Astronomia & Astrofísica



Kepler de Oliveira
Maria de Fátima Saraiva

LF
EDITORIAL

Astronomia e Astrofísica

Kepler de Souza Oliveira Filho (S.O. Kepler)
Maria de Fátima Oliveira Saraiva

Departamento de Astronomia - Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, 11 de fevereiro de 2014.

Conteúdo

Prefácio . . . . . **vii**

1 Astronomia antiga **1**
1.1 Os astrônomos da Grécia antiga 2
1.2 Constelações 6

2 A esfera celeste **9**

3 Coordenadas **15**
3.1 Coordenadas geográficas 15
3.2 Coordenadas astronômicas 16
3.2.1 O sistema horizontal 16
3.2.2 O sistema equatorial celeste 17
3.2.3 O sistema equatorial local 19
3.2.4 Tempo sideral 19

4 Movimento diurno dos astros **23**
4.1 Fenômenos do movimento diurno 24
4.1.1 Nascer e ocaso de um astro 24
4.1.2 Passagem meridiana de um astro 24
4.1.3 Estrelas circumpolares 24
4.2 Movimento diurno do Sol 25

5 Trigonometria esférica **27**
5.1 Definições básicas 27
5.2 Triângulos esféricos 27
5.2.1 Propriedades dos triângulos esféricos 28
5.2.2 Solução de triângulos esféricos 28
5.3 O triângulo de posição 30
5.4 Algumas aplicações: 32

5.4.1 Ângulo horário no ocaso 32
5.4.2 Separação angular entre duas estrelas. 32

6 Medida do tempo 35
6.1 Tempo sideral 35
6.2 Tempo solar 35
6.2.1 Fusos horários 37
6.2.2 Equação do tempo 37
6.3 Calendário 38

7 Movimento anual do Sol 43
7.1 Estações do ano 43
7.1.1 Posições características do Sol 43
7.1.2 Estações em diferentes latitudes 45
7.2 Insolação 46

8 Movimentos da Lua 51
8.1 Fases da Lua 51
8.1.1 Mês lunar e mês sideral 53
8.1.2 Dia lunar 53
8.1.3 Rotação da Lua 54
8.2 Eclipses 54
8.2.1 Geometria da sombra 55
8.2.2 Eclipses do Sol e da Lua 57
8.3 Exemplos de cálculos de eclipses 63

9 Movimento dos planetas 65
9.1 O modelo geocêntrico de Ptolomeu 65
9.2 Copérnico e o modelo heliocêntrico 66
9.3 Classificação dos planetas pela distância ao Sol 67
9.4 Configurações planetárias 68
9.4.1 Configurações de um planeta inferior 68
9.4.2 Configurações de um planeta superior 68
9.5 Período sinódico e sideral dos planetas 68
9.5.1 Relação entre os dois períodos 69
9.6 Exemplos de períodos 70
9.7 Distâncias dentro do Sistema Solar 71
9.7.1 Distâncias dos planetas inferiores 71
9.7.2 Distâncias dos planetas superiores 72

10 As leis de Kepler 75
10.1 Tycho 75
10.2 Kepler 76
10.2.1 Propriedades das elipses 76
10.2.2 As três leis 80
10.3 Galileo 81

11 Newton 85
11.1 Gravitação universal 88
11.2 Derivação da "constante" **K** 89
11.3 Determinação de massas 91

12 Leis de Kepler generalizadas 97
12.1 Equação do movimento 98
12.2 Conservação da energia total do sistema 99
12.3 Conservação do **momentum** angular 100
12.4 Primeira lei de Kepler: Lei das órbitas 100
12.5 Segunda lei de Kepler: Lei das áreas 104
12.6 Terceira lei de Kepler: Lei harmônica 105
12.7 A equação da energia 106
12.7.1 Velocidade circular 108
12.7.2 Velocidade de escape 108
12.7.3 Problema de muitos corpos 109
12.7.4 Exemplos 109

