

S.C.No.—2104601/2101637

B. Sc. EXAMINATION, 2024

(Main)

(Sixth Semester)

MATHEMATICS

20UMTH601

Special Functions & Integral Transforms

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40

Note : Attempt *Five* questions in all. Q. No. 1 is compulsory. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Write duplication formula of Gamma function.

1

गामा फलन का डुप्लीकेशन सूत्र लिखिए ।

(b) Show that :

1

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) \cot x$$

दर्शाइए कि :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) \cot x$$

(c) Prove that :

$$\int_{-1}^1 P_0(x) dx = 2$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^1 P_0(x) dx = 2$$

(d) Find $L(\sin t/2 \sin 3t/2)$.

1

$L(\sin t/2 \sin 3t/2)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(e) Define Laplace transformation.

1

लाप्लास रूपांतरण को परिभाषित कीजिए ।

(f) Find Laplace inverse of $\frac{1}{s^{a/2}}$.

1

$\frac{1}{s^{a/2}}$ का व्युत्क्रम लाप्लास ज्ञात कीजिए ।

(g) Define fourier sine and cosine transform.

1

फूरिये साइन और कोज्या रूपांतरण को परिभाषित कीजिए ।

(h) Write Parseval's identity for Fourier transformation.

1

फूरिये रूपांतरण के लिए पार्सेवल की पहचान लिखिए ।

2. (a) Obtain the power series solution of : 4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (x-3) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

in powers of $(x-2)$.

घात श्रेणी हल प्राप्त कीजिए :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (x-3) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$(x-2)$ की घात में ।

(b) Solve :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

in series about $x = 0$.

4

हल कीजिए :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

श्रृंखला में जहाँ $x = 0$ ।

3, (a) To show that :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

where n is any integer.

4

दर्शाइए कि :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

जहाँ n कोई पूर्णांक है ।

- (b) Find the solution of the following equation in terms of Bessel's function : 4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + 4 \left(x^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0$$

बेसेल फलन के संदर्भ में निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + 4 \left(x^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0$$

4. (a) Show that :

4

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 2, & \text{if } n = 0 \\ 0, & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

दर्शाइए कि :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 2, & \text{यदि } n = 0 \\ 0, & \text{यदि } n \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Verify that Legendre polynomial

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad \text{satisfies the}$$

Legendre equation when the parameter n is equal to 3. 4

सत्यापित कीजिए कि लीजेंड्रे बहुपद
 $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ लीजेंड्रे समीकरण को
 संतुष्ट करता है जब प्राचल $n=3$ के बराबर है।

5. (a) Prove that :

4

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$$

सिद्ध कीजिए कि:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$$

(b) To Prove that :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0 \text{ when } m \neq n.$$

$$\text{and } \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \text{ when}$$

$$m = n$$

4

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0 \text{ जब } m \neq n.$$

और $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$, जब $m = n$

6. (a) Evaluate :

$$\int_0^{\infty} t e^{-t} \sin^4 t \, dt$$

मान निकालिए :

$$\int_0^{\infty} t e^{-t} \sin^4 t \, dt$$

(b) Find the inverse Laplace transform of

$$\log \frac{s^2 + 1}{(s-1)^2}.$$

4

$\log \frac{s^2 + 1}{(s-1)^2}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।

7. (a) Find the inverse laplace transform of

$$\frac{s}{(s^2 + a^2)^3}.$$

4

$\frac{s}{(s^2 + a^2)^3}$ का व्युत्क्रम लैपलेस रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।

(b) Solve :

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = \sin t$$

by transform method where
 $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. 4

रूपांतरण विधि द्वारा :

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = \sin t$$

को हल कीजिए जहाँ
 $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ ।

8. (a) Find the fourier transform of : 4

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

फूरिये रूपांतरण ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(b) Find the fourier sine transform of $\frac{e^{-ax}}{x}$.

4

$\frac{e^{-ax}}{x}$ का फूरियर ज्या रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।

9. (a) Using Parseval's identity, prove

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

4

पार्सेवल की पहचान का उपयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

- (b) The temperature u in a semi-infinite rod is determined by :

4

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; 0 \leq x < \infty$$

with the conditions :

(i) $u = 0$ when $t = 0, x > 0$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = -u$ when $x = 0$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$

Determine the temperature formula.

तापमान u एक अर्ध-अनंत छड़ द्वारा निर्धारित किया जाता है :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; 0 \leq x < \infty$$

शर्तों के साथ :

(i) $u = 0$ जब $t = 0, x > 0$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = -u$ जब $x = 0$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$ जैसा $x \rightarrow \infty$

तापमान सूत्र निर्धारित कीजिए ।