MINESEC - COLLÈGE BILINGUE NOTRE REINE DE LOURDES Année scolaire 2019-2020			
Département	Examen	Classe	Date
MATHEMATIQUES	Devoir Harmonisé N° 2	TC	09/11/2019
Durée	Coefficient	Visa de l'AP	Visa de PE
3H	5		

Exercice 1 : 3,75pts

On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0; y_0)$ est solution de (E).
   a. Démontrer que x_0 et y_0 sont premiers entre eux. 0,25pt
   b. Prouver que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité. 0,25pt
   c. Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$. 0,25pt
2. a. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(9 + 4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ 0,5pt
   b. Donner a_1 et b_1 puis exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. 1pt
   c. Montrer à l'aide d'une récurrence que les couples $(a_n; b_n)$ sont solutions de (E) . 0,5pt
   d. En calculant $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{5}}$, montrer que $(9 - 4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$. 0,5pt
   e. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n. 0,5pt

Exercice 2 : 2,5pts

I . Soit (z_n) la suite définie dans C par $z_0 = 1 + i$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = -\frac{1}{2} i\, z_n$

1) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = |z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. 0,5pt
2) On pose w_n = arg z_n , montrer que la suite (w_n) est arithmétique. 0,25pt
2) Exprimer arg(z_n) en fonction de n, puis z_n en fonction de z_0 et n. 0,5pt

II. On considère l'application j qui à tout complexe z associe $j(z) = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}\, z$

On pose $z_0 = 1$, $z_1 = j(z_0)$, $z_2 = j(z_1)$, ……, $z_{n+1} = j(z_n)$.

1) Ecrire $a = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. 0,25pt
2) Montrer par récurrence que $z_n = (\frac{1+i}{3\sqrt{2}})^n$. 0,5pt
3) En déduire l'écriture trigonométrique de z_n. 0,25pt
4) Pour quelle valeur de , z_n est-il réel ? 0,25pt

Exercice 3 : 2,75pts

On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation $(1): ax + by = 60$; (a et b etant des entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

1. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_0, y_0). Montrer que d divise 60. 0,25pt
2. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0, y_0) de l'équation (1). 0,25pt
3. On considère l'équation : $(2): 24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).
   a) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2). 0,5pt
   b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. 0,5pt

On appellera S l'ensemble des couples (x, y) solutions

c) Énumérer tous les couples (x, y) solutions de (2) et tels que $-10 \leq x \leq 10$. Donner parmi eux , ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. 0,5pt

t.me/KamerHighSchool

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1cm), représenter l'ensemble E des points de coordonnées (x, y) telles que : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. 0,25pt

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x, y) de l'équation (2) appartiennent à E. 0,25pt

f) Comment peut-on caractériser S ? 0,25pt

Exercice 4 : 1pt

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = u^2 z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (en radians) ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. 0,25pt
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2 ; Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. 0,25pt
3. Caractériser F lorsque $u = 1 - i$. 0,5pt

Problème : 10pts

Partie A : 1,5pt

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3}+2x\right)$ 1,5pt

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 - 2\sin x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+\sin x}{x}\right)$

Partie B: 6,75pts

I/ Soit les fonctions f et g définie par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ et $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1) Etudier les variations de g . 0,5pt
2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution que l'on note α. 0,5pt
3) Montrer que $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$ et que $f(\alpha) = \frac{6\alpha+9}{\alpha^2-1}$ 0,5pt
4) Déterminer le signe de g sur IR. 0,5pt
5) Etudier les branches infinies de f 1pt

II/ Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal , unité 2 cm sur les axes

1) Montrer que (C) admet deux asymptotes horizontales. 0,5pt
2) Déterminer la dérivée première de h et dresser le tableau de variation de h 1pt
3) Justifier que h admet une bijection réciproque h^{-1}définie sur un intervalle K que l'on précisera 0,5pt
4) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique β et que $\beta \in [-1;0]$ 0,75pt
5) Montrer que $\forall\, x \in$ IR, $|h(x) + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}|x|$, déduire $\lim_{x\to 0} h(x)$ 0,5pt
6) Tracer les courbes (C) et (C^{-1}) de h et h^{-1}dans le même repère. 0,5pt

Partie C : 1,75pts

On donne $t(x) = x^3 - px - q$. p et q deux réels positifs.

1) Montrer que si $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, alors t s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$. 0,5pt
2) Que se passe-t-il si t a une racine double ? 0,5pt
3) On pose $u(x) = x^2 - 5$, $v(x) = \frac{3}{x}$. Montrer que les courbes de u et v ont trois points de rencontre. 0,5pt