COLLEGE POLYVALENT BILINGUE « LES AIGLONS » Discipline-Unité-Travail					
Examen	**Epreuve**	**Coef**	**Durée**	**Classe**	**Année Scolaire**
SESSION INTENSIVE	**Mathématiques**	**06**	**4H**	**T^leC**	**2018/2019**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie.
Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

Exercice 1 : 5,5points

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants. **1,5pt**
   a) $\begin{cases} pgcd(a;b) = 64 \\ a+b = 1152 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ppcm(a;b) = 180 \\ a+b = 96. \end{cases}$
2. On considère l'équation diophantienne $(E): 35x - 27y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Justifie l'existence d'une solution de (E) puis en utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E). **0,75pt**
   b) En déduire une solution particulière de l'équation $(E'): 35x - 27y = 14$. **0,25pt**
   c) Détermine l'ensemble solution de (E'). **0,5pt**
3. Soient m et n deux entiers naturels.
   a) Démontrer que $2^{mn} - 1$ est divisible par $2^m - 1$ et par$2^n - 1$. **0,5pt**
   b) En déduire que si $2^q - 1$ est un nombre premier alors q est premier. **1pt**
   c) Montre à l'aide d'un contre-exemple que la condition « q premier » n'est pas suffisante pour que $2^q - 1$ soit premier. **0,5pt**
4. Montrer que $4^{14} \equiv 1 mod(15)$. La réciproque du petit théorème de Fermat est-elle vraie ? **0,5pt**

Exercice 2 : 4,5points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + (-6 + i)z + 7 + 3i = 0$. (on appellera z_1 la solution de (E) dont un argument $\frac{\pi}{4}$ est et z_2 l'autre solution). **1pt**

2. On considère S la similitude directe du plan qui au point A d'affixe -2 associe le point B d'affixe 1, et au point C d'affixe z_1 associe le point D d'affixe z_2.

Soit L le point d'affixe $1 - i$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S . **0,75pt**
b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que |iz -3 +2i|= 4. **0,75pt**
c) La rotation de centre L et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A en E.Détermine l'affixe e de D. **0,5pt**
d) On appelle H le symétrique de C par rapport à L. Déterminer l'affixe h de H. **0,5pt**

3. Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = -\sqrt{3} + i$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = (\sqrt{3} + i)z_n$.

Montrer que la suite $(\mathrm{Arg}(z_n))$est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme . **0,5pt**

4.Linéariser l'expression $Cos^3 x$. **0,5pt**

https://t.me/KamerHighSchool

Problème. **10 points**

Les parties A et B sont dépendantes.

Partie A : **4 points**

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$x_0 = 3$ et $x_{n+1} = 2x_n - 1$; $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^{n+1} + 1$. **0,75pt**

2. **a)** Calculer pgcd$(x_8; x_9)$ et pgcd$(x_{2005}; x_{2006})$ Conclure. **0,75pt**

b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ? **0,25pt**

3. **a)** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2x_n - y_n = 5$. **0,5pt**

b) Exprimer y_n en fonction de n . **0,25pt**

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 5. **0,75pt**

4. On note $d_n = \text{pgcd}(x_n; y_n)$.

a) Démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. **0,25pt**

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux. **0,5pt**

Partie B : **6points**

I- Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = 2 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

1. **a)** Montrer que pour tout x positif, $h'(x) = -3x\sqrt{x^2 + 1}$. **0,5pt**

b) Dresser le tableau de variation de h. **0,5pt**

2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ et vérifier que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$. En déduire le signe de $h(x)$ pour tout x positif. **1pt**

II- On considère g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 2cm)

1. **a)** Déterminer la limite de g en $+\infty$. **0,5pt**

b) Montrer que pour tout x positif, $g'(x) = \frac{h(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **0,5pt**

c) Dresser le tableau de variation de g. **0,5pt**

2. Montrer que (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$. **0,5pt**

3. Montrer que pour tout x positif, $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. En déduire la position relative entre (C) et (D). **0,75pt**

4. **a)** Montrer que $\sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{2}{\alpha^2+1}$ et en déduire que $g(\alpha) = \alpha^3 + 1$. **0,5pt**

b) Tracer (D) et (C) On prendra $\alpha \approx 0{,}75$. **0,75pt**