المتتاليات العددية

عادة ما يرمز لمتتالية بـ (U_n) ، (U_{n+1}) ، (U_{n-1}) ، (U_{2n}) ، ...

U_n ← $n \in \mathbb{R}$ دليل

1. مجموعة التعريف:

(U_n) معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول U_0

$(U_n)_{n \geq 1}$، حدها الأول U_1

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$، حدها الأول U_1

$(U_n)_{n \geq 2}$، حدها الأول U_2

2. توليد متتالية

بعلاقة تراجعية ← بدلالة حدودها

$U_n = a(b)^n$	$U_n = an + b$	نوع ثالث	نوع أول (بسيط)
هندسية	حسابية	يحتاج لمجموعة التعريف	برهان بالتراجع
أساسها $q = b$	أساسها $r = a$		

$U_{n+1} - U_n$

> 0 ← (U_n) متزايدة تماما

$= 0$ ← (U_n) ثابتة

< 0 ← (U_n) متناقصة تماما

تدريب 1: (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 3n + 7$

- دراسة اتجاه تغير (U_n)

$U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 7 - (3n + 7)$

$= 3n + 3 + 7 - 3n - 7$

$= 3$

(U_n) متزايدة تماما.

تدريب 2: (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 4$

- اتجاه تغير (U_n):

$U_{n+1} - U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 4 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 4$

$= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 2\right)$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{4}{3}\right) < 0$

$+$ $-$

(U_n) متناقصة تماما.

تمرين 03: (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$U_n = \sqrt{n} - n$$

- أدرس اتجاه تغيرها:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{n+1} - n - 1 - \sqrt{n} + n$$

$$= \sqrt{n+1} - 1 - \sqrt{n}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - (1+\sqrt{n}))(\sqrt{n+1} + (1+\sqrt{n}))}{\sqrt{n+1} + (1+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{n+1 - (1+\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + (1+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{n+1 - (1+n+2\sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + (1+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + (1+\sqrt{n})}$$

0		$+\infty$
	$-$	

(U_n) متناقصة تماما.

تذكير:

مرافق $\sqrt{a}$ هو $\sqrt{a}$

مرافق $\sqrt{a}+b$ هو $\sqrt{a}-b$

مرافق $\sqrt{a}+(b-c)$ هو $\sqrt{a}-b+c$

$\sqrt{a}+(b-c)$

$\sqrt{a}-b+c$

$\sqrt{a}-(b-c)$

التمرين 04: (النوع التالي) ← حالة خاصة من (النوع السابق)

$$\begin{cases} U_0 = \\ U_{n+1} = U_n - n + 1 \end{cases}$$

- أدرس اتجاه تغير (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = -n + 1$$

$$-n + 1 \geq 0$$

$n + 1$

$-\infty$		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

(U_n) متناقصة تماما.

تمرين 05: (النوع السابق)

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = \\ U_{n+1} = U_n - \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \end{cases}$$

- أدرس اتجاه تغير (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = -\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$\frac{n+2}{n+1} > 0$$

$$\frac{n+2}{n+1} = 1$$

$$n + 2 = n + 1$$

$$2 \neq 1$$

0		$+\infty$
	$+$	

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0$$

(U_n) متزايدة تماما.

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3U_n - 8 \end{cases}$$

$U_n \geq 4$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

2/ أدرس إتجاه تغير U_n .

$$U_{n+1} - U_n = 3U_n - 8 - U_n$$

$$= 2U_n - 8$$

$$2U_n - 8 = 0$$

$$U_n = 4$$

	4	
$-$	0	$+$

(U_n) متزايدة تماما.

تمرين 7 ص 70 (النوع الثاني) ← طريقة تراجعية.

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

1/ برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $0 \leq U_n \leq 2$

2/ أدرس إتجاه تغير (U_n) .

