Collège François-Xavier VOGT
Département de Mathématiques

Année scolaire 2016/2017
Contrôle du 11/03/2017
Classe : TD/TTI – Durée : 4 h

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 : (6 points)

1) On considère l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation. 0,5 pt
   b) Écrire les solutions sous forme trigonométrique. 1 pt

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   Les points I et J du plan ont pour affixes respectives $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = -\sqrt{3} - i$.
   a) Montrer que les points I et J appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. 0,5 pt
   b) Montrer que le point J est l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. 0,5 pt
   c) En déduire la nature du triangle OIJ. 0,5 pt

3) Soit B le milieu du segment [OI].
   Déterminer l'affixe du point B et déterminer la nature du triangle JBO. 0,75 pt

4) Soit r la rotation de centre O qui transforme B en A.
   a) Déterminer l'écriture complexe de r puis préciser son angle. 1 pt
   b) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}')$, image du cercle de centre O et de rayon 2, par r. 0,75 pt

5) Faire une figure et compléter par toutes les informations précédentes. 0,5 pt

Exercice 2 : (6 points) *Les parties I et II sont indépendantes..*

I- Soit n un nombre entier strictement positif et (I_n) la suite numérique définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe et qu'il est positif. 0,5 pt
   b) Étudier le sens de variation de la suite (I_n). 0,5 pt
   c) Calculer I_0. 0,5 pt

2) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. 0,5 pt
   b) En déduire les intégrales I_1 et I_2. 0,5 pt

3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_0^1 \left(-x^3 + 2x^2 - x\right) e^{-x}\,dx$. 0,75 pt

II- On donne $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

1) Montrer que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer. 0,5 pt
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. 0,75 pt
3) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de :
   a) $2\ln^3 x - 3\ln^2 x - 9\ln x + 10 < 0$; 0,75 pt
   b) $2e^{2x} - 3e^x + 10e^{-x} - 9 = 0$. 0,75 pt

Problème : (8 points) *Les parties A et B sont indépendantes..*

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$.

1) Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$. 0,5 pt
2) a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 1 pt
   b) En déduire le signe de g(x) sur $]1, +\infty[$. 0,5 pt

Partie B : Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{1}{e^2} + \ln(x-1)$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$. 0,5 pt

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$. 0,75 pt

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations. 0,75 pt

3) a) Calculer $f(2)$, puis déterminer une équation de la tangente (T) en 2. 0,75 pt

b) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$, puis donner une interprétation graphique du résultat. 0,5 pt

c) Tracer (T) et $(\mathscr{C}_f)$. 1 pt

Partie C : On considère la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par

$$F(x) = -\frac{1}{e^x} + (x-l)\ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)x.$$

1) a) Calculer $F'(x)$. 0,5 pt

b) Montrer que F est une primitive de f sur $]1, +\infty[$. 0,5 pt

2) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2. 0,75 pt