13 Forças gravitacionais diferenciais 113
13.1 Dedução da força diferencial 113
13.2 Marés 115
13.2.1 Expressão da força de maré 116
13.2.2 Maré da Lua e do Sol 118
13.2.3 Rotação sincronizada 118
13.2.4 Limite de Roche 121
13.3 Precessão 124

14 O Sol e os planetas 131
14.1 Origem do sistema solar 132
14.2 Planetologia comparada 135
14.2.1 Características gerais dos planetas 135
14.2.2 Propriedades fundamentais dos planetas 136
14.2.3 Estrutura Interna: 137

14.2.4 Superfícies 139
14.2.5 Atmosferas 141
14.2.6 Efeito estufa 143

15 Corpos menores do Sistema Solar 147
15.1 Asteróides 147
15.2 Objetos do Cinturão de Kuiper 148
15.3 Meteoros 149
15.4 Impactos na Terra 150
15.5 Satélites 152
15.6 Anéis 153
15.7 Cometas 154
15.7.1 Origem dos Cometas 156
15.8 Planeta X 157
15.9 Chuva de meteoros 158
15.10 Luz zodiacal 158

16 O Sol - a nossa estrela 159
16.1 Estrutura do Sol 160
16.1.1 A fotosfera 161
16.1.2 A cromosfera 163
16.1.3 A Coroa 165
16.2 A energia do Sol 167

17 Vida 169
17.1 Vida na Terra 169
17.2 Vida no Sistema Solar 171
17.3 Vida na galáxia 171
17.4 OVNIs 172
17.5 Planetas fora do Sistema Solar 173

18 Determinação de distâncias 177
18.1 Paralaxe geocêntrica e heliocêntrica 180
18.1.1 Paralaxe geocêntrica 180
18.1.2 Paralaxe heliocêntrica 180
18.2 Unidades de distâncias astronômicas 181
18.2.1 A unidade astronômica 181
18.2.2 O ano-luz 182
18.2.3 O parsec 184

19 Estrelas binárias 187
19.1 Histórico 187
19.2 Tipos de sistemas binários 188
19.3 Massas de sistemas binários visuais 189
19.4 Massas de binárias espectroscópicas 191

20 Fotometria 193
20.1 Grandezas típicas do campo de radiação 194
20.2 Ângulo sólido 194
20.3 Intensidade específica 195
20.4 Fluxo 196
20.5 Magnitudes 199
20.5.1 Sistemas de magnitudes 200
20.5.2 Índices de cor 201
20.5.3 Magnitude absoluta 201
20.5.4 Magnitude bolométrica 202
20.5.5 Sistema de Strömgren 203
20.5.6 Extinção atmosférica 203
20.5.7 Extinção interestelar e Excesso de cor 205
20.6 Teoria da Radiação 208
20.6.1 O corpo negro 208
20.6.2 Lei de Wien 211
20.6.3 Lei de Stefan-Boltzmann 213

21 Espectroscopia 217
21.1 Histórico 217
21.2 Leis de Kirchhoff 219
21.2.1 Variação do espectro contínuo com a temperatura . 220
21.3 A origem das linhas espectrais: átomos e luz 221
21.3.1 Quantização 221
21.3.2 Níveis de energia do hidrogênio 222
21.4 Classificação Espectral 227
21.4.1 A seqüência espectral e a temperatura das estrelas . 230
21.5 Classificação de luminosidade 230
21.6 Velocidade radial e efeito Doppler 234
21.7 Perfil da linha 235
21.8 Lei de Boltzmann - Equação de Excitação 235
21.9 Lei de Saha - Equação de Ionização 237

22 Estrelas 241
22.1 O Diagrama HR 241
22.2 Cúmulos e Aglomerados Estelares 243
22.3 Distâncias espectroscópicas 246
22.4 A relação massa-luminosidade 249
22.5 Extremos 249
22.5.1 As estrelas mais luminosas 251
22.5.2 As estrelas de baixa luminosidade 251
22.5.3 As anãs brancas 252
22.6 A fonte de energia das estrelas 254
22.7 Fusão termonuclear 257
22.8 Tempo de vida das estrelas 261
22.9 Escalas de tempo evolutivo 262
22.9.1 Tempo nuclear 262
22.9.2 Tempo térmico 263
22.9.3 Tempo dinâmico 264
22.10 O Problema do neutrino solar 264
22.11 Energia nuclear de ligação 268
22.12 Massas Nucleares 270
22.13 Evolução final das estrelas 272
22.14 Estrelas Variáveis 282