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 2} - U_n$$

$$= \frac{(\sqrt{U_n + 2} - U_n)(\sqrt{U_n + 2} + U_n)}{\sqrt{U_n + 2} + U_n}$$

$$= \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{\sqrt{U_n + 2} + U_n}$$

$$\begin{cases} U_3 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = U_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{4} \end{cases}$$

(U_n) متناقصة تماما

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{4}$$

$$= e^{n \ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{4}$$

$$e^{n \ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$e^{n \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \geq \frac{1}{4}$$

$$n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$n \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

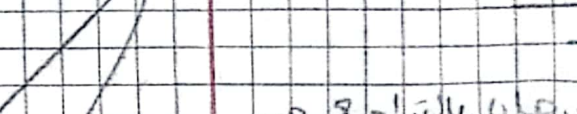
سالب

$a < b$

$n \leq 2$

	2	
$+$	0	$-$

$U_n^2 + U_n - 2 = 0$



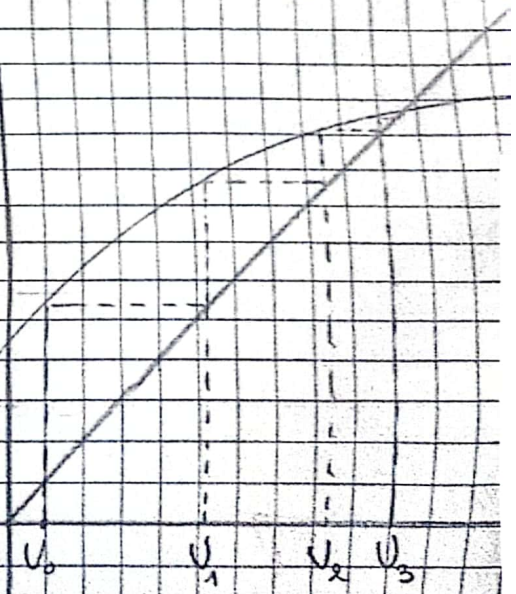
حل المعادلة بالتراجع هو
الذي يهمنا هنا هو الحل الذي
$(0 < U_n < 2)$

(U_n) متزايدة تماما

4- التمثيل البياني للحدود :

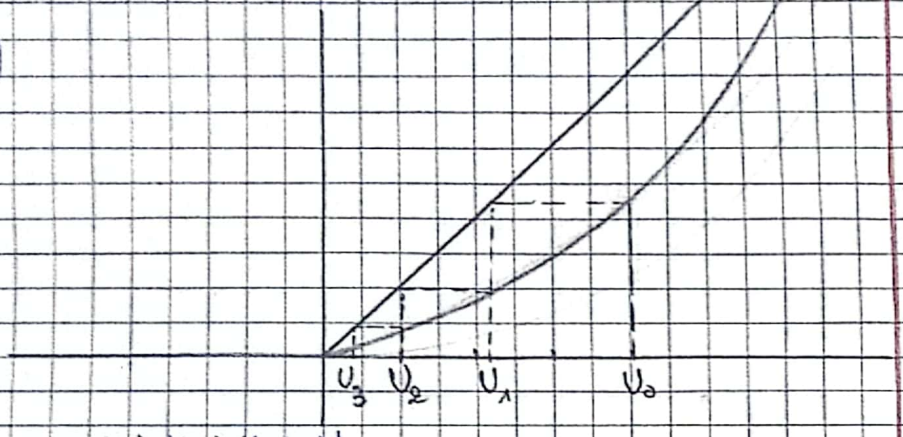
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1- مثل بيانيا الحدود الخمسة
الأولى مبرزا خطوط الرسم.
2- خمن اتجاه تغير (U_n)



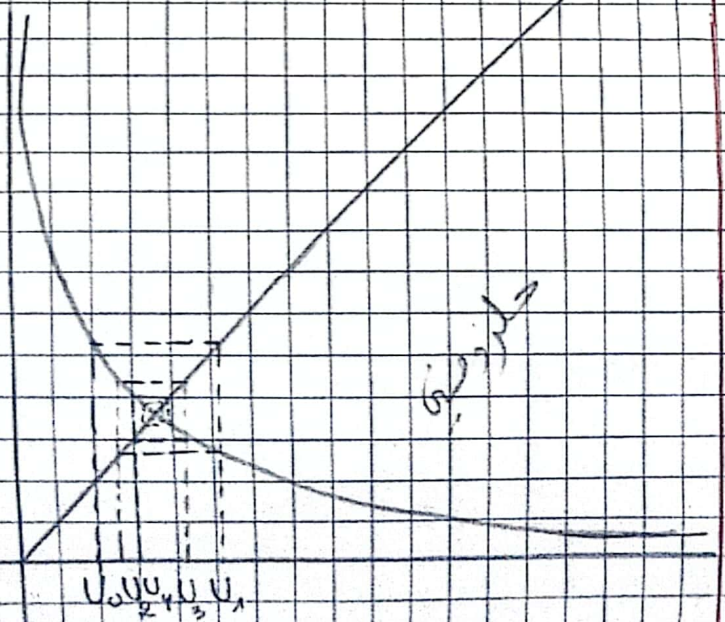
التخمين :
$U_0 < U_1 < U_2 < U_3$
نقول عن (U_n) أنها متزايدة .

