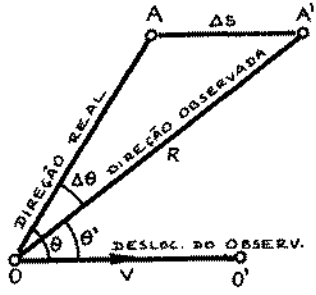


Fig.1

— $\vec{OO'}$: direção para a qual o observador está se deslocando no instante em que a luz, parecendo provir de A', o atinge em O;

— $\vec{AA'}$: é a direção paralela à direção de deslocamento da Terra; notar que o ângulo de aberração não existiria se a Terra se deslocasse ao encontro da estrela;

— v : velocidade relativa entre estrela e observador;

— R : distância da estrela ao observador;

— ΔS : distância "percorrida" pela imagem da estrela devido à velocidade relativa;

— Δθ : *ângulo de aberração*;

— Δt : intervalo de tempo entre a emissão em A e observação da luz em O;

— A' : é a direção em que se vê a estrela;

— θ' : ângulo entre a direção do deslocamento e a posição observada da estrela;

— A : é a direção em que a estrela realmente se encontrava no instante da emissão (excetuando-se o problema do tempo de luz);

— θ : ângulo entre a direção do deslocamento e a posição geométrica da estrela.

Supondo movimentos uniformes, podemos escrever:

$$\Delta S = v.\Delta t \qquad (1)$$

e

$$R = c.\Delta t \qquad (2)$$

onde c é a velocidade da luz.

Igualando os dois valores t tirados dessas duas equações, obtemos:

$$\frac{\Delta S}{v} = \frac{R}{c} \quad . \tag{3}$$

Permutando os meios, ficamos com:

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{v}{c} \quad . \tag{4}$$

Chamemos v/c de *constante de aberração* K:

$$\boxed{K = \frac{v}{c}} \quad . \tag{5}$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo AA'O, temos:

$$\frac{R}{\text{sen}\theta} = \frac{\Delta S}{\text{sen}\Delta\theta} \quad .$$

Como o deslocamento é pequeno, $\text{sen}\Delta\theta \simeq \Delta\theta$ (desde que ele seja medi do em radianos); assim:

$$\Delta\theta \simeq \frac{\Delta S}{R} \, . \, \text{sen}\theta \quad . \tag{6}$$

Comparando as equações (6) e (4) podemos escrever:

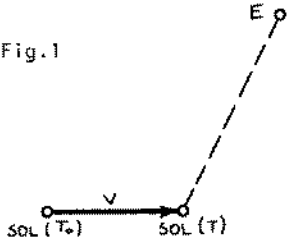
$$\boxed{\Delta\theta = K \, . \, \text{sen}\theta} \quad . \tag{7}$$

Notar que essa é uma lei geral, e que vale para qualquer tipo de aberração: diurna, anual, secular ou planetária, conforme definições nos itens seguintes.

92. ABERRAÇÃO SECULAR DAS ESTRELAS

Sabemos já que a Terra gira ao redor do Sol. Esse, por sua vez, gira em redor do centro de nossa Galáxia, a Via-Láctea. Em relação às estrelas que nos estão mais próximas, a velocidade do Sol é da ordem de 20 km/s, e ele parece se deslocar para um ponto próximo à direção da Constelação de Hércules. O ponto para o qual o Sol se dirige, chama-se Ápex[1]. Vejamos como esse movimento do Sol na Galáxia influi na posição de um astro.

Fig.1



Ao invés de considerar que o Sol se move num sentido, é mais fácil supor que as estrelas se movem no sentido contrário.

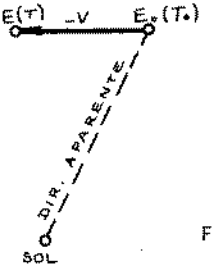


Fig.2

Assim, se uma estrela emite um raio no instante T_0, quando a luz atinge a Terra a posição real da estrela é E e não E_0. Em outras palavras, estamos vendo o passado da estrela.

Imaginemos que todas as estrelas se encontram sobre uma mesma esfera celeste, da qual o Sol é o centro e onde nós nos encontramos (vamos admitir que a distância Terra-Sol seja desprezível face ao raio da esfera celeste). Sejam ABC três estrelas que no instante T_0 se encontram na esfera celeste. Parecerá para nós, que a esfera celeste se desloca no sentido do Ápex, conforme item 90, e as estrelas serão vistas em A', B' e C' respectivamente.

Logo, o hemisfério que contém o Ápex parece ser mais rico em estrelas, mesmo supondo que a distribuição física de estrelas seja uniforme no espaço.

---

1. Ápex = apex [latim] = ponto mais elevado

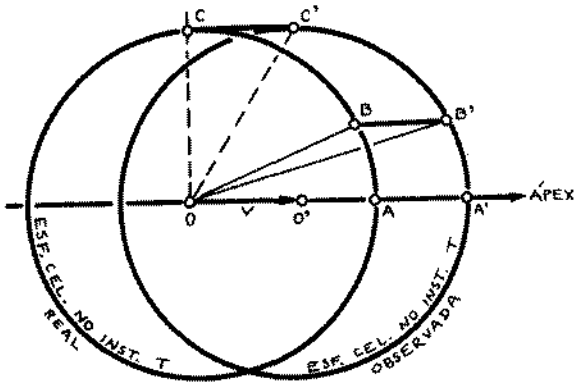


Fig.3

Em conclusão, parece que as estrelas estão deslocadas para a direção à qual o movimento do Sol se dá: para o Ápex.

A esse deslocamento aparente chamamos de aberração secular das estrelas. A constante de aberração secular vale aproximadamente 14":

$$K_S \cong 14'' \quad . \qquad (1)$$

93. ABERRAÇÃO ANUAL

Vamos admitir a Terra como um ponto que gira em torno do Sol, em órbita circular. Num certo instante a Terra estará no ponto A, com sua velocidade dirigida no sentido indicado pela seta. Devido à aberração, a estrela parecerá se deslocar no sentido da seta A'. Lembrar que a aberração sempre desloca a estrela no sentido do movimento da Terra (item 80). Quando a Terra estiver em B, deslocando-se conforme seta, a estrela se deslocará segundo B', e assim sucessivamente em C e D até que a Terra retorne a A e a posição aparente da estrela a A', tendo esta última descrito uma circunferência de raio angular v/c. Essa circunferência se chama *circunferência de aberração*, e representa o hodógrafo (item 132) de velocidade da estrela. O mesmo esquema poderia ser desenhado conforme Figura 2. No primeiro, a vista é de cima; no segundo, sobre a esfera celeste. Evidentemente, a projeção da circunferência de aberração na esfera celeste (suposta plana numa pequena região) será uma elípse, passando à circunferência para estrelas polares celestes, e sendo um segmento de reta para as estrelas eclípticas.

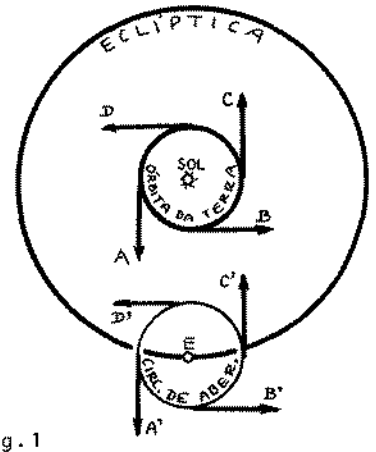


Fig. 1

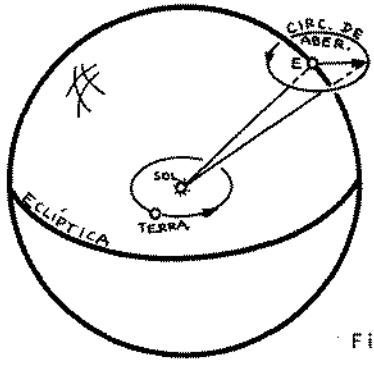


Fig. 2

Procuremos deduzir quais as correções que devem ser feitas nas coordenadas geométricas de uma estrela, a fim de se obter as posições aparentes (observadas) dessa estrela (a palavra obser

vada é admitindo a inexistência da atmosfera da Terra).

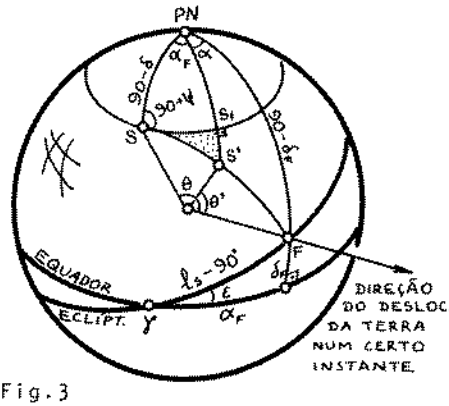


Fig.3

Seja S uma estrela cujas coordenadas são α e δ. Devido ao deslocamento da Terra numa certa direção num dado momento, a aberração fará com que a estrela S pareça estar em S', de coordenadas α' e δ', de modo que:

$$\Delta\alpha_A = \alpha' - \alpha \qquad (1)$$

e

$$\Delta\delta_A = \delta' - \delta \qquad (2)$$

O ângulo de aberração será, segundo a equação (7) do item 91:

$$\widehat{SS'} = \Delta\theta = \theta - \theta' = K.\text{sen}\theta \quad . \qquad (3)$$

Para a velocidade orbital da Terra, usando a equação (5), teremos, para a *constante de aberração anual*:

$$\boxed{K_A = 20''{,}4958} \quad . \qquad (4)$$

Para determinar $\Delta\alpha_A$ e $\Delta\delta_A$, vamos resolver o triângulo SS_1S' (Fig. 4) que apesar de esférico é muito pequeno, e portanto, vamos admití-lo como um triângulo plano. Aplicando a definição de co-seno ao ângulo ψ, obtemos:

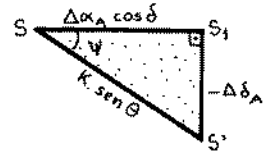


Fig.4

$$\Delta\alpha_A = K.\text{sen}\theta.\cos\psi.\sec\delta \quad . \qquad (5)$$

Aplicando, ao mesmo ângulo, a definição de seno, resulta:

$$\Delta\delta_A = -K.\text{sen}\theta.\text{sen}\psi \quad . \qquad (6)$$

Procuremos eliminar as variáveis θ e ψ dessas 2 equações.

Aplicando a lei dos senos no triângulo esférico S(PN)F, temos (equação 34.(4)):

$$\operatorname{sen}\theta.\cos\psi = \cos\delta_F.\operatorname{sen}(\alpha_F-\alpha) \quad . \tag{7}$$

Aplicando a lei do seno & co-seno (35.(1) ao mesmo triângulo, resulta:

$$-\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}\delta_F.\cos\delta - \cos\delta_F.\operatorname{sen}\delta.\cos(\alpha_F-\alpha) \quad . \tag{8}$$

Procuremos agora introduzir a longitude eclíptica da direção do movimento da Terra.

Admitamos que num determinado instante a Terra se encontre num ponto T qualquer, deslocando-se na direção TF. O Sol tem nesse instante uma longitude $\ell_s = \overset{\frown}{S'\gamma}$. A direção TF seria perpendicular à direção TS'. Logo, pela Figura 5 vê-se que $\overset{\frown}{\gamma F} = \ell_s - 90$. Essa é a longitude da direção do deslocamento da Terra num dado instante.

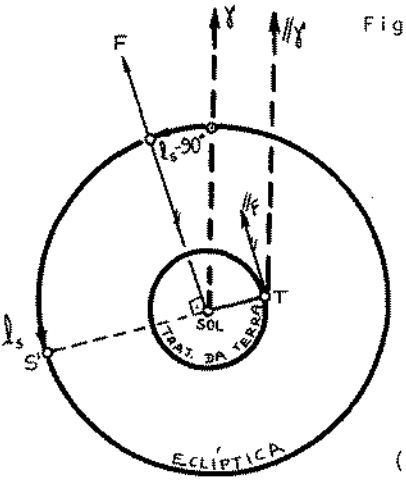


Fig.5

Aplicando a lei do co-seno (33.(4)) no triângulo γFG (no lado γF) obtemos:

$$\operatorname{sen}\ell_s = \cos\alpha_F.\cos\delta_F \quad . \tag{9}$$

No mesmo triângulo, a equação da lei dos senos fornece:

$$-\cos\ell_s.\operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}\delta_F \quad . \tag{10}$$

Aplicando, no mesmo triângulo, a lei do seno & co-seno, temos:

$$-\cos\ell_s.\cos\varepsilon = \operatorname{sen}\alpha_F.\cos\delta_F \quad . \tag{11}$$

Substituindo as equações (9), (10) e (11) em (7) e (8), e os resultados em (5) e (6), obtemos:

$$\Delta\alpha_{AA} = - K_A.\sec\delta(\cos\alpha.\cos\ell_s.\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\ell_s) \qquad (12)$$

e

$$\Delta\delta_{AA} = -K_A \left[\cos\ell_s.\cos\varepsilon(\operatorname{tg}\varepsilon.\cos\delta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\delta) + \cos\alpha.\operatorname{sen}\delta.\operatorname{sen}\ell_s\right] . \qquad (13)$$

Assim, para uma dada estrela (α e δ conhecidos), podemos calcular as posições aparentes (α' e δ'), devido à aberração anual, se conhecermos o instante desejado (isso fornece a longitude do Sol).

Existem correções adicionais ao se levar em conta a não circularidade da órbita terrestre em torno do Sol. Vamos deixar o caso para cursos mais específicos.

As 2 últimas fórmulas podem ser escritas de forma convencional utilizando-se os chamados *Números Diários de Bessel* C e D, e de constantes estelares c, d, c' e d' conforme definições:

$$C = -K_A.\cos\varepsilon.\cos\ell_s \qquad (14)$$

$$D = -K_A.\operatorname{sen}\ell_s \qquad (15)$$

$$c = \cos\alpha.\sec\delta \qquad (16)$$

$$d = \operatorname{sen}\alpha.\sec\delta \qquad (17)$$

$$c' = \operatorname{tan}\varepsilon.\cos\delta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\delta \qquad (18)$$

$$d' = \cos\alpha.\operatorname{sen}\delta \; . \qquad (19)$$

Assim:

$$\Delta\alpha_{AA} = Cc + Dd \qquad (20)$$

$$\Delta\delta_{AA} = Cc' + Dd' \; . \qquad (21)$$

É possível demonstrar-se que a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\alpha',\delta'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} + A_A \quad . \tag{22}$$

onde

$$A_A = \begin{pmatrix} -D \\ C \\ C.\tan\varepsilon \end{pmatrix} \tag{23}$$

(A_A recebe o nome de *matriz de aberração anual*), pode representar as coordenadas (α',δ') de uma estrela após corrigidas da aberração anual.

94. ABERRAÇÃO DIÁRIA

Lembrando que a aberração aparece do efeito combinado do movimento da Terra e da velocidade finita da luz, vemos que devido ao movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo, devemos ter uma aberração também, a qual é chamada de *aberração diurna* ou *diária*.

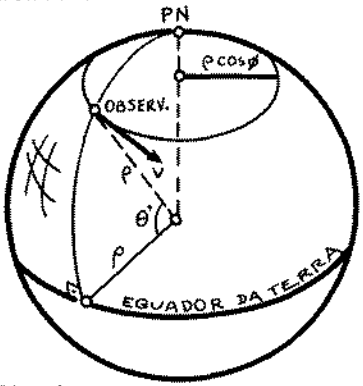


Fig. 1

Seja um observador cuja latitude geocêntrica é Ø. Sua velocidade de rotação diária é dada por:

$$v = \omega\rho \cos \varnothing \qquad (1)$$

onde

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ .rad/segundo} , \qquad (2)$$

é a velocidade angular de rotação da Terra, e

$$\rho = 6378 \text{ km} \qquad (3)$$

é o raio equatorial da Terra.

Substituindo (2) e (3) em (1) teremos:

$$v = 0,464\, \bar{\rho} \cos \varnothing \text{ km/s} \qquad (4)$$

Substituindo (4) na equação 91.(5) obtemos a aberração diária K:

$$K_D = 0''\!,320\, \bar{\rho} \cos \varnothing , \qquad (5)$$

ou

$$K_D = 0^s\!,0213\, \bar{\rho} \cos \varnothing , \qquad (6)$$

onde

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_{local}}{\rho} . \qquad (7)$$

Procuremos achar as variações $\Delta\alpha_D$ e $\Delta\delta_D$ na posição de uma estrela devido à aberração diária.

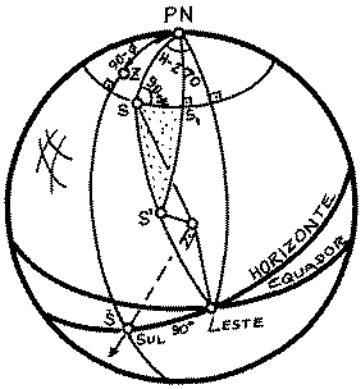


Fig.2

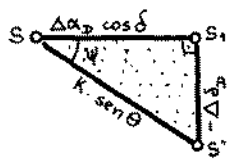


Fig.3

Pela equação 91.(7) sabemos que:

$$\Delta\theta = K.\mathrm{sen}\theta \ ; \tag{8}$$

Supondo o triângulo SS_1S' suficientemente pequeno para poder ser considerado plano, temos:

$$\Delta\alpha_D \cos\delta = K.\mathrm{sen}\theta.\cos\psi \tag{9}$$

e

$$-\Delta\delta_D = K.\mathrm{sen}\theta.\mathrm{sen}\psi \ . \tag{1}$$

Do triângulo S.(PN).Este temos que:

$$\mathrm{sen}\theta.\cos\psi = \cos H \tag{11}$$

e

$$\mathrm{sen}\theta.\mathrm{sen}\psi = -\mathrm{sen}\delta.\mathrm{sen}H \ . \tag{12}$$

Substituindo (11), (12) e (5) em (9) e (10), obtemos:

$$\boxed{\Delta\alpha_D = \alpha' - \alpha = 0^s,02132\,\bar{p}\cos\phi.\cos H.\sec\delta} \tag{13}$$

e

$$\Delta\delta_D = \delta' - \delta = 0''{,}3198\,\bar{\rho}\,\cos\phi.\mathrm{sen}H.\mathrm{sen}\delta \quad , \qquad (14)$$

ou

$$\Delta\alpha_{AD} = K_D.\cos H.\sec\delta \qquad (15)$$

e

$$\Delta\delta_{AD} = K_D.\mathrm{sen}H.\mathrm{sen}\delta \quad . \qquad (16)$$

Capítulo 11

Paralaxe

95. EFEITO DE PARALAXE

Enquanto que a aberração é um efeito causado pela velocidade relativa entre astro e observador, a *Paralaxe*[1] será um efeito aparente causado pela posição relativa entre astro e observador. A paralaxe poderia ser comparada ao erro de leitura que se faz quando não se olha para uma graduação, por trás do fiel de um cursor, exatamente na perpendicular que passa por esse fiel. Pode ser imaginado também como sendo a variação na posição aparente de um objeto muito distante com relação a um mais próximo quando nos deslocamos em relação a eles.

A paralaxe é, pois, um efeito geométrico aparente de deslocamento angular do astro devido à posição relativa entre astro e observador.

Suponhamos um observador inicialmente no ponto O. Uma estrela A, mais próxima do que outras estrelas de fundo (que suporemos presas à esfera celeste muito distante), parecerá estar na direção $O\bar{A}$. Se o observador de deslocar até O', na direção OO' da esfera celeste, o mesmo astro A será visível na direção $O'\bar{A}'$, havendo entre essas duas direções $O\bar{A}$ e $O'\bar{A}'$ um ângulo $\Delta\theta$. Pelo teorema do ângulo externo, aplicado ao triângulo OO'A, temos:

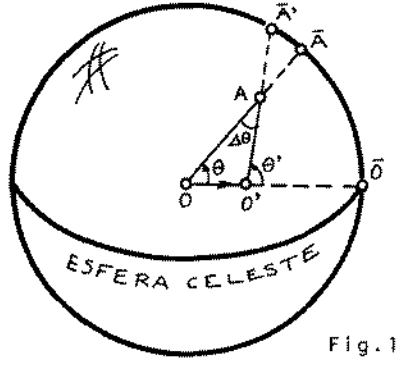


Fig.1

$$\Delta\theta = \theta' - \theta, \qquad (1)$$

onde $\Delta\theta$ recebe o nome de *ângulo de paralaxe*, ou *paralaxe*, do astro.

---

1. Paralaxe = para (além) [grego] + allassein (mudança) [grego] = mudança por estarem além da posição.

Se o deslocamento do observador for muito pequeno, então: $OA \cong O'A$ e podemos aplicar a lei dos senos no triângulo anterior, obtendo:

$$\Delta\theta = \frac{OO'}{OA} \operatorname{sen}\theta \quad . \qquad (2)$$

Notar que, se pudermos conhecer a paralaxe $\Delta\theta$ (que é a mudança de direção de observação devido a um deslocamento) e o ângulo θ entre o astro e a direção do deslocamento, poderemos determinar OA, que é a distância da estrela ao observador. Assim, a paralaxe é um meio (muito utilizado) para a determinação da distância de estrelas, e astros em geral, até nós. Muitas vezes, em lugar de se dar a distância do astro, dá-se sua paralaxe como indicativo de distância.

Existem 2 tipos de paralaxe que são considerados em Astronomia: a *paralaxe anual* e a *paralaxe diária*.

Chamamos de *paralaxe diária* ao deslocamento angular aparente de um astro quando um observador hipotético se desloca desde o centro da Terra até a um ponto sobre a sua superfície. Podemos dizer também que é o efeito da passagem de um *sistema Geocêntrico* (observador no centro da Terra) para um *sistema Topocêntrico*[2] (observador num ponto, geralmente, da superfície da Terra). O efeito de paralaxe diária é muito pequeno, só sendo levado em consideração para astros do sistema Solar; para estrelas ele é desprezível.

Paralaxe anual é o efeito de deslocamento angular aparente de um astro quando um observador hipotético se desloca do centro do Sol (*sistema heliocêntrico*[3]) ao centro da Terra (sistema geocêntrico). Esse efeito, apesar de não ultrapassar $0'',76$ para uma estrela (Sirius), é levado em consideração em trabalhos precisos de Astronomia. Nos itens seguintes estudaremos os dois casos descritos de paralaxe.

---

2. Topocêntrico = tropos (lugar) [grego] + centro = centrado no local
3. Heliocêntrico = Hélio (Sol) [grego] + centro = centrado no Sol

96. PARALAXE ANUAL

A massa do Sol é muito maior que a da Terra, de modo que o centro de gravidade do sistema Terra+Sol+Lua está muito próximo do centro do Sol. Vamos pois fazer coincidir o *sistema baricêntrico* [1] com o sistema heliocêntrico, ou seja, admitamos o Sol fixo no centro de massa do sistema. Visto do Sol, o astro A, que está bem mais próximo que a maioria das estrelas da esfera celeste, é visto, na direção $S\bar{A}$. Da Terra, a direção seria $T\bar{A}'$, deslocada de $S\bar{A}$. Como a Terra gira em torno do Sol, o ponto $\bar{A}'$ vai se deslocar também. Assim, ao fim de um ano, o ponto $\bar{A}'$ (imagem aparente de A vista da Terra) descreverá na esfera celeste uma elípse percorrida no mesmo sentido do movimento orbital da Terra (Fig. 1 e 2); essa foi uma evidência do movimento orbital da Terra em torno do Sol.

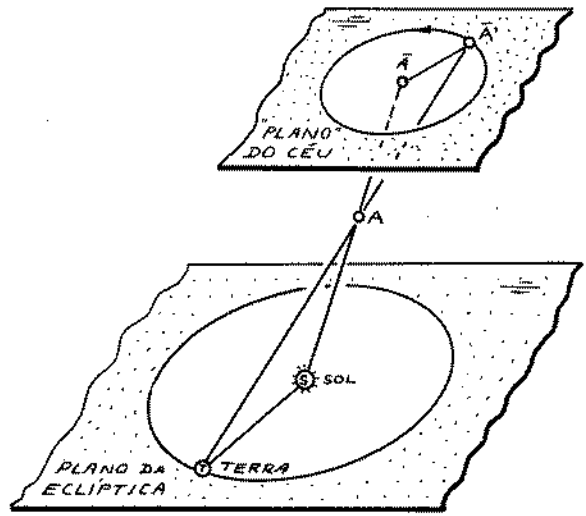


Fig. 1

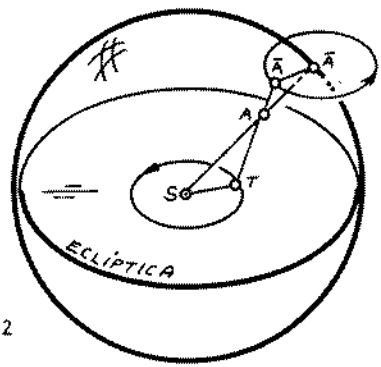


Fig. 2

Admitamos o instante no qual o triângulo STA é retângulo em T.

---

1. Baricêntrico = baros (massa) [grego] + centro = centrado na massa

Nesse caso o ângulo sob o qual a estrela "vê" a distância da Terra ao Sol (a) chama-se *paralaxe anual* da estrela ($\bar{\pi}$). Pela Figura 3 é fácil ver que

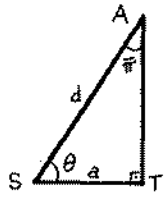


Fig.3

$$\operatorname{sen}\bar{\pi} = \frac{a}{d} \qquad (1)$$

onde d é a distância do Sol à estrela A.

Como a ângulo $\bar{\pi}$ é muito pequeno (o maior deles vale $0'',76$) podemos substituir o seno pelo valor do ângulo em radianos:

$$\boxed{\bar{\pi} \simeq a/d} \qquad (2)$$

ou, em segundos (lembrar que 1 radiano possui 206 265"), temos:

$$\bar{\pi}'' = 206265'' \frac{a}{d} \quad . \qquad (3)$$

Quando uma estrela se encontra a uma distância tal que $\bar{\pi}'' = 1$, dizemos que essa distância é igual a 1 parsec, que equivale aproximadamente a 3,26 anos-luz (1 *ano-luz* é a distância percorrida pela luz, no vácuo, durante 1 ano; vale cerca de 9,5 trilhões de quilômetros).

Procuremos ver como a paralaxe afeta as coordenadas α e δ de uma estrela. Seja O o observador que se desloca para a Terra, afastando do Sol. Com isso a imagem da estrela parece se aproximar do Sol, deslocando-se de A a A'.

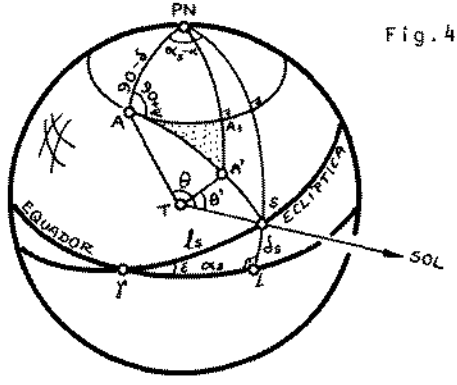


Fig.4

Aplicando a lei dos senos no Δ ATS (Fig.4), temos:

$$\operatorname{Sen}\Delta\theta = \frac{a}{d}\operatorname{sen}\theta \quad . \qquad (4)$$

Como Δθ é pequeno:

$$\Delta\theta \cong \overline{\pi}\ \mathrm{sen}\theta \ . \qquad (5)$$

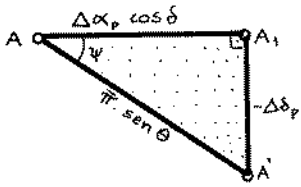


Fig.5

Do triângulo $AA'A_1$ (Fig.5), suposto plano, aplicando a definição de co-seno no ângulo ψ, temos:

$$\Delta\alpha_p = \alpha' - \alpha = \overline{\pi}.\mathrm{sen}\theta.\cos\psi.\sec\delta \ . \qquad (6)$$

Pela definição de seno, temos:

$$\Delta\delta_p = \delta' - \delta = -\overline{\pi}\ \mathrm{sen}\theta.\mathrm{sen}\psi \ . \qquad (7)$$

Procuremos eliminar θ e ψ. Para isso, apliquemos a lei dos senos no triângulo A(PN)S. Temos pela equação 34.(4):

$$\mathrm{sen}\theta.\cos\psi = \cos\delta_s.\mathrm{sen}(\alpha_s-\alpha) \ . \qquad (8)$$

No mesmo triângulo, a aplicação da equação 35.(1) resulta em:

$$-\mathrm{sen}\theta.\mathrm{sen}\psi = \mathrm{sen}\delta_s.\cos\delta - \cos\delta_s.\mathrm{sen}\delta.\cos(\alpha_s-\alpha) \ . \qquad (9)$$

Do triângulo SYL, aplicando as equações da lei dos senos, co-senos e seno & co-seno, obtemos:

$$\cos\ell_s = \cos\delta_s.\cos\alpha_s \qquad (10)$$

$$\mathrm{sen}\ell_s.\mathrm{sen}\varepsilon = \mathrm{sen}\delta_s \qquad (11)$$

$$\mathrm{sen}\ell_s.\cos\varepsilon = \cos\delta_s.\mathrm{sen}\alpha_s \ . \qquad (12)$$

Substituindo (10), (11) e (12) em (8) e (9), e depois (6) e (7), resulta:

$$\boxed{\Delta\alpha_{PA} = \overline{\pi}(\cos\alpha.\cos\varepsilon.\mathrm{sen}\ell_s - \mathrm{sen}\alpha.\cos\ell_s)\sec\delta} \qquad (13)$$

e

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\delta_{PA} = \overline{\pi}(&\cos\delta.\mathrm{sen}\varepsilon.\mathrm{sen}\ell_s - \cos\alpha.\mathrm{sen}\delta.\cos\ell_s + \\ &- \mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\delta.\cos\varepsilon.\mathrm{sen}\ell_s)\end{aligned}} \ . \qquad (14)$$

Nessas equações α e δ representam as coordenadas heliocêntricas, ao passo que α' e δ' representam as geocêntricas da mesma estrela. Podemos escrever as 2 equações anteriores de outra forma: definindo as coordenadas cartesianas X e Y do Sol por:

$$X = \cos\delta_s . \cos\alpha_s = \cos\lambda_s \qquad (15)$$

$$Y = \cos\delta_s . \operatorname{sen}\alpha_s = \operatorname{sen}\lambda_s . \cos\varepsilon \ , \qquad (16)$$

e usando a notação das equações 93.(16), (17), (18) e (19), teremos:

$$\Delta\alpha_{PA} = \overline{\pi}_A (Yc - Xd) \qquad (17)$$

$$\Delta\delta_{PA} = \overline{\pi}_A (Yc' - Xd') \ . \qquad (18)$$

97. PARALAXE DIÁRIA

Já que a paralaxe é um efeito devido à mudança de posição do observador do Sol para a Terra, haverá também uma paralaxe devido ao fato de o observador estar sobre a Terra (vamos supô-la esférica, de raio ρ) e não no seu centro. À mudança de direção devido à passagem de um *sistema topocêntrico* para um *geocêntrico* é o que chamamos de *paralaxe diária*.

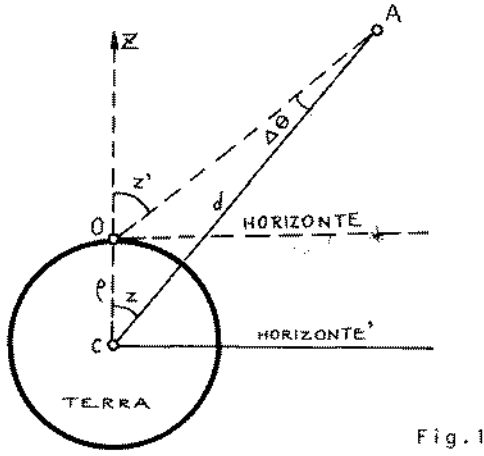


Fig.1

Se o observador estivesse no centro C, veria a estrela com distância zenital z. Como ele se encontra em O, verá essa estrela com distância zenital z'.

Pelo teorema do ângulo externo:

$$\Delta\theta = z' - z \quad . \tag{1}$$

Da mesma forma como descrito em 96.(4), temos:

$$\operatorname{sen}\Delta\theta = \frac{\rho}{d}\operatorname{sen}z' \quad . \tag{2}$$

Se $\Delta\theta$ for muito pequeno, então:

$$\Delta\theta \simeq \frac{\rho}{d}\operatorname{sen}z' \quad . \tag{3}$$

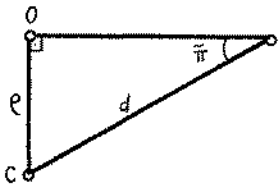


Fig.2

Admitindo que num instante se tenha o triângulo AOC (Fig. 2) retângulo em O, então:

$$\operatorname{sen}\bar{\pi} = \frac{\rho}{d} \quad . \tag{4}$$

Como $\bar{\pi}$ é pequeno,

$$\boxed{\overline{\pi} \cong \rho/d} \quad , \tag{5}$$

e $\overline{\pi}$ recebe o nome de *paralaxe diária horizontal* (o astro estaria no horizonte do observador). Dessa forma, a equação (3) fica:

$$\boxed{\Delta\theta \cong \overline{\pi}.\mathrm{sen}z'} \quad . \tag{6}$$

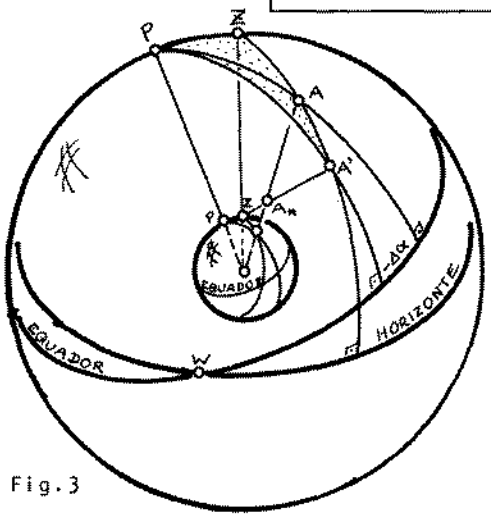


Fig.3

Deduzamos as equações que fornecem as variações de coordenadas $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$, onde

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha \tag{7}$$

e

$$\Delta\delta = \delta' - \delta, \tag{8}$$

sendo que α e δ são as coordenadas geocêntricas do astro A_*, e α' e δ' são as coordenadas topocêntricas.

