Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél : 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire 2009-2010
Classe : T^leD Coef : 4 Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2009

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4pts]

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant (*On utilisera la méthode du pivot de Gauss*) :

$$\begin{cases} 15x + 25y + 20z &= 6075 \\ y - z &= 15 \\ x + y + z &= 300 \end{cases}.$$

2pts

2. Un libraire affiche les prix par feuille suivants : Mathématiques : 25 francs ; Physique : 20 francs et Anglais :15 francs. Un élève de la terminale D dépense au total 6075 francs pour acheter trois livres à savoir : un livre de mathématiques, un livre de physique et un livre d'anglais. Sachant que le livre de mathématiques a 15 feuilles de plus que le livre de physique et que la somme totale des feuilles constituant ces 3 livres est de 600 pages.

   a. Déterminer le système qui traduit les contraintes de ce problème. 1pt

   b. En déduire le nombre de feuilles de chaque livre. 1pt

Exercice 2 [5pts]

Démontrer par récurrence sur l'entier n que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4 : 2^n \geqslant n^2$. 1.25pt
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 1.25pt
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},\ x > -1 : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ 1.25pt
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ 1.25pt

Problème [11points]

Partie A :

1. On donne les nombres complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

   a. Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2. 0.5pt×2

   b. En déduire la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$ et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$. 0.25pt×4

2. On donne les nombres complexes z et u définis par :

$$z = -8\sqrt{3} + 8i\,;\ u = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right).$$

   a. i. Écrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique. 1pt

   ii. Déterminer les racines carrées de z sous forme trigonométrique. 0.5pt×2

t.me/KamerHighSchool

b. i. Calculer u^2. 0.5pt

ii. Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous forme algébrique. 1pt

iii. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$. 0.25pt×2

Partie B :

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : 2× 0.5pt

$$(E_1) : Z^2 + 2Z\sqrt{3} + 4 = 0 \text{ et } (E_2) : Z^2 - 2Z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

2 Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 4Z^2 + 16$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(Z) = 0$.

a. Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a tel que :

$$P(Z) = (Z^2 + aZ + 4)(Z^2 - aZ + 4)$$

. 1pt

b. En déduire les solutions de l'équation (E). 0.5pt

3 Soient A, B, C, D et F les points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$ et $\sqrt{3} - i$ dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. 0.75 pt

b. Placer ces points dans le plan. 1pt

c. Montrer que $ABCDEF$ est un hexagone régulier. 0.75pt

t.me/KamerHighSchool