23 Interiores estelares 289
23.1 Temperatura 289
23.2 Pressão mecânica 293
23.2.1 Gás não-degenerado 295
23.2.2 Gás de fótons 297
23.2.3 Degenerescência dos elétrons 298
23.2.4 Degenerescência parcial 303
23.3 Energia de Fermi 306
23.3.1 T=0 307
23.3.2 Gás não-degenerado, ionizado 307
23.3.3 Degenerescência fraca 307
23.3.4 Altamente degenerado, ultra-relativístico 308
23.4 Gás, T=0 309
23.5 Gás não-degenerado, ionizado 309
23.6 Gás fracamente degenerado 310
23.7 Gás altamente degenerado, ultra-relativístico 312
23.8 Equilíbrio hidrostático 315

23.9 Reserva de energia de uma estrela 319
23.9.1 Algumas relações termodinâmicas 323
23.9.2 Energia nuclear 333
23.9.3 Ciclo próton-próton 334
23.9.4 Ciclo CNO 337
23.9.5 Triplo–α 338
23.9.6 Queima do carbono 339
23.10 Condição de equilíbrio térmico 342
23.11 O Transporte de energia radiativo 345
23.12 A Equação de transporte radiativo 346
23.13 Equilíbrio radiativo no interior estelar 348
23.14 Ordem de grandeza da luminosidade 356
23.15 A relação massa-luminosidade 356
23.16 Estabilidade do equilíbrio térmico 357
23.17 Transporte de energia por convecção 358
23.17.1 Condição de estabilidade do equilíbrio radiativo . . . 358
23.17.2 Equilíbrio convectivo 363
23.17.3 Transporte de energia por convecção 364
23.17.4 Aproximação adiabática 368
23.17.5 Características da convecção no interior estelar . . . 368
23.17.6 **Overshooting** e semiconvecção 371
23.18 Abundância dos elementos 373
23.18.1 Variação da composição com o tempo 374
23.18.2 Difusão 376
23.18.3 Regiões convectivas 379
23.19 Opacidades 380
23.19.1 Transições ligado-livre 383
23.19.2 Transições livre-livre 384
23.19.3 Coeficiente de absorção monocromática 387
23.19.4 Espalhamento Thomson 388
23.19.5 Coeficiente total 390
23.19.6 Íon negativo de hidrogênio 393
23.20 Geração de Energia Nuclear 400
23.20.1 Seção de choque e taxa de reação 400
23.20.2 Reações não-ressonantes 402
23.20.3 Reações ressonantes 405
23.20.4 Escudamento eletrônico 409
23.20.5 Síntese de elementos pesados 411
23.21 Emissão de neutrinos 412

23.22 Polítropos 426
23.22.1 Aplicações para anãs brancas 430
23.23 Limite de Eddington 431
23.24 Modelos de evolução 433
23.25 Condições de contorno 435
23.25.1 Atmosferas estelares 435
23.25.2 Envelope radiativo 439
23.25.3 Estrelas completamente convectivas 440
23.26 Resultado dos modelos 447
23.27 Anãs brancas 472
23.27.1 Propriedades de anãs brancas não-binárias 472
23.27.2 Evolução das anãs brancas 477
23.27.3 Evolução Térmica das Anãs Brancas 481
23.27.4 Cristalização 486
23.27.5 Função luminosidade 493
23.28 Novas e supernovas 497
23.29 Equilíbrio hidrostático na Relatividade Geral 506
23.29.1 Schwarzschild 512
23.29.2 Avermelhamento Gravitacional 513
23.29.3 Tensores Covariantes e Contravariantes 514
23.29.4 Tolman-Oppenheimer-Volkoff 515
23.30 Formação estelar 523
23.31 Estrelas binárias 536
23.31.1 Binárias Próximas 537
23.31.2 Discos de Acresção 540
23.31.3 Envelope Comum 541
23.32 Pulsações Radiais Adiabáticas 545
23.32.1 A Equação de Onda Adiabática e Linear 551
23.32.2 Alguns Exemplos 552
23.33 Pulsações não-radiais 553
23.33.1 Aproximação Não Adiabática 560
23.33.2 Heliosismologia 563
23.33.3 Pulsações das Anãs Brancas 563
23.34 Efeitos não lineares 565
23.35 Pulsações das ZZ Cetis 568
23.36 Bibliografia 575