Na Figura 3, A reprenta a posição geocêntrica do astro A_*, e A' representa sua posição topocêntrica. É fácil ver que o azimute das duas visões é o mesmo (item 20)

$$A_A = A_{A'} \quad ; \tag{9}$$

quanto às distâncias zenitais, elas diferem de um valor Δz tal que

$$\Delta z = z' - z \quad . \tag{10}$$

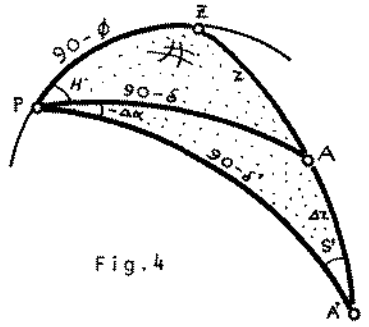


Fig.4

Aplicando a lei do seno (equação 34.(4)) ao triângulo PAA', podemos escrever:

$$\frac{\operatorname{sen}\Delta z}{\operatorname{sen}(-\Delta\alpha)} = \frac{\cos\delta}{\operatorname{sen}S'} \quad ; \tag{11}$$

que depois de simplificada, levando em consideração que Δz e $\Delta\alpha$ são pequenos, pode ser escrita:

$$\Delta\alpha \simeq -\Delta z.\frac{\operatorname{sen}S'}{\cos\delta} \quad . \tag{12}$$

Aplicando a lei do co-seno (equação 33.(4)) ao lado PA do triângulo PAA', temos:

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\delta'.\cos\Delta z + \cos\delta'.\operatorname{sen}\Delta z.\cos S' \quad ; \tag{13}$$

fazendo aproximações do $\operatorname{sen}\Delta z$ e $\cos\Delta z$ podemos escrever (aplicando que

$$\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\delta' = 2\cos\frac{\delta-\delta'}{2}.\operatorname{sen}\frac{\delta-\delta'}{2} \quad): \tag{14}$$

$$\Delta\delta \simeq -\Delta z.\cos S' \quad . \tag{15}$$

Procuremos eliminar S' das equações (12) e (15). Para isso, apliquemos, inicialmente, a lei dos senos no triângulo PZA':

$$\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}S'} = \frac{\operatorname{sen}z'}{\operatorname{sen}(H+\Delta\alpha)} \quad ; \tag{16}$$

desenvolvendo o $\operatorname{sen}(H+\Delta\alpha)$, e utilizando a equação (1), (10), e (6), verificamos a seguinte equação para $\Delta\alpha$ (equação 12):

$$\Delta\alpha \simeq -\overline{\pi}.\operatorname{sen}H.\cos\phi.\sec\delta - \overline{\pi}.\cos H.\cos\phi.\sec\delta.\Delta\alpha \quad ; \tag{17}$$

a segunda parcela do segundo membro é um infinitésimo de ordem superior, já que $\overline{\pi}$ e $\Delta\alpha$ são ambos muito pequenos; desprezemos pois essa parcela, o que nos fornecerá a equação procurada para a variação de α devido à paralaxe diária:

$$\boxed{\Delta\alpha_{PD} \simeq \overline{\pi}_D.\operatorname{sen}H.\cos\phi.\sec\delta} \quad . \tag{18}$$

Para eliminar S' de (15), apliquemos a lei do seno&co-seno no triângulo PZA'; teremos, com as mesmas aproximações antes vistas:

$$\text{sen}z'.\cos S' = \cos\delta.\text{sen}\phi - \text{sen}\delta.\cos\phi.\cos H \quad ; \qquad (19)$$

explicitando $\cos S'$, e substituindo em (15), com a utilização das equações (1), (10) e (6), teremos:

$$\boxed{\Delta\delta_{PD} = \overline{\pi}_D(\text{sen}\phi.\cos\delta - \cos\phi.\text{sen}\delta.\cos H)} \quad , \qquad (20)$$

que é a equação que fornece a variação na declinação devido à paralaxe diária.

Capítulo 12

Movimento Próprio das Estrelas

98. MOVIMENTO PRÓPRIO DAS ESTRELAS

Quando olhamos para uma constelação, temos a impressão de que as estrelas que a compõem permanecem na mesma posição em relação às demais estrelas do grupo. Em outras palavras, parece que as estrelas estão fixas à esfera celeste. Observações ao longo dos anos e séculos mostram que essa idéia não é verdadeira. Cada estrela possui um movimento próprio, independente das demais, que a faz se deslocar sobre a esfera celeste. A esse movimento da estrela em relação às demais chamamos de *movimento próprio da estrela*.

Notar que, como estamos supondo as estrelas pertencendo à esfera celeste, no movimento próprio das estrelas consideraremos apenas o movimento tangencial à esfera celeste, não levando em conta o movimento radial da mesma, velocidade essa que desloca a estrela na direção da linha de visada, aproximando-a ou afastando-a do observador.

Seja μ a componente tangencial do movimento próprio da estrela, que é geralmente medida em "/ano (segundos de arco por ano). Admitamos que na época t_0 uma estrela estivesse na posição A_0, e que 1 ano depois, no instante t' tal que:

$$t' = t_0 + 1 \ , \qquad (1)$$

a estrela estivesse na posição A_1, conforme Figura 1.

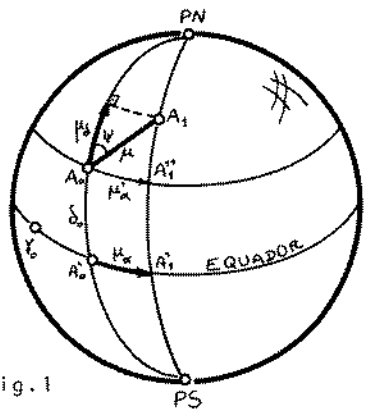


Fig.1

O arco percorrido pela estrela nesse intervalo de 1 ano é o movimento próprio da estrela:

$$\mu = \overset{\frown}{A_0 A_1} \ . \qquad (2)$$

Chamamos de *movimento próprio em ascensão reta* (μ_α) ao ângulo diedro entre os 2 círculos horários que passam , respectiva-

mente, por A_0 e A_1; denominamos de *movimento próprio de declinação* (μ_δ), à projeção ortogonal de μ sobre o plano do círculo horário passante por A_0; assim:

$$\mu_\delta = \mu.\cos\psi \quad . \tag{3}$$

Para obter μ_α, projetemos μ sobre o paralelo que passa por A_0:

$$\mu'_\alpha = \mu.\operatorname{sen}\psi \quad ; \tag{4}$$

para obter μ_α, apliquemos a lei dos senos no triângulo $PA_0A''_1$, lembrando que μ_α é o ângulo diedro em P; obtemos (admitindo que $A_0A''_1$ fosse um arco de grande círculo):

$$\mu_\alpha = \mu'_\alpha \,.\sec\delta_0 \; ; \tag{5}$$

substituindo o valor encontrado em (4), temos:

$$\mu_\alpha = \mu.\operatorname{sen}\psi.\sec\delta_0 \quad . \tag{6}$$

Se o intervalo de tempo $t - t_0$ for diferente de 1 ano, então teremos variações de coordenadas dadas por:

$$\boxed{\Delta\alpha_{MP} = \mu_\alpha.(t - t_0)} \tag{7}$$

e

$$\boxed{\Delta\delta_{MP} = \mu_\delta.(t - t_0)} \quad , \tag{8}$$

onde

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 \tag{9}$$

e

$$\Delta\delta = \delta - \delta_0 \quad , \tag{10}$$

onde α_0 e δ_0 são as coordenadas na época t_0 e α e δ são as coordenadas na data t, ambas correspondentes ao sistema de referências da época t_0.

Geralmente μ_δ é medido em "/ano, mas μ_α é mais comumente utilizado na unidade s/ano.

Capítulo 13

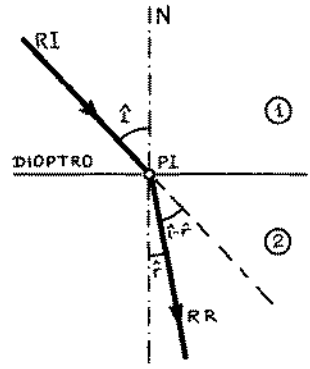
Refração Atmosférica

99. REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA

Sabemos que quando a luz incide num dioptro, ela pode sofrer um desvio, mudando sua velocidade. É o fenômeno da *Refração*[1]. Vale, nesse caso, a lei de Snellius-Descartes:

$$n_1 . \text{seni} = n_2 . \text{senr} \qquad (1)$$

onde n_1 e n_2 são os *Índices*[2] de refração dos meios em questão.



O ponto principal, no nosso caso, é que quando a luz passa do vácuo para a atmosfera terrestre, ela sofrerá um desvio, a não ser que incida normalmente ao dioptro vácuo-ar.

Assim, como quando a luz passa para um meio de índice de refração maior ela se aproxima da normal, todos os astros que vemos estão na realidade um pouco abaixo da posição em que os observamos. Pelo teorema do ângulo externo:

$$\boxed{R = z - z'} \quad ; \qquad (2)$$

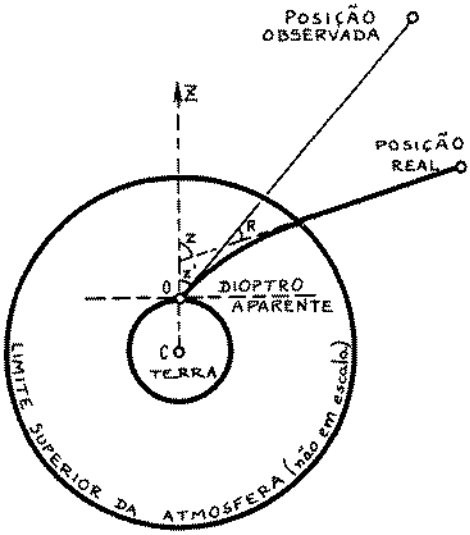
(em nosso caso é como se admitíssemos $i = z$ e $r = z'$).

Então:

$$1 . \text{senz} = n . \text{senz}' \quad . \qquad (3)$$

---

1. Refração = re (de volta) [latim] + frangere (quebrar) [latim] = mudar de posição.
2. Índice = index [latim] = número indicando uma relação



Substituindo (2) em (3):

$$\operatorname{sen}(z'+R) = n.\operatorname{sen}z' \quad ;$$

desenvolvendo essa última equação obtemos;

$$\operatorname{sen}z'.\cos R + \operatorname{sen}R.\cos z' = n.\operatorname{sen}z' \qquad (4)$$

Como R é um ângulo muito pequeno, então:

$$\operatorname{sen}R \cong R \text{ (expresso em radianos)}$$

e

$$\cos R \cong 1 \quad ;$$

então a equação (4) fica

$$\operatorname{sen}z' + R.\cos z' = n.\operatorname{sen}z'$$

ou

$$\boxed{R = (n-1).\tan z'} \quad . \qquad (5)$$

Evidentemente n varia com as condições atmosféricas locais. Assim, valores experimentais mostram que a refração R pode ser dada por:

$$\boxed{R'' = 60'',34.\frac{P}{760}.\frac{273}{\theta+273}.\tan z'} \qquad (6)$$

onde P é a pressão em milímetros de mercúrio e θ a temperatura em ^{o}C; R'' é dado em segundos de arco. Chamemos de R_0'' ao coeficiente

$$R_0'' = 60'',34.\frac{P}{760}.\frac{273}{\theta+273} \quad . \qquad (7)$$

Demonstra-se que a refração causa sobre as coordenadas equatoriais variações dadas por:

$$\Delta\alpha_R = +R''_0 \, \text{sen}H.\text{csc}z'.\cos\phi.\sec\delta \quad , \tag{8}$$

e

$$\Delta\delta_R = +R''_0(\text{sen}\phi.\text{csc}z'.\sec\delta - \text{tg}\delta.\text{cot}z') \quad . \tag{9}$$

A demonstração dessas 2 fórmulas é em tudo semelhante à demonstração das fórmulas 97.(18) e (20), utilizando a Figura (2) daquele item, onde no entanto A' será a posição do astro e A a posição observada; assim, onde na figura está o ângulo $-\Delta\alpha$, deve-se substituí-lo por $+\Delta\alpha$.

Nas fórmulas (8) e (9),

$$\Delta\alpha_R = \alpha' - \alpha \tag{10}$$

$$\Delta\delta_R = \delta' - \delta \quad , \tag{11}$$

onde as grandezas assinaladas por ($'$) representam os valores observados, e as grandezas não assinaladas representam os valores topocêntricos.

Notar que, sobre as coordenadas horizontais, a refração só afeta a distância zenital, fazendo com que o astro pareça sempre estar mais alto (com relação ao horizonte) do que ele realmente está.

100 CREPÚSCULOS

É notório para todos que mesmo após o pôr do Sol, permanece ainda uma claridade frouxa que gradativamente vai diminuindo até que se atinja a fase mais escura. A escuridão nunca será total já que existe uma pequena parcela de luz proveniente das estrelas e eventualmente uma parte considerável ainda da Lua (dependendo de sua fase). Obviamente ocorre o mesmo, no sentido inverso, antes do nascer do Sol.

Chamamos de *Crepúsculo*[1] à condição de luz solar que segue (antecede) o pôr (nascer) do Sol. Esse efeito é causado pelo espalhamento da luz solar nas camadas mais elevadas da atmosfera: é portanto um fenômeno de características atmosféricas e astronômicas.

Devido ao fenômeno de refração (item 99), o Sol parece sempre estar mais elevado do que realmente está. Assim, mesmo que geometricamente ele esteja abaixo do horizonte local, ele ainda pode ser visto.

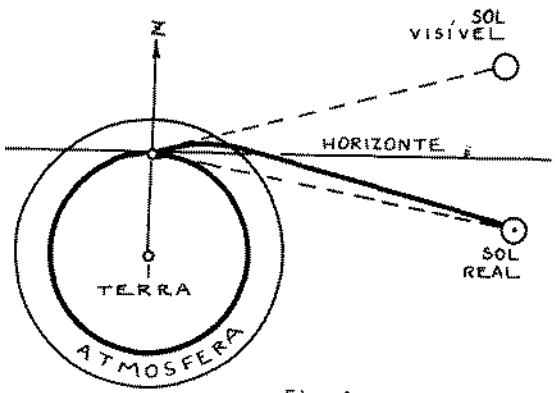


Fig. 1

Devido à refração, a distância zenital geométrica do centro do Sol deve ser

$$z_c = 90^\circ 50' \qquad (1)$$

para que ele deixe de ser visível. Nos 50' estão incluídos 16' do raio angular aparente do Sol, e 34' devido à refração. Como a refração aumenta com a distância zenital, o Sol parecerá achatado na direção do vertical local.

---

1. Crepúsculo = kreper (escuro) [latim] + usco (diminutivo latino) = pequena escuridão.

Obviamente, quanto mais elevado estiver o observador, maior será a distância zenital geométrica do Sol para que ele deixe de ser visível. Se h for a altura do observador com relação ao mar, a distância zenital geométrica do Sol ao se pôr (ou nascer) é:

$$z_c = 90^\circ 50' + 2',08\sqrt{h} \quad , \qquad (2)$$

onde h é dado em metros.

Em função do brilho do céu após (ou antes do nascer) do Sol, definimos 3 estágios no crepúsculo:

a) *Crepúsculo Civil* inicia-se (termina) quando o Sol se põe (nasce) e finda (começa) quando a distância zenital geométrica do Sol é 96°; durante o crepúsculo civil a distância zenital do centro do Sol deve obedecer à equação:

$$z_c \leq z_{Sol} \leq 96^\circ \ . \qquad (3)$$

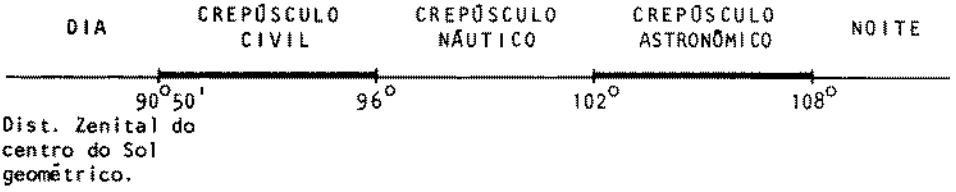
b) *Crepúsculo Náutico* inicia-se (termina) quando o Sol tem distância zenital geométrica de 96° e finda (começa) quando sua distância zenital geométrica atinge 102°; durante o crepúsculo náutico, vale, para o centro do Sol:

$$96^\circ \leq z_{Sol} \leq 102^\circ \ . \qquad (4)$$

c) *Crepúsculo Astronômico* inicia-se (termina) com o Sol de distância zenital geométrica 102° e finda (começa) quando ela se torna 108°; para o crepúsculo astronômico, vale, para o centro do Sol:

$$102^\circ \leq z_{Sol} \leq 108^\circ \ . \qquad (5)$$

A partir de $z_{Sol} > 108^\circ$ a parcela de brilho fornecida pelo Sol já é inferior àquela fornecida pelas estrelas. Esquematicamente, o quadro a seguir resume o que foi dito:



Capítulo 14

Redução ao Dia

101 REDUÇÃO AO DIA

Imaginemos a situação que ocorre amiúde em Astronomia: desejamos, numa determinada data t observar um astro através de um telescópio cuja montagem é azimutal; isto significa que precisamos das coordenadas horizontais (A,z) do astro.

Se dispusermos de um catálogo que contém a ascensão reta e a declinação da estrela para a data t, então basta utilizarmos as fórmulas de transformação de coordenadas equatoriais para horizontais.

Ocorre, no entanto, que os catálogos estelares foram feitos para uma determinada época t_0: as coordenadas α_0 e δ_0 do astro são aquelas que o astro tinha na época t_0, utilizando o ponto γ_0 da época. Além disso, para que o sistema de referência utilizado seja o mais inercial possível, ele é centrado no baricentro do sistema solar (que pode ser considerado como o próprio centro do Sol, ou seja, um sistema heliocêntrico). Precisamos, pois, transformar as coordenadas heliocêntricas médias da época t_0 em coordenadas topocêntricas observacionais da data. Ao conjunto de operações envolvidas para se obter essas coordenadas chama-se *Redução*[1] *ao Dia*.

Enumeremos os passos necessários para obter o efeito desejado no parágrafo precedente:

a) Correção devido ao movimento próprio (MP) da estrela (item 98): Sejam (α_0,δ_0) as coordenadas médias heliocêntricas da época; μ_α e μ_δ os movimentos próprios no sistema da época. As coordenadas heliocêntricas médias da época corrigidas do movimento próprio serão (α_1,δ_1) dadas por:

1. Redução = re (de volta) [latim] + ducere (conduzir) [latim] = conduzir de volta (em astronomia, significa obter as coordenadas desejadas).

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_{MP} \quad (1)$$

$$\delta_1 = \delta_0 + \Delta\delta_{MP} \quad . \quad (2)$$

b) Correção devido à precessão (P) do sistema de referências (item 87 ou 88): - Devemos aplicar uma correção às coordenadas heliocêntricas médias (α_1, δ_1) da época para obtermos as coordenadas médias heliocêntricas da época:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha_P \quad (3)$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta_P \quad . \quad (4)$$

c) Correção devido à nutação (N) (item 89): - Apliquemos uma correção devido à nutação às coordenadas (α_2, δ_2) médias heliocêntricas da data para obtermos as coordenadas verdadeiras heliocêntricas da data:

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \Delta\alpha_N \quad (5)$$

$$\delta_3 = \delta_3 + \Delta\delta_N \quad . \quad (6)$$

d) Correção devido à paralaxe anual (PA) (item 96): - Passemos do sistema heliocêntrico ao sistema geocêntrico quase-aparente:

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \Delta\alpha_{PA} \quad (7)$$

$$\delta_4 = \delta_3 + \Delta\delta_{PA} \quad . \quad (8)$$

e) Correção devido à aberração anual (AA) (item 93): - Levando em consideração a velocidade orbital da Terra em torno do Sol obtemos as coordenadas aparentes geocêntricas da data:

$$\alpha_5 = \alpha_4 + \Delta\alpha_{AA} \quad (9)$$

$$\delta_5 = \delta_5 + \Delta\delta_{AA} \quad . \quad (10)$$

f) Correção devido à paralaxe diária (PD) (item 97): - Para obtermos as coordenadas quase-topocêntricas do observador:

$$\alpha_6 = \alpha_5 + \Delta\alpha_{PD} \qquad (11)$$

$$\delta_6 = \delta_5 + \Delta\delta_{PD} \quad . \qquad (12)$$

g) Correção devido à aberração diária (AD) (item 94): - Para obtermos as coordenadas topocêntricas da data:

$$\alpha_7 = \alpha_6 + \Delta\alpha_{AD} \qquad (13)$$

$$\delta_7 = \delta_6 + \Delta\delta_{AD} \quad . \qquad (14)$$

h) Correção devido à refração atmosférica (R) (item 99): - Para obter as coordenadas observacionais equatoriais da data:

$$\alpha_8 = \alpha_7 + \Delta\alpha_R \qquad (15)$$

$$\delta_8 = \delta_7 + \Delta\delta_R \quad . \qquad (16)$$

i) Obtenção das coordenadas horizontais da data (item 42): - Utilizando as fórmulas (5), (6) e (7) do item 42 obtemos os valores de A e z procurados para poder observar a estrela desejada a partir dos valores α_8 e δ_8 encontrados.

Esquematicamente poderíamos escrever:

$$\alpha_B = \alpha_0 + \Delta\alpha_{MP} + \Delta\alpha_P + \Delta\alpha_N + \Delta\alpha_{PA} + \Delta\alpha_{AA} + \Delta\alpha_{PD} + \Delta\alpha_{AD} + \Delta\alpha_R$$

$$\delta_B = \delta_0 + \Delta\delta_{MP} + \Delta\delta_P + \Delta\delta_N + \Delta\delta_{PA} + \Delta\delta_{AA} + \Delta\delta_{PD} + \Delta\delta_{AD} + \Delta\delta_R$$

- Posição observacional da data t.
- Posição média heliocêntrica da época t_0.
- Posição média heliocêntrica em t.
- Posição verdadeira heliocêntrica em t.
- Posição aparente geocêntrica em t.
- Posição topocêntrica em t.

A posição média heliocêntrica da época é a posição em que a estrela seria vista, na época t_0, se o observador estivesse no centro do Sol, suposto um corpo, transparente.

A posição média heliocêntrica da data é a posição em que a estrela seria vista, na data t, se o observador estivesse no centro do Sol, supondo que o sistema de referências tenha variado da precessão.

A posição verdadeira heliocêntrica da data representa a posição, no sistema de referências, que um observador no centro do Sol veria a estrela (quando o sistema de referências foi corrigido da nutação) na data.

A posição aparente geocêntrica da data é a posição em que um observador hipotético, no centro da Terra (sem atmosfera) admitida como um corpo transparente, veria o astro na data t.

A posição topocêntrica é aquela em que um observador na superfície da Terra (admitida sem atmosfera) veria um astro na data.

A posição observada da data representa a real posição em que um observador sobre a Terra vê o astro.

Capítulo 15

Estrutura e Distâncias no Sistema Solar

102 SISTEMA GEOCÊNTRICO

O movimento diário aparente da esfera celeste (item 20) levou a humanidade à mais lógica das conclusões: a Terra estava no centro do *Mundo*, e todos os astros giravam em torno dela. A essa estrutura, com a Terra no centro, dá-se o nome de *Sistema Geocêntrico*.

A constatação do movimento diário aparente era imediata; já a descoberta do movimento anual aparente das estrelas e do Sol entre as *estrelas fixas* exigiu observações mais prolongadas. Foi através de observações pacientes e sistemáticas que os povos antigos verificaram que, entre as estrelas chamadas fixas, havia algumas "estrelas" que se deslocavam com relação às demais. Por exemplo, as estrelas que formam o conjunto popularmente chamado de 3 Marias (Cinturão de Órion) são estrelas que estão sempre juntas (poderíamos dizer que nunca uma das Marias se afasta das outras!); o mesmo acontece com as estrelas das outras constelações. Existem, porém, as "estrelas" que se movem: essas receberam o nome de *Planetas*, cujo significado é "astro móvel", em contrapartida à "estrela fixa".

Até 1781 eram apenas 5 os planetas conhecidos (excetuando-se a Terra): Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

Entre os anos de 127 e 151 o astrônomo grego Cláudio Ptolomeu sugeriu a estrutura representada na Figura 1 para explicar a morfologia do Universo: essa disposição recebeu o nome de *Sistema Geocêntrico de Ptolomeu*. A ordem de colocação dos planetas e Lua a partir da Terra levava em consideração o período que cada astro apresentava para dar uma "volta" na esfera celeste: os mais lentos eram supostos mais distantes. Notar que esse sistema não

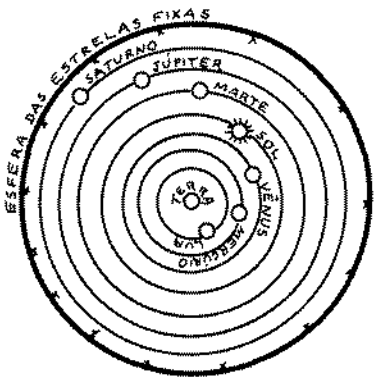


Fig.1

foi o único geocêntrico proposto: há evidências de que o grego Heráclides (400-347 a.C.) já havia proposto uma teoria parecida, mas para explicar o fato de Mercúrio e Vênus estarem sempre próximos do Sol, supôs que esses 2 planetas girassem em torno do Sol, e esse, por sua vez, em torno da Terra.

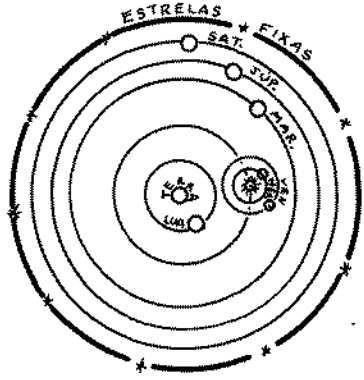


Fig.2

103 TEORIA DOS EPICICLOS

A hipótese de que o céu era um local perfeito levou os homens a admitir que o movimento dos astros devia ser perfeito, e a única figura que podia materializar esse movimento era a circunferência, a qual era percorrida com movimento uniforme. Já Ptolomeu, porém, verificara que a posição ocupada pelos planetas na realidade nem sempre coincidia com a posição prevista pela teoria do movimento circular uniforme. Para não contradizer a noção arraigada de movimento circular, foi sugerida a *Teoria dos Epiciclos*: cada planeta giraria em movimento circular uniforme em torno de um ponto que por sua vez giraria em movimento circular uniforme em torno da Terra. A circunferência descrita pelo planeta recebia o nome de *Epiciclo* e a circunferência descrita pelo centro do epiciclo recebia o nome de *Deferente* (Fig.1).

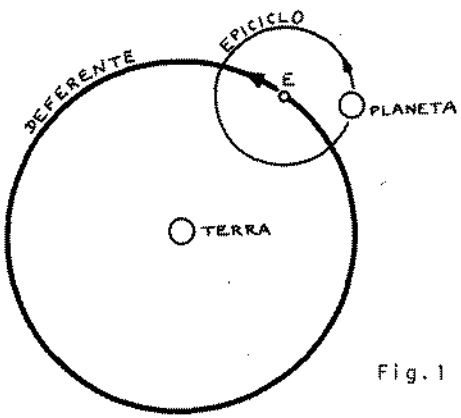


Fig.1

Uma forte razão para adotarem a teoria dos epiciclos era o *movimento retrógrado eventual dos planetas*, às vezes chamado "*laçadas*". Imaginemos as estrelas de uma dada região do céu representadas na Figura 2. Se observarmos sistematicamente a posição de um planeta, veremos que durante a maior parte do tempo esse planeta se desloca entre as estrelas no sentido de oeste para leste (sentido das ascensões retas crescentes) chamado sentido direto. Durante algum tempo, no entanto, verifica-se que o pla-

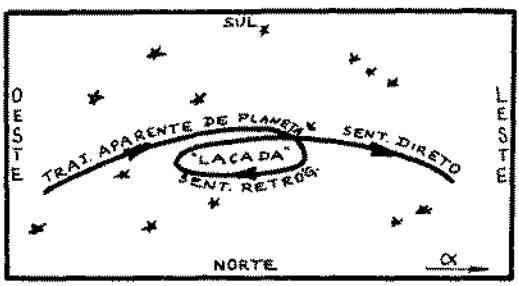
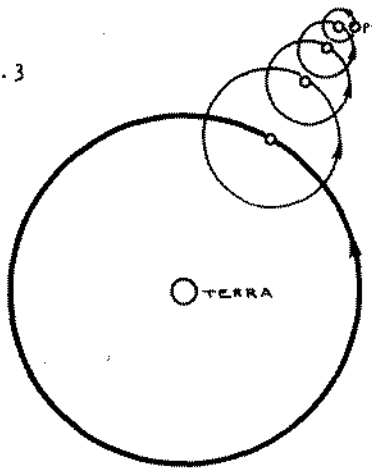


Fig.2

neta "volta", ou mesmo dá uma "laçada" no ceu, deslocando-se do leste para o oeste, no chamado movimento retrógrado. Esse comportamento pode ser explicado se admitirmos que a velocidade angular do planeta no epiciclo seja maior do que a do centro (E) do epiciclo no deferente. Assim, quando a disposição fosse (T,E,P) a velocidade resultante de P seria a soma das velocidades citadas, e o movimento seria direto; quando da configuração (T,P,E), no entanto, a velocidade resultante seria a diferença das 2 velocidades citadas, e como o módulo da velocidade do planeta em torno do centro do epiciclo é maior, essa resultante daria no sentido oposto ao do caso anterior: seria o movimento retrógrado.

Com o passar do tempo, as observações tornavam-se cada vez mais precisas, de modo que a previsão necessitava também ser melhorada: um único epiciclo não conseguia explicar as diferenças observacionais; foi necessária a incorporação de vários epiciclos e deferentes para um mesmo planeta (Fig. 3). Com exceção do último epiciclo, os outros eram também deferentes do epiciclo seguinte. Assim, a posição final do planeta era a soma das posições dadas pelos diversos epiciclos e deferentes:

Fig.3



$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n \ , \qquad (1)$$

que nada mais era do que fornecer o valor de uma função através da soma de uma série convergente.

Por volta do século XVI o número de epiciclos era tão grande que o cálculo de uma posição tornava-se trabalhoso demais; urgia remodelar o sistema.

104 SISTEMA HELIOCÊNTRICO

Em 1543, o polonês Nicolau Copérnico publica a obra "Revolução dos Corpos Celestes", na qual propõe o Sol como centro do Sistema Solar, estrutura essa que recebeu o nome de Sistema Heliocêntrico; o Sol seria fixo, e os planetas girariam em movimento circular uniforme em torno desse centro, exceto a Lua, que giraria em torno da Terra, que por sua vez giraria em torno do Sol, todos no mesmo sentido direto de oeste para leste. O movimento retrógrado e as "laçadas" dos planetas podiam agora ser explicados facilmente por meio de velocidades relativas; a soma ou diferença de velocidades da Terra e do planeta definiam a direção (sentido) das posições aparentes A_1, A_2, A_3 e A_4 do planeta nas posições M_1, M_2, M_3 e M_4, conforme visto da Terra das posições T_1, T_2, T_3 e T_4 respectivamente (Fig. 2).

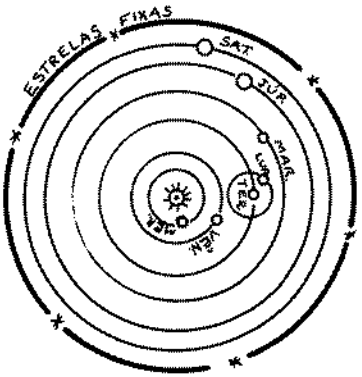


Fig.1

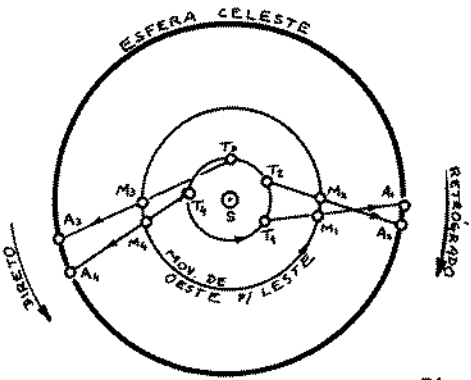


Fig.2

Notar que a ordem de colocação dos planetas a partir do Sol seguiu a mesma sistemática usada no sistema geocêntrico: quanto mais lento fosse o movimento do planeta entre as estrelas tanto mais distante estaria do Sol.

Uma prova que foi muito importante para negar o geocentrismo foi a descoberta, por Galileu Galilei, em 1610, do movimento dos satélites de Júpiter em torno de Júpiter e não da Terra como postularia a teoria geocêntrica.

105 PROVAS DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO E DO MOVIMENTO ORBITAL DA TERRA

O afirmar da rotação da Terra em torno de seu eixo para dar o dia e a noite, bem como o do movimento orbital da Terra em torno do Sol, para substituir o movimento diário aparente e o movimento anual aparente da esfera celeste, exigia alguma prova.

Um testemunho para o movimento de rotação podia ser dado pelo "*desvio para leste*" de um corpo em queda livre. Imagine uma torre AB sobre o Equador da Terra. Abandonemos de seu cimo A um corpo em queda livre. Pelo princípio da inércia (item 124), esse corpo terá uma velocidade absoluta horizontal V_A. Se a torre AB estivesse em movimento de translação, seu sopé B teria a mesma velocidade V_A, mas como seu movimento é circular, a velocidade de V_B é menor que V_A. Assim, o corpo caindo de A cairá em B' e não em B, pois durante o tempo de queda t o espaço horizontal percorrido pelo corpo é:

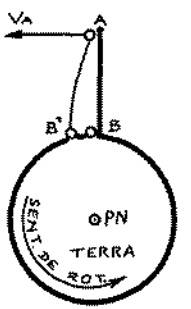


Fig.1

$$BB' = V_A . t \quad , \tag{1}$$

enquanto que o espaço percorrido por B será

$$B\overline{B} = V_B . t \quad . \tag{2}$$

Assim, devido à rotação da Terra o corpo em queda livre não cai na vertical mas sim num ponto deslocado à leste da vertical que passa pelo ponto de origem da queda livre.

Uma outra prova da rotação da Terra decorre da experiência do *Pêndulo de Foucault*: um pêndulo posto a oscilar no pólo da Terra mantém, pelo princípio da inércia, seu plano de oscilação. Se a Terra girasse, com relação à Terra tal plano de oscilação pareceria mudar. E na realidade tal fato ocorre, mostrando que a Terra gira: o plano de oscilação do pêndulo faz uma volta completa a

cada 24 horas; na verdade, a Terra gira em torno do eixo em 24 horas. Colocado no Equador tal plano de oscilação não muda nem com relação à Terra, mas em qualquer outro ponto da Terra ver-se-á uma variação no plano de oscilação.

Quanto à prova para o movimento orbital, ela pode ser obtida por exemplo pelo efeito de paralaxe anual e aberração anual conforme itens 96 e 93.

106 CONFIGURAÇÕES PLANETÁRIAS

As posições relativas do Sol, da Terra e de um planeta definem o que chamamos de *Configuração Planetária*. Algumas dessas configurações recebem nomes particulares, os quais passamos a descrever. Chamamos de *planetas interiores* aqueles cuja distância ao Sol é menor que a da Terra ao Sol (Mercúrio e Vênus). Aos planetas cuja distância ao Sol é maior que a da Terra ao Sol denominamos *planetas exteriores* (Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Plutão, ... (?)).

