COLLÈGE ADVENTISTE DE MAROUA
B.P. 45 MAROUA
Tél : 22 29 12 06
DÉPARTEMENT DE **MATHÉMATIQUES**

ANNÉE SCOLAIRE 2012-2013
Classe : $\mathbf{T^{le}D}$, Coef : **4**
Durée : **3** heures
Prof : M. **Loumsia Yonga A.**

SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2012

Exercice 1 **[4.5 pts] Démontrer par récurrence sur l'entier n que :**

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$; 1.5pt

2. Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$; 1.5pt

3. Pour tout entier naturel n, $3\times5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. 1.5pt



Exercice 2 **[4.5 pts]**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+2i$, $z_B = 2+i$ et $z_C = 2+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$. 0.5pt×3

2. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

a. Donner l'écriture complexe de r. 1pt

b. Déterminer les images A' et C' des points A et C par r respectivement. 0.5pt×2

c. Quelle est la nature du triangle $A'BC'$. 1pt

Problème **[11points]**

Partie A :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant (*On utilisera la méthode du pivot de Gauss*) :

$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z &= 1215 \\ y - z &= 15 \\ x + y + z &= 300 \end{cases}.$$

1.5pts

2. Un libraire affiche les prix par feuille suivants : Mathématiques : 25 francs ; Physique : 20 francs et Anglais :15 francs. Un élève de la terminale D dépense au total 6075 francs pour acheter trois livres à savoir : un livre de mathématiques, un livre de physique et un livre d'anglais. Sachant que le livre de mathématiques a 15 feuilles de plus que le livre de physique et que la somme totale des feuilles constituant ces 3 livres est de 600 pages.

a. Déterminer le système qui traduit les contraintes de ce problème. 1pt

b. En déduire le nombres de feuilles de chaque livre. 1pt

Partie B :

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Dans toute la suite, $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

t.me/KamerHighSchool

Rappel :

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}}\right) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. **Question de cours**

a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. 1pt

b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, on a : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. 1pt

2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. 1pt
En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O. 1pt

b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ tels que $f(M) = M$. 0.5pt

c. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.

i. Établir l'égalité $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$. 1pt

ii. En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$ 0.5pt

d. i. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul. 0.5pt

ii. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V. 1pt

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

t.me/KamerHighSchool