Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél: 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire **2010-2011**
Classe: **T^{le}D** Coef: **4** Durée : **4 h**
Prof: M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°4 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / FÉVRIER 2011

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.



Exercice 1 [3points]

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E). 0,5 pt

2. On considère l'équation différentielle (E′) : $y' + y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E′). 0,5 pt

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′). 1 pt

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E). 0,5 pt

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$. 0,5 pt

Exercice 2 [6,5points]

1. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par: $u(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$. 1pt

2. Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

a. Représenter sur l'axe des abscisses les termes: u_1, u_2 et u_3. 1pt

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5pt

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n < 2$ 1pt

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,5pt

3. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-2u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5pt

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. 0,5pt

c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,5pt

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 1pt

Problème [10,5points]

Partie A :

t.me/KamerHighSchool

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 1 + x\ln x$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

1. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. 0,5pt

b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\,;\ 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$, on a $f(x) \leqslant 1$. 0.5pt

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$. 0.5pt

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. 0.5pt

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$ par $g(x) = 1 + x\ln x - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et dresser le tableau de variation de g.2pts
On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T. 0.5pt

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\ \mathrm{d}x$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$. 1pt

b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$. 0.5pt

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent. 0.5pt

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et l'axe des ordonnées. 1pt

Partie B :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E):$y' + m^2y = 0$ $(m \in \mathbb{R}^*)$, $y(0) = 40$. 0,5pt

2. **Applications**

Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est $30^\circ C$. A chaque instant t, on pose: $x(t) = \theta(t) - 30$.

On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie: $x' = -m^2x$ $(m \in \mathbb{R}^*)$.

A l'instant 0 la température du corps est $70^\circ C$ et au bout de 5 minutes elle n'est plus que $60^\circ C$.

a. Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes. 1.5pt

b. A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes? 1pt

t.me/KamerHighSchool