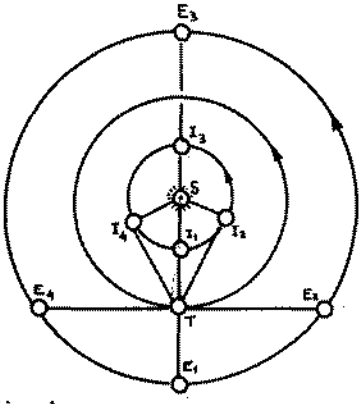


Fig.1

Para um planeta interior (I), quando ele estiver sobre a reta que une o Sol (S) e a Terra (T) dizemos que está em *conjunção*; caso ele esteja entre a Terra e o Sol (TI_1S) a denominação é *conjunção inferior*, e caso esteja além do Sol (TSI_3), a *conjunção será superior*. Conforme o planeta interior vai se movendo em torno do Sol, a distância angular entre o planeta e o Sol vai se modificando quando vista da Terra; quando tal distância angular atinge seu valor máximo dizemos que o planeta está em *elongação máxima*; caso a elongação máxima se dê a oeste do Sol, temos a *elongação máxima ocidental* (o planeta é visível um pouco antes do nascer do Sol) I_2, ao passo que em se dando à leste do Sol (o planeta é visível logo após o pôr do Sol), em I_4, temos a *máxima elongação oriental*.

Pela Figura 1, às vezes, é difícil de ver os pontos cardeais. Na Figura 2 está representado um observador O e seu horizonte. O movimento de rotação da Terra, que origina o dia e a noite, tem o mesmo sentido de rota-

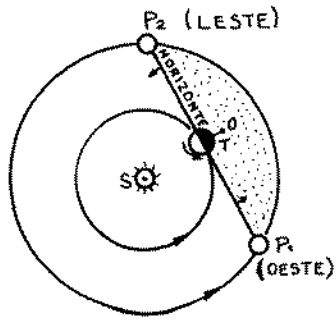


Fig.2

ção do movimento dos planetas em torno do Sol: sentido direto (anti-horário, da mão direita). A parte hachurada da figura representa a parte acima do horizonte para o dado observador. As setas representam o movimento do horizonte. É fácil ver que o Planeta P_1 estará desaparecendo (se pondo abaixo do horizonte): logo, aí é o lado oeste. Ao contrário, o Planeta P_2 estará aparecendo, ou seja, nascendo: aí será o lado leste.

Denominemos agora as configurações particulares de um planeta exterior (E). Caso a Terra esteja entre o Sol e o planeta (STE_1), dizemos que o planeta está em *oposição*. Se o planeta estiver na direção (sentido) do Sol, e obviamente além dele, (TSE_3), afirmamos que o planeta está em *conjunção* (será superior, já que um planeta exterior nunca poderá estar entre o Sol e a Terra; já que é sempre superior, inútil se torna explicitá-lo). A *quadratura* ocorre quando o ângulo entre o planeta e o Sol, vistos da Terra, é de 90°; se o planeta (E_2) estiver à oeste do Sol dizemos que a *quadratura é ocidental*, ao passo que será *oriental* se estiver à leste do Sol (E_4).

Conforme vimos nos itens 103 e 104, os planetas podem, aparentemente, mudar o sentido de seu movimento entre as estrelas; quando ocorre essa mudança o planeta fica temporariamente "parado" entre as estrelas: dizemos que o planeta está *estacionário*. Às posições correspondentes ao planeta estacionário damos o nome de *estações* (não confundir com as estações do ano!).

Ao intervalo de tempo decorrente entre 2 configurações iguais consecutivas chamamos de *período sinódico* do planeta.

107 DETERMINAÇÃO DO RAIO DA TERRA POR ERATÓSTENES

A noção de esfericidade da Terra remonta a épocas anteriores ao século VI a.C.; por exemplo, Aristóteles, que vendo a sombra projetada da Terra sobre a Lua, durante os eclipses lunares (item 109), ser circular, admitiu ser a Terra esférica. Outra experiência prática que levava a tal conclusão era o aparecer inicialmente do mastro de um navio, vindo a seguir suas partes mais próximas da água; no zarpar, ocorria o inverso. A explicação mais razoável era admitir que a Terra fosse esférica.

Eratóstenes, astrônomo alexandrino, no século III a.C. determinou o raio da Terra lançando mão de um engenhoso processo. Sabia ele que na cidade de Siena, a cerca de 800 km ao Sul de Alexandria, e quase que sobre o mesmo meridiano geográfico, havia um poço nas águas do qual podia-se ver a imagem refletida do Sol ao meio-dia verdadeiro do solstício de verão. Nesse mesmo dia, no entanto, a sombra de um gnômon vertical em Alexandria não era um ponto, mas sim um segmento. Ora, conhecendo o comprimento TA do gnômon e o comprimento PA de sua sombra, era fácil obter o ângulo α sobre o qual os raios do Sol (suposto no infinito), incidiam no gnômon (em outras palavras, a distância zenital do Sol ao meio-dia verdadeiro de Alexandria). Pela Figura 1 vemos que os ângulos em T e O são alternos internos, e portanto iguais. Conhecendo-se a distância ℓ entre Alexandria e Siena, e o ângulo α central entre essas 2 cidades, pode-se, imediatamente, obter o valor do raio R da Terra (α medido em radianos):

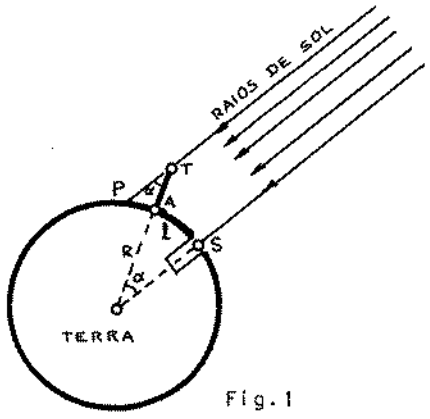


Fig.1

$$R = \ell/\alpha \quad . \qquad (1)$$

Com o valor de $\ell = 800$ km e $\alpha = 7^{\circ},2$, obteve Eratóstenes um valor que não diferia mais de 15% do valor atualmente conhecido:

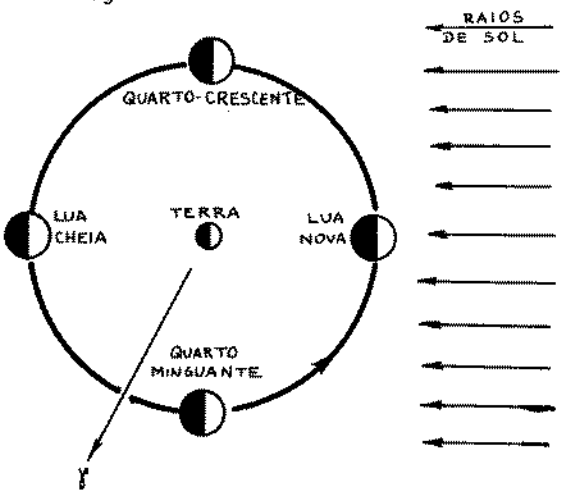
$$R_{real} \cong 6378 \text{ km} \quad . \qquad (2)$$

108 FASES DA LUA

A constatação da existência das fases da Lua se perde na história do homem. A explicação para essas fases foi dada por Aristarco no século III a.C.

Elas decorrem das posições relativas entre a Lua, o Sol e a Terra, já que, sendo a Lua um *corpo iluminado* (apenas reflete a luz que recebe do Sol) pelo Sol (*corpo luminoso*, ou seja, emissor de luz), apenas se lhe vê a parte iluminada quando essa está voltada para a Terra. Chamamos de *fase da Lua* ao aspecto de sua face iluminada quando vista da Terra.

Fig.1



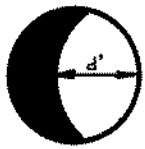
Em sua órbita em torno da Terra, épocas há nas quais todo o hemisfério iluminado da Lua é visível da Terra: dizemos então que ela está em fase de *Lua Cheia*. Caso o hemisfério iluminado não possa ser visto da Terra, a fase é descrita como *Lua Nova*. Quando apenas metade do hemisfério iluminado é visível da Terra, ocorre uma *quadratura*: caso a quadratura ocorra entre a Lua Nova e a Lua Cheia dizemos que ocorreu o *Quarto Crescente*; igualmente, se ocorrer entre a Lua Cheia e a Nova dizemos ter ocorrido o *Quarto Minguante*. Quanto à aparência da Lua nesses instantes, ver item 2.

Chamamos de *Lunação* ou *Período Sinódico da Lua* ou *Mês Sinódico* ao intervalo de tempo ocorrido entre 2 Luas Novas consecutivas:

$$\text{Lunação} = 29^{d}12^{h}44^{m}02^{s},9 = 29^{d},530589 \quad . \qquad (1)$$

À luz da matemática, a definição de *fase da Lua* é o quociente entre o diâmetro angular da parte iluminada da Lua (d'), pelo seu diâmetro iluminado na Lua Cheia (d) (Figura 2):

Fig.2



$$\phi = \frac{d'}{d} \quad . \qquad (2)$$

Quando os valores são, respectivamente, 0, 1/2 e 1 temos Lua Nova, Crescente (ou Minguante) e Lua Cheia. É imediato, pela Figura 1, que nos casos de Lua Nova, Quarto Crescente, Lua Cheia e Quarto Minguante as diferenças entre as longitudes celestes da Lua e do Sol ($\ell_{Lua} - \ell_{Sol}$) serão, respectivamente, 0°, 90°, 180° e 270°.

Define-se *Idade da Lua* como sendo o número de dias decorridos desde a última Lua Nova.

Denomina-se *Terminator* à linha na superfície da Lua que separa a parte iluminada da parte escura.

Verifica-se que a face que a Lua nos mostra é sempre a mesma, isto é, ao girar em torno da Terra, a Lua gira igualmente em torno de seu eixo, voltando à Terra a sua mesma face (é como se alguém girasse em torno de uma cadeira de modo a ficar constantemente olhando de frente para a cadeira).

109 ECLIPSES

Ao longo de seu movimento em torno da Terra, vez ou outra a Lua passa pelo segmento de reta que une o Sol e a Terra: nesse caso, a visão do Sol pode ficar total ou parcialmente obstruída pela Lua, e dizemos que ocorreu um *eclipse solar*. É fácil verificar pela Figura 1 que tal eclipse só pode ocorrer nas épocas de Lua Nova (LN), conforme item 108.

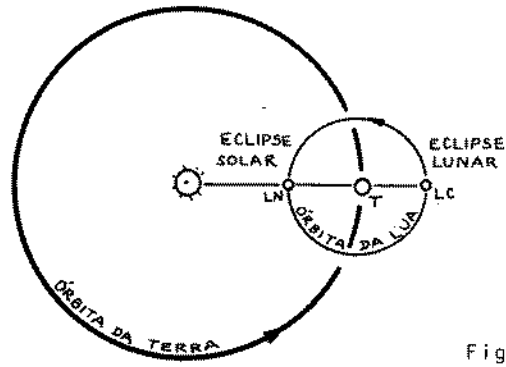


Fig. 1

Em épocas de Lua Cheia, esta pode cruzar a reta que passa pelo Sol e pela Terra; ora, como a Lua é um corpo iluminado, ao passar pelo cone de sombra da Terra criado pelo Sol, momentaneamente deixará de receber luz, e portanto deixará de ser visível: ocorre então o que chamamos de *eclipse lunar*.

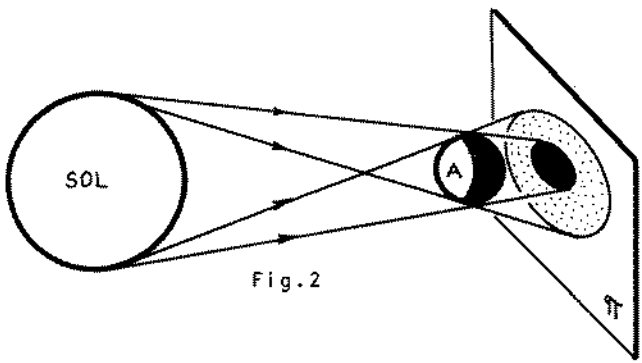


Fig.2

Quando um corpo extenso é iluminado por outro corpo extenso definem-se 2 regiões espaciais: *cone de sombra* que é o sub-espaço que não recebe luz nenhuma da fonte luminosa e *cone de penumbra* que é aquele que não recebe luz de todos os pontos da fonte mas só de alguns. As partes do corpo iluminado que pertencerem a um ou outro sub-espaço chamar-se-ão regiões de *sombra* ou *penum*

bra próprias. Cortando-se a região da sombra e penumbra por uma superfície qualquer (π), nessa superfície teremos as regiões de *sombra* e *penumbra projetadas* (ver Figura 2). Em nosso caso adotaremos a superfície (π) como sendo um plano, conforme Figura 3.

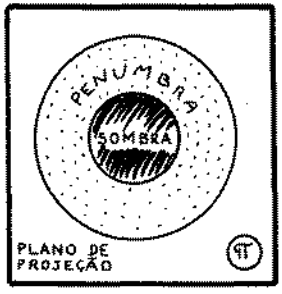


Fig.3

Admitamos ser o corpo A da Figura 2 a Terra. Em seu movimento mensal a Lua pode interceptar os troncos de cone de sombra e/ou penumbra. Vezes há em que a Lua está na eclíptica (Figura 4) e seu movimento pela sombra e penumbra pode ser representado pela sequência A, B, C, D, E, F; em B teremos um *eclipse lunar penumbral total*; em C, estando a Lua parcialmente na sombra e parcialmente na penumbra, dizemos ter ocorrido um *eclipse lunar parcial*; em D o *eclipse é lunar total*; em F o eclipse é *lunar parcial penumbral*. À vista desarmada é muito difícil a percepção do eclipse penumbral. Muitas vezes o eclipse que ocorre na sombra se chama *eclipse umbral*, mas o termo umbral geralmente é subentendido.

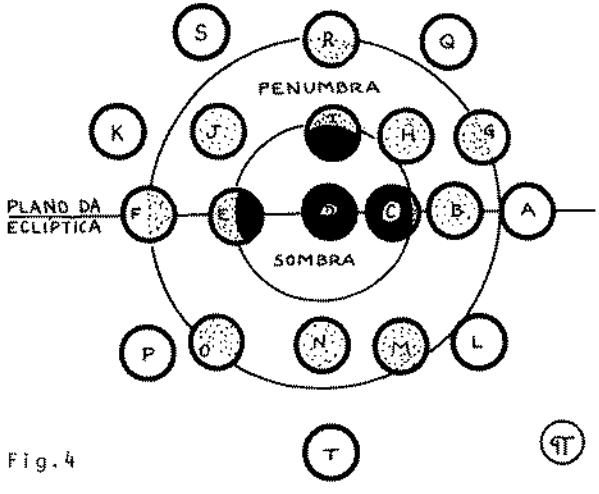
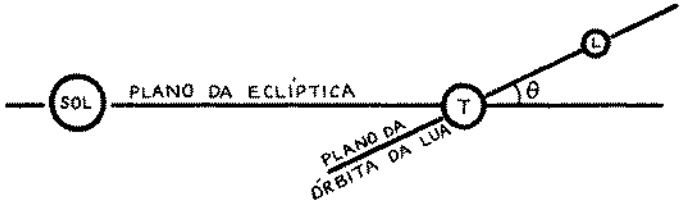


Fig.4

Em outras oportunidades verificamos ser a trajetória da Lua pela penumbra e pela umbra (sombra) diferente da anteriormente descrita; seja ela definida pelas posições G, H, I, J, K e L. Nesse caso veremos que não haverá um eclipse lunar total, mas apenas um eclipse lunar parcial. Na seqüência L, M, N, O e P notamos que nem sequer o eclipse lunar parcial ocorre, mas apenas um eclipse

penumbral total em N. Finalmente, na seqüência Q, R, S ocorre apenas um eclipse penumbral lunar parcial. Caso a trajetória da Lua passe por T, não ocorrerá eclipse lunar.

Fig.5



Ora, essas diferentes trajetórias da Lua permitem concluir que ela não gira em torno da Terra no plano da eclíptica, mas sim num plano inclinado de θ com relação à eclíptica (Fig. 5). O ângulo θ vale aproximadamente 5°, e recebe o nome de *inclinação da órbita lunar*:

$$\theta \simeq 5^{\circ}\ 09' \quad . \qquad (1)$$

A linha intersecção do plano da órbita da Lua com a eclíptica se chama *linha dos nodos* ☊☋ onde ☊ é a intersecção da órbita da Lua com a eclíptica, quando a Lua passa do hemisfério eclíptico Sul ao Norte: recebe o nome de *nodo ascendente*. O nodo descendente ☋ ocorre na situação inversa: Lua passando para o hemisfé

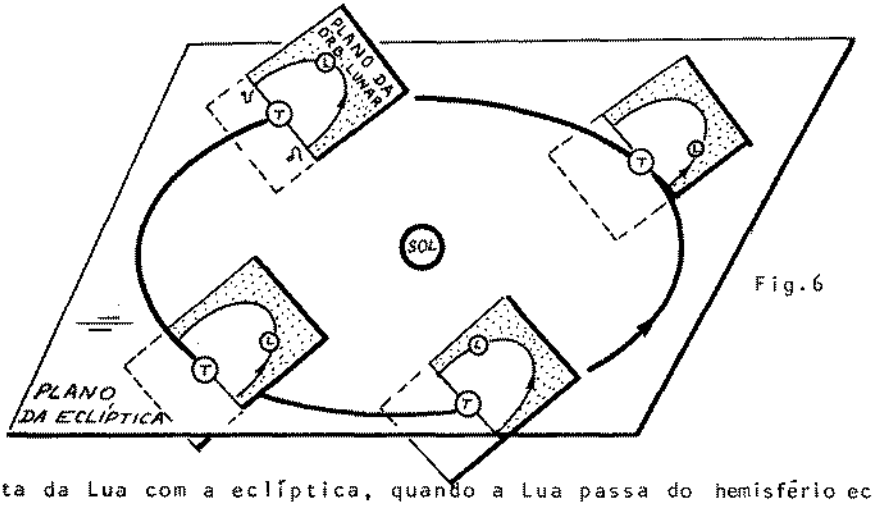


Fig.6

rio eclíptico Sul. Apesar do ângulo de inclinação se manter aproximadamente constante, a direção da linha dos nodos varia, efetuando uma volta completa sobre a eclíptica em cerca de 18,61 anos: chama-se a *retrogradação dos nodos da Lua* (Fig. 6). Para que possa ocorrer um eclipse, é necessário que a Lua esteja perto de um de seus nodos, caso contrário não passará pelos cones de sombra e/ou penumbra.

Caso o corpo A da Figura 2 seja a Lua, teremos a possibilidade da ocorrência do eclipse solar. Como a Terra é maior que a Lua, A Figura 4 seria irreal. Assim, adotemos como superfície (π) de projeção da sombra e da penumbra a própria superfície da Terra. Qualquer pessoa que esteja na região de sombra deixará de ver o Sol e teremos um *eclipse solar total* nesse local. Para alguém na região de penumbra, apenas uma parte do Sol deixará de ser visível, e o eclipse chama-se *solar parcial*. Para qualquer pessoa fora da região de sombra ou penumbra não haverá eclipse solar. Assim, enquanto que o eclipse lunar pode ser visto por todo o hemisfério terrestre voltado para a Lua, o eclipse solar só será visível por quem estiver nas regiões de sombra ou penumbra.

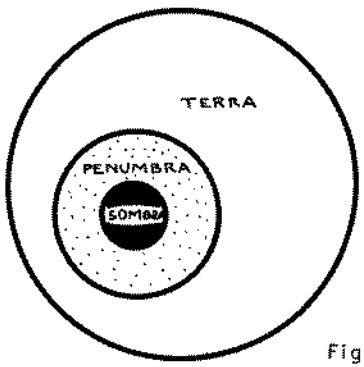


Fig.7

Conforme veremos mais adiante (item 116) as órbitas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra não são circulares,

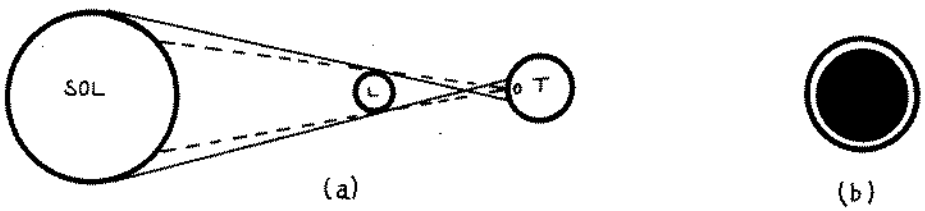


Fig. 8

mas sim elípticas. Pode, então, ocorrer de a superfície da Terra interceptar a penumbra além do vértice de sombra. Nesse caso, o observador O estará na penumbra (não existirá sombra projetada na Terra), conforme Figura 8 (a), e ao olhar para o Sol poderá ver apenas um tênue anel brilhante: é o *eclipse solar anular*, (Figura 8 (b)).

110 CONDIÇÃO GEOMÉTRICA PARA A OCORRÊNCIA DE UM ECLIPSE

Conforme vimos no item 109, não ocorre eclipse solar a cada mês lunar pois a Lua não gira em torno da Terra no plano da eclíptica. Vejamos qual a condição geométrica que deve ser satisfeita para que possa ocorrer um eclipse solar. Imaginemos a Lua tangenciando a reta S'O no ponto L'. Notar que para que o observador O possa ver a ocorrência de um eclipse, a Lua deve interceptar a linha S'O. O ângulo B entre a eclíptica e a Lua é a latitude eclíptica geocêntrica do centro da Lua. O ângulo D entre os pontos S e S' é aproximadamente o semi-diâmetro do Sol. O ângulo d entre L e L' é aproximadamente o semi-diâmetro da Lua. O ângulo s entre O e T (visto de S') é chamado de *paralaxe solar*. O ângulo ℓ entre O e T (visto de L') é chamado de *paralaxe lunar*. O ângulo a entre S' e L' não recebe nome particular. Pela Figura 1 podemos ver que:

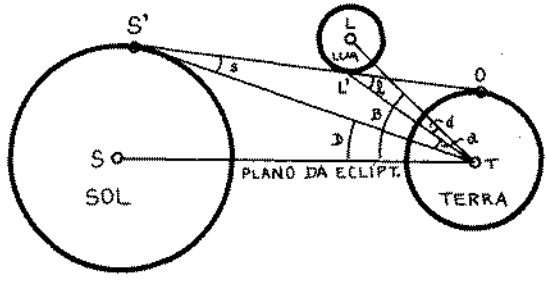


Fig. 1

$$B = D + d + a \quad . \tag{1}$$

No triângulo TS'L', o ângulo externo ℓ pode ser escrito:

$$\ell = s + a \quad . \tag{2}$$

Explicitando a da equação (2) e substituindo em (1), temos:

$$\boxed{B = D + d + \ell - s} \quad . \tag{3}$$

Para que o eclipse solar possa ocorrer é necessário que a latitude eclíptica geocêntrica da Lua seja inferior a B:

$$\boxed{b < B} \quad . \tag{4}$$

Conhecendo-se

$$D \cong 16',3 \tag{5}$$

$$d \cong 15',5 \tag{6}$$

$$\ell \cong 57',0 \tag{7}$$

$$s \cong 8'',8 \quad , \tag{8}$$

com isso obtêm-se:

$$B \cong 88',7 \quad . \tag{9}$$

Logo, para que ocorra um eclipse solar é necessário que a latitude geocêntrica do centro da Lua seja inferior a 88',7.

Conforme o item 109, só ocorrerá eclipse quando a Lua estiver próxima dos nodos. Calculemos o ângulo de longitude máxima que a Lua pode ter em relação ao nodo para que ocorra o eclipse solar: apliquemos a equação 59.(4) ao triângulo esférico $L\Omega Q$ temos:

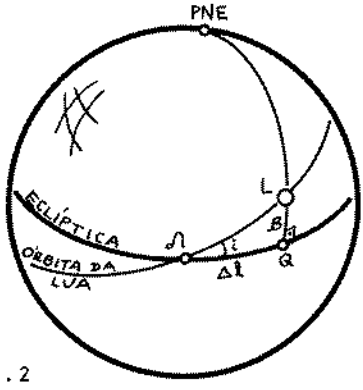


Fig.2

$$\boxed{\operatorname{sen}\Delta\ell = \tan B.\cot i} \quad . \tag{10}$$

Como

$$i \cong 5^{\circ}\ 09' \quad , \tag{11}$$

teremos um $\Delta\ell$ máximo de

$$\Delta\ell \cong 16^{\circ}\ 30' \quad , \tag{12}$$

que representa o máximo ângulo, medido sobre a eclíptica, entre o nodo ☊ da Lua e a Lua, para que possa ocorrer um eclipse solar.

Vejamos agora a condição para que ocorra um eclipse lunar. Seja L'L'' o diâmetro da sombra da Terra produzida pelo Sol, à distância TT' correspondente à distância do raio orbital da Lua. Por simples considerações geométricas envolvendo os raios do Sol e Terra, e das distâncias Terra-Sol e Terra-Lua podemos tirar que:

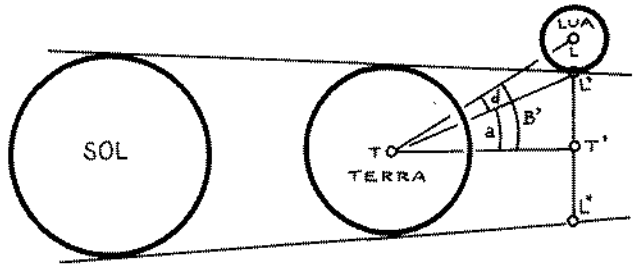


Fig.3

$$a \cong 41' \ . \qquad (13)$$

Pela Figura 3 é imediato que

$$\boxed{B' = a + d} \ ; \qquad (14)$$

com os valores vistos temos:

$$B' \cong 56{,}5 \ ; \qquad (15)$$

A condição para ocorrer eclipse lunar é

$$\boxed{b < B'} \ , \qquad (16)$$

onde B' é o máximo valor da latitude eclíptica geocêntrica do centro da Lua que ainda permite a ocorrência do eclipse.

Aplicando (b) na equação (10) obtemos

$$\Delta\ell' = 10^{\circ}\ 36' \ , \qquad (17)$$

que é o máximo ângulo entre o nodo e o círculo eclíptico passante pela Lua para que possa ocorrer um eclipse lunar.

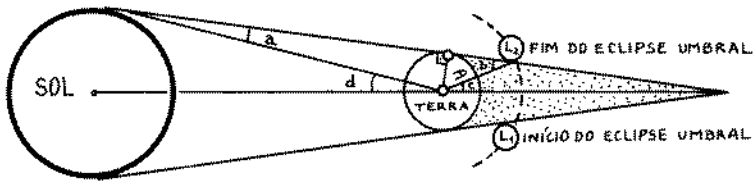
Verifica-se que no mínimo ocorrem 2 eclipses por ano, sendo os 2 solares. No máximo podem ocorrer 7 eclipses por ano, sendo, nesse caso, que no mínimo 2 são lunares.

A cada 18 anos e 11,3 dias, os eclipses ocorrem novamente numa mesma seqüência; esse período é chamado de *período de Saros*, já conhecido pelos caldeus. Em cada Saros ocorrem 70 eclipses, sendo 41 solares e 29 lunares.

111 DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA DA TERRA À LUA

Utilizando-se de um eclipse lunar, Hiparcos, no século II a.C., determinou a distância (D) da Terra à Lua, em função do raio (R) da Terra. Notar, pela Figura 1, que basta determinar a medida do ângulo b, chamado de *paralaxe da Lua*, já que é o ângulo sob o qual uma pessoa na Lua veria o raio da Terra. Se soubermos os

Fig. 1



instantes do início e do fim do eclipse umbral da Lua, sabemos sua duração t. Sabendo a duração (T) da volta completa da Lua em torno da Terra (aproximadamente uma lunação, conforme item 108) podemos, por regra de três simples, obter

$$c = \frac{360^{\circ} t}{2T} \quad . \tag{1}$$

Esse ângulo poderia também ser obtido por medição caso se soubesse a direção da linha que une os centros da Terra e do Sol; isso poderia ser obtido sabendo-se a hora da ocorrência do final do eclipse umbral, já que se podia calcular a posição do Sol por essa hora.

Quanto ao ângulo d, chamado *semi-diâmetro do Sol*, é facilmente mensurável a qualquer hora em que o Sol seja visível:

$$d \approx 16' \quad . \tag{2}$$

Quanto ao ângulo a, chamado *paralaxe solar* (ângulo sob o qual alguém no Sol veria o raio da Terra), esse é muito pequeno:

$$a \approx 8'',794 \quad , \tag{3}$$

mas que era desconhecido na época, e suposto desprezível, pois os raios de luz pareciam vir do Sol paralelos entre si.

Utilizando o conceito de ângulos suplementares, pela figura, obtêm-se:

$$a + b = c + d \quad . \tag{4}$$

Como a é muito pequeno:

$$b \simeq c + d \quad ; \tag{5}$$

conhecendo-se c e d pelas equações (1) e (2) obtemos b. Daí, para obter a distância D procurada temos:

$$D = R/\text{sen}b \quad . \tag{6}$$

Hiparcos achou $62R < D < 74D$, quando que o valor atualmente conhecido é de

$$D \simeq 60,27\,R \quad . \tag{7}$$

112 DISTÂNCIA DA TERRA AO SOL

Além de ter suposto o Sol como centro do Sistema Planetário, Aristarco de Samos, no século III a.C., determinou a distância da Terra ao Sol em função da distância da Terra à Lua (item 111). Para isso ele imaginou o seguinte esquema: durante uma Lua quarto crescente (ou minguante), o ângulo entre o Sol e a Terra, vistos da Lua, seria de 90°. Assim, conhecendo-se o ângulo θ entre a Lua e o Sol, vistos da Terra, podia-se resolver o triângulo STL:

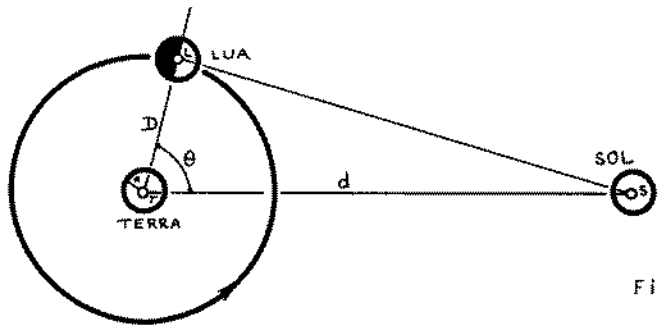


Fig.1

$$d = D/\cos\theta \ , \qquad (1)$$

onde D é a distância da Terra à Lua. O ângulo θ medido foi da ordem de 87°. Hoje sabemos que a distância da Terra ao Sol (chamada de *Unidade Astronômica* e abreviada por U.A.) vale aproximadamente:

$$d \simeq 150 \times 10^{6} \text{ km} \ . \qquad (2)$$

113 RAIO ORBITAL E PERÍODO SIDERAL DE PLANETAS INTERIORES

Vejamos o método proposto por Copérnico para determinar a distância do planeta ao Sol, bem como seu *período sideral* T que é o intervalo de tempo para que o planeta dê uma volta completa em torno do Sol (passar 2 vezes sucessivas por uma mesma estrela).

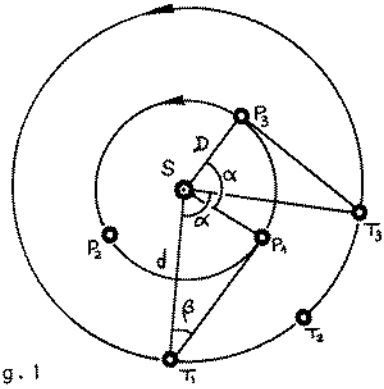


Fig. 1

Seja $d = \overline{ST}$ a distância da Terra ao Sol, admitindo ser o movimento daquela em torno deste como circular uniforme. Seja $D = \overline{PS}$ o raio da órbita do planeta, também com movimento circular uniforme. Postulemos que no instante t_1 a Terra esteja em T_1 e o planeta esteja em elongação máxima ocidental P_1 (item 106). Ora, basta medir observacionalmente o ângulo β entre o Sol e o planeta e teremos a distância procurada resolvendo o triângulo retângulo SP_1T_1:

$$\boxed{D = d.\text{sen}\beta} \quad . \tag{1}$$

Passemos agora à determinação de seu período sideral T. Admitamos ser t_3 o primeiro instante após t_1 no qual ocorre nova máxima elongação ocidental: à diferença $t_3 - t_1$ chamamos de *período sinódico* S (item 106):

$$S = t_3 - t_1 \quad . \tag{2}$$

Durante esse intervalo de tempo S, a Terra deslocou-se de T_1 a T_3, passando pelo ponto intermediário T_2, e percorrendo um ângulo α, que pode ser calculado por regra de três simples (admitindo que num período A a Terra percorre 360°):

$$\alpha = \frac{360^\circ S}{A} \quad . \tag{3}$$

No mesmo intervalo de tempo, o planeta interior, que é mais rápido, saiu de P_1, passou por P_2, retornou a P_1 e finalmente atingiu P_3; em outras palavras, percorreu um ângulo de $360^\circ+\alpha$ (ver Figura 1). Nosso intuito é determinar em quanto tempo percorreria o ângulo de 360° que representa uma volta completa, a qual, por definição, percorre num intervalo de tempo chamado período sideral; por simples regra de três temos:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & 360^\circ+\alpha \\ T & \leftarrow & 360^\circ \end{array} ,$$

e portanto

$$T = \frac{360^\circ\, S}{360^\circ+\alpha} . \qquad (4)$$

Substituindo nessa equação o valor de α encontrado em (3) temos:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{1}{A} + \frac{1}{S}} , \qquad (5)$$

que é a equação que permite determinar o período sideral T conhecendo-se o período sinódico S e a duração do *ano terrestre sideral* A:

$$A = 365,^{d}25636042 = 365^{d}06^{h}09^{m}09^{s}5 . \qquad (6)$$

114 RAIO ORBITAL E PERÍODO SIDERAL DE PLANETAS EXTERIORES

Novamente, vamos apresentar o método proposto e usado por Copérnico para determinar o período sideral e o raio orbital de planetas exteriores.