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$



$U_0 > U_1 > U_2 > U_3$
(U_n) متناقصة

$U_0 = 1$
$U_{n+1} = f(U_n)$
(U_n) ليست رتيبة



البرهان بالتراجع

مرحلة التحقق:	مرحلة الفرضية:	البرهان:	البناء
من أجل أول قيمة لـ x	نفرض صحة $P(n)$	$P(n)$	الفرق
	ونثبت صحة $P(n+1)$	$P(n+1)$	اتجاه التغير

تدريب 1: (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = 3U_n - 10 \end{cases}$$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $P(n)$ ـــ $U_n \geq 5$

- من أجل $n=0$: $U_0 \geq 5$

$7 \geq 5$ محققة

- من أجل $n \geq 0$: نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$ حيث:

$U_{n+1} \geq 5$

$P(n+1)$ ـــ $3U_n - 10 \geq 5$

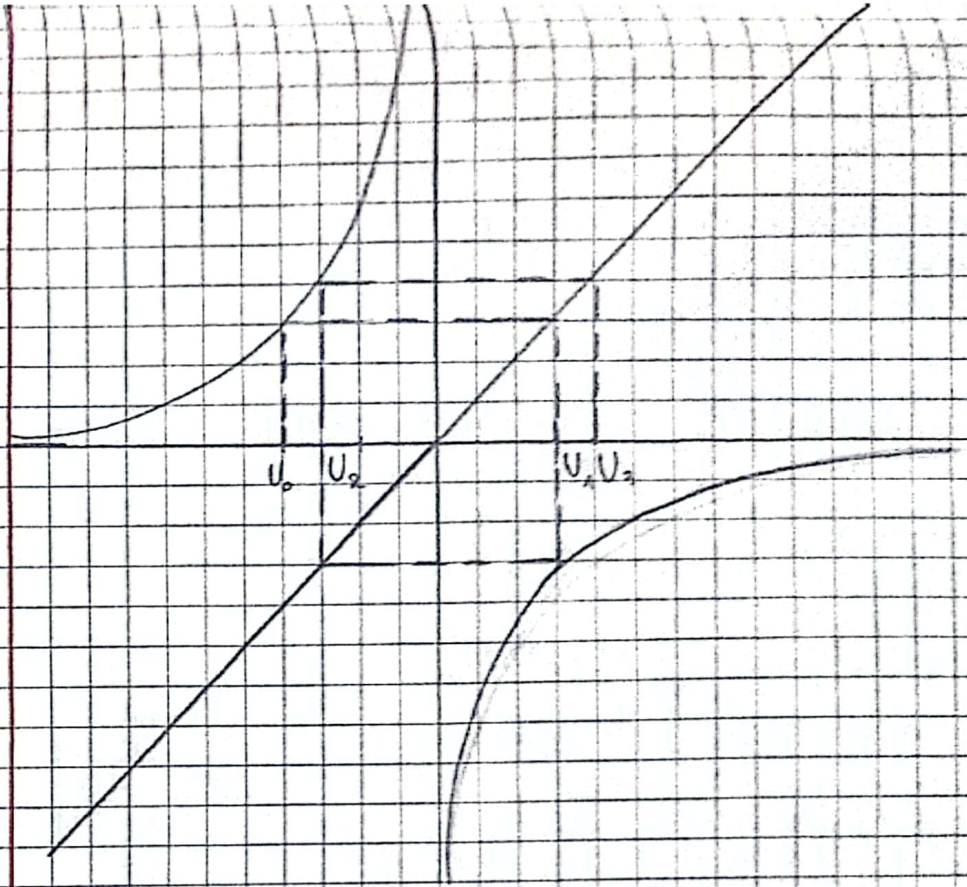
- لدينا عرضيا:

