# الدالة الأسية

$e^0 = 1$ $\quad e^x > 0$ $\quad e \approx 2{,}71$

$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $\quad e^x \times e^y = e^{x+y}$

$e^{x^n} = e^{x \times x}$ $\quad (e^x)^n = e^{x \times n}$

$(e^x)' = e^x$

الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ⇐

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| exp(x) | 0 ↗ | $+\infty$ |

$(e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$

المعادلة التفاضلية ⇐

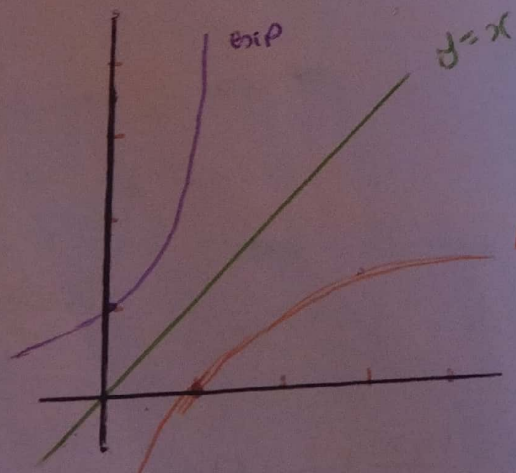
$y' = ay + b$

$x \longmapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$

النهايات ⇐

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$




exp و Ln متناظرتان بالنسبة المنصف الأول

Ln أساسا e

$\ln a + b = \ln a \times \ln b$

مشتقة دالة مركبة ⇐

$(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

مثال ⇐

$g = f(b)$

$g(x) = f'(x^2) \times 2x$

- $((f)^n)' = n f^{n-1} \times f'$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
- $\left(\frac{1}{f^n}\right)' = \frac{-n f'}{f^{n+1}}$
- $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

التقريب التآلفي ⇐

$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f(x_0 + h) \simeq f'(x_0) h + f(x_0)$

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

بدون استعمال الحاسبة أحسب $2{,}01^2$

$(2{,}01)^2 = f(2{,}01) = f(2 + 0{,}01)$

$f(2 + h) \simeq f'(2) h + f(2)$

$\simeq f'(2) \cdot 0{,}01 + f(2)$

$\simeq 4 \times 0{,}01 + 4$

$\simeq 0{,}04 + 4$

$\simeq 4{,}04$

إذا كانت $D_f = \mathbb{R}$ نكتب الشرط الأول كما يلي ⇐

من أجل كل x من $D_f$ :

$(2a - x) \in D_f$

محققة ⇐ Log

# الدالة اللوغاريتم النيبيري

## $\ln(x)$

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ $\quad \ln|a\,b| = \ln|a| + \ln|b|$

$\ln\frac{1}{a} = -\ln a$ $\quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^n = n\ln a$

$\ln|u(x)|' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$[\ln|u(x)|] = \frac{u'(x)}{u(x)}$

= نهايات

$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x-1)}{x} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} x^n \ln x = 0^-$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

$\lim \frac{e^x}{\ln x}$ ← $+\infty$ — ln cas épuit exp

$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x} = +\infty$

# الدالة الأسية ذات الأساس a

$a > e$

$a^n = e^{n\ln a}$ معناه $\ln a^n = n\ln a$

$a^x = e^{x\ln a}$ = تأ

= مثال

$f(x) = 3^x$

$= e^{x\ln 3}$

$f'(x) = \ln 3\, e^{x\ln 3}$

# دالة الجذر النيبيري

$x = a^n$ معناه $\sqrt[n]{x} = a$ $\quad (a > 0)$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

# اللوغاريتم العشري وصا

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

log تسمى

$\log 10^x = x$ $\quad \ln e^x = x$

$10^{\log x} = x$ $\quad e^{\ln x} = x$

$10^n < r^{2023} < 10^{n+1}$ ⇐ عدد أرقام عدد طبيعي محصور بين $10^n$ و $10^{n+1}$ هو العدد $n+1$

$r^{2023}$ ⇐ ما هو عدد أرقام العدد

نريد الوصول إلى:

$n = ?$ $\quad 10^n < r^{2023} < 10^{n+1}$

$\log r^{2023} = 2023 \log r = 1414,01$

$1414 < \log r^{2023} < 1415$

$\log 10^{1414} < \log r^{2023} < \log 10^{1415}$

$10^{1414} < r^{2023} < 10^{1415}$

إذا عدد أرقامه هو 1415.

Scanned with CamScanner

# المتتاليات العددية:

## اتجاه تغير متتالية =

ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$

\+ متزايدة

\- متناقصة

0 ثابتة

$\Leftarrow$ $(u_n)$ ثابتة معناه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$:

$u_{n+1}=u_n=$ الحد الأول

مثال =

$u_1=\alpha$ $\quad u_{n+1}=3u_n-2$

عين $\alpha$ حتى تكون $(u_n)$ ثابتة

$(u_n)$ ثابتة معناه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ =

$u_{n+1}=u_n=u_1=\alpha$

$\alpha=3\alpha-2$

$\alpha=-\frac{2}{2}$

$\Leftarrow$ إتجاه تغير متتالية معرفة بـ:

$u_{n+1}=au_n+b$ $\quad a>0$

ندرس إشارة الفرق بين حدين متتاليين

الحد ذو الرتبة الأعلى ناقص الحد الذي قبله

$\Leftarrow$ يمكن دراسة إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ بمقارنة الكسر $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1

الحدود الموجبة = إذا $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ $u_n$ متزايدة

$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ $u_n$ متناقصة

الحدود السالبة = العكس

مثال

$u_n=2\times 3^n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n}=3>1$

ومنه $(u_n)$ متزايدة

# المتتاليات الحسابية:

تسمى $(u_n)$ متتالية حسابية كل متتالية تحقق:

$u_{n+1}-u_n=r$ $\quad u_{n+1}=u_n+r$

$r$: عدد ثابت يسمى الأساس

نستنتج أن إتجاه تغير متتالية حسابية يتعلق بالأساس.

$\Leftarrow$ بما أن $u_n$ مكتوبة على الشكل التالي $au+b$ فإن $(u_n)$ حسابية أساسها $r=a$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية =

$S_n=$ عدد الحدود $\times \frac{(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير})}{2}$ في المجموع

عدد الحدود يساوي دليل الحد الأخير $-$ دليل الأول $+1$

الوسط الحسابي = الحد العام = $u_n=u_p+(n-p)r$

$b=a+r$

$a+c=b+r+a$ $\quad c=b+r$

$a+c=b+b$

$a+b=2b$

# المتتالية الهندسية:

$u_{n+1}=u_n\times q$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=q$

الحد العام = $u_n=u_p\times q^{n-p}$

المجموع = $S_n=\frac{\text{الحد الأول}}{1-q}(1-q^{\text{عدد الحدود}})$

الوسط الهندسي = $a\cdot c=b^2$

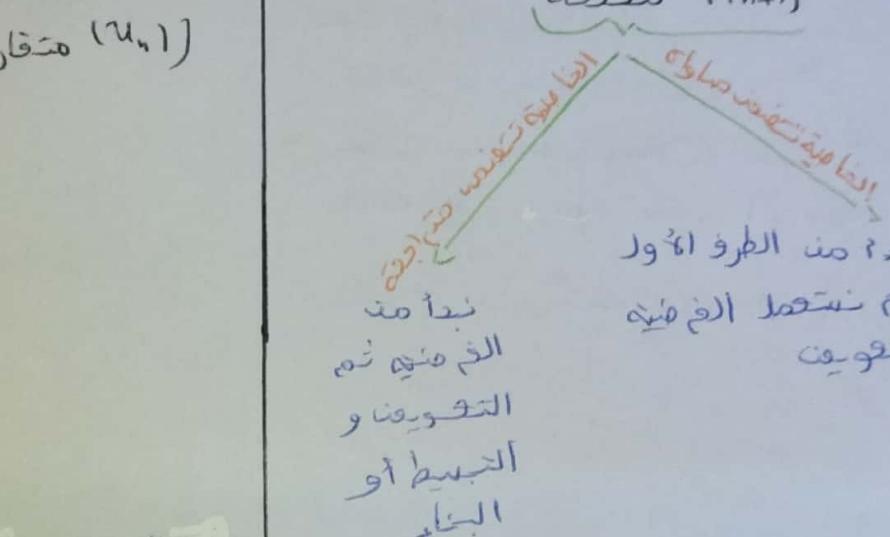
Scanned with CamScanner

إذا طلب منك البرهان بالتراجع =

- نمط من أنماط البرهان نلجأ فيه أو في استعماله لما نريد البرهنة على صحة خاصية $P(n)$ وهي علاقة تتعلق بالعدد الطبيعي $n$ والأجل دائما نتبع ما يلي =

1- نتحقق من صحة $P(n)$ من أجل أول قيمة للعدد الطبيعي $n$.

2- نبين أنه إذا كانت $P(n)$ محققة فإن $P(n+1)$ محققة




متتاليتان متجاورتان =

$(V_n)$ و $(U_n)$ يتقاربان من بعضهما البعض

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$$

تكونان $(V_n)$ و $(U_n)$ إذا كان فقط:

واحدة متزايدة والأخرى متناقصة

$$\lim(V_n - U_n) = 0$$

$$\lim V_n = \lim U_n$$

$(U_n)$ متقاربة نحو $l$ معناه $(\lim U = \lim V = l)$

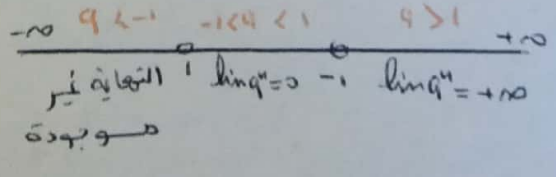
حسب الطريقة التراجعية

تقارب متتالية =

$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$ برهنة التقارب

إذا كانت $(U_n)$ متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

إذا كانت $(U_n)$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.




تمثيل الحدود =

نسقط على $(Cf)$ ثم نسقط على منصف أول وننسقطه على محور الفواصل