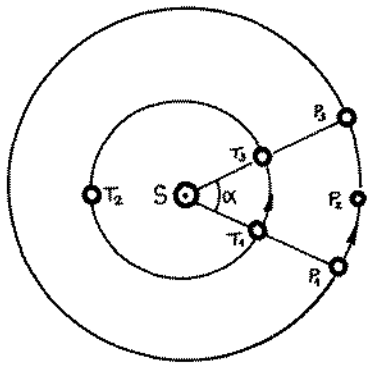


Fig.1

Comecemos com a determinação do período sideral T. Seja t_1 um instante no qual o planeta P_1 está em oposição quando visto da Terra T_1 (item 106); seja t_3 o instante posterior a t_1 no qual pela primeira vez ocorre nova oposição do planeta. Pela definição de período sinódico S, (item 106):

$$S = t_3 - t_1 \quad . \tag{1}$$

Nesse intervalo de tempo S_1 o planeta percorreu o ângulo α. A Terra, estando mais próxima do Sol, percorreu $360^\circ+\alpha$. Para a Terra podemos escrever a seguinte regra de três:

$$A \rightarrow 360^\circ$$
$$S \leftarrow 360^\circ+\alpha \quad ,$$

e portanto

$$\alpha = \frac{360^\circ S}{A} - 360 \quad , \tag{2}$$

onde A é o período sideral da Terra (item 113.(6)).

Para o planeta podemos escrever:

$$S \rightarrow \alpha$$
$$T \leftarrow 360^\circ \quad ,$$

e portanto

$$T = \frac{360^\circ S}{\alpha} \quad . \tag{3}$$

Substituindo α da equação (2) na (3), temos:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S}} \quad , \tag{4}$$

que é a equação procurada para o cálculo do período sideral T de um planeta exterior.

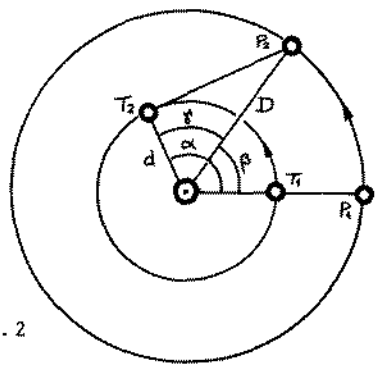


Fig. 2

Calculemos agora seu raio orbital $D = \overline{SP}$ em função do raio orbital da Terra $d = \overline{ST}$. Admitamos no instante t_1 ocorrer uma oposição do planeta P_1. Sponhamos que em um instante posterior t_2 ocorra a primeira quadratura, (ver item 106). Seja t o intervalo $t_2 - t_1$:

$$t = t_2 - t_1 \ . \tag{5}$$

Para a Terra, podemos calcular o ângulo α da Fig. 2 por simples regra de três usando o período sideral A (item 113) da Terra:

$$\alpha = \frac{360^{\circ}\, t}{A} \ . \tag{6}$$

Para o planeta, cujo período sideral T já calculamos, também por regra de três podemos escrever:

$$\beta = \frac{360^{\circ}\, t}{T} \ . \tag{7}$$

O ângulo γ do triângulo ST_2P_2 é facilmente obtenível:

$$\gamma = \alpha - \beta \ . \tag{8}$$

Basta, agora, resolver o triângulo citado; teremos:

$$\boxed{D = d/\cos\gamma} \quad , \tag{9}$$

o que soluciona o problema fornecendo a distância D do Sol ao planeta.

115 LEI DE TITUS & BODE

No século XVIII, o astrônomo alemão *Bode* popularizou uma lei que fornecia o raio orbital dos planetas conhecidos (até Saturno). Notar que não foi ele o descobridor; nem *Titus*, o qual apenas colocou uma nota de rodapé de um livro que traduziu. A lei pode ser traduzida matematicamente por:

$$D = 0,1(3 \times 2^n + 4) \ , \qquad (U.A.) \qquad (1)$$

onde n toma os valores $-\infty$, 0, 1, 2, 4 e 5 para os planetas Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, respectivamente. A distância D será dada em unidades astronômicas, ou seja, a distância da Terra ao Sol.

Como não existia planeta correspondente ao n = 3, admitiam que aí faltava descobrir um planeta. Só bem mais tarde, aí foi verificada a existência de um *cinturão de asteróides*.

O planeta Urano, descoberto por Herschel (inglês) em 1781, obedecia à lei, mas Netuno (em 1846 por Galle e LeVerrier) e Plutão (em 1930, por Tombaugh e Lowell) fogem completamente dos valores previstos por ela. A tabela a seguir mostra esses dados. A lei, atualmente não tem nenhum suporte científico.

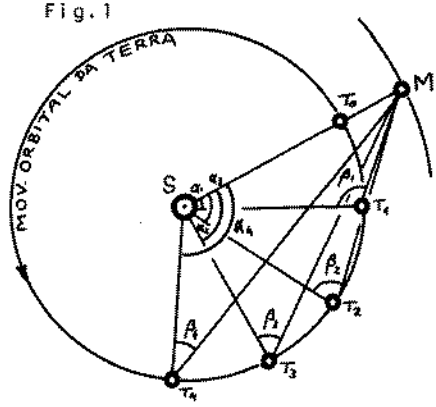
PLANETA	n	D (pela lei de Bode)	D' (atualmente conhecido)
Mercúrio	$-\infty$	0,4	0,387
Vênus	0	0,7	0,723
Terra	1	1,0	1,000
Marte	2	1,6	1,524
Asteróides	3	2,8	~2,8
Júpiter	4	5,2	5,202
Saturno	5	10,0	9,539
Urano	6	19,6	19,191
Netuno	7	38,8	30,071
Plutão	8	77,2	39,457

116 ÓRBITA DA TERRA, SEGUNDO KEPLER.

O alemão Kepler, no século XVII, foi discípulo de Tycho Brahe, astronômo dinamarquês de alta qualidade observacional. Foi usando dados obtidos por Brahe que Kepler verificou que a órbita da Terra em redor do Sol era aproximadamente circular, mas o Sol não estava no centro da circunferência. Vejamos qual o método que Kepler utilizou para chegar a tal conclusão.

Kepler vai considerar Marte sempre em uma mesma posição M da órbita em redor do Sol: isso ocorre após cada período sideral (T) de Marte. O instante t_0 representa a posição do planeta, com a Terra em T_0. No instante $t_1 = t_0 + T$, a Terra estará na posição T_1. Kepler mede o ângulo β_1, entre Marte e o Sol. Como o período sideral da Terra é conhecido, ele pode calcular o ângulo α_1 entre Marte e a Terra, vistos do Sol. Admitindo a distância SM conhecida, o triângulo SMT_1 pode ser resolvido, já que se conhece um ângulo adjacente (α_1) e o ângulo oposto (β_1). Podemos pois obter a distância ST_1 pela lei dos senos:

Fig.1



$$ST_1 = \frac{SM}{\operatorname{sen}\beta_1}\operatorname{sen}(180-\alpha_1-\beta_1) \quad . \qquad (1)$$

Depois de mais um intervalo de tempo T ($t_2 = t_0 + 2T$) medimos β_2, calculamos α_2 e obtemos ST_2. Sucessivamente teremos, para os instantes

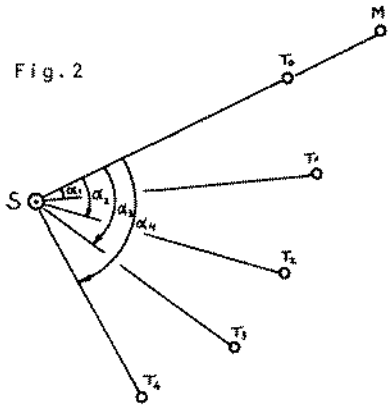
$$t_n = t_0 + nT \quad , \qquad (2)$$

os valores do *raio vetor* da Terra:

$$ST_n = SM \cdot \frac{\operatorname{sen}(180-\alpha_n-\beta_n)}{\operatorname{sen}\beta_n} \quad . \qquad (3)$$

Construamos o gráfico polar da posição da Terra em função da direção SM (Figura 2).

Fig.2



Ao procurarmos unir os pontos T_0, T_1, T_2 .... T_n por uma circunferência, veremos que a coincidência é bem grande, mas, a surpresa é que o centro da circunferência que os une não está no Sol, mas deslocado, conforme Figura 3 (o desvio está exagerado para melhor compreensão). A conclusão de Klepler foi que o movimento orbital da Terra é circular, mas cujo centro está deslocado do Sol.

Assim, o módulo do *raio vetor* r da Terra(segmento que une o Sol à Terra) varia de instante para instante ao longo da órbita.

Sabemos atualmente que a órbita da Terra é elíptica e não circular, mas a excentricidade é tão pequena que se torna difícil optar entre circunferência e elipse.

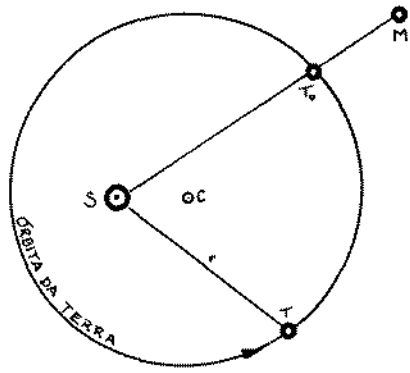


Fig.3

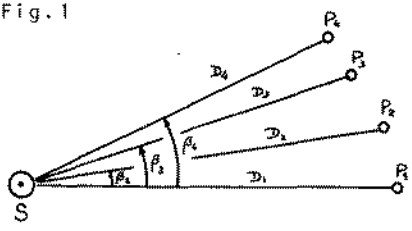
117 LEIS DE KEPLER

Tendo verificado o tipo de órbita da Terra, Kepler partiu para verificar se a descentralização achada para a Terra valia também para os outros planetas, em particular para Marte do qual dispunha de muitos dados observacionais.

Para isso repetiu o procedimento descrito no item 114, mas sofisticou o método ao substituir o valor d da fórmula 114.(5) pelos valores de r obtidos no item 116, para várias posições de Marte e da Terra.

Construiu então o gráfico polar colocando as distâncias D_n encontradas em função dos ângulos β_n medidos a partir da oposição. Verificou, agora sim, que a órbita era indubitavelmente não circular. A melhor curva que passava pelos pontos encontrados era uma *elipse*, com o Sol em um dos *focos* (item 118).

Fig.1



Verificou, outrossim, que perto do Sol o planeta deslocava-se mais rapidamente, enquanto que longe do Sol seu movimento era mais lento, mas as áreas "varridas" pelos raios vetores, em tempos iguais, eram iguais. Apesar dessas verificações terem sido feitas para Marte, Kepler intuiu que elas valeriam para os outros planetas, e enunciou as três leis seguintes:

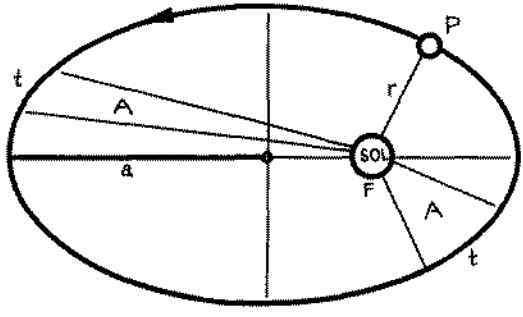


Fig.2

1ª Lei de Kepler: os planetas giram em torno do Sol em órbitas elípticas, ocupando o Sol um dos focos;

2ª *Lei de Kepler*: os raios vetores de cada planeta "varrem" áreas iguais em tempos iguais (costuma ser chamada de *lei das áreas*);

3ª *Lei de Kepler*: os cubos dos semi-eixos maiores das órbitas são proporcionais aos quadrados dos períodos sideraís:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \quad . \qquad (1)$$

Essa 3ª Lei foi obtida bem depois das outras duas.

Capítulo 16

Movimento Elíptico do Sol

118 ESTUDO DA ELIPSE

A *elipse* é definida como sendo o lugar geométrico do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (chamados *focos*) é constante e cujo valor é 2a, onde (a) é o *semi-eixo maior* da elipse (metade da maior distância entre 2 pontos da elipse). Poder-se-ia escrever:

$$a = \overline{OA} \qquad (1)$$

e

$$\boxed{r_1 + r_2 = 2a} \quad , \qquad (2)$$

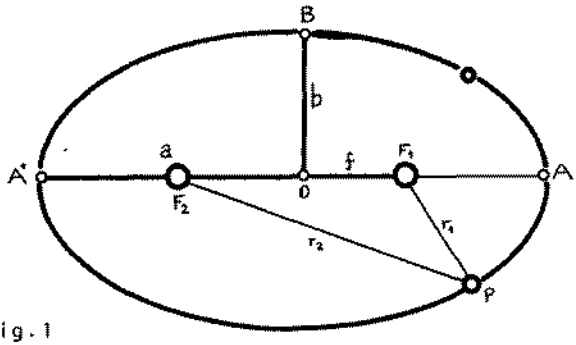


Fig.1

onde r_1 e r_2 são os raios vetores do ponto, a partir dos dois focos (na verdade dever-se-ia dizer que r_1 e r_2 são os módulos dos raios vetores; costuma-se subentender a palavra "módulo").

Define-se *distância focal* (f) da elipse como sendo a distância do centro 0 da elipse até um de seus focos:

$$f = \overline{OF} \; . \qquad (3)$$

Chama-se *excentricidade* (e) ao quociente:

$$\boxed{e = f/a} \quad . \qquad (4)$$

Denomina-se semi-eixo menor (b) à distância $\overline{OB}$ (ver figura) onde $\overline{OB}$ é perpendicular a $\overline{OA}$:

$$b = \overline{OB} \; . \qquad (5)$$

Pela equação (2) é fácil ver que:

$$\overline{BF} = a \quad . \tag{6}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OBF temos:

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} \quad ; \tag{7}$$

substituindo o valor de f tirado de (4), temos:

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}} \quad . \tag{8}$$

Sabemos, da Geometria Plana, que a área da elipse pode ser dada por:

$$A = \pi ab \quad . \tag{9}$$

Uma maneira de desenhar uma elipse com características dadas (a,e) é colocar duas estacas F_1 e F_2 separadas da distância 2ae e fixando nelas um fio flexível de comprimento 2a, deslizar o lápis, ou estilete, pelo fio, mantendo-o esticado: o desenho resultante será a elipse procurada.

Uma maneira de se construir uma elipse com (a,e), consiste em se construir uma circunferência de raio R=a. Adotar um eixo OA, e um OB (perpendicular a OA). Por vários pontos P, Q, R, B, ..., da circunferência, traçar as perpendiculares PP_1, QQ_1, RR_1, BO, ... ao semi-eixo maior OA. Multiplicar cada um desses segmentos (y) pelo *fator de contração*

$$\sqrt{1 - e^2} \quad ;$$

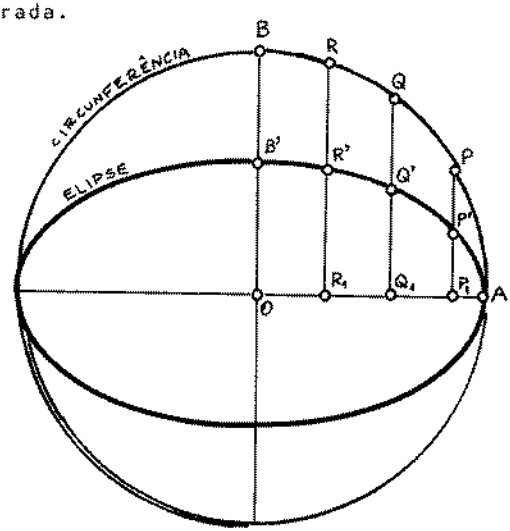


Fig.2

esquematicamente:

$$y' = y.\sqrt{1 - e^2} \quad ; \qquad (1)$$

assim, obteremos os pontos P', Q', R', B', ..., colocando, a partir de P_1, Q_1, R_1, 0, ..., os valores de y' obtidos na equação (1). Unindo os pontos P', Q', R', B', ..., obteremos a elipse procurada.

119 ELEMENTOS ORBITAIS

No caso do sistema solar, todos os planetas giram em torno do Sol em planos próximos ao da eclíptica, mas não coincidentes. Para se determinar perfeitamente a órbita de um planeta é necessário fornecer-se 7 elementos, chamados *elementos orbitais*. Antes de apresentarmos esses 7 elementos orbitais, denominemos alguns outros elementos auxiliares.

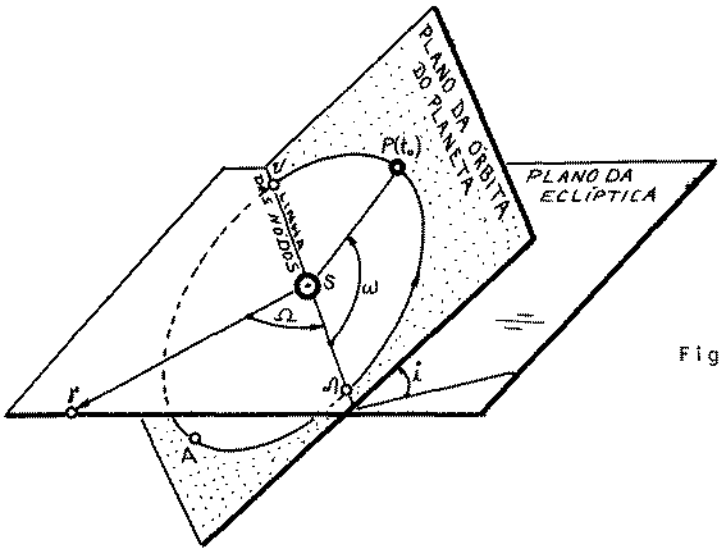


Fig. 1

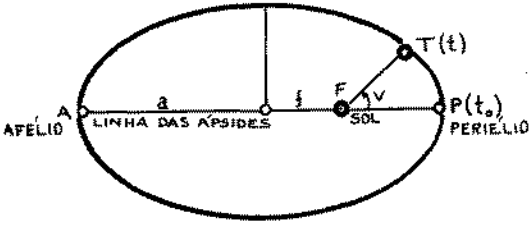


Fig. 2

Chamamos de *periélio* ao ponto P que corresponde à posição em que o planeta estará mais próximo do Sol. Ao ponto (A), mais distante do Sol ao longo da órbita, chamamos de *afélio*. A direção (linha) que une o afélio e o periélio (passando pelo foco), chama-se *Linha das Ápsides*. A reta intersecção do plano da órbita do planeta com a eclíptica dá-se o nome de *Linha dos Nodos*. A intersecção dessa linha com a órbita do planeta fornece os *nodos*; *nodo ascendente* ☊ é aquele no qual o planeta passa do hemisfério Sul ao Norte eclíptico; *nodo descendente* ☋ é aquele em que o pla

neta passa para o hemisfério Sul eclíptico.

Definamos, agora, os 7 elementos que definem a órbita de um planeta.

1) *Inclinação* (i) *do plano da órbita*: é o ângulo diedro entre o plano da órbita do planeta e o plano da eclíptica. Se $0 \leq i < 90^{\circ}$ o planeta gira em torno do Sol no mesmo sentido que a Terra; se $90 < i \leq 180^{\circ}$, o planeta gira em torno do Sol no sentido oposto ao da Terra (o movimento é chamado de retrógrado).

2) *Longitude geocêntrica do nodo ascendente* (Ω): é o ângulo do ponto Vernal (γ) e a direção do nodo ascendente (Λ) do planeta ($0 \leq \Omega \leq 360^{\circ}$).

3) *Argumento do periélio* (ω): é o ângulo, medido sobre o plano da órbita do planeta, entre o periélio (P) e o nodo ascendente (Λ), medido no sentido do movimento do planeta ($0 \leq \omega \leq 360^{\circ}$).

4) *Semi-eixo maior da órbita* (a), conforme definido no item 118.

5) *Excentricidade da órbita* (e), conforme definido no item 118.

6) *Instante de passagem (época) pelo periélio* (t_0): é a época de uma determinada passagem pelo periélio.

7) *Período Sideral* (T): é o tempo necessário para o planeta percorrer toda a órbita 1 vez. No caso do sistema solar, esse elemento é supérfluo, já que com o conhecimento do semi-eixo maior pode-se obter o período através da 3ª lei de Kepler (item 117).

Muitas vezes alguns desses elementos são substituídos por outros:

8) *Longitude do periélio* ($\tilde{\omega}$): o nome não é feliz já que ele é definido como sendo a soma da longitude do nodo ascendente com o argumento do periélio, que não estão ambos (geralmente) num mesmo plano:

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega \quad . \qquad (1)$$

Essa relação costuma ser usada em lugar do argumento do periélio.

9) *Movimento médio* (n): é a velocidade angular média do planeta em torno do Sol:

$$n = \frac{360^{\circ}}{T} = \frac{2\pi}{T} \quad . \qquad (2)$$

Esse elemento substitui ou o semi-eixo maior (a) ou o período sideral (T).

Para definir a posição de um planeta nessa órbita são necessários 2 elementos, além dos 7 vistos:

1) *instante (ou data) da posição* (t); e

2) *anomalia verdadeira* (v): é o ângulo, medido no plano da órbita, entre o periélio e o planeta no instante (t), no sentido do movimento do planeta, e centrado no Sol (Figura 2).

A posição do plano da órbita com relação à eclíptica é dada por (i,Ω).

A posição da órbita em seu plano é dada por (ω).

A forma da órbita é dada por (a,e).

120 MOVIMENTO ELÍPTICO DO SOL

Definidos os elementos da órbita de um planeta, vejamos agora as leis que descrevem a posição e o movimento de um planeta em sua órbita. Ao invés de um planeta qualquer, utilizemos a Terra. Além disso, como do ponto de vista prático tudo se passa como se a Terra estivesse parada e o Sol girando em seu redor, vamos imaginar que a Terra esteja no foco da órbita do Sol em torno da Terra; do ponto de vista cinemático tal mudança de referencial não cria nenhum problema.

Seja um ponto S' que se desloca sobre uma circunferência de raio a com velocidade angular tal que sua projeção S (ver a seguir) se mova sobre a elipse com velocidade tal que obedeça à 2ª lei de Kepler (lei das áreas) dada no item 117.

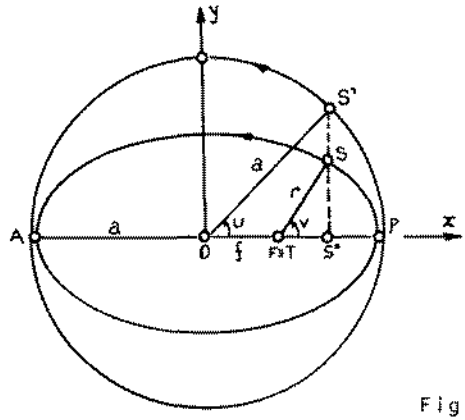


Fig.1

A posição de S' pode ser dada pelo ângulo U, chamado de *Anomalia Excêntrica*, medido a partir do periélio, no sentido do movimento de S'.

Se construirmos a elipse, a partir dessa circunferência, conforme item 118, a projeção de S' será S, cuja posição pode ser dada pelo ângulo V (anomalia verdadeira), conforme item 119. O segmento TS será o raio vetor r do Sol, e a excentricidade da órbita será e. Relacionemos todas essas grandezas.

Adotando o sistema cartesiano (x,y) centrado em 0, as coordenadas de S serão:

$$x = a.\cos U \qquad (1)$$

$$y = (a.\operatorname{sen} U)\sqrt{1 - e^2} \quad , \qquad (2)$$

onde $\sqrt{1-e^2}$ é o fator de contração (item 118).

Lembrando que (equação 118.(8))

$$b = a\sqrt{1-e^2} \quad , \tag{3}$$

a equação (2) pode se tornar:

$$\boxed{y = b.\text{sen}U} \quad . \tag{4}$$

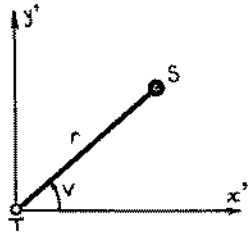


Fig.2

Se adotarmos o sistema cartesiano (x',y') centrado em T (Fig. 2) poderemos calcular as coordenadas

$$x' = r.\cos V \tag{5}$$

$$y' = r.\text{sen}V \quad . \tag{6}$$

Pela Figura 1 é fácil ver que:

$$x' = x - f \quad , \tag{7}$$

$$y' = y \quad . \tag{8}$$

Substituindo em (7) as equações (1) e 118.(4), teremos:

$$x' = a(\cos U - e) \quad . \tag{9}$$

Comparando as equações (5) e (9), e explicitando o cosV, temos:

$$\cos V = \frac{a(\cos U - e)}{r} \quad . \tag{10}$$

Igualmente, comparando as equações (2), (6) e (8), podemos escrever:

$$\text{sen}V = \frac{a\sqrt{1-e^2}\ .\ \text{sen}U}{r} \quad . \tag{11}$$

Para obter o raio vetor r em função da anomalia excêntri

ca, basta elevar ambos os membros das equações (10) e (11) ao quadrado, somando-as membro a membro então; resultará:

$$r = a(1 - e \cdot \cos U) \quad . \tag{12}$$

Substituindo o valor de r obtido em (12) nas equações (10) e (11) teremos:

$$\cos V = \frac{\cos U - e}{1 - e \cdot \cos U} \tag{13}$$

$$\operatorname{sen} V = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \operatorname{sen} U}{1 - e \cdot \cos U} \quad . \tag{14}$$

Lembrando que

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos V}{1 + \cos V}} \quad , \tag{15}$$

podemos escrever que:

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \tan \frac{U}{2} \quad . \tag{16}$$

As equações (13), (14) e (16) permitem a obtenção da anomalia verdadeira V se conhecermos a anomalia excêntrica U. Procuremos, agora, uma fórmula que forneça U em função do tempo; tal possibilidade resulta a partir da equação de Kepler, a ser obtida no item 121.

121 EQUAÇÃO DE KEPLER

A *equação de Kepler* procura relacionar a anomalia excêntrica U com a data t. Obteremos essa equação calculando a área do setor PTS da elipse da Figura 1 do item 120 por 2 métodos diferentes e igualando os resultados obtidos.

Ora, pela 2ª lei de Kepler, ou lei das áreas, (item 117), vemos que a área varrida pelo raio vetor é proporcional ao tempo; assim, podemos escrever a seguinte regra de três:

$$\pi ab \rightarrow T$$

$$A_{PTS} \rightarrow t - t_0 \ ;$$

o valor da área PTS será:

$$A_{PTS} = \frac{\pi ab(t - t_0)}{T} \quad . \tag{1}$$

Por outro lado, do ponto de vista puramente geométrico, a área do setor de elipse PTS pode ser obtida como sendo a diferença entre as áreas do setor de elipse POS e do triângulo TOS;

$$A_{PTS} = A_{POS} - A_{TOS} \quad . \tag{2}$$

A área do triângulo é imediata:

$$A_{TOS} = \frac{f \cdot y'}{2} \quad ; \tag{3}$$

utilizando f dado na equação 118.(4) e y' dado na equação 120.(4), temos:

$$A_{TOS} = \frac{ae \cdot b \cdot \operatorname{sen} U}{2} \quad . \tag{4}$$

Quanto à área POS, ela pode ser imaginada como sendo a área do setor circular POS' multiplicada pelo fator de contração $\sqrt{1-e^2}$ (item 118):

$$A_{POS} = A_{POS'} \cdot \sqrt{1 - e^2} \quad . \tag{5}$$

Logo:

$$A_{POS} = \frac{aU \cdot a}{2}\sqrt{1 - e^2} \quad . \tag{6}$$

Substituindo (4) e (6) na equação (2) temos:

$$A_{PTS} = \frac{ab(U - e \cdot \text{sen}U)}{2} \quad . \tag{7}$$

Finalmente, igualando (1) e (7), obtemos a equação de Kepler:

$$\boxed{U - e \cdot \text{sen}U = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)} \quad . \tag{8}$$

Ao segundo membro dessa equação costuma-se chamar de *Anomalia Média* (M):

$$\boxed{M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)} \quad , \tag{9}$$

de modo que a equação de Kepler fica:

$$U - e \cdot \text{sen}U = M \quad . \tag{10}$$

A equação de Kepler foi a primeira equação transcedental (que não pode ser resolvida por meios algébricos) na história das ciências. Uma solução gráfica pode ser obtida da seguinte forma (Fig. 1):

1) Traçar a curva $y = e.\text{sen}U$, em função de U (em radianos, e na mesma escala em U e y).

2) A partir do ponto M dado pela equação (9), traçar a reta z inclinada de 45° sobre o eixo das abcissas.

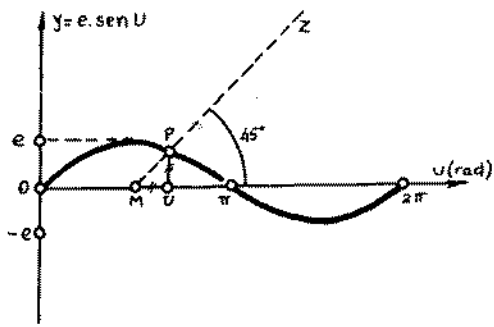


Fig. 1

3) Pelo ponto P onde essa reta intercepta a curva e.senU, baixar a perpendicular ao eixo dos U.

4) O pé da perpendicular será o valor procurado de U.

A aplicação está no fato de $U = M + e.\text{sen}U$.

Uma outra forma de resolução é por aproximações sucessivas. Seja a equação

$$U = M + e.\text{sen}U \quad . \tag{11}$$

Em primeira aproximação substituamos o U da função seno pelo valor

$$U = M \quad ; \tag{12}$$

Calculemos U_1 dado por:

$$U_1 = M + e.\text{sen}M \quad ; \tag{13}$$

em segunda aproximação substituamos na função seno da equação (11) o valor U_1 obtido na equação (13); resolvamos então:

$$U_2 = M + e.\text{sen}U_1 \quad . \tag{14}$$

Continuamos sucessivamente até que o valor de U_n não difira de U_{n-1} além de um valor desejado.

122 EQUAÇÕES APROXIMADAS DO MOVIMENTO ELÍPTICO

Procuremos obter os valores de V e r em função de M. Para isso, substituamos as equações 120.(13) e (14) na equação:

$$\operatorname{sen}(V-U) = \operatorname{sen}V.\cos U - \operatorname{sen}U.\cos V \quad ; \tag{1}$$

obteremos

$$\operatorname{sen}(V-U) = \frac{e.\operatorname{sen}U - \operatorname{sen}U.\cos U(1 - \sqrt{1-e^2})}{1 - e.\cos U} \quad . \tag{2}$$

Como e é sempre um valor bem pequeno, o mesmo acontecendo com (V-U) quando escrito em radianos, podemos escrever (1) da seguinte forma:

$$V-U = e.\operatorname{sen}U + \ldots . \quad , \tag{3}$$

onde apenas os termos de 1ª ordem foram mantidos; lembrando da equação de Kepler 121.(10)

$$U = M + e.\operatorname{sen}U \quad , \tag{4}$$

e substituindo em (3), novamente mantendo apenas os termos de 1ª ordem:

$$\boxed{V \cong M + 2e.\operatorname{sen}M} \quad . \tag{5}$$

Se na equação 120.(12) do raio vetor

$$r = a(1 - e.\cos U) \quad , \tag{6}$$

substituirmos a equação (4), mantendo, no final, apenas os termos de 1ª ordem, teremos:

$$\boxed{r \cong a(1 - e.\cos M)} \quad . \tag{7}$$

Procuremos, agora, uma aproximação para a longitude eclíp

tica ℓ do Sol. Já que o plano da órbita da Terra coincide com o plano da eclíptica, deixa de se poder definir linha dos nodos, e conseqüentemente não se pode falar em longitude do nodo ascendente (Ω), nem do argumento do periélio (ω); contudo pode-se definir a longitude do periélio ($\tilde{\omega}$) (item 119) contado no plano da eclíptica:

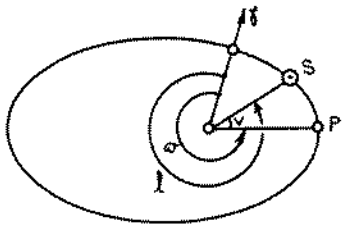


Fig. 1

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega \quad ; \tag{8}$$

a longitude do Sol num dado instante será (Fig. 1):

$$\ell = \tilde{\omega} + V \quad . \tag{9}$$

Usando V dado pela equação (5) teremos:

$$\boxed{\ell \cong \tilde{\omega} + M + 2e.\text{sen}M} \quad . \tag{10}$$

Se derivarmos (10) com relação ao tempo, obteremos a velocidade angular aparente instantânea do Sol;

$$\boxed{\frac{d\ell}{dt} \cong n(1 + 2e.\cos M)} \quad , \tag{11}$$

onde a velocidade angular média n é o próprio movimento médio (item 119):

$$n = \frac{dM}{dt} \quad . \tag{12}$$

O valor de $\tilde{\omega}$ para o Sol é da ordem de

$$\tilde{\omega} \cong 282^{\circ}\ 04' \quad . \tag{13}$$

É usual definir-se *Equação do Centro* à parcela

$$\boxed{C = 2e.\text{sen}M} \tag{14}$$

da equação (10); assim,

$$\ell \cong \tilde{\omega} + M + C \quad . \tag{15}$$

123 MOVIMENTO DO SOL EM ASCENSÃO RETA

Procuremos uma fórmula que nos forneça a ascensão reta (α) do Sol em função de M (não esquecer que M é função linear do tempo conforme equação 121.(9)).

Sabemos, pela equação 59.(5) que para o Sol vale:

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon.\tan\ell \quad ; \tag{1}$$

esta equação é do tipo geral

$$\tan y = p.\tan x \quad , \tag{2}$$

cuja solução é da forma:

$$y = x + q.\operatorname{sen}2x + \frac{q^2}{2}.\operatorname{sen}4x + \frac{q^3}{3}.\operatorname{sen}6x + \ldots \quad , \tag{3}$$

onde

$$q = \frac{p-1}{p+1} \quad , \quad (|q|<1) \ . \tag{4}$$

Em nosso caso

$$p = \cos\varepsilon \tag{5}$$

e

$$q = \frac{\cos\varepsilon - 1}{\cos\varepsilon + 1} \quad ; \tag{6}$$

essa última expressão pode ser colocada em função da tangente do arco metade:

$$q = -\tan^2\frac{\varepsilon}{2} \quad . \tag{7}$$

Usando a equação (1) como base, substituamos (7) na equação (3); obteremos:

$$\alpha = \ell - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}2\ell + \frac{1}{2}\tan^4\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}4\ell - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}6\ell + \ldots . \tag{8}$$

Poderíamos escrever

$$\alpha = \ell + R \tag{9}$$

onde

$$R = -\tan^2\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}2\ell + \frac{1}{2}\tan^4\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}4\ell - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}6\ell + \ldots. \tag{10}$$

onde R recebe o nome de *Redução ao Equador*.

Podemos obter o valor de α em função de M se substituirmos na equação (8) a equação 122.(10) expandida em séries; limitando-nos a alguns termos, temos:

$$\alpha \cong \tilde{\omega} + M + 2e.\operatorname{sen}M - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{sen}2(\tilde{\omega}+M) \quad . \tag{11}$$

Usando a definição de equação do centro 122.(14) e de redução ao Equador, temos:

$$\alpha \cong \tilde{\omega} + M + C + R \quad , \tag{12}$$

ou seja, para o Sol:

$$\begin{pmatrix}\text{ascensão}\\ \text{reta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{longitude}\\ \text{do periélio}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{anomalia}\\ \text{média}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Equação}\\ \text{do centro}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Redução}\\ \text{ao}\\ \text{Equador}\end{pmatrix}$$

Capítulo 17

Gravitação Universal

124 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Em 1687, Newton lançou a *Teoria da Gravitação Universal*, na qual traz à luz as bases da interação entre 2 corpos devido às suas massas.