$U_n \geq 5$

$3U_n \geq 15$

$3U_n - 10 \geq 5$

- وهذه حسب مبدأ البرهان بالتراجع ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن $P(n)$ محققة.



$$\begin{cases} U_0 \geq -2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

تمرين 2: أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_n \geq 1$

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 1}{U_n + 4} \end{cases}$$

- من أجل $n = 0$ $\quad U_0 \geq 1$

$2 \geq 1$ محققة

- من أجل n نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$ حيث:

$P(n+1)$: $\quad U_{n+1} \geq 1$

$$\frac{4U_n + 1}{U_n + 4} \geq 1$$

$$4 - \frac{15}{U_n + 4} \geq 1$$

- لدينا فرضا: $U_n \geq 1$

$$U_n + 4 \geq 5$$

$$\frac{1}{U_n + 4} \leq \frac{1}{5}$$

$$-\frac{15}{U_n + 4} \geq -3$$

$$4 - \frac{15}{U_n + 4} \geq 4 + 3$$

$$4 - \frac{15}{U_n + 4} \geq 1$$

- ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن $P(n)$ محققة.

$4U_n + 1$	$U_n + 4$
$-4U_n - 16$	4
-15	

تمرين 3: (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n^2 - U_n + 2 \end{cases}$$

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\boxed{U_n \geq 2}$ $\quad P(n)$

- من أجل $n = 0$ ؛ $U_0 \geq 2$

$5 \geq 2$ محققة

- من أجل $n \geq 0$: نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$ حيث:

$$U_{n+1} \geq 2$$

$P(n+1)$ $\quad \boxed{\dfrac{1}{2}U_n^2 - U_n + 2 \geq 2}$

- يكفي إثبات أن: $\dfrac{1}{2}U_n^2 - U_n + 2 - 2 \geq 0$

$$\frac{1}{2}U_n^2 - U_n \geq 0$$

$\dfrac{1}{2}U_n^2 - U_n$:d

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
d		+	0	−	0	+	

من البرهان بالتراجع ($U_n \geq 2$)

- وبما أن $U_n \geq 2$ فإن $\dfrac{1}{2}U_n^2 - U_n \geq 0$

- ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن $P(n)$ محققة

ملحوظة: من الأفضل أن نستعمل القسمة الإقليدية $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ $\frac{\text{درجة الأولى}}{\text{درجة الثانية}}$

- كيف نثبت ؟؟ كيف نثبت ؟؟ كيف نثبت ؟؟

تمرين 1 : Bac 2008

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2. أثبت أنه من أجل $x \in [0;3]$ فإن $f(x) \in [0;3]$

3. نعتبر (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} V_0 = \frac{3}{2} \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$$

أثبت أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 \leq V_n \leq 3$.

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0$

x	3
f'	$+$ 0 $-$

f متزايدة تماما على المجال $[-\infty ; 3]$ ومتناقصة تماما على $[3; +\infty[$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	3	↘	$+\infty$

- لدينا f متزايدة تماما على $[0;3]$ و $0 \leq x \leq 3$ ، ومنه : $f(0) \leq f(x) \leq f(3)$

$0 \leq f(x) \leq 3$

البرهان بالتراجع :

من أجل $n=0$: $0 \leq V_0 \leq 3$ — $P(0)$

$0 \leq V_0 \leq 3$

$0 \leq \frac{3}{2} \leq 3$ محققة .

من أجل $n>0$ نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$ حيث :

$0 \leq V_{n+1} \leq 3$

$0 \leq f(V_n) \leq 3$ — $P(n+1)$

- لدينا فرضا : $0 \leq V_n \leq 3$

وكون f متزايدة تماما على $[0;3]$ فإن :

$f(0) \leq f(V_n) \leq f(3)$

$0 \leq V_{n+1} \leq 3$

ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن $P(n)$ محققة .

