COLLEGE POLYVALENT LES DELICES	BACCALAUREAT BLANC N°1	ANNEE SCOLAIRE AVRIL 2019
EPREUVE DE MATHEMATIQUES **Mr NOUTHE**	**CLASSE DE T^{LE}D**	**DUREE : 4H** **Coef : 4**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème sur deux pages. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE : 1 (2.5pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinx dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosx dx$

1) Calculer I_0 et J_0. **0.5pt**
2) En intégrant I_n et J_n par parties, montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ **1.5pt**
3) En déduire alors I_n et J_n. **0.5pt**

EXERCICE : 2 (5pts)

On considère la fonction polynôme P à variable complexe z définie par :

$P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$.

1) a) Démontrer que $2 + i$ est racine de P. **0.25pt**
   b) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z) = 0$. **1pt**
2) Dans le plan $\wp$ rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = -4 + i$.
   a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC. **0.75pt**
   b) Démontrer que $arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[2\pi]$. **0.25pt**
   c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **0.25pt**
   d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC. **0.25pt**
3) Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
   a) Montrer que l'écriture complexe de r est $z' = iz - 3 - i$. **0.5pt**
   b) Préciser les éléments géométriques de r. **0.25pt**
4) Soit h la transformation du plan $\wp$ d'écriture complexe $z' = i\alpha^2 z + \alpha, \alpha \epsilon \mathbb{C}$.
   a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles h est une homothétie de rapport 2. **0.5pt**
   b) On suppose dans cette question que $\alpha = 1 - i$ et on pose $s = r \circ h$.
   Déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments géométrique de s. **1pt**

EXERCICE : 3 (4pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et successivement avec remise 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1) Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. » B « Les trois boules sont de la même couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$. **0.25pt x 3**

b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X puis, Calculer $E(X)$. **1pt + 0.5pt**

2) Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

D « Tirer deux boules rouges. »

E « Tirer deux boules de la même couleur. »



a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ **0.5pt**

b) Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n. **0.75pt**

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \frac{1}{2}$? **0.5pt**

PROBLEME (9pts)

La partie A du problème est indépendante des parties B et C

PARTIE A : 2.5pts

On considère les équations différentielles : $(E_1): y'' + 2y' + y = 0$ et $(E_2): y'' + 2y' + y = x + 3$.

1) Déterminer un polynôme $u(x)$ de degré un, solution de l'équation différentielle (E_2). **0.5pt**

2) Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E_2) si et seulement si $g - u$ est solution de(E_1). **1pt**

3) Résoudre l'équation différentielle (E_1) puis en déduire les solutions générales de l'équation différentielle (E_2). **0.5pt**

4) Déterminer la solution g de (E_2) telle que $g(0) = 1$ et l'équation de tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ admet pour coefficient directeur le réel 2. **0.5pt**

PARTIE B : 6pts

Soit f la fonction numérique définie sur [0; +∞ [par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$

(cf) est sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (*unité graphique : 2cm*).

1) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. **0.5pt**
   b) Etudier le sens de variations de f'. **0.5pt**
   c) Démontrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. **0.25pt**
   d) Calculer la limite de f en $+\infty$. **0.25pt**
   e) Dresser le tableau de variations de f. **0.5pt**
2) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (Cf)et préciser les positions relatives de (D) et (Cf). **0.5pt**
   b) la courbe (Cf) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D). Déterminer les coordonnées de A. **0.5pt**
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$. **0.5pt**
4) Construire la courbe (Cf), la droite (D)et la tangente (T) à (Cf) au point A. **1pt**
5) On pose : $I_\alpha = \int_0^\alpha xe^{-x}dx$.
   a) A l'aide d'une intégration par parties calculer I_α. **0.5pt**
   b) Soit $\mathbb{D}$ le domaine du plan délimité par la courbe (Cf) la droite (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine $\mathbb{D}$. **0.5pt**
   c) En déduire $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$ **0.5pt**

PARTIE C : 3.5 pts

1) Démontrer que, sur $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ est équivalente à $\frac{e^x}{e^x+1} = x$. **0.5pt**

2) On définit sur $[0; 1]$ la fonction $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
   a) Calculer $h'(x)$ puis établir le tableau de variations de h. **0.5pt**
   b) En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$; $h(x) \in [0; 1]$. **0.25pt**
   c) Calculer $h''(x)$ et étudier les variations de h'. **0.5pt**
   d) Déduire que pour tout $x \in [0; 1]$; $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$ **0.5pt**

3) On définit la suite (u_n) $n\epsilon$ $\mathbb{N}$ $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$
   a) Montrer que, pour tout $n> \in \mathbb{N}$; $u_n \in [0; 1]$. **0.25pt**
   b) Démontrer que pour tout $n> \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$. **0.5pt**
   c) Déduire de ce qui précède que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis, en déduire la limite de u_n. **0.5pt**

«FAITES BIEN L'ECOLE ET L'ECOLE VOUS FERA DU BIEN»