Definiu-se *força central* como sendo aquela dirigida sempre para um mesmo ponto

Para chegar à lei da Gravitação Universal, Newton demonstrou 6 teoremas básicos. Enunciemô-los:

T1. - Sob a influência de uma força central, todos os corpos se deslocam num plano, e o raio vetor do corpo "varre" áreas iguais em tempos iguais.

T2. - Se um corpo se desloca num plano segundo uma curva tal que seu raio vetor "varre" áreas iguais em tempos iguais, então esse corpo está sujeito a uma força central. (Esse teorema é a recíproca do T1).

T3. - Se um corpo P se desloca sob a ação de uma força central de centro S, essa força é inversamente proporcional ao quadrado da distância PS:

$$F \propto 1/d^2 \quad ; \tag{1}$$

(o símbolo $\propto$ será usado para representar proporcionalidade).

T4 - Quando vários corpos se deslocam em elipses sob o efeito de uma força central de centro S, variando essa força com o quadrado do inverso da distância entre o corpo e S, então os quadrados dos períodos são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das elipses:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad . \tag{2}$$

T5. - Se vários corpos giram em torno de um centro S de forças,

num movimento circular uniforme, e se

$$T^2 \propto a^3 \ , \qquad (3)$$

então os corpos são atraídos para o centro S com forças inversamente proporcionais aos quadrados dos raios orbitais.

T6. - Toda partícula externa a uma esfera (maciça ou oca), homogênea na parte material, é atraída para o centro dessa esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o corpo e o centro da esfera.

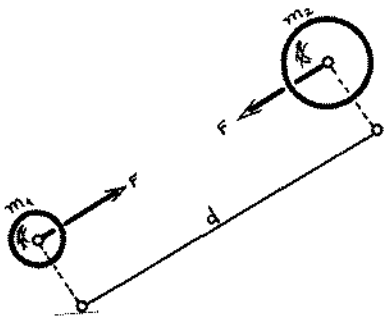
A partir desses teoremas, Newton intuiu a lei da Gravitação Universal, cujo enunciado pode ser assim descrito:

> "Dados 2 pontos materiais de massas m_1 e m_2, distantes d entre si, eles mutuamente se atrairão com forças opostas cujas intensidades serão proporcionais aos produtos das massas dos corpos e inversamente proporcionais ao quadrado da distância que os separa".

Matematicamente poderíamos expressar a lei pela fórmula

$$\boxed{F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}} \ , \qquad (4)$$

Fig.1



onde G é a constante de proporcionalidade denominada *Constante da Gravitação Universal*. Notar que devido ao teorema T6, os pontos materiais podem ser também esferas homogêneas externas entre si. O valor de G pode ser escrito:

$$G = 6{,}670 \times 10^{-11}\ m^3/Kg.s^2$$

ou

$$G = 0{,}0002959(U.A.)^3/(\text{massa do Sol}).(dias)^2 \ ,$$

ou

$$G = 39{,}4736\ (U.A.)^3/(\text{massa do Sol}).(Anos)^2 \ .$$

Newton, em seus trabalhos, apresentou também 3 leis que são conhecidas como *Princípios Fundamentais da Mecânica*, e cujos enunciados poderiam assim ser descritos:

Primeiro Princípio: Todo corpo procura manter seu estado de repouso ou movimento em linha reta com velocidade constante, a menos que sobre ele aja uma força externa. Esse princípio é também chamado de *Princípio da Inércia*. Se m for a massa do corpo cuja velocidade é $\vec{V}$, o princípio da inércia pode ser descrito matematicamente por:

$$m\vec{V} = \text{constante} \ , \tag{5}$$

onde o produto $m\vec{V}$ é chamado de *Quantidade de Movimento*.

Segundo Princípio: Quando sobre um corpo age uma força $\vec{F}$, a variação da quantidade de movimento com o tempo é igual à força aplicada:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \ . \tag{6}$$

Derivando essa expressão temos:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V}\frac{dm}{dt} \ . \tag{7}$$

Como na Mecânica Clássica a massa de um corpo é admitida constante, o segundo membro é nulo. Daí:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \ , \tag{8}$$

ou

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \ , \tag{9}$$

onde

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} \tag{10}$$

é a chamada *aceleração do corpo*.

Conforme a equação (9), o segundo princípio é muitas vezes enunciado como: Um corpo de massa m, sujeito a uma força $\vec{F}$, adquire uma aceleração $\vec{\gamma}$ dada pela equação (9), conhecida como *Princípio Fundamental da Dinâmica*.

Terceiro Princípio: Quando um corpo age sobre outro, esse age sobre o primeiro com força igual em módulo mas de sentido oposto. Poder-se-ia, também, dizer que as variações nas quantidades de movimento são iguais mas de sinais opostos:

$$\frac{d}{dt}\,(m_1\vec{V}_1) = -\frac{d}{dt}\,(m_2\vec{V}_2) \quad , \tag{11}$$

ou

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \tag{12}$$

Esse princípio é também conhecido por *Princípio da Ação e Reação*: a toda ação corresponde uma reação igual de sentido oposto. Notar que as forças conjugadas de ação e reação estão sempre aplicadas em corpos diferentes.

125 PRÍMEIRA PROVA DA VALIDADE DA LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Newton precisava verificar se sua teoria era válida ou não. Como prova ele procurou estudar o sistema Terra+Lua. A pergunta era a seguinte: por que a Lua, que está sob a atração gravitacional da Terra, não cai sobre a Terra? Ora, a resposta é imediata: pelo Princípio da Inércia (item 124), a Lua deveria continuar em um movimento retilíneo uniforme se não houvesse a atração gravitacional; mas ela não cai sobre a Terra por sua velocidade tangencial ser muito grande. Assim, a força gravitacional será a responsável pelo movimento circular (aproximadamente) da Lua em torno da Terra. Em outras palavras, a força gravitacional é a responsável pela força centrípeta:

$$F_{grav} = F_{cent} \quad . \tag{1}$$

Se chamarmos de m_T e m_L as massas da Terra e da Lua, e d a distância entre elas, a força gravitacional e centrípeta que agem sobre a Lua podem ser descritas por:

$$F_{grav} = G \frac{m_T \cdot m_L}{d^2} \tag{2}$$

e

$$F_{cent} = m_L \cdot \omega^2 d \tag{3}$$

onde ω é a velocidade angular da Lua em torno da Terra; esse valor é facilmente obtenível já que conhecemos o período sideral da Lua (T):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad . \tag{4}$$

Se dividirmos ambos os membros das equações (2) e (3) pela massa da Lua teremos as acelerações gravitacional e centrípeta, respectivamente:

$$\gamma_{grav} = \frac{Gm_T}{d^2} \tag{5}$$

$$\gamma_{cent} = \frac{4\pi^2}{T^2} d \quad , \tag{6}$$

sendo que na última equação utilizamos o valor de ω dado em (4).

Conhecendo-se os valores de $T \cong 27,^{d}3$ e $d \cong 384\,000$ km, Newton achou $\gamma_{cent} \cong 0,0027$ m/s^2.

Para o cálculo de γ_{grav} necessitar-se-ia da massa da Terra, cujo valor era muito mal conhecido na época. Assim, Newton usou um artifício matemático: seja g a aceleração gravitacional na superfície da Terra; seu valor pode ser obtido pela equação (5) onde se faz $d = R$:

$$g = \frac{Gm_T}{R^2} \quad . \tag{7}$$

Dividindo-se membro a membro as equações (5) e (7) temos:

$$\boxed{\gamma = g\left(\frac{R}{d}\right)^2} \quad . \tag{8}$$

Ora, conhecendo g na superfície da Terra ($\cong 9,8$ m/s^2) e o raio da Terra, ($R \cong 6378$ km), podia-se calcular a aceleração gravitacional sobre a Lua, a uma distância $d \cong 384\,000$ km; obteve-se $\gamma_{grav} \cong 0,0027$ m/s^2, a qual coincide com o valor a pouco encontrado para a aceleração centrípeta γ_{cent}, o que demonstra, pelo menos para o caso Terra+Lua, que a lei da atração gravitacional é válida.

Devemos chamar a atenção para o fato de termos usado como órbita lunar uma circunferência quando na realidade ela é uma elipse. A diferença numérica decorrente da simplificação adotada é, no entanto, muito pequena para que os resultados fossem considerados muito discrepantes na época.

126 MARÉS

Uma prova da existência de forças de atração entre corpos materiais pode ser obtida por meio das *marés*. Chamamos de marés às periódicas variações do nível das águas dos oceanos: a subida do nível chama-se *fluxo*, e a descida recebe o nome de *refluxo*. Chama-se de *preamar* ou *maré cheia* ao maior nível atingido pelo oceano, enquanto que o mínimo nível chama-se *baixa-mar* ou *maré vazia*.

Já há muito tempo os homens verificaram que os maiores desníveis entre a preamar e a baixa-mar ocorriam em épocas de Lua Nova ou Lua Cheia, e a essas marés chamavam de *marés de Sizígia*[1], enquanto que as marés ocorrentes em épocas de Lua Quarto Crescente ou Minguante apresentavam os menores desníveis, e eram chamadas de *marés de Quadratura*. Essa correlação entre marés e fases da Lua evidenciava que a Lua era a causadora das marés. Hoje sabemos que elas decorrem do efeito conjugado do Sol e da Lua, se bem que o efeito lunar é cerca de 2,2 vezes maior que o solar: tal fato se deve à maior proximidade da Lua, apesar de sua menor massa.

Imaginemos a Terra recoberta por uma camada de líquido. Sejam γ_P, γ_C, γ_D, γ_A e γ_B as acelerações causadas pela Lua, respectivamente, na parte líquida mais próxima da Lua, na parte central sólida da Terra, na parte distal do líquido, no líquido em A e em B. Ora, como o ponto P está mais próximo da Lua que C, e este mais próximo que D, temos (Figura 1):

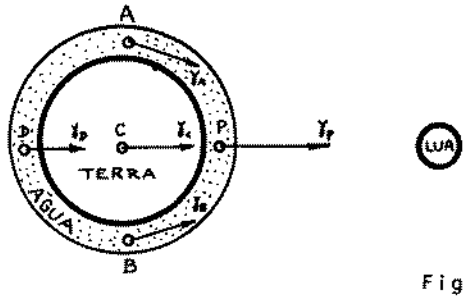


Fig.1

$$\gamma_P > \gamma_C > \gamma_D \quad . \qquad (1)$$

1. Sizígia = syzigia [grego] = ficar numa mesma linha

Isto significa que o ponto P "cai" mais depressa à Lua, seguido de C e D. Se imaginássemos o líquido transformado numa gelatina plástica, o "anel" de gelatina ficaria deformado (Fig. 2), com um "vazio" entre a Terra Sólida e a gelatina plástica. Como não é gelatina, mas sim água, parte da água que está em A e B, devido às componentes radiais de γ_A e γ_B, flui para os "vazios", fazendo que em P e D ocorram as preamares enquanto que em A e B ocorrem as baixa-mares (Fig. 3).

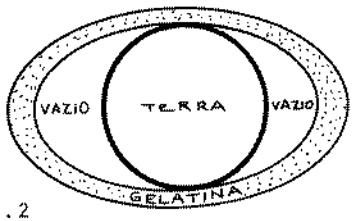


Fig.2



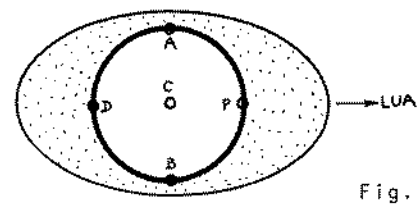
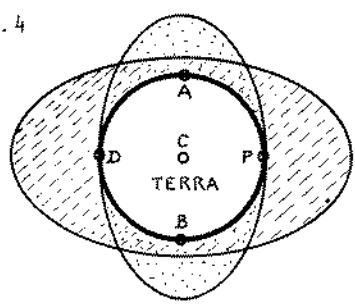


Fig.3

Caso o Sol seja levado em consideração, se estivermos em Lua Nova, o efeito se soma e teremos uma alta preamar em P e D e uma baixa-mar em A e B. Caso seja Lua Cheia o fenômeno ainda se mantém com grande intensidade, mas pouco menor que no anterior.

Fig.4







Nas marés de quadratura, se devido à Lua em P e D ocorrem as preamares e em A e B as baixa-mares, devido ao Sol em P e D ocorrem baixa-mares e em A e B as preamares. O efeito combinado acaba por tornar o desnível entre preamar e baixa-mar não muito acentuado.

No meio do oceano, longe de qualquer terra, as marés têm pequeno desnível: cerca de 30 cm. Em baías fechadas, no entanto, elas podem atingir até cerca de 19,6 m (baía de Fundy, no Canadá). Devido à inércia das águas, a maré está atrasada com relação à posição geométrica da Lua e Sol.

Em cada ponto da Terra ocorrem, diariamente, 2 preamares e 2 baixa-mares.

127 VARIAÇÃO DA GRAVIDADE TERRESTRE COM A ALTURA DESDE O SOLO

A equação 125.(8) permite o cálculo da aceleração da gravidade γ a uma distância d do centro da Terra. Substituamos d pela soma de R (raio da Terra) e de h (altura do objeto com relação ao solo):

$$d = R + h \quad ; \tag{1}$$

a equação 125.(8) tomará a forma:

$$\boxed{\gamma = g \frac{R^2}{(R+h)^2}} \quad . \tag{2}$$

Utilizando as equações (3) e (2) do Apêndice **A1**, com $m = -2$, e limitando-nos a $n = 1$, a equação acima pode ser escrita:

$$\boxed{\gamma \cong g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)} \quad , \tag{3}$$

que representa a aceleração γ num ponto a uma altura h do solo, sendo que $h << R$.

128 ENERGIA DE UM CORPO NUM CAMPO GRAVITACIONAL

Define-se *energia potencial gravitacional* E_p de um corpo de massa m no campo gravitacional criado por uma massa M, como sendo o trabalho realizado pela força gravitacional agente entre os 2 corpos para trazer o corpo de massa m desde o infinito até à distância d em que m se encontra de M:

$$E_p = \int_{\infty}^{d} -F.dr \quad , \tag{1}$$

onde o sinal negativo aparece pelo fato de $\vec{F}$ e $\vec{r}$ estarem em sentidos opostos.

Como, pela equação 124.(4)

$$F = G\,\frac{m.M}{r^2} \quad , \tag{2}$$

temos

$$E_p = \int_{\infty}^{d} -G\,\frac{m.M}{r^2}\,dr \quad , \tag{3}$$

o que fornece, após integração:

$$\boxed{E_p = -\frac{GmM}{d}} \quad . \tag{4}$$

A energia potencial representa a energia do corpo devido sua posição no campo gravitacional.

É costume definir-se *Potencial Gravitacional* U como sendo, numericamente, a energia potencial por unidade de massa do corpo atraído:

$$\boxed{U = -\frac{GM}{d}} \quad . \tag{5}$$

Notar que tanto o potencial quanto a energia potencial gravitacio

nal são sempre negativos.

Devido à força atrativa, um corpo abandonado num campo gravitacional terá uma velocidade V. Define-se *energia cinética* E_C desse corpo pela fórmula:

$$\boxed{E_C = \frac{mV^2}{2}} \quad . \tag{6}$$

Definimos *Energia Mecânica Total* do corpo num campo gravitacional como sendo a soma de sua energia cinética e potencial:

$$\boxed{E_T = E_C + E_P} \quad , \tag{7}$$

ou

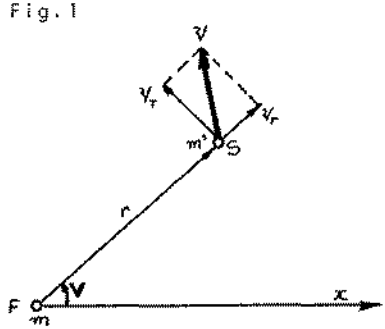
$$E_T = \frac{mV^2}{2} - \frac{GmM}{d} \quad . \tag{8}$$

Se derivarmos E_T com relação ao tempo, veremos que sua derivada é nula, ou seja, E_T é constante com o tempo.

129 EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA E VELOCIDADE DE UM CORPO NUM CAMPO GRAVITACIONAL

Admitamos o corpo F parado (com massa m) e que em torno dele orbita um corpo S de massa m', sujeito apenas ao campo gravitacional criado por F. Procuremos equações que nos forneçam r em função de V (ângulo de r com uma direção x adotada como origem), bem como a velocidade V de S, num instante qualquer, em função de r.

Fig. 1



Pela equação 128.(8) podemos escrever

$$V^2 - \frac{2Gm}{r} = h \quad , \tag{1}$$

onde a parte constante foi agrupada no termo h dado por:

$$h = \frac{2E_T}{m'} \quad , \tag{2}$$

sendo E_T a energia mecânica total do corpo S no campo gravitacional citado. A *velocidade* $\vec{V}$ da partícula pode ser considerada como a soma vetorial de uma *velocidade radial* $\vec{V}_r$ na direção de $\vec{r}$ e de uma *velocidade normal* $\vec{V}_N$ na direção perpendicular a $\vec{r}$; seus módulos são:

$$V_r = \frac{dr}{dt} \quad , \tag{3}$$

$$V_N = r \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad , \tag{4}$$

$$V^2 = V_r^2 + V_N^2 \quad , \tag{5}$$

$$V^2 = \frac{dr^2 + r^2 \cdot d\mathbf{V}^2}{dt^2} \quad . \tag{6}$$

Para eliminarmos a dependência explícita com o tempo, lembremos que,

pelo teorema TI do item 124, devido à força ser central, pela lei das áreas (item 117), podemos escrever que

$$\boxed{r^2 \cdot \frac{dV}{dt} = C} \qquad (7)$$

onde C é conhecida como *constante das áreas* (essa equação representa a área de um "triângulo" de "base" r.dV e "altura" r: $\frac{(r.dV).r}{2} = C'.dt$). Explicitando dt da equação (7), elevando ao ao quadrado, substituindo em (6) e retornando a (1), obteremos:

$$\frac{dr^2 + r^2.dV}{r^4.dV^2} - 2\frac{Gm}{rC^2} - \frac{h}{C} = 0 \quad . \qquad (8)$$

Façamos a seguinte mudança de variável:

$$R = \frac{1}{r} - \frac{Gm}{C^2} \quad ; \qquad (9)$$

nesse caso

$$dR = -\frac{dr}{r^2} \quad . \qquad (10)$$

Substituindo essas duas equações em (8) temos:

$$\left(\frac{dR}{dV}\right)^2 + R^2 - \left[\frac{G^2m^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}\right] = 0 \quad ; \qquad (11)$$

essa equação só admite solução em R se a grandeza entre colchetes for positiva; chamemô-la de q^2:

$$q^2 = \left[\frac{G^2m^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}\right] \quad . \qquad (12)$$

A equação (11) pode então tomar a forma seguinte:

$$\pm dV = \frac{dR}{\sqrt{q^2 - R^2}} \quad , \qquad (13)$$

cuja integral assume a forma:

$$\pm (V - V_0) = \text{arc.cos}\ \frac{R}{q} \qquad (14)$$

ou, ainda:

$$R = q.\cos(V - V_0) \quad . \qquad (15)$$

Substituindo as equações (9) e (12) em (15) obteremos:

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm}{C^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{C^2 h}{G^2 m^2}}\ .\ \cos(V - V_0)\right] \quad . \qquad (16)$$

Se fizermos os seguintes rebatizados:

ângulo inicial V_0 nulo:

$$V_0 = 0 \quad , \qquad (17)$$

definamos p como *parâmetro* dado por:

$$\boxed{p = \frac{C^2}{Gm}} \quad , \qquad (18)$$

definamos *excentricidade* e dada por:

$$e^2 = 1 + \frac{C^2 h}{G^2 m^2} \qquad (19)$$

ou, que é o mesmo:

$$\boxed{e^2 = 1 + \frac{hp}{Gm}} \quad , \qquad (20)$$

então, a equação (16) pode ser escrita:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\ (1 + e.\cos V)} \quad , \qquad (21)$$

que é a equação geral de uma *cônica* de foco em F (Fig. 1). Essa é a equação polar do movimento orbital do corpo S em torno de F.

Para obtermos a *equação da velocidade* em função de r, substituamos o valor de h tirado da equação (20) na equação (1), teremos:

$$\boxed{V^2 = Gm\left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p}\right)} \quad . \qquad (22)$$

As equações vistas neste item poderiam ser chamadas de equações que resolvem o *problema de um corpo*, ou seja, um corpo gravitando em torno de outro suposto fixo.

130 FORMAS GEOMÉTRICAS DAS ÓRBITAS

Conforme vimos pela equação 129.(21), a trajetória de um corpo sujeito apenas à atração gravitacional é uma *cônica*. O que é uma cônica? É a figura geométrica plana que se obtém quando uma superfície cônica é interceptada por um plano.

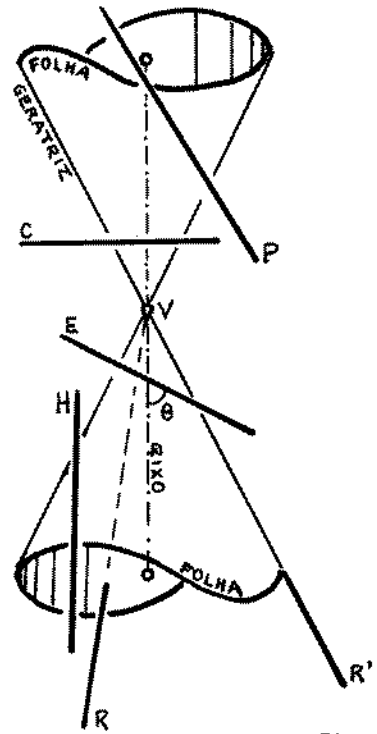


Fig.1

Se o plano passar pelo vértice V e não tangenciar nem interceptar as folhas da superfície cônica, a figura da intersecção cônica & plano será um *ponto*: o próprio vértice.

Se o plano R' passar pelo vértice V e for tangente à superfície cônica, a linha de tangência será uma *reta* (ou semi-reta se adotarmos apenas uma folha).

Se o plano R passar pelo vértice V e seccionar as folhas, teremos um par de *retas concorrentes* em V.

Se o plano C seccionar uma folha, não pelo vértice V, de modo que o eixo da superfície cônica seja perpendicular ao plano C, a figura intersecção será uma *circunferência*.

Essas figuras, (ponto, reta, retas concorrentes e circunferência), podem ser chamadas de *cônicas degeneradas*; com exceção da circunferência, as outras não nos terão interesse.

Caso o plano E intercepte uma folha da superfície de modo que E não é paralelo a nenhuma geratriz da superfície nem ao

eixo do cone, a figura intersecção será uma *elipse*. (A circunferência é chamada de elipse degenerada).

Caso o plano P intercepte uma folha de modo que P é paralelo a uma única geratriz da superfície cônica, a figura intersecção será uma *parábola*.

Finalmente, se o plano H interceptar as 2 folhas do cone, sem passar por V, as 2 figuras intersecção serão *hipérboles*.

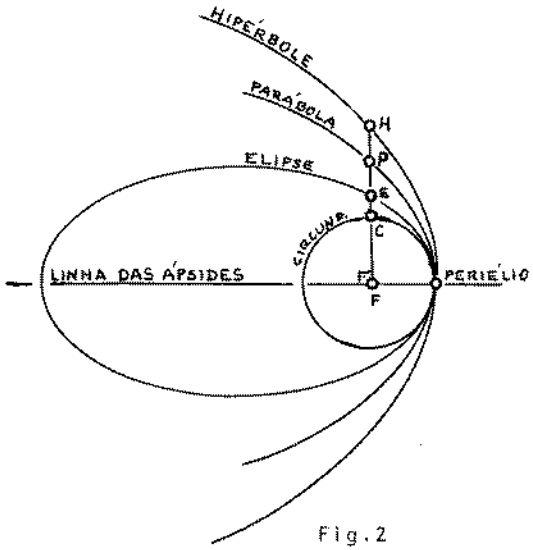


Fig.2

Na equação 129.(21)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\,(1+e.\cos V), \qquad (1)$$

a geometria analítica plana mostra que se e<1 a figura resultante é uma elipse; se e=1, teremos uma parábola; e se e>1 a figura da órbita será uma hipérbole.

Pela equação 129.(19) vemos que o valor de e com relação à unidade depende do sinal de h, que por sua vez depende do sinal da energia total E_T (equação 129.(2)); podemos escrever que

se $E_T < 0$ então $e < 1$ (elipse) (2)

se $E_T = 0$ então $1 = 1$ (parábola) (3)

e se $E_T > 0$ então $e > 1$ (hipérbole) (4)

Notemos que o sinal de E_T (e o de h que é o mesmo) pode ser entendido a partir da equação 129.(1): admitamos que a partir de um ponto distante r de F um corpo tem velocidade V numa direção que não contém o ponto F; vemos que, dependendo de V (e r) o valor de h será positivo, nulo ou negativo. É imediato, por es

sa mesma fórmula, que

$$\text{se } V < \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \text{ então teremos } E_T < 0 \text{ (elipse)}, \tag{5}$$

$$\text{se } V = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \text{ então teremos } E_T = 0 \text{ (parábola)}, \tag{6}$$

e $$\text{se } V > \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \text{ então teremos } E_T > 0 \text{ (hipérbole)}. \tag{7}$$

A velocidade

$$\boxed{V_P = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}} \tag{8}$$

costuma ser chamada de *velocidade parabólica*: sua importância está no fato que ela é o valor limite que define se a *órbita é fechada* (elipse) ou se é *aberta* (hiperbólica). Órbitas fechadas caracterizam os planetas e cometas periódicos; órbitas abertas estão associadas a cometas não periódicos.

O significado geométrico do parâmetro p é facilmente obtenível via equação 129.(21) se aí impusermos $V = 90^\circ$: p será igual a r, ou seja, p é o segmento de reta que une o foco da órbita até a órbita numa direção perpendicular à linha das ápsides; na Figura 2 estão representados os parâmetros das 4 curvas:

$$FC = P_{\text{circunferência}} \tag{9}$$

$$FE = P_{\text{elipse}} \tag{10}$$

$$FH = P_{\text{hipérbole}} \tag{11}$$

$$FP = P_{\text{parábola}} \,. \tag{12}$$

131 PROBLEMA DOS 2 CORPOS

Nos itens 129 e 130 admitimos o corpo F como fixo, e o corpo S girando-lhe em torno. Ora, tal fato não ocorre com os corpos celestes, já que os dois estão livres no espaço: a real descrição do fato é que os dois corpos giram em torno do centro de gravidade G do sistema.

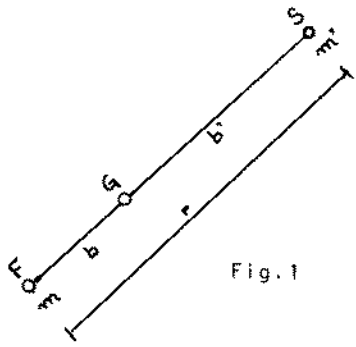


Fig.1

A aceleração absoluta γ_S, com relação a G, de S é:

$$\gamma_S = -\frac{Gm}{r^2} \quad , \tag{1}$$

onde o sinal negativo indica que ela tem o sentido oposto àquele escolhido para $\vec{r}$. A aceleração absoluta de F com relação a G será

$$\gamma_P = \frac{Gm'}{r^2} \quad . \tag{2}$$

(Não esquecer que o centro de gravidade G é definido de modo que:

$$mb = m'b' \tag{3}$$

ou

$$mb = m'(r-b) \tag{4}$$

e portanto

$$b = \frac{m'}{m+m'} \cdot r \quad . \quad). \tag{5}$$

A aceleração relativa de S com relação a F será

$$\gamma = \gamma_S - \gamma_F \quad ; \tag{6}$$

substituindo, nessa equação, as equações (1) e (2) temos:

$$\gamma = -\frac{G(m+m')}{r^2} \quad , \tag{7}$$

que representa uma aceleração do tipo central, onde o corpo F pode ser admitido fixo, desde que sua massa seja considerada como a massa total do sistema:

$$M = m + m' \quad . \tag{8}$$

Portanto, o problema dos 2 corpos pode ser reduzido ao de um único corpo, valendo as equações do item 129, substituindo-se nelas o valor M no lugar de m. Teremos pois, para o corpo S girando em torno de F, suposto então fixo:

$$V^2 - \frac{2GM}{r} = h \tag{9}$$

$$p = \frac{C^2}{GM} \tag{10}$$

$$e^2 = 1 + \frac{C^2 h}{G^2 M^2} \tag{11}$$

$$e^2 = 1 + \frac{hp}{GM} \tag{12}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e.\cos V) \tag{13}$$

$$V^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p}\right) \quad . \tag{14}$$

No periélio, a distância r deve ser mínima; pela equação (13) é fácil ver que isso ocorre quando $V = 0$, e nesse caso o r mínimo é chamado de *distância do periélio* e geralmente indicada por q (não confundir com a variável q do item 129):

$$q = \frac{p}{1 + e} \quad . \tag{15}$$

Substituindo o valor de q no lugar de r da equação (14) teremos a velocidade máxima, que será pois no periélio:

$$\boxed{V_{periélio} = (1+e)\sqrt{\frac{GM}{p}}} \quad . \qquad (16)$$

132 HODÓGRAFO DE UM MOVIMENTO ORBITAL

Chamamos de *hodógrafo* de um movimento ao diagrama polar do vetor velocidade. Em outras palavras, é a curva que se obtém ao se unirem as extremidades dos vetores velocidade desenhadas a partir de um ponto tomado como *pólo do hodógrafo* (0), conforme Figura 1. Procuremos traçar o hodógrafo de um movimento orbital. Para tal, calculemos as velocidades radial 129.(3) e normal 129.(4); usemos o valor de r dado por 129.(21):

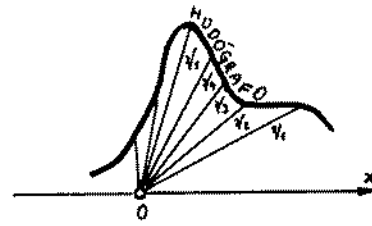


Fig.1

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\,(1 + e.\cos V) \quad ; \tag{1}$$

teremos, para a velocidade radial:

$$V_r = \frac{r^2.e.\operatorname{sen} V}{p} \cdot \frac{dv}{dt} \quad , \tag{2}$$

que ainda pode ser simplificada se utilizarmos a constante das áreas definida na equação 129.(7); obteremos:

$$\boxed{V_r = \frac{C.e.\operatorname{sen} V}{p}} \quad ; \tag{3}$$

para a componente normal ao raio, a velocidade será:

$$V_N = r\,\frac{dv}{dt} = \frac{C}{r} \quad , \tag{4}$$

onde se usou novamente a constante das áreas da equação 129.(7); usando o valor de r dado em (1), teremos:

$$\boxed{V_N = \frac{C(1 + e.\cos V)}{p}} \quad . \tag{5}$$

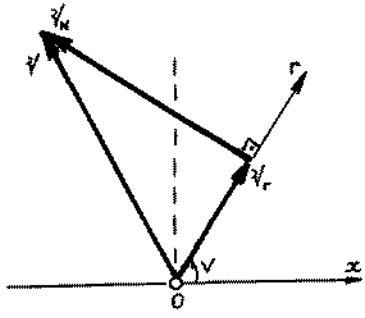


Fig.2

A Figura 2 mostra as 2 velocidades citadas e, também, a velocidade V que é a soma vetorial de V_r e V_N:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_N \quad . \tag{6}$$

Comparando a Figura (2) com a (3) podemos ver que a velocidade V pode ser obtida pela soma de V_0 e V_c, onde V_0 é a velocidade perpendicular ao eixo $\vec{x}$ e V_c é a velocidade colocada a partir de C até onde iria V_N:

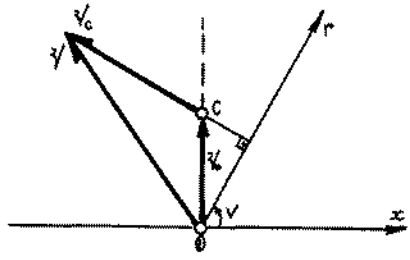


Fig.3

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_c \quad . \tag{7}$$

Ora, V_0 pode ser calculada como

$$V_0 = V_r / \text{sen}V \quad ; \tag{8}$$

usando a equação (3) obtemos:

$$\boxed{V_0 = \frac{Ce}{p}} \tag{9}$$

que é constante.

O valor de V_c pode ser imaginado como sendo a diferença entre V_N e a projeção de V_0 sobre V_N:

$$V_c = V_N - \text{proj}_{V_N} V_0 \quad ; \tag{10}$$

$$V_c = \frac{C(1 + e.\cos V)}{p} - \frac{Ce}{p} . \cos V \quad ; \tag{11}$$

simplificando essa equação obtemos:

$$V_c = \frac{C}{p} \quad , \qquad (12)$$

que também tem valor constante, mas que toma, para cada posição de r, a direção $90^{\circ}+V$ com a direção positiva de $\vec{x}$.

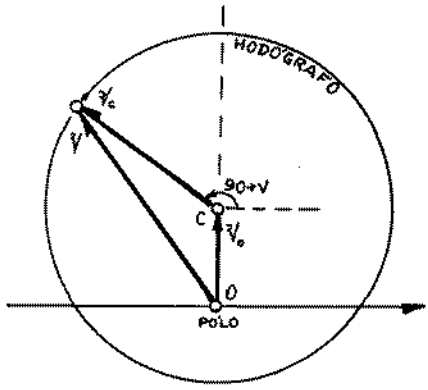


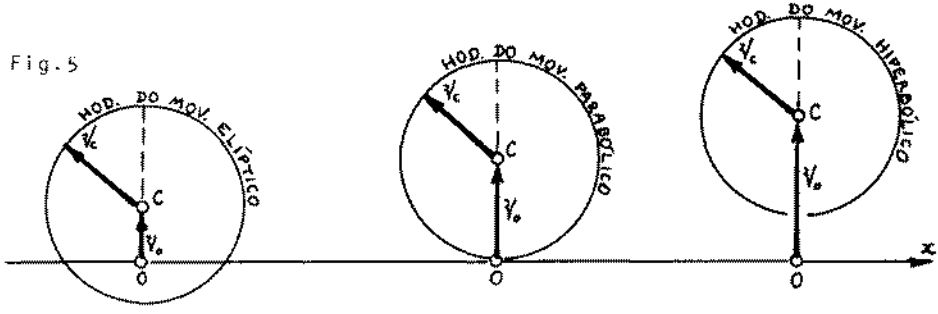
Fig.4

Ora, assim, o hodógrafo do movimento orbital será uma circunferência de raio V_c, cujo centro C está a uma distância V_0 do eixo $\vec{x}$. Pelas equações (9) e (12) vemos que

$$V_0 = V_c . e \quad ; \qquad (13)$$

no caso da elipse, em que e<1 (item 130), $V_0 < V_c$, e portanto o pôlo estará no interior do círculo que é definido pelo hodógrafo; para a parábola, e=1, e portanto $V_0 = V_c$, estando o pôlo sobre a circunferência do hodógrafo, no ponto de tangência com $\vec{x}$; finalmente, se a órbita for hiperbólica, e>1, e então $V_0 > V_c$, e o pôlo estará fora do círculo limitado pelo hodógrafo (Figuras 5.(a),(b),(c)).

