Collège Alfred Saker	**DEVOIR SURVEILLE N° 1**	**ANNÉE SCOLAIRE 2005/2006**	
	ÉPREUVE DE MATHS	**PREMIER TRIMESTRE**	
		CLASSE : T^{le}C	**Prof. : T.B. NDEDI**
Département De Mathématiques	**Octobre 2005**	**DURÉE : 3 Périodes**	**Cœfficient. : 5**

Exercice 1 : (2 points)

Déterminer quatre entiers naturels a, b, c et d inférieurs à 5 tels que : $\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{d}{5^3}$. **2pts**

Exercice 2 : (5,5 points)

Soit a un nombre entier naturel non nul

1- Démontrer que : $\frac{a(a+1)}{2} \in \mathbb{N}$ et $\frac{a(a-1)}{2} \in \mathbb{N}$. **0,5pt**

2.1- Démontrer qu'il existe un couple unique d'entiers (α, β) tel que $\begin{cases} \alpha+\beta=a^2 \\ \alpha-\beta=a \end{cases}$. **1pt**

2.2- Calculer $\alpha^2 - \beta^2$ en fonction de a. **0,5pt**

2.3- En déduire que le cube d'un entier non nul peut toujours s'écrire comme une différence de deux carrés. **0,5pt**

2.4- Ecrire les nombres 1^3 ; 2^3 ; 6^3 et 7^3 comme différence de deux carrés. **1pt**

3- Soit n un entier naturel non nul, démontrer que : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **1pt**

4- Peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$? Justifier clairement. **1pt**

Exercice 3 : (2,5 points)

1- Démontrer que pour tout réel x, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. **0,5pt**

2- On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \end{cases}$ pour tout entier n.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

a) $0 < u_n \leq 2$. **1pt**

b) $u_n = 2\times\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$. **1pt**

Exercice 4 : (3 points)

1- Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 5 de 2^n, de 3^n puis de $2^n + 3^n$. **2pts**

2- En déduire les valeurs de n pour lesquelles le nombre $1\,098^n + 4\,567^n$ est divisible par 5. **1pt**

Exercice 5 : (4 points)

1- Dresser la liste des diviseurs de 496 et calculer leur somme. Que constate-t-on ? **1,5pt**

2-Soit p un nombre premier. Comment appelle-t-on les nombres de la forme $2^p - 1$? **0,5pt**

3- Soit n un entier naturel tel que **$2^n - 1$ soit premier**. On pose $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$

3.1- Quel est le nombre de diviseurs positifs de N ? **0,5pt**

3.2- Démontrer que la somme des diviseurs de N est 2N. **1,5pt**

Exercice 6 : (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure. **2,25pts**

Donner le module de chaque solution. **0,75pt**

@KamerHighSchool