COLLÈGE F.X. VOGT
Département de Mathématiques

CLASSE : PD
DURÉE : 3 heures
COEFF : 04
Année scolaire : 2017-2018

CONTRÔLE DU 21 AVRIL 2018 (SÉQUENCE N° 5)
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème à deux parties qui peuvent être traitées de façon indépendantes. Elle est répartie sur deux pages. L'examinateur tiendra compte de la rédaction.

Exercice 01 : (05 POINTS)

Jules a prélevé les poids d'une douzaine d'enfants internés dans un hôpital pédiatrique de la ville de Yaoundé. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Poids en kg	$[3,5[$	$[5,7[$	$[7,9[$	$[9,11[$	$[11,13[$	$[13,15[$	$[15,17[$	$[17,19[$
Effectif	1	1	2	1	3	2	1	1

1- Déterminer le pourcentage de malade dont le poids est supérieur à 11 kg. 0,5 pt

2- Calculer pour cette série statistique, la moyenne et l'écart-type. 1,25 pt

3- a) Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants. 0,75 pt
b) Déterminer par calcul la médiane de cette série statistique. 0,75 pt

4- Trois des enfants sont choisis pour une cérémonie de remise de dons par une Autorité de la ville.
a) Combien y a-t-il de résultats comportant :
a_1) Deux enfants ayant moins de 13 kg ? 0,5 pt
a_2) Au plus deux enfants ayant au moins 13 kg ? 0,5 pt
b) Sachant que l'un des enfants devra tenir le discours de bienvenu, l'autre le bouquet de fleurs et le troisième un parapluie. De combien de façons peut-on faire cette distribution ? 0,75 pt

Exercice 02 : (04 POINTS)

A- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $BC = 2$. On désigne par θ la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

1- Calculer AB. 0,5 pt

2- Calculer $\cos\theta$ et $\cos(2\theta)$. 1 pt

3- En déduire la valeur de θ. 0,5 pt

B- Soit x un nombre réel tel que $\tan(2x)$ existe.

1- Montrer que $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$. 0,75 pt

2- Démontrer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ est solution de l'équation : $x^2 + 2x - 1 = 0$. 0,75 pt

3- En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. 0,5 pt

PROBLÈME : (11 POINTS)

Partie A /

ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct, dont le coté a une longueur de 3 centimètres. I est le milieu de [AB].

1- Justifier que $O = \text{bar}\{(I,2),(C,1)\}$. 0,75 pt

2- a) Calculer OI. 0,5 pt
b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que
$\left\|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 0,75 pt

3- Soit r la rotation de centre O qui transforme B en A.
   a) Déterminer l'angle de r. 0,5 pt
   b) Déterminer l'image de (C) par la rotation r. 0,5 pt

Partie B /

On considère la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ 2u_{n+1} - u_n = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f(x)	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$	↗	$+\infty$

A- On suppose que $f(x) = ax + \dfrac{b}{x-1}$ et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f.

1- Écrire une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $1+\sqrt{2}$.

2- Montrer que $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$. 1 pt

3- Calculer $f\left(1-\sqrt{2}\right)$. 0,5 pt

4- Justifier que (C_f) admet une asymptote verticale (D) et une asymptote oblique (D') dont on précisera les équations. 1 pt

5- Étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (D'). 0,5 pt

6- Construire (C_f) dans un repère orthonormé (O, I, J), ainsi que ses asymptotes (D) et (D'). 1,5 pt

B-

1- Utiliser les droites d'équations $y = \dfrac{1}{2}x$ et $y = x$ pour construire, dans le repère précédent, les 4 premiers termes de la suite (u_n). 1 pt

2- Faire une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n). 0,5 pt

3- Donner la nature de la suite (u_n), puis exprimer u_n en fonction de n. 0,75 pt

4- On pose $v_n = u_n + 2$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   a) Exprimer v_n en fonction de n et calculer sa limite. 0,75 pt
   b) Exprimer S_n en fonction de n. 0,5 pt