Fig.5



(a) (b) (c)

No caso particular do movimento circular ($e = 0$) o hodógrafo dará uma circunferência cujo centro estará sobre o eixo $\vec{x}$, coincidindo pois com o pólo do hodógrafo.

133 MOVIMENTO ELÍPTICO OU KEPLERIANO

Já que o movimento orbital dos planetas e dos cometas periódicos é elíptico, vamos estudar esse movimento, também chamado de *Movimento Kepleriano*. Para isso vamos particularizar as fórmulas dos itens 131 e 132. Vamos admitir, agora, que o Sol esteja no foco do sistema reduzido de 2 corpos; essa atitude é válida por uma razão: por ser quase que real, já que a massa do Sol é maior que a massa de qualquer planeta ou cometa, e portanto o centro de gravidade do sistema está muito próximo do centro do Sol. Obviamente valem as relações do item 118.

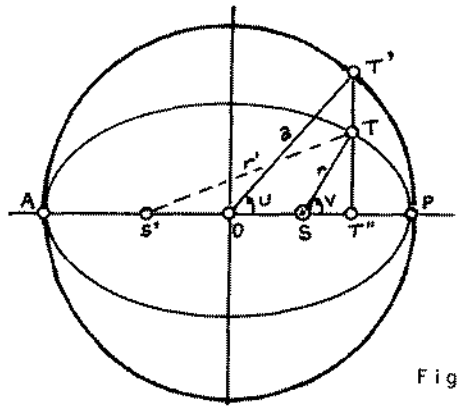


Fig.1

A equação 131.(8) dará que a *massa do sistema* é:

$$M = m_S + m_T \quad . \tag{1}$$

A distância PS é a *distância do periélio* e pode ser obtida por

$$q = a(1 - e) \quad , \tag{2}$$

a partir da equação 118.(4), já que

$$q = a - f \quad . \tag{3}$$

Substituindo (2) na equação 131.(15) obteremos o *parâmetro da elipse*:

$$p = a(1 - e^2) \quad . \tag{4}$$

Essa equação, substituída em 131.(10) fornece a *constante das áreas*:

$$C^2 = GMa(1 - e^2) \quad . \tag{5}$$

Substituindo (4) em 131.(14) teremos o valor da *velocidade orbital* em função do raio vetor:

$$V^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad . \tag{6}$$

Substituindo (4) em 131.(13) obteremos o valor do *raio vetor*:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e.\cos V} \tag{7}$$

O valor de V pode ser obtido a partir de U pela equação 120.(16):

$$\tan\frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tan\frac{U}{2} \quad . \tag{8}$$

O valor de U pode ser obtido a partir da equação de Kepler 121.(8):

$$U - e.\operatorname{sen}U = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \quad . \tag{9}$$

Obviamente, para os cálculos de r e V poderíamos usar as equações aproximadas 122.(5) e (7).

Para obter a constante das áreas podemos, também, escrever a equação 129.(7) da seguinte forma:

$$r^2.dV = Cdt \quad , \tag{10}$$

a qual integrada com V variando de 0 a 2π e t variando de 0 a T, obteremos, lembrando que a integral do 1º membro dará o dobro da área da elipse:

$$C = \frac{2\pi}{T}\, a^2\sqrt{1 - e^2} \quad , \tag{11}$$

ou

$$\boxed{C = na^2\sqrt{1 - e^2}} \quad , \tag{12}$$

onde

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{13}$$

é o *movimento sideral médio* do planeta T.

Se compararmos as equações (5) e (11), obteremos:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad , \tag{14}$$

que é a terceira lei de Kepler (item 117) escrita de forma rigorosa.

Pela Figura 1 podemos obter facilmente a *distância do afélio*, q':

$$\boxed{q' = a(1 + e)} \quad . \tag{15}$$

Pela definição de elipse, (equação 118.(2)), podemos escrever:

$$r' = 2a - r \quad . \tag{16}$$

Substituindo o valor de GM, obtenível da equação (14), na expressão (6), resulta:

$$\boxed{V = \frac{2\pi}{T} a \sqrt{\frac{2a - r}{r}}} \quad , \tag{17}$$

ou, usando (13) e (16),

$$V = na\sqrt{\frac{r'}{r}} \quad . \tag{18}$$

As *velocidades no periélio* e no *afélio* serão, usando (2) e (15):

$$V_P = na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad , \tag{19}$$

$$V_A = na\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad . \tag{20}$$

As velocidades a serem utilizadas na construção do hodógrafo do movimento kepleriano serão, segundo 132.(9) e (12)

$$V_0 = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \tag{21}$$

$$V_c = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \quad . \tag{22}$$

134 MOVIMENTO PARABÓLICO

É grande o número de cometas descobertos cuja órbita é muito próxima à parabólica, o que justifica especificarmos as equações desse movimento.

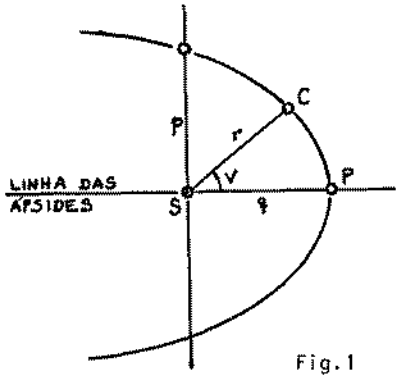


Fig.1

Na maior parte dos casos (pelo menos em todos conhecidos até agora) a massa do cometa (m_c) é desprezível face à massa do Sol; assim, a equação 131.(8) pode ser escrita:

$$M \cong m_s \quad . \qquad (1)$$

Conforme 130.(3), (6) e 131.(16) podemos escrever: a *excentricidade* vale

$$e = 1 \quad ; \qquad (2)$$

a *energia mecânica total* vale

$$E_T = 0 \quad ; \qquad (3)$$

a *velocidade orbital* é dada por

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad . \qquad (4)$$

O *parâmetro da órbita* é dado pela equação 131.(10):

$$p = \frac{C^2}{GM} \quad . \qquad (5)$$

A *distância do periélio* é obtida pela equação 131.(15) fazendo $e = 1$:

$$\boxed{q = \frac{p}{2}} \quad . \tag{6}$$

O *raio vetor* pode ser dado pelas equações (item 131.(13):

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \cos V}} \quad , \tag{7}$$

$$\boxed{r = \frac{2q}{1 + \cos V}} \quad , \tag{8}$$

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{V}{2}} \quad , \tag{9}$$

e

$$r = q \left(1 + \tan^2 \frac{V}{2}\right) \quad . \tag{10}$$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtemos outra equação para a *velocidade orbital*:

$$\boxed{V = \frac{C}{\sqrt{qr}}} \quad . \tag{11}$$

Para a construção do hodógrafo, as velocidades podem ser obtidas a partir de 132.(9) e (12), usando os valores já deduzidos neste nosso item:

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{GM}{2q}}} \quad , \tag{12}$$

e

$$\boxed{V_c = \sqrt{\frac{GM}{2q}}} \quad . \tag{13}$$

A velocidade no periélio pode ser obtida pela equação 131.(16):

$$V_P = 2.\sqrt{\frac{GM}{p}} \qquad (14)$$

ou

$$V_P = \sqrt{\frac{2GM}{q}} \quad . \qquad (15)$$

Admitamos, agora, que desejamos determinar uma relação entre a posição (dada pela anomalia verdadeira V) e o tempo (t); a partir de 129.(7) podemos escrever:

$$dt = \frac{r^2}{C}\, dV \; ; \qquad (16)$$

se denominarmos

$$S = \tan \frac{V}{2} \quad , \qquad (17)$$

então,

$$dV = \frac{2.dS}{1+s^2} \quad ; \qquad (18)$$

substituindo (18) em (16) e integrando desde t_0 a t e V = 0 a V, teremos (t_0 é o instante de passagem pelo periélio):

$$t - t_0 = \frac{2q^2}{C}\left(S + \frac{S^3}{3}\right) \qquad (19)$$

ou

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{2}\; q^{3/2}}{3\sqrt{GM}}\,(3S + S^3) \quad . \qquad (20)$$

135 ÓRBITA DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL DA TERRA

Admitamos que um satélite artificial fosse levado a uma altura h acima do solo (fora da atmosfera para evitar atrito), e aí lhe fosse impelida uma velocidade V_0 tangencial a $\overline{CP}$.

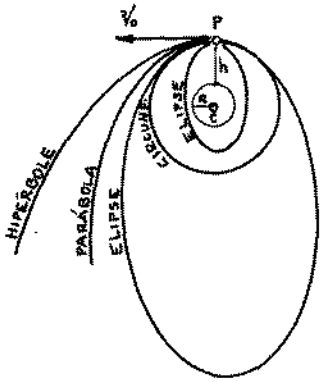


Fig.1

Admitamos que V_0 seja dado pela equação 131.(16), onde fizemos $e = 0$ (circunferência); nesse caso $q = p$ (equação 131.(15)); então a órbita será circular de raio $R+h$; e V_c é tal que:

$$\boxed{V_c = V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}} \quad \text{, (circunferência)} \tag{1}$$

onde M é a massa da Terra + satélite. Essa velocidade se chama *velocidade circular*, e a órbita descrita pelo satélite será circunferencial com centro no centro da Terra.

Caso a velocidade V_0 seja inferior a V_c, a órbita será elíptica, sendo P o seu apogeu (ponto mais afastado do centro da Terra) e C um de seus focos:

$$\boxed{V_0 < V_e} \quad \text{(elípse)} . \tag{2}$$

Caso a velocidade V_0 seja maior que V_c, mas menor que a *velocidade parabólica* (equação 134.(15)) então a órbita será elíptica com o ponto P sendo o perigeu (ponto mais próximo do centro da Terra) da órbita:

$$V_c < V_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \tag{3}$$

ou

$$V_c < V_0 < V_c \cdot \sqrt{2} \qquad \text{(elípse)} \tag{4}$$

Caso V_0 seja a velocidade parabólica, então a órbita será uma parábola:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \quad , \tag{5}$$

ou

$$\boxed{V_0 = V_c \cdot \sqrt{2}} \quad . \text{ (parábola).} \tag{6}$$

Caso V_0 seja maior que a velocidade parabólica, então a órbita será uma hipérbole:

$$\boxed{V_0 > V_c \cdot \sqrt{2}} \quad \text{(hipérbole) .} \tag{7}$$

136 COORDENADAS HELIOCÊNTRICAS DE UM CORPO ORBITAL

Admitamos conhecidos os elementos orbitais de um planeta, cometa ou outro elemento do sistema planetário, conforme item 119. Suponhamos, agora, que desejamos obter suas coordenadas esféricas eclípticas e equatoriais, bem como as cartesianas, todas elas centrando sua origem no Sol (devemos chamar a atenção para o fato que geralmente as coordenadas eclípticas e equatoriais são usadas geocentricamente e não heliocentricamente).

Na Figura 1 estão representados os elementos geométricos dos elementos orbitais do corpo celeste C, no instante t:

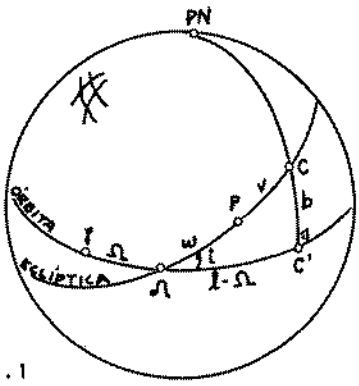


Fig.1

P: periélio (no instante de passagem pelo periélio t_0);

v: anomalia verdadeira de C no instante t;

ω: argumento do periélio;

Ω: longitude do nodo ascendente ☊;

i: inclinação do plano da órbita com relação à eclíptica.

Nosso problema inicial é obter as coordenadas eclípticas heliocêntricas ℓ e b de C, onde $\ell = \widehat{\gamma C'}$ e $b = \widehat{C'C}$.

Chamemos a atenção para o fato de que mesmo a órbita não sendo circular (Fig. 2), a projeção dessa órbita na esfera celeste é circunferencial, e portanto a representação da Figura 1 é a de mostrar a intersecção do plano da órbita com a esfera celeste. Assim, o ponto C da Figura (1) corresponde ao ponto C da Figura 2 que é a projeção, so-

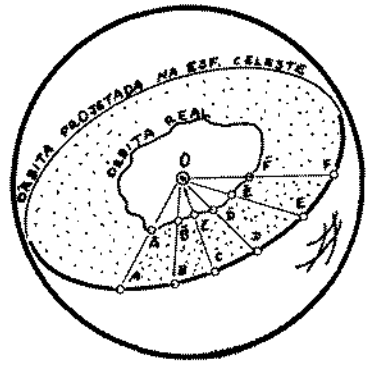


Fig.2

bre a esfera celeste, do ponto real $\overline{C}$ da órbita, quando visto do centro 0 do sistema de coordenadas adotado.

Se aplicarmos, ao triângulo esférico $\Lambda\overline{C}C'$ as leis do seno (34.(4)), co-seno (33.(4)) e seno & co-seno (35.(1)) teremos:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} i \cdot \operatorname{sen}(v+\omega) && (1)\\ \cos b \cdot \cos(\ell-\Omega) &= \cos(v+\omega) && (2)\\ \cos b \cdot \operatorname{sen}(\ell-\Omega) &= \cos i \cdot \operatorname{sen}(v+\omega) \ . && (3) \end{aligned}}$$

As coordenadas cartesianas eclípticas heliocêntricas (x', y', z') poderão ser obtidas segundo 62.(3),(4) e (5) onde

$$u = \ell \ , \qquad (4)$$

$$v = b \ : \qquad (5)$$

$$x' = r \cdot \cos b \cdot \cos \ell \qquad (6)$$

$$y' = r \cdot \cos b \cdot \operatorname{sen} \ell \qquad (7)$$

$$z' = r \cdot \operatorname{sen} b \ , \qquad (8)$$

onde r é o raio vetor heliocêntrico do corpo C.

Para obtermos as coordenadas cartesianas equatoriais heliocêntricas (x,y,z) basta girarmos, em torno do eixo x', o sistema (x',y',z') de um ângulo $-\varepsilon$ (item 66.(2)):

$$x = x' \qquad (9)$$

$$y = y' \cdot \cos\varepsilon - z' \cdot \operatorname{sen}\varepsilon \qquad (10)$$

$$z = y' \cdot \operatorname{sen}\varepsilon + z' \cdot \cos\varepsilon \ . \qquad (11)$$

As equações 62.(6) e (7) permitem a obtenção das coordenadas equatoriais esféricas heliocêntricas α_H e δ_H:

$$\alpha_H = \text{arc tan } y/x \qquad (12)$$

$$\delta_H = \text{arc tan } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ . \qquad (13)$$

137 COORDENADAS GEOCÊNTRICAS DE UM CORPO ORBITAL

Nas equações (9), (10) e (11) do item 136 obtivemos as coordenadas cartesianas (x,y,z) de um corpo C adotando um sistema heliocêntrico equatorial (o plano fundamental é o plano do Equador Terrestre); procuremos, agora, as coordenadas cartesianas (ξ,η,ζ) do corpo C num sistema equatorial centrado na Terra.

Seja R o raio vetor do Sol nesse novo sistema, com coordenadas (X,Y,Z); seja L a longitude eclíptica geocêntrica e B a latitude eclíptica geocêntrica do Sol; sejam (X',Y',Z') as coordenadas cartesianas

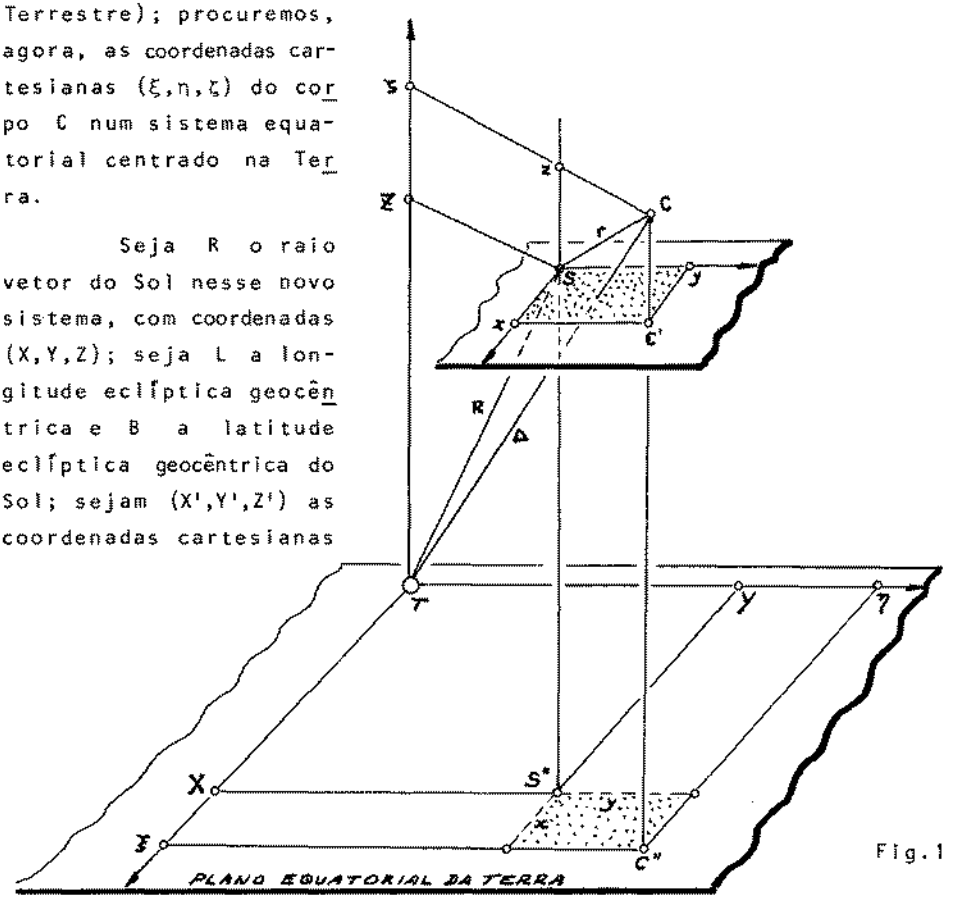


Fig.1

geocêntricas eclípticas do Sol. Segundo 62.(3),(4) e (5) podemos escrever

$$X' = R.\cos L.\cos B \qquad (1)$$

$$Y' = R.\operatorname{sen} L.\cos B \qquad (2)$$

$$Z' = R.\operatorname{sen} B \quad . \qquad (3)$$

Aplicando uma rotação de um ângulo $(-\varepsilon)$ em torno de X' obteremos as coordenadas (X,Y,Z) equatoriais geocêntricas (equação 66.(2)):

$$X = R.\cos B.\cos L \tag{4}$$

$$Y = R(\cos B.\operatorname{sen} L.\cos\varepsilon - \operatorname{sen} B.\operatorname{sen}\varepsilon) \tag{5}$$

$$Z = R(\cos B.\operatorname{sen} L.\operatorname{sen}\varepsilon + \operatorname{sen} B.\cos\varepsilon) \ . \tag{6}$$

Pela Figura 1 pode-se ver que as coordenadas cartesianas (ξ,η,ζ) podem ser obtidas pelas somas respectivas das coordenadas (x,y,z) e (X,Y,Z); assim:

$$\xi = x + X \tag{7}$$

$$\eta = y + Y \tag{8}$$

$$\zeta = z + Z \ , \tag{9}$$

onde (x,y,z) foram obtidos em 136.(9), (10) e (11).

Se chamarmos de Δ a distância do corpo C, podemos escrever, no sistema geocêntrico equatorial:

$$\xi = \Delta.\cos\delta.\cos\alpha \tag{10}$$

$$\eta = \Delta.\cos\delta.\operatorname{sen}\alpha \tag{11}$$

$$\zeta = \Delta.\ \operatorname{sen}\delta \ . \tag{12}$$

Daí podemos obter os valores das coordenadas esféricas equatoriais geocêntricas α e δ do corpo C (equações 62.(6) e (7)):

$$\alpha = \arctan\frac{\eta}{\xi} \tag{13}$$

$$\delta = \arctan\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \ . \tag{14}$$

Obviamente, deveremos ter:

$$\Delta^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \ . \tag{15}$$

Está subentendido nesse item que dispomos dos valores (x, y,z) calculados segundo o item 136.

138 NOÇÕES SOBRE PERTURBAÇÕES: PROBLEMA DOS 3 CORPOS.

No item 129 descrevemos o movimento de um corpo em torno de outro suposto fixo (problema de 1 corpo) e vimos que o movimento orbital desse corpo era descrito por uma cônica. Já no item 131 manejamos o problema dos 2 corpos, isto é, quando o movimento dos corpos é em torno de um centro de massa comum; vimos que o problema ainda podia ser tratado como um problema de um único corpo gravitando em torno de outro desde que adotássemos para o corpo admitido como fixo uma massa igual à soma das massas dos 2 corpos: o movimento resultante seria então ainda uma cônica. Se dispusermos, no entanto, de 3 corpos gravitacionalmente ligados, devido às mútuas interações dos corpos, vamos mostrar que o movimento resultante não é mais representável por uma cônica: dizemos que um corpo *perturba* o outro, e o *movimento* será dito *perturbado*. Procuremos estudar esse tipo de movimento, chamado de *problema dos 3 corpos*.

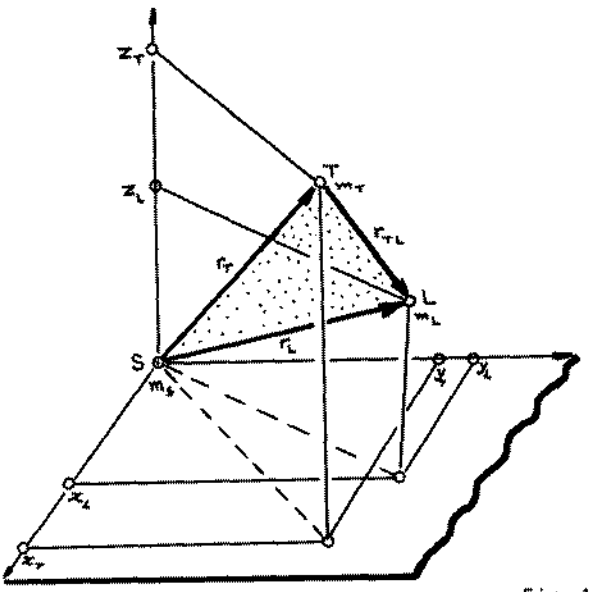
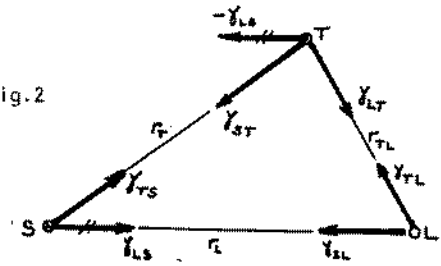


Fig.1

Admitamos um sistema de referências (x,y,z) centrado no Sol (S). Seja T a Terra, de quem desejamos estudar o movimento; sejam (x_T, y_T, z_T) suas coordenadas. É útil definirmos os *co-senos diretores* CD da direção do raio vetor $\vec{r}_T$ da Terra: são os cosenos dos ângulos que $\vec{r}_T$ faz com os eixo x, y e z:

Fig.2



$$\cos\hat{\xi} = \frac{x_T}{r_T} \qquad (1)$$

$$\cos\hat{\eta} = \frac{y_T}{r_T} \qquad (2)$$

$$\cos\hat{\zeta} = \frac{z_T}{r_T} \qquad (3)$$

Os co-senos diretores definem a direção do vetor $\vec{r}$.

Igualmente, seja L a Lua, o *corpo perturbador* da órbita da Terra; sejam (x_L, y_L, z_L) as coordenadas da Lua e sejam $\frac{x_L}{r_L}$, $\frac{y_L}{r_L}$ e $\frac{z_L}{r_L}$ os co-senos diretores do raio vetor $\vec{r}_L$ da Lua.

O raio vetor $\vec{r}_{TL}$ que liga a Terra à Lua terá co-senos diretores dados por $\frac{x_L - x_T}{r_{TL}}$, $\frac{y_L - y_T}{r_{TL}}$ e $\frac{z_L - z_T}{r_{TL}}$.

Devido às forças gravitacionais, os corpos S, T e L ficarão sujeitos a acelerações gravitacionais γ conforme esquematizado na Figura 2. Deve-se entender γ_{AB} como sendo a aceleração causada pelo corpo A sobre o corpo B; daí é claro que $\vec{\gamma}_{AB} = -\vec{\gamma}_{BA}$ (princípio da ação e reação do item 124).

A aceleração, relativa ao Sol, resultante sobre a Terra pode ser escrita:

$$\vec{\gamma}_T = \vec{\gamma}_{ST} + \vec{\gamma}_{LT} + (-\vec{\gamma}_{LS}) \quad , \qquad (4)$$

onde

a) γ_{ST} é a aceleração do Sol sobre a Terra, e que na ausência da Lua (L), faria com que a Terra descrevesse uma órbita cônica em torno do Sol; poderíamos dizer que é a *aceleração kepleriana* da Terra em torno do Sol; seu valor pode ser obtido por meio da equação 131.(7):

$$\gamma_{ST} = -\frac{G(m_S + m_T)}{r_T^2} \cdot CD\left(\frac{x_T}{r_T}, \frac{y_T}{r_T}, \frac{z_T}{r_T}\right) \quad ; \qquad (5)$$

o sinal negativo vigora por γ_{ST} estar no sentido oposto ao do vetor $\vec{r}_T$;

b) γ_{LT} é a aceleração absoluta que a Lua exerce sobre a Terra:

$$\gamma_{LT} = \frac{G.m_L}{r_{TL}^2} \quad , \quad CD*\left(\frac{x_L - x_T}{r_{TL}} \; , \; \frac{y_L - y_T}{r_{TL}} \; , \; \frac{z_L - z_T}{r_{TL}}\right) \; ; \tag{6}$$

c) γ_{LS} é a aceleração absoluta que a Lua exerce sobre o Sol; logo, a Terra, em relação ao Sol fica sujeita a uma aceleração relativa $-\gamma_{LS}$; seu valor é:

$$\gamma_{LS} = \frac{G.m_L}{r_L^2} \quad , \quad CD*\left(\frac{x_L}{r_L} \; , \; \frac{y_L}{r_L} \; , \; \frac{z_L}{r_L}\right) \quad . \tag{7}$$

As equações das acelerações relativas da Terra nos eixo (x, y, z) serão pois:

$$\gamma_x = \frac{-G(m_S + m_T)}{r_T^2} \cdot \frac{x_T}{r_T} + \frac{G.m_L}{r_{TL}^2} \cdot \frac{(x_L - x_T)}{r_{TL}} - \frac{G.m_L}{r_L^2} \cdot \frac{x_L}{r_L} \tag{8}$$

$$\gamma_y = \frac{-G(m_S + m_T)}{r_T^2} \cdot \frac{y_T}{r_T} + \frac{G.m_L}{r_{TL}^2} \cdot \frac{(y_L - y_T)}{r_{TL}} - \frac{G.m_L}{r_L^2} \cdot \frac{y_L}{r_L} \tag{9}$$

$$\gamma_z = \frac{-G(m_S + m_T)}{r_T^2} \cdot \frac{z_T}{r_T} + \frac{G.m_L}{r_{TL}^2} \cdot \frac{(z_L - z_T)}{r_{TL}} - \frac{G.m_L}{r_L^2} \cdot \frac{z_L}{r_L} \tag{10}$$

A soma das partes que contêm as massas da Terra e Sol resulta na aceleração do movimento kepleriano; a soma das partes que contêm a massa da Lua dá origem à *aceleração perturbadora* γ_P que a Lua exerce sobre a Terra, e pode ser escrita:

$$\gamma_P = G.m_L \left(\frac{1}{r_{TL}} - \frac{x_T \cdot x_L + y_T \cdot y_L + z_T \cdot z_L}{r_L^3}\right) \quad , \tag{11}$$

lembrando que

$$r_{TL}^2 = \left(x_L - x_T\right)^2 + \left(y_L - y_T\right)^2 + \left(z_L - z_T\right)^2 \quad . \qquad (12)$$

Se desejássemos obter a aceleração perturbadora da Terra sobre a Lua, teríamos:

$$\gamma'_P = G.m_T \left(\frac{1}{r_{TL}} - \frac{x_T.x_L + y_T.y_L + z_T.z_L}{r_T^3} \right) \quad . \qquad (13)$$

Apêndice

A1. DESENVOLVIMENTO DE ALGUMAS FUNÇÕES EM SÉRIES, SEGUNDO TAYLOR.

Admitamos que fosse dada uma função $f(x)$, e que conhecêssemos o valor dessa função num certo ponto a, descrito por $f(a)$. Suponhamos que desejássemos conhecer o valor dessa função num outro ponto genérico x, próximo a a. Taylor fornece-nos a seguinte fórmula, conhecida como *Fórmula de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \\ + \frac{(x-a)^3}{3!} \cdot f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^n(a) \ , \tag{1}$$

onde $f'(a)$ é o valor, no ponto a da função f' que é a derivada de f em relação a x:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad ; \tag{2}$$

a fórmula (1) poderia ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \ , \tag{3}$$

onde

$$n! = 1,2,3,4, \ldots\ldots n \ , \tag{4}$$

e $f^{(n)}$ representa a n-ésima derivada da função f (quando $n = 0$ no lugar da derivada estará a própria função).

Aplicando a fórmula de Taylor podemos obter a expansão de uma função em uma soma de termos, chamada *série*. Eis uma tabela das séries que utilizaremos em nossos trabalhos:

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots\ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots\ldots \tag{1}$$

$$\text{com} \quad m > 0 \quad \text{e} \quad |x| \leq 1 \ .$$

$$(1\pm x)^{-m} \cong 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2)$$

com $m > 0$ e $|x| < 1$.

$(a\pm x)^m \cong$ transformar em $a^m\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ e voltar ao caso (1) ou (2). (3)

$$(1\pm x)^{1/2} \cong 1 \pm \frac{1}{2}.x - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.x^2 \pm \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}.x^3 - \ldots . \qquad (4)$$

com $|x| < 1$.

$$(1\pm x)^{-1/2} \cong 1 \mp \frac{1}{2}.x + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.x^2 \mp \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.x^3 + \ldots . \qquad (5)$$

com $|x| < 1$.

$$(1\pm x)^{-1} \cong 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots . \quad \text{com} \quad |x| < 1 \qquad (6)$$

$$\operatorname{sen} x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots . \qquad (7)$$

com $|x| < \infty$ e x em radianos.

$$\operatorname{sen}(x+a) \cong \operatorname{sen} a + x.\cos a - \frac{x^2.\operatorname{sen} a}{2!} - \frac{x^3.\cos a}{3!} + \frac{x^4.\operatorname{sen} a}{4!} + \ldots . \qquad (8)$$

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots . \quad \text{com } x \text{ em radianos.} \qquad (9)$$

$$\cos(x+a) \cong \cos a - x.\operatorname{sen} a - \frac{x^2.\cos a}{2!} + \frac{x^3.\operatorname{sen} a}{3!} + \frac{x^4.\cos a}{4!} - \ldots . \qquad (10)$$

$$\operatorname{tan} x \cong x + \frac{1}{3}.x^3 + \frac{2}{15}.x^5 + \frac{17}{315}.x^7 + \frac{62}{2835}.x^9 + \ldots . \qquad (11)$$

com $|x| < \pi/2$.

Capítulo 18

Exercícios

1

1 - Defina dia, noite, parte clara do dia; evento diário, evento diurno, evento noturno.

2

2 - O que são fases da Lua?

3 - Calcule qual a duração média de uma fase da Lua.

4 - Qual a diferença numérica entre uma lunação e um mês lunar?

3

5 - Qual seria a razão de uma sombra de um pilar, ao meio-dia, ser maior no inverno que no verão?

6 - Que são estações do ano?

4

7 - O ano de 1983 iniciou-se no sábado. Em que dia do ano iniciou-se a primeira semana de 1983?

5

8 - Qual a utilidade de um calendário?

9 - Se adotarmos o mês lunar com 30 dias cada, quantos meses lunares (inteiros) teríamos num ano lunar? Quantos dias fal-

tariam para completar o ano?

6

10 - Como determinar o meio-dia num local usando um gnômon?

11 - Como se determina os inícios das estações do ano?

12 - O valor de AB é igual a BC na Figura 1 do item 6? Por que?

7

13 - Admita que no dia 1º de um ano do calendário egípcio iniciasse-se a estação das chuvas. Depois de quantos anos, aproximadamente, a estação da semeadura cairia no dia 1º do ano? Admitir que as 3 estações são de igual duração?

14 - Como os egípcios poderiam ter tentado fazer com que seu ano se defasasse com relação às estações?

15 - Qual será a fase da Lua quando de seu nascimento helíaco?

16 - Admitindo que o calendário egípcio tenha se iniciado por volta do ano 3000 a.C, quantas vezes, no máximo, o início da estação das chuvas coincidiu com o início do ano egípcio no calendário anterior ao Alexandrino? Admitir que a estação chuvosa comece sempre 1 ano solar depois da anterior.

8

17 - Como se define o calendário Babilônico?

18 - Vamos admitir que adotemos, intercaladamente, meses lunares com 29 e 30 dias. Quantos dias teria um ano com 12 meses lunares? Qual a diferença para o ano solar?

19 - Mostre que em 19 anos solares ocorrem cerca de 235 lunações.

9

20 - Qual a organização do calendário Grego?

21 - Prove que num período Calípico (76 anos) existem cerca de 940 lunações.

10

22 - Qual o motivo que levou à implantação do calendário Juliano?

23 - Calcule a diferença entre a duração do ano solar e do Juliano.

11

24 - Quais as diferenças entre Época, Era e Data?

25 - No período imediato que se seguiu a Dionísio, qual o calendário usado tomando com base a era Cristã?

26 - Que são estilos na contagem do tempo?

12

27 - Sabendo que a Páscoa de 1983 cai em 3 de abril, calcule as datas das demais festas religiosas cristãs desse ano.

13

28 - Classifique os anos 1960, 1600, 1822, 1800 e normal.

14

29 - Calcule a data da Páscoa para os anos de 1600, 1954, 1983 e 2000.

30 - De onde devem provir os divisores constantes nas fórmulas de Gauss para o cáculo da Páscoa?

15

31 - Como se poderia, facilmente, materializar o plano horizontal com grande precisão?

16

32 - O que é o movimento diurno aparente do Sol?

33 - Defina os pontos cardeais.

34 - O Sol sempre nasce no ponto Leste? Qual poderia ser uma explicação para o fato?