تذكير :

$x \in [a;b]$ معناه $a \leq x \leq b$

$x_1 < x_2$

f متزايدة فإن : $f(x_1) < f(x_2)$

f متناقصة فإن : $f(x_1) > f(x_2)$

محدودية متتالية

$U_n \geqslant \alpha$ معناه: (U_n) محدودة من الأسفل بـ α

$U_n \leqslant \beta$: (U_n) محدودة من الأعلى بـ β.

$\alpha \leqslant U_n \leqslant \beta$ (U_n) محدودة.

التقارب:

استنتاجية:

(U_n) متقاربة إذا:

(U_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل — (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى.

ملحوظة: إذا اختل أحد الشرطين نقول أنها ليست متقاربة

حسابيات (عبارة الحد العام)

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} l \longrightarrow \text{متقاربة } (U_n) \\ +\infty \longrightarrow \text{متباعدة } (U_n) \end{cases}$

- $\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2e^{n\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = 0$ ($n\ln\left(\frac{1}{5}\right) \to -\infty$, $e^{-\infty} \to 0$) (U_n) متقاربة

- $\lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{7}{2}\right)^n - 1 = \lim_{n\to+\infty} 3e^{n\ln\left(\frac{7}{2}\right)} - 1 = +\infty$ (U_n) متباعدة

عطفة 01:

- $\lim_{n\to+\infty} 2\left(-\frac{5}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2(-1)^n\left(\frac{5}{7}\right)^n$

$= \lim_{n\to+\infty} 2(-1)^n e^{n\ln\left(\frac{5}{7}\right)}$ ($\ln\left(\frac{5}{7}\right) < 0$, $n\ln\left(\frac{5}{7}\right) \to +\infty$)

حسب سوديو 3:
- n زوجي $= +\infty$
- n فردي $= -\infty$

عطفة 02:

- $\lim_{n\to+\infty} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 3(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \lim_{n\to+\infty} 3(-1)^n e^{n\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = 0$ ($-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, $n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \to -\infty$, $e^{-\infty} \to 0$)

متقاربة.

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(-\frac{5}{2}\right)^n = \left((-1)\left(\frac{5}{2}\right)\right)^n = (-1)^n\left(\frac{5}{2}\right)^n$

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_0$

Λ + دليل اللحد الأول - دليل اللحد الأخير + عدد الحدود

* $a + a + a + \dots + a = a$ (بعدد الحدود)

* $a.a.a.\dots.a = a^{\text{عدد الحدود}}$

تذكير:

- لتكن (U_m) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_m = 5$

لنحسب: $S_m = U_0 + U_1 + \dots + U_{m+3}$

$= 5 + 5 + \dots + 5$

$= 5(m+3-0+1)$

$= 5(m+4)$

$\Pi = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{2m}$

$= 5 \times 5 \times \dots \times 5$

$= 5^{2m-0+1}$

$= 5^{2m+1}$

$= 5^{2m}.5$

$= 5(5^2)^m$

$= 5(25)^m$

$m!$ تقرأ m مضروبة عاملي

$m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 1$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 6 \times 5 \times 4!$

$\begin{cases} 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$

$2024! = 2024 . 2023!$

$\frac{6!}{7!} = \frac{6!}{7.6!} = \frac{1}{7}$

$\frac{m!}{(m+1)!} = \frac{m!}{(m+1)m!} = \frac{1}{m+1}$

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$n+1$ = دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير + عدد الحدود

* $a + a + a + \dots + a = a$ (عدد الحدود)

* $a.a.a.\dots.a = a^{\text{عدد الحدود}}$

تدريب:

- لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 5$

- لنحسب: $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{(n+3)}$

$= 5 + 5 + \dots + 5$

$= 5(n+3-0+1)$

$= 5(n+4)$

$\Pi = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{2n}$

$= 5 \times 5 \times \dots \times 5$

$= 5^{2n-0+1}$

$= 5^{2n+1}$

$= 5^{2n} \cdot 5$

$= 5(5^2)^n$

$n!$ تقرأ n مضروب عاملي

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 6 \times 5 \times 4!$

$2024! = 2024 \cdot 2023!$

$\frac{6!}{7!} = \frac{6!}{7 \cdot 6!} = \frac{1}{7}$

$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$

$\begin{cases} 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$

2024-03-01

المتتاليات الحسابية:

$1 \underbrace{\quad}_{3} 4 \underbrace{\quad}_{3} 7 \underbrace{\quad}_{3} 10 \quad \cdots \quad U_n \underbrace{\quad}_{r} U_{n+1}$

a_{n+b} ← r

خاصية 1:

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = (\alpha - 1)U_n + \beta - \alpha + 5 \end{cases}$$

- عين قيمتي α و β حتى تكون (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 8$

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 8 \\ U_{n+1} = (\alpha - 1)U_n + \beta - \alpha + 5 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2 \\ \beta - \alpha + 5 = 8 \quad (\beta = 5) \end{cases}$$

تدريب: (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$U_n = 2n + 5$

- اثبت أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

(U_n) متتالية حسابية معناه: $U_{n+1} - U_n = r$

$U_{n+1} = 2(n+1) + 5$

$= 2n + 2 + 5$

$= (2n + 5) + 2$

$= U_n + 2$

ومنه: $r = 2$

عبارة الحد العام: U_n بدلالة n

(2) → (1) ← ع حدعام

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

تدريب: (U_n) متتالية حسابية حدها $U_3 = 4$ و $r = 5$

- اكتب U_n بدلالة n ثم احسب U_{10}

$U_n = U_3 + (n - 3)r$

$= 4 + (n - 3)(5)$

$= 5n - 15 + 4$

$= 5n - 11$

$U_{10} = 5(10) - 11$

$= 39$

(2) → (2) → (1)

تدريب:

(v_n) متتالية حسابية، حيث: $v_3 = 5$ و $v_0 = 17$.

- اكتب v_n بدلالة n ثم احسب v_7.

$v_3 = v_0 + (3 - 0)r$

$5 = 17 + 3r$

$u_2 = u_1 + r$

$7 = 2 + r$

$5r = 15$

$r = 3$

$u_n = u_2 + (n-2)r$

$= 7 + (n-2)(3)$

$= 3n + 1$

$u_{5n} = 3(3n) + 1$

$= 9n + 1$

$S_n = \frac{3n+1}{2}[1 + 9n + 1]$

$= \frac{3n+1}{2}(9n + 2)$

مجموع حدود متتالية حسابية:

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n+1-1}{2}(1+n)$

$= \frac{n}{2}(1+n)$

$u_n = 8(3)^n$

مثال:

أحسب:

$P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

$= 8(3)^0 \times 8(3)^1 \times 8(3)^2 \times \dots \times 8(3)^n$

$= 8 \cdot 8 \cdot 8 \dots 8 \; (3)^0 \cdot (3)^1 \cdot (3)^2 \dots (3)^n$

$= 8^{n-0+1} \cdot 3^{0+1+2+\dots+n}$

$= 8^{n+1} \cdot 3^{\frac{n-0+1}{2}[0+n]}$

$= 8^{n+1} \cdot 3^{\frac{n+1}{2}(n)}$

$r = -4$

$u_n = u_0 + nr$

$= 17 - 4n$

$u_n = u_3 + (n-3)r$

$= 5 + (n-3)(-4)$

$= -4n + 17$

$u_4 = 17 - 4 \times 4$

$= 1$

مجموع متتالية حسابية: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0:

$S_n = u_p + \dots + u_n$

$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(u_p + u_n)$

الحد الأول للمجموع

$= \frac{n-p+1}{2}[u_p + u_n]$

تذكير: $1 + 2 + \dots + n$ = (الحد الأخير + الحد الأول) × عدد الحدود

تدريب: (u_n) متتالية حساب

أحسب المجموع الآتي:

$\frac{e^A}{B} = \frac{e^A}{A} \cdot \frac{A}{B}$ خاصية:

$22 = 7 + 5r$

$5r = 15$

$r = 3$

$U_m = U_2 + (m-2)r$

$= 7 + (m-2)(3)$

$= 3m + 1$

$U_{5m} = 3(3m) + 1$

$= 9m + 1$

$S_n = \frac{3m+1}{2}[1 + 9m + 1]$

$= \frac{3m+1}{2}(9m + 2)$

مجموع حدود متتالية حسابية:

$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m+1-1}{2}(1+m)$

$= \frac{m}{2}(1+m)$

$U_m = 8(3)^m$

مثال:

أحسب:

$P_m = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$

$= 8(3)^0 \times 8(3)^1 \times 8(3)^2 \times \dots \times 8(3)^m$

$= 8.8.8 \dots 8.(3)^0.(3)^1.(3)^2 \dots (3)^m$

$= 8^{m-0+1} \cdot 3^{0+1+2+\dots+m}$

$= 8^{m+1} \cdot 3^{\frac{m-0+1}{2}[0+m]}$

$= 8^{m+1} \cdot 3^{\frac{m+1}{2}(m)}$

$r = -4$

$U_m = U_0 + mr$

$= 17 - 4m$

$U_m = U_3 + (m-3)r$

$= 5 + (m-3)(-4)$

$= -4m + 17$

$U_4 = 17 - 4 \times 4$

$= 1$

مجموع متتالية حسابية: (U_m) متتالية حسابية حدها الأول U_0:

$S_m = U_p + \dots + U_m$

$S_m = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(U_p + U_m)$

الحد الأول للمجموع

$= \frac{m-p+1}{2}[U_p + U_m]$

تذكير: عدد الحدود = دليل الحد الأخير + دليل الحد الأول + 1

تدريب: (U_m) متتالية حسابية

أحسب المجموع التالي:

صعوبة:

$\frac{e^A}{B} = \frac{e^A}{A} \cdot \frac{A}{B}$

المتتاليات الهندسية :

$1 \underbrace{2 \quad 4}_{2 \quad 2} \quad U_n \underbrace{U_{n+1}}_{q}$

(U_n) متتالية هندسية يكافئ $[U_{n+1} = U_n \times q]$

تذكير : (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$U_n = 8(3)^{2n}$

- بين أن (U_n) متتالية هندسية محددا q

(U_n) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $U_{n+1} = U_n \times q$

$U_{n+1} = 8(3)^{2(n+1)}$

$= 8(3)^{2n+2}$

$= 8(3)^{2n}(3)^2$

$= U_n \times \underbrace{9}_{q}$

خاصية : (U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = (\alpha^2 + \beta - 1)U_n + \beta - 5 \end{cases}$

- هل توجد قيم لـ α و β حتى تكون (U_n) متتالية هندسية حيث $q = 2$

$\begin{cases} U_{n+1} = (\alpha^2 + \beta - 1)U_n + \beta - 5 \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha^2 + \beta - 1 = 2 \Rightarrow \alpha^2 = \cancel{-2} \\ \beta - 5 = 0 \rightarrow (\beta = 5) \end{cases}$

عبارة الحد العام U_n بدلالة n :

$U_n = U_p \times q^{n-p}$

تذكير :

(U_n) متتالية هندسية موجبة حيث $U_0 = 4$ و $U_2 = 36$

- أوجد أساس (U_n)

$U_2 = U_0 \times q^2$

$36 = 4q^2$

$q^2 = \frac{36}{4} = 9$

$|q| = 3$

$\begin{cases} q = 3 \\ \cancel{q = -3} \end{cases}$

تذكير : (U_n) متتالية هندسية رتيبة، حيث : $U_2 = 4$ و $U_7 = 128$

- أوجد أساس q :

$U_7 = U_2 \cdot q^5$

$128 = 4q^5$

$q^5 = 32$

Shift $\boxed{\times}$

$\sqrt[5]{32} = 2$

$S_m = U_p + \dots + U_m$

$= U_p \cdot \frac{q^{m-p+1}-1}{q-1}$

تذكير: (U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$U_n = 8(3)^n$

احسب S_m حيث: $S_m = U_1 + U_{21} + \dots + U_{2006}$

$= U_1 \frac{3^{2006}-1}{3-1}$

$= \frac{24}{2}(3^{2006}-1)$

$= 12(3^{2006}-1)$

$S_m = U_0 + U_m + \dots + U_{2m}$

$= U_0 \frac{3^{2m-0+1}-1}{3-1}$

$= \frac{8}{2}(3^{2m+1}-1) = 4(3^{2m+1}-1)$

مجموع خاص لمتتالية هندسية:

$S_m = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^m$

$= 4^0 \frac{4^{m-0+1}-1}{4-1}$

$= \frac{1}{3}(4^{m+1}-1)$

الوسط الحسابي:

$2b = a+c$ ، نقول أن حدود متتالية حسابية تحقق: a, b, c ثلاث حدود متتالية

مثال: (U_n) متتالية حسابية تحقق: $U_6 + U_8 = 16$

- أوجد U_7:

$2U_7 = 16$

$U_7 = 8$

$U_6 \quad U_7 \quad U_8$

$2U_7 = U_6 + U_8$

الوسط الهندسي:

$b^2 = a \times c$ ، نقول أن حدود متتالية هندسية تحقق: a, b, c ثلاث حدود متتالية

مثال: (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث:

$U_1 \times U_2 \times U_3 = 8$ - أوجد U_2:

$U_2^3 \times U_2 = 8$

$U_2^3 = 8$

$U_2 = 2$

$U_1 \quad U_2 \quad U_3$

$U_2^2 = U_1 \times U_3$

إيجاد مجهولين علم مجموعهما وجداؤهما:

$x_1 < x_2$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P \end{cases} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

x_1 ، x_2

مثال: أوجد a, b علما أن: $a < b$

$\begin{cases} a+b=5 \\ a \times b = 6 \end{cases} \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$a = 2$ ، $b = 3$

تمرين : (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة منزايدة ، حيث :

$$\begin{cases} U_0 + 2U_1 + U_2 = 27 \\ U_0 \cdot U_1 \cdot U_2 = 216 \end{cases}$$

- أوجد U_0 ، U_1 ، U_2

U_1 هو الوسط الهندسي لـ U_0 و U_2 : $U_1 = U_0 \times U_2$

$$U_1^2 \cdot U_1 = 216$$

$$U_1^3 = 216$$

$$U_1 = 6$$

$$\begin{cases} U_0 + 12 + U_2 = 27 \\ U_0 (6) U_2 = 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_0 + U_2 = 15 \\ U_0 \cdot U_2 = 36 \end{cases}$$

$$x^2 - 15x + 36 = 0$$

$U_0 = 12$ أو $U_0 = 3$

تمرين : (U_n) متتالية حسابية حدودها موجبة متناقصة تماما ، حيث :

$$\begin{cases} U_0 + U_1 + U_3 = 24 \\ U_0 \cdot U_1 \cdot U_2 = 1440 \end{cases}$$

$$2U_1 + U_1 = 24$$

$$3U_1 = 24$$

$$U_1 = 8$$

- أوجد U_0 ، U_1 ، U_2 :

U_1 هو الوسط الحسابي لـ U_0 و U_2 : $U_1 = \frac{U_0 + U_2}{2}$

$$\begin{cases} U_0 + U_2 = 16 \\ U_0 \cdot U_2 = 60 \end{cases}$$

$$x^2 - 16x + 60 = 0$$

$U_0 = 10$ أو $U_0 = 6$

تمرين : (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث $U_1 = 5$ و $U_1 \times U_5 = 1600$

- أوجد q :

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

$$U_1 = U_0 \cdot q^1$$

$$U_5 = U_0 \cdot q^5$$

$$U_0 q^1 \cdot U_0 q^5 = 1600$$

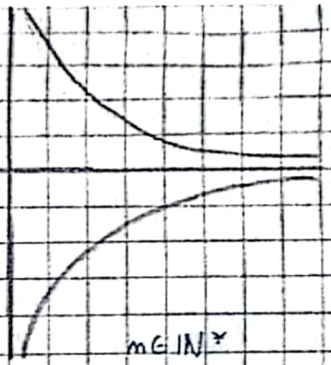
$$25 q^6 = 1600$$

$$q^6 = 64$$

$$q = 2$$

(u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كان:

- (u_n) و (v_n) متقاربتان وتقاربان نحو نفس الغاية.
- $\lim (u_n - v_n) = 0$



$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \frac{1}{n}$; $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

هل (u_n) و (v_n) متجاورتان؟

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1$$

$$(n+1)^2 = n(n+2)$$

$$n^2 + 1 + 2n = n^2 + 2n$$

$$1 \neq 0$$

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 1$$

$$\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) > 0$$

n	0	$+\infty$
	$\parallel$	$+$

(u_n) متزايدة تماما.

$$= \frac{n^2 + n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-1 < 0}{n(n+1) > 0} < 0$$

(v_n) متناقصة

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان.