Ministère des Enseignements Secondaires **Examen : Baccalauréat blanc Série C**
Office du Baccalauréat du Cameroun **session avril 2020**
Collège polyvalent de Bepanda **Epreuve : Mathématiques**
Enseignant : CHEMEGNI Guy M. **Durée : 4 heures Coefficient : 5**

SUJET 4

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : 2points

1. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (distinct de lui-même).

a) Le nombre 28 est-il parfait ? ***0,25pt***

b) Déterminer un nombre premier p tel que 2^4p soit un nombre parfait. ***0,5pt***

c) Soient n et p deux entiers naturels, tel que p soit premier . Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que 2^np soit parfait. ***1pt***

2. On lance huit fois de suite un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on désigne par X la variable aléatoire, qui associe à ces fuit lancers le nombre de multiples de 3 obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. ***1pt***

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X. ***0,75pt***

Exercice 2 : 2,5points

On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où l'unité de longueur est 6cm, les points M_θ de coordonnées (x,y) définies par :

$$x=\frac{cos\theta}{2+cos\theta};\ y=\frac{sin\theta}{2+cos\theta}$$ avec θ élément de $[0,2\pi]$.

1. Calculer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite (D) d'équation $x=1$. ***1pt***
2. Déduire que, pour tout réel θ élément de $[0,2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse (E) dont on précisera l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées. ***1pt***
3. Tracer l'ellipse (E). ***0,5pt***

Exercice 3 : 4,75points

1. Soit $A(0\ ,1,-1)$ et $\vec{n}\ (1,1,1)$ un vecteur de l'espace.

a) Déterminer l'équation du plan (P) contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$. ***0,5pt***

b) Donner l'expression analytique de la réflexion s de base (P). ***1pt***

2. Dans le plan orienté , on considère un carré ABCD de centre O. On suppose que le carré est de sens direct, c'est –à-dire que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$. On désigne par r le quart de tour de centre A, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h l'homothétie de centre C de rapport $\sqrt{3}$.

a) Prouver que $r'=r\circ t$ est une rotation, dont on précisera l'angle. ***0,5pt***

b) Déterminer les images de A et B par r'. Déduire le centre de r'. ***0,75pt***

3. On pose $f=r'\circ h$

a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport. ***0,5pt***

b) Soit I le centre de f. Déterminer l'image de C par f. Prouver que $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}\right)=\frac{\pi}{2}$ et que $ID=\sqrt{3}IC$. ***1,25pt***

t.me/KamerHighSchool

Problème : 11,75points

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : 2,5points

(E_0) l'équation différentielle $y''+2y'+y=0$.Déterminer toutes les solutions de (E_0)

1. (E) est l'équation différentielle $y''+2y'+y=2e^{-x}$

a) vérifier que la fonction définie h sur R par $h(x)=x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E) ***0,5pt***

b)Montrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g=\varphi-h$ est solution de (E_0). ***0,5pt***

c)Déterminer toutes les solutions de (E) ***0,5pt***

Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_0(0)=4$ et $f'_0(0)=0$ ***0,5pt***

Partie B : 4,75points

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(x+1)\,e^{\frac{-x}{2}}$. On se propose l'équation (1) : $f(x)=x$.

1.a) Calculer $f'(x)$, puis établir le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$. ***1pt***

b) Démontrer que pour réel x positif $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. ***0,5pt***

2. On considère la fonction $(x)=f(x)-x$.

a) Montrer que l'équation $g'(x)=0$ admet une unique solution α tel que : $-0{,}6<\alpha<-0{,}5$. ***0,5pt***

b) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution β tel que $1<\beta<2$. ***0,5pt***

3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0=0$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ $(n\in\mathbb{N})$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $U_n\geq 0$. ***0,5pt***

b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $|U_{n+1}-\beta|\leq\frac{1}{2}|U_n-\beta|$. ***0,5pt***

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $|U_n-\beta|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ***0,5pt***

d) En déduire la limite de la suite (U_n). ***0,25pt***

e) Donner une valeur approchée de la limite de la suite (U_n) à 10^{-6} près. ***0,5pt***

Partie C : 4,5points

On définie la suite (I_n) de terme général $I_n=\int_0^1(1-x^n)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

On pose $J_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ et pour tout entier naturel non nul $n, J_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

On suppose que $J_0=\frac{\pi}{4}$

1.a) Calculer J_1. ***0,75pt***

b) Déduire la valeur de I_1et donner une interprétation géométrique de ce résultat. ***0,5pt***

2. a) Etudier le sens de variations de la suite $(J_n)n\in\mathbb{N}^*$. ***0,5pt***

b) Déduire que les suites $(J_n)n\in\mathbb{N}^*$ et $(I_n)n\in\mathbb{N}^*$ convergent.

3. a)Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0\leq J_n\leq\int_0^1 x^n\,dx$. ***0,75pt***

b) Déduire les limites des suites (J_n) et (I_n). ***1pt***

4. a) Démontrer que la fonction v définie sur [0,1] par $V(x)=-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction $v(x)=x\sqrt{1-x^2}$ sur [0, 1]. ***0,5pt***

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 on :

$(n+2)J_n=(n-1)J_{n-2}$. ***0,5pt***

t.me/KamerHighSchool