17

35 - Descreva uma maneira de se obter os 4 pontos cardeais com um gnômon.

18

36 - O que é uma constelação?

37 - O que é movimento noturno aparente?

38 - O que é movimento anual aparente das estrelas?

39 - Como se poderia explicar o movimento noturno e o anual aparentes?

19

40 - Imagine o plano vertical que passa pelo observador e contém a direção leste-oeste. Ao observar essa estrela, o observador nota que antes de atingir o "ponto mais próximo de sua cabeça" a estrela corta esse plano vertical vindo do Sul ao Norte. Em que hemisfério da Terra esse observador se encontra? Explique.

41 - Qual a diferença entre o movimento diário das estrelas para um observador no pólo e outro no Equador?

20

42 - Dê o conceito de esfera celeste. Como se chegou a esse conceito?

43 - Defina alguns elementos mais importantes da esfera celeste.

44 - Que são estrelas circumpolares?

45 - Como podemos saber se um pólo visível é Norte ou Sul?

21

46 - Defina o sistema horizontal de coordenadas e dê seus elementos principais.

47 - Quais as distâncias zenitais dos astros cujas alturas são 30°, $43^{\circ}30'$ e $52^{\circ}15'20''$? Idem para -20°, $-12^{\circ}35'$ e $-12^{\circ}30'40''$.

48 - Qual o azimute e a altura do astro cuja distância zenital é 20° na passagem do 1º vertical?

49 - Qual a altura do astro que está sobre o horizonte? E a do astro no zênite?

50 - Qual o lugar geométrico dos astros com um azimute dado?

51 - Qual o azimute de uma estrela circumpolar sul nos instantes de máxima e mínima alturas?

22

52 - Qual a distância zenital de um astro na hora do nascer e do pôr?

53 - Verifica-se que num local as estrelas giram em torno do pólo visível no sentido horário. Esse pólo está a 30° de distância zenital. Qual a latitude astronômica local?

54 - Qual o azimute de uma estrela no instante de sua passagem meridiana?

55 - Dê os azimutes do pólo norte e do pólo sul.

23

56 - O que é culminação de um astro?

57 - Num determinado local, uma estrela circumpolar tem alturas

de 60° e 20° nas culminações superior e inferior. Determine a latitude do local e a distância polar da estrela sabendo que o observador está no hemisfério a) norte; b) sul.

58 - A latitude de São Paulo é -23°. Quais as distâncias zenitais de uma estrela de distância polar 170° nas 2 culminações? Essa estrela é circumpolar para um observador em São Paulo?

59 - Que relação deve existir entre a distância polar de uma estrela e a latitude do local para que essa estrela seja circumpolar?

60 - Demonstre as fórmulas 23.(6), (7) e (8).

24

61 - O que são e quais os tipos de máxima digressão? Represente-as na esfera celeste.

62 - Um teodolito consta, essencialmente, de uma luneta que pode girar em torno de um eixo vertical e um horizontal. Um observador no Rio Grande do Sul deseja determinar a direção do pólo Sul usando máximas digressões de uma estrela. Ao posicionar o teodolito, e olhar para um poste muito distante, o círculo graduado horizontal do teodolito (graduado no sentido horário) marca 27°. Ao observar as 2 digressões o círculo graduado assinala 175° e 240°. Qual será a indicação desse círculo na direção do pólo Sul?

25

63 - Numa cidade do Rio de Janeiro, deseja-se determinar a direção do Norte geográfico pelo método das alturas iguais, com um teodolito. A leitura, no círculo graduado horizontal (gra

duado no sentido anti-horário), é de 80° para uma mira afastada. Nas 2 passagens pelo círculo de altura de 60°, um astro apresenta as leituras de 130° e 170°. Os cruzamentos com o almucântar dado se dão ao norte do 1º e 2º verticais. Qual a medida, nesse círculo, da direção norte?

26

64 - Esquematize os elementos que definem um sistema geográfico de coordenadas.

65 - Calcule, em unidade angular hora (e seus submúltiplos minuto e segundo) as longitudes geográficas das seguintes cidades brasileiras: Belo Horizonte ($43^{\circ}56'32''W$), Campinas ($47^{\circ}04'39''W$), Natal ($35^{\circ}12'04''W$), Porto Alegre ($51^{\circ}13'13''W$), Rio de Janeiro ($43^{\circ}10'21''W$), São Paulo ($46^{\circ}37'59''W$).

27

66 - A latitude geográfica de Londrina é $-23^{\circ}18'39''$. Qual o pólo visível? Qual a latitude astronômica local?

28

67 - Que é declinação magnética? Que tipos existem?

68 - A declinação magnética de um local é constante?

29

69 - Defina os elementos que caracterizam o sistema equatorial de referências.

70 - A estrela Sirius (α Cão Maior) tem declinação de $-16^{\circ}41'20''$. Qual sua distância polar?

71 - A estrela Sirius é circumpolar para um observador em São Paulo?

30

72 - Caracterize os elementos que definem o sistema horário de referências.

73 - Esquematize numa esfera celeste os astros abaixo, pertencentes ao Equador e cujos ângulos horários são: -2^h, 0^h, 3^h, 8^h, -6^h, $+6^h$ e -7^h.

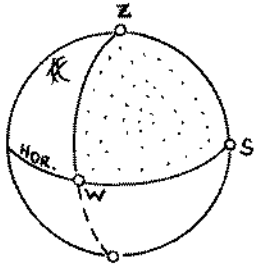
31

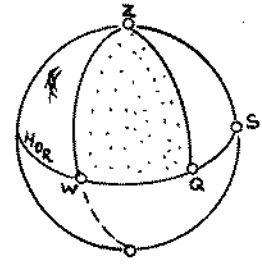
74 - O que representa a intersecção do plano do Equador com o plano do horizonte? Idem a intersecção do plano do meridiano com o plano do horizonte? Idem o plano meridiano com o plano de um círculo horário? Idem a esfera celeste com um plano paralelo ao plano do horizonte? Idem o 1º vertical com o plano do meridiano? Idem o 2º vertical com o plano do horizonte?

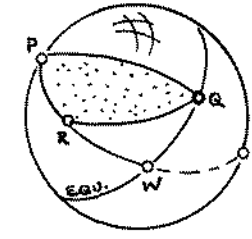
32

75 - Esquematize triângulos esféricos (sobre uma esfera) que sejam: retilátero, bi-retilátero, tri-retilátero, retiângulo, bi-retiângulo e tri-retiângulo.

76 - Classifique os triângulos esféricos esquematizados:







33

77 - Num triângulo esférico, dois lados têm 50° e 70°, sendo 45° o ângulo diedro entre eles. Qual a medida do outro lado?

78 - Particularize a fórmula da lei do co-seno no caso do triângulo ser retiângulo no ângulo oposto ao lado desejado.

79 - Num triângulo esférico, dois ângulos diedros têm valores de 60° e 90°, sendo 30° o lado entre eles. Qual o valor do 3º diedro?

34

80 - Num triângulo esférico temos: $a = 60^{\circ}$, $b = 40^{\circ}$ e $A = 30^{\circ}$. Calcular B.

81 - Num triângulo esférico temos: $a = 20^{\circ}$, $b = 80^{\circ}$, $B = 40^{\circ}$. Calcular A.

82 - Particularize a lei do seno no caso de um dos lados ser 90°. Idem se um ângulo for 90°.

35

83 - São dados $A = 20^{\circ}$, $B = 30^{\circ}$, $b = 40^{\circ}$, $c = 60^{\circ}$. Calcular a.

84 - São dados $A = 30^{\circ}$, $C = 20^{\circ}$, $b = 90^{\circ}$, $a = 60^{\circ}$. Calcular B.

85 - Particularize a equação da lei do seno & co-seno no caso do ângulo adjacente ao lado considerado ser 90°.

36

86 - Dados $A = 30^{\circ}$, $c = 45^{\circ}$, $b = 45^{\circ}$ calcular B.

37

87 - Verifique se o triângulo esférico $a = 30^{\circ}$, $b = 60^{\circ}$, $c = 90^{\circ}$, $A = 45^{\circ}$, $B = 60^{\circ}$ e $C = 60^{\circ}$ pode ocorrer.

38

88 - Dados $a = 30^\circ$, $b = 60^\circ$ e $c = 90^\circ$, calcule A, B e C.

EXERCÍCIOS VARIADOS

89 - Resolva os triângulos esféricos abaixo:

	a	b	c	A	B	C
Triângulo 1	45°	90°	60°			
2		60°	45°	90°		
3	80°	40°			30°	
4			20°	50°		60°
5		40°		30°		80°

90 - Chamando de $S = A + B + C - \pi$, demonstre que

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{S}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(A - \frac{S}{2}\right)}{\operatorname{sen} \left(B - \frac{S}{2}\right) \operatorname{sen} \left(C - \frac{S}{2}\right)}} .$$

91 - Demonstre que: $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{b+c}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}} = \dfrac{\cos \frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}$ (fórmula de Delambre).

92 - Demonstre que: $\tan \frac{B-C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen} \frac{b+c}{2}}$ (analogia de Neper).

39

93 - Uma estrela tem $\alpha = 60^\circ$ e $\delta = 45^\circ$; outra tem $\alpha' = 30^\circ$ e $\delta' = 90^\circ$. Qual o ângulo entre essas 2 estrelas? Qual seria esse ângulo se fosse medido num sistema horizontal ao invés de equatorial?

94 - Demonstre a fórmula 39.(3).

95 - Sendo as coordenadas geográficas de Itajubá (onde está o Observatório Astrofísico Brasileiro) aproximadamente $45^\circ,5$ W e $22^\circ,5$ S, e sendo $51^\circ,0$ W e $30^\circ,0$ S, aproximadamente, as coordenadas do Rio Grande do Sul (onde está o Observatório da Universidade Federal do Rio Grande do Sul), qual o ângulo entre as 2 cidades?

96 - Admitamos a Terra esférica com raio de 6378 km. Qual a distância, sobre a superfície da Terra, que separa as cidades de Brasília ($15^\circ47'03''$ S, $47^\circ55'25''$ W) e Natal ($5^\circ45'54''$ S e $35^\circ12'04''$ W)?

40

97 - Num local de latitude 45°, uma estrela de declinação 30° é observada com ângulo horário de 2^h. Calcular o azimute e a altura na hora da observação, bem como o seu ângulo paraláctico.

98 - Calcule o azimute e a distância zenital da estrela de declinação -50° num local de latitude -30°, sendo de -1^h o ângulo horário.

99 - Uma estrela é observada num local de latitude -10°, com um azimute de 30° e altura de 20°. Qual a declinação e o ângulo horário da estrela?

100 - Admita várias estrelas sobre o círculo horário de ângulo horário de 6^h. Quais as fórmulas que permitem obter os azimute e a distância zenital dessas estrelas?

41

101 - Defina Tempo Sideral, Dia Sideral, Tempo Solar e Dia Solar.

102 - Dê o tempo sideral quando a estrela Spica (α Virgem) de ascensão reta $13^h24^m02^s$ e declinação $-11^o02'44''$ tem ângulo horário de 45^o.

103 - Qual a ascensão reta do Sol às $15^h30^m12^s$ de tempo sideral se o ângulo horário do Sol é 60^o? Qual a declinação do Sol nesse instante?

104 - Para os dados do problema anterior, quais as coordenadas horizontais do Sol para um observador com latitude 30^o S?

105 - A estrela Rigel (β Orion) tem ascensão reta de $5^h13^m30^s$. Qual o tempo sideral quando ela passa pelo meridiano local?

106 - Disponho de um relógio que se adianta 3^m56^s por dia solar. Isso significa que ele pode ser usado como um medidor de tempo sideral. Acertei esse relógio com a estrela do problema anterior. Às $8^h15^m04^s$ de tempo sideral, dada pelo relógio, vi uma estrela cruzar o meridiano local. Qual a ascensão reta dessa estrela?

107 - Num relógio, baseado no tempo Solar (veremos mais tarde chamar-se tempo Universal), quando a estrela Aldebarã (α Touro), de ascensão reta $04^h34^m41^s$, cruza o meridiano local são $12^h30^m40^s$. Qual será a hora sideral às 15^h30^m de tempo Solar?

42

108 - Desejam-se as coordenadas horizontais da estrela Pollux (β Gêmeos) de $\alpha = 7^h44^m00^s$ e $\delta = 28^o04'36''$ às $10^h44^m00^s$ de tempo sideral num local onde a latitude é -20^o.

109 - Uma estrela foi observada às 3^h de tempo sideral, com azimute de 120^o e altura de 30^o, num local a 30^o ao Sul do Equador. Quais as coordenadas equatoriais dessa estrela?

110 - Calcule as coordenadas horizontais da estrela Altair (α Águia) às 15^h de tempo solar sabendo que a latitude do local é 15° N e que as coordenadas equatoriais são: $\alpha = 19^h\,49^m42^s$ e $\delta = 8^\circ48'42''$. Sabe-se que às 12^h de tempo solar o tempo sideral era de 16^h.

111 - Em que instante solar foi observada uma estrela de ascensão reta 3^h sabendo que o observador com latitude $+30^\circ$ notou azimute de 80° e altura de 30°? Sabe-se que às 8^h de tempo solar eram 9^h de tempo sideral.

112 - Qual a distância zenital do ponto γ na passagem meridiana por um local de latitude -20°?

113 - Qual a hora sideral do nascer de uma estrela de ascensão reta 5^h num local onde ela foi observada com azimute de 100° no nascer? Latitude de -15°.

114 - A partir da equação 42.(5) mostre que na passagem meridiana $z = \pm(\delta - \phi)$. Caracterize os sinais + ou - .

43

115 - Dê algumas características que definem a passagem meridiana de um astro.

116 - Uma estrela de declinação $+30^\circ$ culmina a 20° ao sul do zênite. Qual a latitude do local?

117 - Uma estrela culmina a 10° ao norte do zênite de um local de latitude 30° S. Qual a declinação do astro?

118 - Qual a máxima altura que a estrela Algol ($\alpha = 3^h06^m$; $\delta = 40^\circ51'$) pode atingir em São José dos Campos? ($\phi \cong -23^\circ$).

119 - Uma estrela passa pelo meridiano local de uma cidade no hemisfério Norte às 3^h de tempo sideral, com distância zenital de 20°, em culminação superior; na culminação inferior sua altura é 30°. Quais as coordenadas equatoriais e horizontais dessa estrela às 5 horas de tempo sideral?

44

120 - Que são estrelas circumpolares?

121 - Num local ao Sul do Equador medem-se as distâncias zenitais de uma estrela em sua culminação superior e inferior: 20° e 42°. Se ambas as culminações se dão no mesmo vertical qual a latitude do local? Qual a declinação da estrela?

122 - Um observador, num local de latitude 60° N vê, num certo instante, uma estrela passar pelo zênite do local. Será que essa estrela é circumpolar? Por que? Qual a menor altura que ela pode atingir? E a máxima? Que horas siderais são quando a estrela passar pelo meridiano superior local? ($\alpha_{\star} = 30^{\circ}$).

45

123 - Dê as características que definem o nascer e o pôr de um astro.

124 - O que é arco semidiurno?

125 - Calcule o azimute e o arco semidiurno da estrela Denebola (β Leão) ao nascer e pôr em Natal ($\phi = 5^{\circ}45'54''$ S) se $\delta = 14^{\circ}41'34''$.

126 - A que horas siderais se põe a estrela Denebola do problema anterior se sua ascensão reta é $11^{h}47^{m}57^{s}$?

127 - A que horas solares a estrela do problema anterior se põe sabendo que às 9^{h} de tempo solar eram 10^{h} de tempo sideral?

128 - Num local de latitude -20° o nascer de uma estrela se dá com azimute de 100°. Qual a declinação da estrela? Qual seu arco semidiurno ao pôr?

129 - Uma estrela se põe com azimute de 300°, num local de latitude $+30^{\circ}$. Qual o seu arco semidiurno? Qual a declinação dessa estrela?

130 - Verifique qual das estrelas tem nascer e pôr no local dado:

a) $\alpha = 5^h$; $\delta = 30^o$; $\phi = 50^o$;

b) $\alpha = 15^h$; $\delta = -80^o$; $\phi = -20^o$;

46

131 - Dê as condições de visibilidade de uma estrela para um observador no hemisfério Norte e outro no Sul.

132 - Qual a condição para que a estrela seja circumpolar Norte ou Sul?

133 - Verifique as condições de visibilidade das estrelas A, B, C para cada observador descrito:

		Declinação		
Observador	Latitude	A	B	C
P	+20	-80	40	52
Q	+50	-40	20	50
R	-20	-80	0	60
S	-50	-50	15	10 .

47

134 - Que são 1º e 2º verticais?

135 - Quais as condições que se satisfazem quando uma estrela cruza o 1º ou o 2º vertical?

136 - Qual a declinação da estrela que ao cruzar o 1º vertical de um local de latitude -30^o tem altura de 45^o?

137 - Qual o ângulo horário do cruzamento da estrela do problema anterior com o 2º vertical?

138 - Verificar em que horas a estrela de $\alpha = 16^h$ e $\delta = 21^\circ$ cruza o 1º e 2º verticais com distância zenital de 30° na latitude de 40°.

48

139 - Defina máxima elongação.

140 - Uma estrela está em máxima digressão. Determine sua distância zenital, seu azimute e seu ângulo horário sabendo que a latitude local é 50° e a declinação da estrela é $+60^\circ$.

141 - Qual adeclinação da estrela que num local de latitude -30° tem distância zenital de 35° na máxima elongação?

142 - Calcule a distância zenital, azimute e ângulo horário de uma estrela em máxima elongação ocidental sabendo que sua declinação é -50° e a latitude do local é -40°.

143 - Será que a estrela Capela ($\alpha = 5^h14^m$ e $\delta = 46^\circ$) é visível em máxima digressão ocidental num local de latitude 55°? E em máxima digressão oriental?

49

144 - Qual o azimute e o ângulo horário da estrela Procyon (α C. Menor) ($\alpha = 7^h38^m11^s$, $\delta = 5^\circ16'44''$) ao cruzar o almucântar de altura 20° num local de latitude -10°?

145 - Calcular o azimute, ângulo horário e ângulo paraláctico da estrela Canopus (α Carina) ao cruzar o almucântar de 30° de altura num local de latitude $+20^\circ$. ($\alpha = 6^h23^m30^s$, $\delta = -52^\circ 41'11''$).

146 - Qual a condição para que uma estrela cruze um determinado almucântar?

50

147 - Quais os tipos de planificação geralmente usados em astronomia? Explique cada um.

148 - Qual a vantagem da projeção de Mercator?

51

52

149 - Represente a projeção estereográfica do Equador, tomando como pôlo de projeção o Nadir de um local de latitude $+30^{\circ}$. Idem com -30°.

150 - Represente em projeção estereográfica, o horizonte e um círculo de altura de 20° num local de latitude 30°, tomando como foco de projeção o pôlo Sul. Represente também o 1º e 2º verticais.

53

151 - O que é o movimento anual aparente do Sol?

152 - Qual a diferença entre ano Solar e ano Sideral?

54

153 - Como se pode verificar a variação da declinação do Sol durante o ano?

154 - Como calcular a altitude de um local através das distâncias zenitais do Sol na passagem meridiana?

155 - Qual a relação entre as distâncias zenitais do Sol nas passagens meridianas nos instantes do início das 4 estações do ano?

156 - Que é obliqüidade da eclíptica? como se pode obtê-la?

157 - Esquematize, em esferas celestes, o movimento diurno do Sol ao longo do ano para um observador no Equador, outro no pólo Norte e outro em latitude de $+30^{\circ}$ e outro em latitude de -45°. Em cada caso suponha o Sol no início de cada uma das 4 estações.

158 - Calcule a duração da parte diurna do dia num local de $+30^{\circ}$ de latitude no dia do início da primavera. Idem para os dias do início do outono, verão e inverno. Calcule, para cada caso, a duração da noite.

159 - Calcule a duração da parte diurna do dia num local de latitude -20° no dia em que a declinação do Sol é -15°.

55

160 - Como se pode obter a duração da parte clara (escura) do dia?

161 - Qual a duração da parte clara e escura de um dia num local de latitude -30° quando a declinação do Sol é $+10^{\circ}$?

56

162 - Dê os elementos que definem o sistema eclíptico de coordenadas.

163 - Qual a diferença entre constelações zodiacais e signos zodiacais?

164 - Qual a latitude eclíptica do Sol durante o ano?

165 - Dispondo de um relógio de tempo sideral, viu-se que o nascer e o pôr do Sol se deram às 6 e 18 horas siderais, respectivamente. Ao meio-dia, um posto vertical não projetava sombra. Qual a época do ano? Qual a latitude do observador?

166 - Esquematize, numa única esfera celeste, para um observador com latitude $+30^{\circ}$ o ponto norte, o ponto oeste, os pólos norte e sul, o nascer do Sol no equinócio da primavera boreal, o solstício de verão austral.

57

167 - Qual a razão das estações do ano?

168 - Em que condição não haveria estações do ano num planeta?

58

169 - Caracterize as regiões climáticas da Terra.

59

170 - Calcule a longitude e latitude eclípticas do Sol quando sua declinação é 15°.

171 - Qual a ascensão reta do Sol quando sua declinação é -20°?

172 - Qual a declinação do Sol quando sua ascensão reta é 18^{h}?

173 - Admitindo que o movimento do Sol na Eclíptica fosse uniforme durante 1 ano Solar, qual a declinação do Sol no dia 5 de maio de um ano bissexto sabendo que no dia 1º de janeiro a ascensão reta do Sol é $18^{h}44^{m}26^{s}$?

174 - Ainda, com os dados do problema anterior, qual a declinação do Sol no dia 29 de agosto?

175 - Quais devem ser os valores da ascensão reta do Sol para que sua longitude eclíptica seja 0°, 90°, 180° e 270°? Quais serão, nesses casos, as declinações do Sol?

176 - Supondo ser o movimento do Sol em torno da Terra circular uniforme, com período de 365 dias, e sabendo que o equinócio da primavera boreal se deu no dia 21 de março, qual a longitude, latitude, declinação e ascensão reta do Sol no dia 9 de maio?

60

177 - Quais as coordenadas eclípticas da estrela Betelgeuse (α Orion) com $\alpha = 5^{h}54^{m}00^{s}$ e $\delta = 7^{\circ}24'04''$?

178 - Quais as coordenadas equatoriais da estrela de $\ell = 30^{\circ}$ e $b = 45^{\circ}$?

179 - Qual a condição para que uma estrela esteja sobre a eclíptica? E sobre o Equador?

180 - Dê as coordenadas eclípticas e equatoriais do ponto γ.

61

181 - Dê os elementos que definem o sistema galáctico de coordenadas, explicando cada um dos elementos importantes do sistema.

62

182 - Sabendo que num sistema esférico uma estrela tem coordenadas $\mu = 30^{\circ}$ e $\nu = 45^{\circ}$, achar suas coordenadas cartesianas.

183 - Sendo as coordenadas cartesianas de um ponto (0,5;0,3;-0,8), calcular suas coordenadas esféricas.

184 - Escreva as matrizes que definem as posições dos 2 pontos dos 2 problemas anteriores.

63

185 - Sendo (0,4; 2; -1,2) as coordenadas num sistema direto, quais as coordenadas no sistema em que apenas o eixo y' está a 180° do eixo y dado?

64

186 - Um ponto, num sistema direto (x,y,z), tem coordenadas (0,2; 0,3; -0,5). Quais seriam suas coordenadas se o sistema girasse de 30° no sentido anti-horário em torno de x? E se girasse de 30° no sentido horário em torno de y?

187 - Um ponto, num sistema direto (x,y,z), tem coordenadas (0,1; -0,2; 0,3). Quais seriam suas coordenadas num sistema indireto (em y) que além de tudo girou de 60° em torno de z no sentido anti-horário?

188 - Um ponto tem coordenadas (0,1; -0,2; -0,3) num sistema indireto. Gira-se o sistema de 30° (horário) em torno de x; depois de 45° (anti-horário) em torno de z. Quais as coordenadas finais do ponto?

65

189 - Represente a correlação entre os sistemas Horizontal, Horário, Equatorial e Eclíptico com os sistemas cartesianos correspondentes.

66

190 - A partir da equação 66.(1) demonstre as equações 60.(1), (2) e (3).

191 - A partir da equação 66.(4) demonstre a equação 41.(2).

192 - A partir da equação 66.(9) demonstre as equações 40.(4), (5), (6).

67

193 - Defina os elementos utilizados na medição do tempo.

194 - Quais as escalas de tempo utilizadas em astronomia?

68

195 - Se o ângulo horário do Sol verdadeiro fôr 45°, qual a hora solar verdadeira?

196 - Que é Dia Solar Verdadeiro? Por que não se usa a hora verdadeira como escala de tempo?

197 - Sabendo ser 3^{h} o ângulo horário do Sol em Greenwich e 4^{h} em um outro local, no mesmo instante, qual a longitude geográfica desse local? Está a oeste ou leste de Greenwich?

69

198 - Qual o "comportamento" do Sol com relação ao meridiano local se dispusermos de um relógio com tempo uniforme?

199 - Que é dia Solar médio? Qual sua duração? Por que?

200 - Que é Sol fictício?

201 - Que é tempo solar médio local?

202 - Que é tempo Universal?

203 - Qual o tempo Universal, se num local de longitude $45^{\circ}W$ o tempo solar médio local é $11^{h}30^{m}$?

204 - Que é equação dos tempos?

205 - Qual o tempo Universal, aproximado, em 1º de fevereiro se o tempo verdadeiro de Greenwich é $15^{h}13^{m}$?

206 - Qual a hora universal em que passa o Sol pelo meridiano de Greenwich em 30 de agosto (aproximadamente)?

70

207 - Que é um relógio solar?

208 - Explique um relógio solar de "mostrador" equatorial e outro horizontal.

209 - Procure construir um relógio solar em sua casa.

71

210 - O que é um fuso horário?

211 - Qual a razão da adoção dos fusos horários?

212 - Como se define a hora do fuso a partir do Tempo Universal?

213 - Que é correção zonal e designação zonal?

214 - Qual a correção zonal de um local regular de longitude geográfica 20° W? E 80° E? Quais as designações zonais desses locais?

72

215 - Qual a razão da adoção de Horário de Verão em alguns locais?

216 - Sendo 5 horas de horário de verão num local de fuso +3, qual o tempo Universal?

73

217 - Que é tempo sideral verdadeiro?

218 - Sendo $5^{h}30^{m}$ o tempo sideral verdadeiro em São Paulo ($46^{\circ}37'$W) qual o tempo sideral verdadeiro em Greenwich?

219 - Num instante em que a declinação do Sol é 15° ele tem ângulo horário de 45° em Greenwich. Qual o tempo Sideral verdadeiro local em Greenwich e em São Paulo ($46^{\circ}37'$ W) ?

220 - Que é dia Sideral verdadeiro?

221 - Sendo -20° a declinação do Sol num inverno austral, qual a hora sideral verdadeira local quando o Sol cruzar o meridiano local?

74

222 - No que o dia Sideral médio difere do dia Sideral verdadeiro?

223 - Qual a diferença entre precessão e nutação?

224 - Qual o tempo sideral verdadeiro (aproximadamente) às $7^h42^m32^s,15$ de tempo sideral médio?

225 - Num mesmo instante verifica-se 2 locais diferentes que os tempos siderais médios são $3^h15^m20^s$ e $8^h10^m40^s$. Qual a longitude entre as 2 localidades?

226 - Que é equação dos equinócios?

227 - Demonstre que o tempo sideral médio local pode ser obtido pela equação:

$$TSL = (TF + \Delta z).f + TSG_0 - \lambda \ ,$$

onde TF é o tempo do fuso local, Δz é a correção zonal, $f = \frac{366,25}{365,25}$, TSG_0 é o tempo sideral em Greenwich às 0^h de TU, e λ é a longitude geográfica do local.

228 - Demonstre que $TF = (TSL + \lambda - TSG_0)/f - \Delta z$.

229 - À 0^h TU, a hora sideral verdadeira em Greenwich, no dia 15/05/75, era $15^h28^m24^s,45$. A equação dos equinócios é $-0^s,5$. Qual a hora sideral média local às 7^h, de Tempo de fuso, da manhã num local de longitude $45^o30'$ à leste de Greenwich? (Adotar que 365,25 dias solares médios correspondem a 366,25 dias siderais médios).

75

230 - Que é precessão dos equinócios?

231 - O que é retrogradação dos equinócios?

232 - Qual o efeito da retrogradação do ponto γ na longitude eclíptica de um astro?

233 - Qual foi a retrogradação do ponto γ (em longitude eclíptica) nos últimos 3000 anos? A que fração da longitude completa da eclíptica isso significa? Em quanto tempo o equinócio de primavera voltará a coincidir no mesmo ponto da esfera celeste?

76

234 - Descreva o fenômeno de nutação. Qual seu efeito sobre as coordenadas de um astro?

235 - Como se descreveriam as coordenadas médias e as verdadeiras de um astro?

77

236 - Que é ano sideral? E ano trópico? E ano besseliano?

237 - Que é fração do ano trópico?

238 - Sabe-se que o ano besseliano de 1958 iniciou-se em 0,861 de janeiro. Que fração do ano trópico transcorreu até às 12 horas de 30 de janeiro?

239 - Em 1975, o Sol passou pelo ponto Vernal às 0^h TU em 21/03, quando era $11^h52^m30^s$ de tempo sideral. Qual a hora sideral em São Paulo, no dia 20 de maio às 13^h?

78

240 - Que é tempo das efemérides?

241 - Qual a definição de segundo do tempo das efemérides?

79

242 - Que é tempo atômico internacional?

243 - Que é o segundo internacional?

244 - Como se pode obter o tempo das efemérides a partir do tempo atômico?

245 - Qual a vantagem da utilização do tempo atômico?

80

246 - Como se pode verificar que a rotação da Terra não é regular?

247 - Quais seriam as causas da irregularidade da rotação?

81

248 - O que é o movimento dos pólos?

249 - Por que a mudança da posição dos pólos muda a medida do tempo universal?

82

250 - Por que o movimento dos pólos causa mudança na latitude do lugar?

251 - Como se pode obter o valor convencional da latitude de um local de longitude dada, sabendo-se as coordenadas U e V da posição do pólo instantâneo em função de um pólo médio, e da latitude instantânea obtida a partir de observações astronômicas?

83

252 - Qual a fórmula que permite a obtenção da longitude convencional de um ponto da Terra, conhecendo-se a longitude instantânea obtida por meios observacionais, bem como a lati-

tude e as coordenadas do pólo instantâneo de rotação?

253 - Qual a diferença entre TU0 e TU1?

84

254 - Que são efeitos sazonais na velocidade de rotação da Terra?

255 - Qual a diferença entre TU2 e TU1?

256 - Qual dos tempos: TU0, TU1 ou TU2 é o mais uniforme?

85

257 - Que se verifica entre o TA1 e o TU2?

258 - Que é tempo universal coordenado? Qual a razão de sua adoção?

259 - Que é, e quais os tipos de um segundo intercalado? Para que servem esses segundos intercalados?

86

260 - Explique a causa da precessão. Quais seus efeitos?

261 - Qual o efeito das componentes V_1 e V_2 (86.1.(b))?

262 - Qual o efeito das componentes H_1 e H_2?

263 - Qual o efeito combinado do momento causado por V_1 e V_2 e aquele devido à rotação diária da Terra?

264 - Qual o efeito da precessão sobre o Pôlo Norte Celeste?

265 - Que é precessão Luni-Solar?

266 - Que é precessão Planetária? Qual seu efeito?

267 - Que é precessão geral?

268 - Que é nutação? Qual sua causa? E seu efeito?

87

269 - Defina os seguintes elementos: precessão geral anual em ascensão reta, precessão geral anual em declinação, precessão geral anual em longitude, precessão luni-solar anual e precessão planetária anual.

270 - Dê as fórmulas que permitam relacionar as grandezas do item anterior.

271 - Sendo $\alpha = 17^h20^m05^s,048$ e $\delta = 40^\circ01'21'',12$ as coordenadas médias de uma estrela em 1950,0, calcule suas coordenadas em 1982,0 devido apenas à precessão.

272 - A partir da equação 87.(12) demonstre as equações 87.(13), (14) e (15).

88

273 - Qual o significado de ζ_0, θ e ζ das equações 88.(3), (4) e (5)?

274 - Mostre que as equações 88.(10) e (9) são equivalentes.

89

275 - Qual a diferença entre coordenadas médias e verdadeiras?

276 - Que é nutação em longitude e obliqüidade?

277 - Que é a constante de nutação?

278 - A partir da equação 89.(4) demonstre as equações 89.(5), (6) e (7).

90

279 - O que é a aberração?

280 - O que é correção de tempo de luz?

281 - Defina aberração estelar e planetária.

282 - Quais os tipos de aberração devido aos diversos movimentos da Terra?

91

283 - Que é ângulo de aberração? Como se pode calculá-lo?

284 - Defina constante de aberração.

285 - Em que direção a aberração parece deslocar o astro?

286 - Em que caso o ângulo de aberração é nulo?

92

287 - Qual a causa e o efeito da aberração secular?

288 - Que é Ápex do movimento?

289 - Qual hemisfério pareceria mais rico em estrelas (apesar da hipotética distribuição uniforme) devido à aberração secular?

93

290 - Que é aberração anual? Qual a causa e o efeito?

291 - Que é a circunferência de aberração de uma estrela?

292 - As coordenadas de uma estrela são $\alpha = 20^{\circ}$ e $\delta = 30^{\circ}$. Quais as correções que se devem somar a essas coordenadas para corrigí-las da aberração anual (levar a aberração em consideração) quando a latitude do Sol fôr 45°?

293 - Que são números diários de Bessel?

294 - Demonstre as equações 93.(20) e (21).

295 - Qual a longitude da direção do deslocamento da Terra, num instante, em função da longitude do Sol no mesmo instante?

94

296 - Que é aberração diária? Qual sua causa e seu efeito?

297 - Uma estrela tem declinação de 30°. Quais as correções que se deve somar às coordenadas dessa estrela para obter as posições corrigidas da aberração diária se ela fôr observada com ângulo horário de 45° e num local de latitude 60°? Admitir a Terra esférica.

95

298 - O que é o efeito de paralaxe? Qual sua causa e efeito sobre a posição de um astro?

299 - Que é ângulo de paralaxe? Como se pode calculá-lo?

300 - Quais os tipos de paralaxe considerados?

301 - Que é sistema Heliocêntrico, Geocêntrico e Topocêntrico?

96

302 - Que é paralaxe anual? Qual o seu efeito sobre a posição da estrela?

303 - Que é elípse de paralaxe?

304 - Que é sistema baricêntrico?

305 - Que é ano-luz? Por que a paralaxe pode ser usada como indicador de distância? Como varia a distância com a paralaxe?

306 - Qual a correção de paralaxe anual sobre a estrela de $\alpha = 20^{\circ}$ e $\delta = 30^{\circ}$ sendo 45° a longitude eclíptica do Sol?

307 - Demonstre as equações 96.(17) e (18).

97

308 - Que é paralaxe diária?

309 - Que é paralaxe diária horizontal?

310 - Qual a equação que dá o ângulo de paralaxe diária de uma estrela?

311 - Uma estrela de $\alpha = 30^{\circ}$ e $\delta = -45^{\circ}$ é observada com ângulo horário de 60° num local de latitude 20°. Quais as correções que se deve somar às coordenadas dessa estrela para se obter as coordenadas corrigidas da paralaxe diária?

312 - Dê as equações das variações de coordenadas equatoriais de uma estrela em função do Tempo Sideral.

313 - Demonstre as equações 97.(17) e (19).

98

314 - Que é movimento próprio de uma estrela?

315 - Quais os componentes do movimento próprio?

316 - As coordenadas de uma estrela em 1950,0 eram $\alpha_0 = 20^\circ$ e $\delta_0 = 45^\circ$. Seus movimentos próprios em ascensão reta e declinação são, respectivamente, $0^s,04$ e $-0'',07$ (por ano). Qual a posição dessa estrela, no sistema de referências, em 1980,0?

317 - Demonstre a equação 98.(5).

99

318 - Como a refração atmosférica influi na posição observada de um astro?

319 - O que é ângulo de refração?

320 - Como varia o ângulo de refração com o índice de refração e a distância zenital observada?

321 - Como varia o ângulo de refração com a pressão e com a temperatura?

322 - As coordenadas de uma estrela são $\alpha = 30^\circ$ e $\delta = 20^\circ$. Ela é observada com ângulo horário de 30° num local de latitude 45° sob ângulo zenital de 45°, numa temperatura de $27^\circ C$ e pressão de 800 mm de Hg. Quais as correções que se deve subtrair das coordenadas observadas para se obter as coordenadas que a estrela teria se não houvesse atmosfera?

323 - Por que a refração só influi nas coordenadas verticais e não horizontais?

324 - Devido à refração, para onde aparentemente a estrela observada está deslocada?

100

325 - Que é crepúsculo? Quais suas causas?

326 - Qual a distância zenital do centro do Sol no início do Crepúsculo num local a 400 m acima do nível do mar?

327 - Caracterize os crepúsculos civil, náutico e astronômico.

101

328 - O que é redução ao dia?

329 - Quais os passos necessários para se fazer uma redução ao dia?

330 - Que são coordenadas médias e verdadeiras da época?

331 - Que são coordenadas médias e verdadeiras da data?

332 - Que são coordenadas aparentes?

333 - Que são coordenadas observacionais?

334 - Que é posição heliocêntrica, geocêntrica e topocêntrica de uma estrela?

102

335 - Descreva o sistema geocêntrico de Ptolomeu.

336 - Em que se baseava para colocar os planetas na ordem dada?

337 - Quais os dados observacionais que levaram Heráclides a adotar o sistema quase-geocêntrico com Mercúrio e Vênus girando em torno do Sol?

103

338 - Qual a razão da adoção da teoria dos epiciclos? Descreva-a.

339 - Que é "laçada" de um planeta?

104

340 - Descreva o sistema heliocêntrico de Copérnico.

341 - Como explicar o movimento "retrógrado" dos planetas com o sistema heliocêntrico?

342 - Qual foi a prova importante para terminar com o geocentrismo?

105

343 - Dê e descreva provas da rotação da Terra.

344 - Como se pode provar o movimento orbital da Terra?

106

345 - Que é configuração planetária?

346 - Que são planetas interiores? E exteriores?

347 - Quais as configurações particulares no caso de planetas interiores? E dos exteriores?

348 - Procure explicar detalhadamente elongação e quadratura ocidental e oriental.

349 - Que é período sinódico de um planeta?

107

350 - Descreva o método de Eratóstenes para determinar o raio da Terra.

108

351 - Qual a diferença entre corpo luminoso e corpo iluminado?

352 - Que são fases da Lua? Quais são? Como se as explica?

353 - Que é lunação? E Período Sinódico? E Mês Sinódico?

354 - Como se calcula a fase da Lua?

355 - Qual a relação existente entre fases da Lua e longitudes do Sol e da Lua?

356 - Qual a idade da Lua (aproximadamente) no dia da Lua Cheia?

357 - Que é terminator?

358 - Quantas voltas, com relação ao Sol, a Lua dá durante 1 ano Solar?

359 - Imagine na Lua, no centro da face voltada à Terra. Quando um observador na Terra notar Lua Nova, Crescente, Cheia e Minguante, que fases da Terra o "lunático" verá?

109

360 - Que são eclipses? Quais os tipos possíveis?

361 - Por que não ocorrem 2 eclipses por mês?

362 - Descreva o que é eclipse total, parcial, umbral e penumbral.

363 - Que é linha dos nodos?

364 - Que é retrogradação dos nodos da Lua?

365 - Sendo r o raio da Terra, R = 109r o raio do Sol, L = 23680 r a distância entre os 2 centros dos astros dados, qual a altura do cone de sombra formado? Qual o raio desse cone à distância ℓ = 60r por onde passará a Lua? Sendo r' = r/3,6 o raio da Lua, quantos diâmetros lunares cabem nessa região da sombra?

366 - Para o problema anterior, calcular o diâmetro da penumbra na região atravessada pela lua.

110

367 - Que é paralaxe solar? E lunar?

368 - Qual a condição para que possa ocorrer um eclipse solar? E lunar?

369 - Qual o número mínimo de eclipses por ano? Por que? E o máximo?

370 - Demonstre a equação 110.(10).

111

371 - Descreva o método de Hiparco para a obtenção da distância da Terra à Lua.

372 - Que é semidiâmetro do Sol? E da Lua?

373 - Como se poderia determinar a distância da Terra à Lua medindo as alturas da Lua de 2 pontos A e B da superfície da Terra, sendo ℓ a distância entre A e B (medida sobre a superfície da Terra, suposta esférica de raio R_ζ)?

112

374 - Descreva o método de Aristarco para determinar a distância da Terra ao Sol.

375 - Que é Unidade Astronômica?

113

376 - Qual a diferença entre período sideral e sinódico?

377 - Sendo de 23° o ângulo de elongação máxima de Mercúrio, qual sua distância até o Sol?

378 - Verifica-se que a cada 116 dias ocorre uma máxima elongação oriental de Mercúrio. Qual seu período sinódico? E sideral?

379 - Seja H um planeta hipotético do sistema solar. Na elongação máxima ele dista 40° do Sol, quando visto da Terra. O intervalo de tempo entre 2 elongações homólogas e sucessivas é de 120 dias. Qual a distância de H ao Sol e qual seu período orbital? (Admitir órbita circular).

380 - Demonstre a fórmula 113.(5).

381 - Admitamos ser de 365 dias o período sideral da Terra, e que os movimentos no sistema solar sejam circulares uniformes. Quantos dias após a conjunção inferior se dá a máxima elongação desse astro?

114

382 - Sabendo que a cada 780 dias ocorre uma oposição de Marte, qual seu período sinódico? E sideral?

383 - Cerca de 106 dias após uma oposição de Marte ocorre a pri-

meira quadratura de Marte. Qual a distância de Marte ao ao Sol?

384 - Tendo ocorrido uma opsição de Júpiter em 03/12/1929, em que dia de 1931 ocorrerá nova oposição se o período sideral de Júpiter é 11,9 anos?

385 - Observando-se um hipotético planeta H do sistema solar, verificou-se que o interregno entre uma oposição e a primeira quadratura subsequente foi de 100 dias,e que o interregno entre duas oposições sucessivas foi de 500 dias. Determine seu período orbital e sua distância ao Sol.

115

386 - Como se deve utilizar a lei de Titus & Bode? Até onde ela é válida?

116

387 - Explique o método que levou Kepler a mostrar que o Sol não estava no centro da órbita da Terra em torno do Sol.

117

388 - Como Kepler descobriu a órbita elíptica de Marte?

389 - Quais as leis inferidas por Kepler?

390 - Qual a velocidade areolar (área varrida/tempo de varredura) de um planeta que percorre uma elipse de semi-eixos a e b no tempo T?

391 - Sabendo que um planeta está 4 vezes mais distante que ou-

tro, em quanto tempo (relacionado com o do outro) dará uma volta completa em torno do Sol?

392 - Sendo de 88 dias o período sideral de Mercúrio, qual será o de Júpiter se a relação entre os semi-eixos maiores é $\frac{0,4}{5,3}$?

118

393 - Defina elipse, excentricidade, semi-eixo menor e distância focal.

394 - Numa elipse temos: semi-eixo maior de 10 U.A. e excentricidade de 0,20. Calcule a distância focal, o semi-eixo menor, o fator de contração, a menor distância da elipse ao foco, a maior distância da elipse ao foco.

395 - Numa elipse, (Fig. 118.(1)), $AF_1 = 6$ e $A'F_1 = 14$. Calcular a, b, f, e.

396 - Construa, ponto por ponto, a elipse de semi-eixo maior 4cm e excentricidade 0,4.

397 - Qual o período sinódico do planeta cuja distância periélia é 1,3 U.A. e a afélia é 1,7 U.A.?

398 - A excentricidade de um planeta é 0,25 e seu período sideral é 1330 dias. Quais as distâncias afélias e periélias? Qual o dia da oposição seguinte a do dia 25/12/80?

399 - Sendo de 11 anos o período sideral de um planeta, com excentricidade 0,05, quais suas distâncias afélia e periélia?

119

400 - Quais são os elementos que definem uma órbita? Explique cada um.

401 - Quais os elementos que definem a oposição do plano da órbi

ta com relação à eclíptica?

402 - Que elementos definem a posição da órbita em seu plano?

403 - Que elementos definem a forma e tamanho da órbita?

120

404 - Por que podemos continuar estudando o movimento do Sol em torno da Terra se sabemos que na realidade o sistema é heliocêntrico?

405 - Que é anomalia verdadeira e anomalia excêntrica?

406 - Um planeta tem semi-eixo maior de 10 U.A. e excentricidade de 0,20. Qual seu raio vetor quando a anomalia excêntrica fôr 45°?

407 - Qual o valor da anomalia verdadeira nesse instante? (Dados do problema anterior).

121

408 - Como se demonstra a equação de Kepler?

409 - Um planeta tem período orbital de 11 anos. Passou pelo periélio há 2 anos atrás. Qual sua anomalia excêntrica atual? E a verdadeira? E a média?

410 - Determine U na equação $U - 0,1 \operatorname{sen} U = \frac{2\pi}{2} (1958 - 1956)$.

411 - Calcule o valor da anomalia média da Terra em 20 de março sabendo que o instante de passagem pelo periélio é 2 de janeiro.

122

412 - Um planeta tem período orbital de 30 anos. Qual sua anomalia média 6 anos após passar pelo periélio? Qual sua anomalia verdadeira nesse instante? Qual seu raio vetor? Sendo 30° a longitude do periélio, qual a longitude do planeta nesse instante? Qual sua velocidade angular? Qual sua equação do centro?

123

413 - Qual a ascensão reta do Sol sabendo que sua longitude é 60°?

414 - Qual o valor da redução ao Equador, no problema anterior?

415 - Sendo 15° a longitude do periélio, qual a anomalia média? E a equação do centro?

124

416 - Que é força central?

417 - Qual a lei da gravitação universal?

418 - Quais os princípios fundamentais da mecânica?

125

419 - Descreva como o movimento da Lua pode ser usado para comprovar a teoria da gravitação universal.

420 - Como varia a aceleração da gravidade em função da distância à Terra?

126

421 - Que é maré? Qual sua causa e efeito?

422 - Defina fluxo, refluxo, preamar e baixa-mar.

423 - Que é maré de sizígia? E de quadratura? Qual causa desníveis maiores?

424 - A maré é provocada principalmente pela Lua ou Sol? Por que?

425 - Por que ocorrem 2 preamares e 2 baixa-mares por dia num local?

127

426 - Qual o valor da aceleração da gravidade a 300 km acima do solo?

427 - Qual o período orbital de um satélite artificial colocado em órbita circular a 300 km de altura?

428 - Qual seria o período mínimo de um satélite terrestre?

128

429 - Como se define energia potencial gravitacional? E energia cinética? E energia mecânica?

430 - Que é potencial gravitacional?

129

431 - Mostrar que no caso do movimento elíptico a constante das áreas pode ser escrita $C = 2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}$.

432 - Qual a fórmula que daria o raio vetor no periélio do movimento? E no afélio do movimento elíptico?

433 - Qual a velocidade no periélio do movimento? E no movimento elíptico?

434 - Demonstre a fórmula 129.(2).

130

435 - Defina as cônicas. Como podem ser geradas?

436 - Demonstre que se a energia total no movimento orbital fôr positiva, nula e negativa, então teremos, respectivamente, elipse, parábola e hipérbole.

437 - Mostre que se a velocidade fôr menor, igual ou maior que $\sqrt{\frac{2Gm}{r}}$ então a órbita será, respectivamente, elíptica, parabólica, hiperbólica.

438 - Qual o significado geométrico do parâmetro da órbita?

131

439 - O que é o problema dos 2 corpos? Como se pode transformá-lo em problema de 1 corpo?

440 - Obtenha a velocidade da Terra no periélio.

132

441 - Que é hodógrafo de um movimento? Que é pólo do hodógrafo?

442 - Qual a razão entre a velocidade radial e normal num movi-

mento orbital?

443 - Calcule as velocidades radial e normal no periélio e afélio (se existir).

444 - Dê a equação que permite obter a velocidade orbital de um corpo em função das velocidades radial e normal e da anomalia verdadeira.

133

445 - Um planeta tem massa 0,001 da massa solar. Seu período orbital é 12 anos, e sua exentricidade é 0,05. Qual seu semi-eixo maior? E o menor? Qual sua distância periélia? E afélia? Qual a constante das áreas? Qual a equação da velocidade orbital? E a do raio vetor? Qual seu movimento sideral médio? Quais as velocidades, o periélio e afélio? Quais as velocidades para a construção do hodógrafo? Construa seu hodógrafo.

446 - Demonstre que no movimento elíptico $p = q(1+e)$.

447 - Calcule a razão q'/q no movimento elíptico.

134

448 - Um cometa, com órbita parabólica tem distância periélia de 4 U.A. Qual seu parâmetro? Qual a constante das áreas? Qual a equação do raio vetor? Qual a equação da velocidade no periélio? E no "afélio"? Construa seu hodógrafo.

449 - Mostre que no movimento parabólico vale a expressão $V = C/\sqrt{qr}$.

135

450 - Qual a velocidade tangencial que um satélite deveria ter a 300 km de altura para descrever órbita circular em torno da Terra? E órbita elíptica? E parabólica? E hiperbólica?

136

451 - Obter as coordenadas esféricas (eclípticas e equatoriais) e cartesianas heliocêntricas de um planeta com inclinação da órbita 3°, argumento do periélio 50°, longitude do nodo ascendente 30°, anomalia verdadeira 45°.

452 - Demonstre as fórmulas 136.(1), (2) e (3).

453 - Demonstre as fórmulas 136.(9), (10) e (11).

137

454 - Obter as coordenadas cartesianas e equatoriais geocêntricas do planeta do problema anterior sendo 0,98 U.A. o raio vetor do Sol, e 60° e $0^{\circ},1$ suas longitude e latitude eclípticas. A distância geocêntrica do planeta é 2 U.A.

138

455 - Que é perturbação gravitacional?

456 - Que são co-senos diretores?

457 - Que é aceleração kepleriana? Que é aceleração perturbadora?

458 - O que é o problema dos 3 corpos?

459 - Demonstre a equação 138.(11).

Bibliografia

- A HISTORY OF ASTRONOMY (A. PANNEKOEK)
- ANUÁRIO ASTRONÔMICO DO INSTITUTO ASTRONÔMICO E GEOFÍSICO DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (Responsável: Paulo Benevides Soares).
- ATLAS CELESTE (RONALDO ROGÉRIO DE FREITAS MOURÃO)
- ASTRONOMIE (EVRY SCHATZMAN)
- ASTRONOMIE GÉNÉRALE (ANDRÉ DANJON)
- ASTRONOMIE GÉNÉRALE (P. BAKOULINE, E. KONONOVITCH, V. MOROZ)
- DYNAMICS OF THE GALILEAN SATELLITES (SYLVIO FERRAZ-MELLO)
- EXPLANATORY SUPPLEMENT OF THE ASTRONOMICAL EPHEMERIS AND THE AMERICAN EPHEMERIS AND NAUTICAL ALMANAC (Coordenação: B.L. Gurnette, R.v.d.R. Wooley).
- FUNDAMENTOS DE ASTRONOMIA (Coordenação: Romildo Póvoa Faria)
- INTRODUÇÃO À ASTRONOMIA E ASTROFÍSICA (Coordenador: João Evangelista Steiner).
- LES MOUVEMENTS DE CORPS CÉLESTES (Y. RIABOV)
- NAVEGAÇÃO ASTRONÔMICA (ESCOLA NAVAL - DEPARTAMENTO DA ARMADA)
- O CÉU (RODOLPHO CANIATO)
- PRACTICAL ASTRONOMY (W. SCHROEDER)
- PRACTICAL ASTRONOMY WITH YOUR CALCULATOR (PETER DUFFETT-SMITH)
- SPHERICAL AND PRACTICAL ASTRONOMY (IVAN I. MUELLER)
- TRATADO DE ASTRONOMIA (PLINIO ALVES MONTEIRO TOURINHO)

Índice Remissivo

(Os números indicam o item)

Ⓐ

- aberração - 90, 91, 93, 101
  - anual - 90, 93
  - constante de - 91, 92, 93, 94
  - diária - 90, 94
  - estelar - 90, 91
  - planetária - 90
  - secular - 90, 92
- aceleração - 124, 125, 126, 131, 138
- afélio - 119, 133
- almucântar - 21, 25
  - passagem por um - 49
- altura - 21, 30, 31, 44
  - da culminação superior e inferior - 23
  - do pólo - 22, 23, 27
- ângulo - 32
  - de rotação - 64, 66
  - entre 2 astros - 39
  - horário - 30, 31, 42, 55, 68
  - horário do ponto gama - 41, 73, 74
  - horário na passagem meridiana - 43
  - paraláctico - 40
- ano - besseliano - 77
  - bissexto - 10,13
  - da confusão - 10
  - das estações - 7
    duração do - 6, 7, 13, 77
  - egípcio - 7
  - fração do - 77
  - grego - 9
    gregoriano - 13
    sideral - 53, 77, 113
  - solar - 3, 5, 8, 10, 53, 56
  - trópico - 56, 77

- anomalia - excêntrica - 120, 121, 122, 133
  - média - 121, 122, 123
  - verdadeira - 119, 120, 122, 129, 133, 134
- anti-meridiano - 21
- Ápex - 92
- apogeu -
- Ápsides - linha das - 119
- arco - 32
  - semidiurno - 30, 45, 46, 55
- aresta - 32
- argumento do periélio - 119, 122
- Aristarco - 108, 112
- Aristóteles - 107
- ascensão reta - 29, 30, 31, 42, 60, 73
- asteróides - 115
- Augusto - 10
- aurora - 16
- austral - 26
- azimute - 21, 30, 42, 45

B

- baixa-mar - 126
- Bessel - ano de - 77
  - números diários de - 93
- bissexto - 10, 13
- Bode - 115
- Borda - 38

- boreal - 26, 29
- Bradley - 76
- Brahe - Tycho - 116
- bússola - 28

C

- calendário - 3, 5
  - Alexandrino - 7
  - Armênio - 7
  - Babilônico - 8
  - Copta - 7
  - eclesiástico - 12
  - Egípcio - 7
  - Etíope - 7
  - Grego - 9
  - Gregoriano - 13, 14
  - Judaico - 8
  - Juliano - 10, 11
  - Persa - 7
- Calípico - ciclo - 9
- Calípio - 9
- calotas polares - 58
- centro galáctico - 61
- círculo - de altura - 49
  - horário - 29
  - polar - 58
  - vertical - 21
- circumpolar - 18, 20, 44
- circunferência - 130
- coluro - 29, 60

- condições de cruzamento com o 1º e 2º verticais - 47
  - de máxima digressão - 48
  - visibilidade de estrelas - 46
  - nascer - 46
  - ocaso - 46
  - ocorrência de eclipse - 110
- configurações planetárias - 106
- cônica - 129, 130, 138
- conjunção - 106
- constante das áreas - 129, 133
- constelações - 18
  - zodiacais - 56
- coordenadas - ver também "sistemas" e "posição".
  - cartesianas - 62, 63, 64, 65, 66, 120
  - geocêntricas de um corpo orbital - 137
  - heliocêntricas de um corpo orbital - 136
  - verdadeiras e médias - 89
- Copérnico - 104, 113, 114
- corpo luminoso e iluminado - 108
- correção zonal - 71
- co-seno - co-seno (lei) - 36
  - diretor - 138
  - (lei) - 33
- crepúsculo - 16, 100
- Cristo - 11
- culminação - 23
- cunha esférica - 32



- data - 11, 67
- declinação - 29, 30, 31, 42, 44
  - do Sol - 54, 55, 56, 59
  - magnética - 28
- deferente - 103
- desvio para o leste - 105
- dia - 1
  - astronômico - 68
  - duração - 0, 55, 69, 74
  - intercalado - 10
  - polar - 55
  - sideral - 20, 41, 73, 74
  - solar - 20, 41, 68, 69
- diário - 1, 19
- diedro - 32
- digressão - máxima - 24, 28
- Diocletiano - 11
- Dionísio - Exíguo - 11
- direção - 15
  - da Mira - 24
- distância - polar - 23, 29
  - zenital - 21, 31, 42, 54
- diurno - 1, 19, 55
  - movimento - 16

(E)

- eclesiástico - 13
- eclipse - 75, 109
  - condições de ocorrência - 110
  - número de eclipses - 110
- eclíptica - 56, 59, 60
  - eixo da - 56
  - obliqüidade da - 54, 56, 86
  - plano da - 56, 86
- efemérides - 78
- eixo - da eclíptica - 56
  - de rotação - 20
- elementos orbitais - 119
- elípse - 117, 118, 119, 130
  - área - 121
  - construção - 118
  - distância focal - 118, 120
  - excentricidade - 118, 120, 129, 130, 131
  - fator de contração - 118, 120, 121
  - parâmetro - 133
  - semi-eixos da - 118, 120
- elongação - 48
  - de planetas - 106
- energia - cinética - 128, 129
  - mecânica - 128, 129, 130, 134
  - potencial - 128, 129
- epiciclo - 103
- época - 11, 67
- equação - aproximada do movimento elíptico - 122
  - de Kepler - 121
  - do centro - 122, 123
  - dos equinócios - 74

- dos tempos - 69
- equador - 19
- celeste - 20, 26, 56, 86
- plano do - 20
- terrestre - 26, 86
- equinócio - 6, 7, 12, 13, 54, 55, 57, 75
- era - 11
- cristã - 11
- diocletiana - 11
- Eratóstenes - 107
- escala de tempo - 67
- esfera - celeste - 20, 30
- trigonométrica - 32
- estações - de planetas - 106
- do ano - 3, 6, 7, 13, 54, 57
- estilos - 11
- estrelas - circumpolares - 18, 20, 42
- polares - 20
- excentricidade - da elipse - 134

(F)

- fases da Lua - 2, 9, 108
- festas religiosas cristãs - 12, 13, 14
- fluxo de maré - 126
- foco de elipse - 117, 118, 120
- força central - 124
- Foucault - 105
- fuso - ver "tempo" - esférico - 32

- horário - 71
- número do - 71

Ⓖ

- galáctico - centro - 61, 90
- latitude - 61
- longitude - 61
- nodo ascendente - 61
- plano -61
- pólo - 61
- sistema - 61
- Galileu Galilei - 104
- Galle - 115
- Gauss - 14
- gnômon - 6, 17, 68, 70, 75
- grande circunferência - 32
- gravidade terrestre - 125, 127
- gravitação - 86, 124
- constante - 124
- prova da lei da - 125
- Greenwich - 26
- ver "tempo"
- Gregoriano - reforma - 13
- Gregório - 13

(H)

- helíaco - 7
- hemerologia - 3
- hemisfério - 19, 20, 22
- Heráclides - 102
- Herschel - 115
- Hiparcos - 75, 111
- hipérbole - 130
- hodógrafo - 132
- hora - ver também "tempo"
  - de verão - 72
  - legal - 71
  - sideral - 41
  - unidade angular - 26
- horizonte - 45
  - linha - 15, 16
  - plano - 15, 27

(I)

- inclinação da órbita - 109, 119
- inércia - 124
- interregno - 2, 67
- intervalo de tempo - 2, 67
- instante -2
  - de passagem pelo periélio - 119
- isógonas - 28

J

K

- Kleper - 116, 117, 120
  - Equação de - 121

L

- lado de um triângulo esférico - 32
- latitude - astronômica - 22, 23, 27, 44, 54
  - do Sol - 59
  - eclíptica - 56, 60
  - galáctica - 61
  - geográfica - 26, 27, 82
- Lélio - 13
- Le Verrier - 115
- linha - das Ápsides - 119
  - de horizonte - 15
  - de mudança de data - 71
  - dos nodos - 56, 109
  - meridiana - 17
- longitude - da Lua - 75, 108
  - do nodo ascendente - 122
  - do periélio - 119, 122, 123
  - do Sol - 59, 75, 122
  - eclíptica - 56, 60
  - galáctica - 61
  - geocêntrica do nodo ascendente - 119
  - geográfica - 26, 27, 82
- Lowell - 115

- Lua - 2
  - distância - 111
  - fases da - 2, 8, 12, 108
  - idade da - 108
- lunação - 2, 5, 8, 9, 108

Ⓜ

- magnético, norte - 28
- marés - 126
- massa do sistema de 2 corpos - 133
- matrizes - de mudança de orientação dos eixos - 63, 64, 66
  - de nutação - 89
  - de precessão - 88
  - de rotação dos eixos - 31, 62, 64, 66
- meio-dia - 6, 17, 69
- Mercator - 51
- meridiana - linha - 17
- meridiano - central do fuso - 71
  - determinação - 24, 25
  - inferior - 22
  - geográfico - 26
  - local - 21
  - superior - 22
- meridional - 26
- mês - intercalado - 8, 9, 10
  - lunar - 2,8
  - sinódico - 2, 9, 108
- Meton - 8
  - ciclo de - 8, 9
- Mira - 24, 25

- mostrador de relógio solar - 70
- movimento - anual das estrelas - 18
  - anual do Sol - 53
  - aparente - 16
  - de rotação da Terra - 105
  - de translação da Terra - 105
  - diário aparente - 19
  - do Sol em ascensão reta - 123
  - dos pólos - 80, 81, 82, 83
  - elíptico - 133
  - kepleriano - 133
  - médio dos planetas - 119, 122
  - noturno - 18
  - parabólico - 134
  - próprio das estrelas - 98, 99, 101
  - sideral médio dos planetas - 133

N

- Nadir - 15
- nascente - 16
- nascer - 16, 22, 45, 46
- Newton - 124
- nodo(s) - ascendente - 109, 119
  - descendente - 109, 119
  - linha dos - 109
  - retrogradação dos - 119
- noite - 1
  - polar - 55
- Norte - 16
  - geográfico - 28
  - magnético - 28

- noturno - 1, 18, 55
- nutação - 74, 76, 86, 89
  - constantes da - 89
  - variação de coordenadas devido à - 89, 101

O

- obliqüidade - da eclíptica - 54, 59, 60, 86
  - em nutação - 89
- ocaso - 16, 22, 45, 46
- ocidente - 16
- Oeste - 16
- oposição de planeta - 106
- órbita - de um satélite artificial - 135
  - elementos da - 119, 136, 137
  - excentricidade da - 119
  - forma da - 130
  - inclinação da - 119
  - tipos de - 130, 132, 133, 134, 135

P

- parábola - 120, 134
- paraláctico - 40
- paralelo - de altura - 21
  - geográfico - 26
- parâmetro orbital - 129, 131, 133, 134
- paralaxe - 95, 101
  - anual - 96

diária - 97
- lunar - 110, 111
- solar - 110, 111

- Páscoa - 11, 13
- determinação da - 14

- passagem meridiana - 22, 43, 68

- pêndulo de Foucault - 105

- penumbra - 109

- pequena circunferência - 32

- periélio - 119
- argumento do - 122
- distância do - 131, 133, 134

- perigeu - 119

- período - sideral - 113, 116, 119
- sinódico - 106, 108, 113
- sótico - 7

- perturbação planetária - 138

- planeta - 102
- distância - 113, 114
- elongação máxima - 106
- movimento retrógrado - 103, 104
- órbita de - 117
- período orbital - 113, 114

- planetária - configuração - 106

- planificação - 50, 51, 52

- plano - da eclíptica - 56
- do equador - 20, 30
- do horizonte - 15
- fundamental - 65
- meridiano - 21
- vertical - 21

- poente - 16

- pólo - 19, 20, 22, 89
  - convencional e instantâneo da Terra - 81, 82, 83
  - da eclíptica - 56
  - do hodógrafo - 132
  - galáctico - 61
  - geográfico - 26
  - movimento do - 80, 81, 82, 83
- ponto - cardeal - 16, 17
  - determinação do cardeal - 17
  - de Áries - 56
  - Equinocial - 29, 56
  - gama - 29, 31, 56, 73, 75, 76, 86
  - Libra - 56, 86
  - Vernal - 29, 56
- pôr - 16, 53
  - do Sol - 53
- posição - veja também "sistemas" e "coordenadas"
  - aparente - 101
  - baricêntrica - 96, 101
  - de contemplação - 16, 19
  - geocêntrica - 95, 97, 101, 102
  - geométrica - 90, 93, 101
  - heliocêntrica - 95, 101
  - média - 101
  - observada - 99, 101
  - topocêntrica - 95, 97, 99, 101
  - verdadeira - 101
- potencial - energia - 128
  - gravitacional - 128
- preamar - 126
- precessão - 74, 75, 86, 87, 88
  - elementos da - 88
  - tipos de - 86, 87
  - variação de coordenadas devido à - 87, 88, 101
- primeiro vertical - 21, 47

- princípios fundamentais da mecânica - 124
- problema - de um corpo - 129
  - de dois corpos - 131
  - de três corpos - 138
- projeção - cilíndrica - 50, 51
  - estereográfica - 50, 52
  - foco de - 51, 52
- proléptico - 11
- prumo - 15
- Ptolomeu - Cláudio - 102
  - Euergetes - 7

Q

- Quadratura - de planetas - 106
  - marés de - 126
- Quantidade de movimento - 124

R

- raio - da esfera trigonométrica - 33
  - da Terra, determinação - 107
  - vetor da Terra - 116
  - vetor de planeta - 120,122,129,130,131,132,133,134,136,137
- redução - ao dia - 101
  - ao Equador -123
- refluxo de maré - 126
- Reforma gregoriana - 13
- refração atmosférica - 99, 100, 101
- regiões climáticas - 58

- relógio - 67, 85
  - solar - 70
- reta - 130
- retrogradação do ponto γ - 75, 86
- rotação da Terra - irregularidades - 80

S

- Saros - 110
- Sazonal - efeito - 84
- Século - 11
- Segundo - atômico - 79
  - do Sistema Internacional - 79
  - das efemérides - 78
  - intercalado - 85
- Segundo vertical - 21, 47
- Semana - 4
- Seno - lei - 34
  - & co-seno, lei - 35
  - & seno, lei - 37
- sentido - 15
- Séries de Taylor - A1
- setentrional - 26
- signos zodiacais - 56
- Sistema - ver também "coordenadas" e "posição"
  - baricêntrico - 96
  - direto e indireto - 62, 63, 64, 65, 66
  - eclíptico - 56, 59, 60, 65, 66
  - equatorial - 29, 31, 41, 42, 59, 60, 61, 65, 66
  - galáctico - 61
  - geocêntrico - 102
  - geográfico - 26, 31
  - heliocêntrico - 104

- horário - 30, 31, 40, 41, 65, 66
- horário e anti-horário - 62, 63, 64, 65, 66
- horizontal - 21, 31, 40, 42, 65, 66

- Sizígia - marés de - 126

- Sol - 16, 56, 57, 59
- da meia-noite - 55
- distância - 112
- fictício - 69, 83
- movimento elíptico do - 120
- semi-diâmetro - 111
- verdadeiro - 68

- Solstício - 6, 7, 54, 56, 57, 107

- sombra - 109

- Sótico - período - 7

- Sotis - 7

- Sozígenes - 10

(T)

- Taylor - séries - A1

- Tempo - 30, 67
- atômico - 67, 79, 85
- das efemérides - 67, 78, 79
- de Greenwich - 68, 69, 71, 73, 74
- de luz - 90, 91
- de verão - 72
- do fuso local - 71, 72
- equação do - 69
- intervalo de - 67
- legal - 71
- médio - 69, 71, 74
- sideral - 41, 42, 67, 73, 74
- solar - 41, 67, 68, 69, 70, 71

- universal - 69, 71, 80, 83, 84, 85
- universal coordenado - 85
- verdadeiro - 68, 69, 71, 73, 74

- Terminator - 108

- Terra - 19, 80, 86
- forma - 86
- órbita - 116, 117

- Timocharis - 75

- Titus-Bode - 115

- Tombaugh - 115

- trânsito - 22

- triângulos esféricos - 32, 33

- triedro polar - 33

- trigonometria esférica - 31

- trópico - 58

(u)

- umbra - 109

- unidade astronômica - 112

(v)

- velocidade - afélica - 133
- angular média do Sol - 59, 122
- circular - 135
- no hodógrafo - 132, 133, 134
- normal - 129, 132
- orbital - 129, 130, 131, 132, 133, 134
- parabólica - 130, 135
- periélica - 131, 133, 134
- radial - 129, 132

- vertical - 15, 17
  - círculo - 21
  - plano - 21
  - primeiro - 21, 47
  - segundo - 21, 47
- vértice do triângulo esférico - 32
- Via Láctea - 61, 92
- visibilidade dos astros - 46









- Zênite - 15, 19
- Zodiacal - constelações - 56
  - signo - 56
- zona - correção de - 71
  - da Terra - 58
  - de fuso - 71
  - designação de - 71

Impresso nas oficinas da
Gráfica Palas Athena

CONCEITOS DE ASTRONOMIA

A obra tem a finalidade de apresentar de forma clara, e sem utilização de conhecimentos profundos de matemática, conceitos básicos da Astronomia que estuda a posição dos astros. Além de poder ser usado em cursos iniciais de Astronomia, o livro pode ser recomendado para astrônomos amadores que queiram aprofundar seus conhecimentos na ciência que talvez tenha sido a que mais exigiu o aperfeiçoamento conjunto do intelecto humano e da tecnologia. O compêndio procura abordar os seguintes itens:

1. Noções de calendário
2. Sistemas de referência e suas inter-relações
3. Sistemas de medidas de tempo
4. Deslocamentos dos planos fundamentais de referência
5. Efeitos físicos que deslocam a imagem de um astro
6. Estrutura do Sistema Solar
7. Movimento orbital de um astro
8. Coordenadas de um corpo orbital
9. Noções de perturbações gravitacionais

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

ISBN 85-212-0075-7

9 788521 200777