24 A escala do universo 577

25 Nossa galáxia: a Via Láctea 581
25.1 Sistema de coordenadas galácticas 583
25.2 Distâncias dentro da Galáxia 584
25.2.1 Relação Período-Luminosidade 584
25.3 Forma e tamanho da Via Láctea 586
25.4 O movimento das estrelas na Galáxia 587
25.4.1 Componentes dos movimentos estelares 588
25.4.2 O sistema local de repouso (SLR) 589
25.5 A rotação e a massa da Galáxia 590
25.5.1 Massa da Galáxia 590
25.5.2 A curva de rotação da Galáxia 591
25.5.3 Velocidade e distância galactocêntrica do Sol 595
25.6 Meio interestelar 597
25.6.1 Gás interestelar 598
25.6.2 A poeira interestelar 599
25.6.3 Moléculas interestelares 600
25.7 Populações estelares 600
25.8 Estrutura espiral 601
25.9 O Centro da Galáxia 604

26 Galáxias 607
26.1 A descoberta das galáxias 607
26.2 Classificação morfológica 608
26.2.1 Espirais (S) 609
26.2.2 Elípticas (E) 610
26.2.3 Irregulares (I) 611
26.3 Massas 612
26.3.1 Determinação de massa em galáxias elípticas 615
26.3.2 Determinação de massa em galáxias espirais 616
26.4 Luminosidade 617
26.5 Brilho superficial 617
26.5.1 Distribuição de brilho superficial 618
26.5.2 Elípticas 618
26.5.3 Espirais 618
26.6 A relação entre a luminosidade e a velocidade para galáxias elípticas e espirais 620
26.7 Aglomerados de galáxias 621
26.7.1 O Grupo Local 622
26.7.2 Outros aglomerados de galáxias 623

26.8 Superaglomerados 624
26.9 Colisões entre galáxias 624
26.9.1 Fusão de galáxias e canibalismo galático 626
26.10 A formação e evolução das galáxias 627
26.11 Galáxias ativas 628
26.11.1 Quasares 629
26.11.2 Movimentos superluminais 631
26.11.3 Radio-galáxias 633
26.11.4 Galáxias Seyfert 635
26.11.5 Objetos BL Lacertae (BL Lac) 636
26.12 A lei de Hubble 637

27 Cosmologia 639
27.1 O Paradoxo de Olbers: a escuridão da noite 639
27.2 Relatividade Geral 641
27.2.1 Lentes Gravitacionais 643
27.3 Expansão do Universo 645
27.4 Big Bang 649
27.5 A questão da matéria escura 651
27.6 A idade do Universo 654
27.7 COBE 657
27.8 Viagem no tempo 663
27.9 Quarks 664
27.10 Superstrings - Cordas Cósmicas 668
27.11 Cosmologia newtoniana 673
27.11.1 Densidade crítica 673
27.11.2 Idade do Universo 675
27.11.3 Parâmetro de densidade 675
27.11.4 Parâmetro de desaceleração 682
27.11.5 Big Bang quente 682
27.11.6 Avermelhamento gravitacional 683
27.11.7 Massa de Planck 684
27.12 Cosmologia Relativística 685
27.12.1 Espaço-tempo de Minkowski 685
27.12.2 Coordenadas gaussianas 686
27.12.3 Relatividade Geral 687
27.12.4 Levantando e baixando índices 690
27.12.5 Cosmologia na Relatividade Geral 691
27.12.6 Evolução Térmica após o Big Bang 693

27.12.7 Métrica de Robertson-Walker 696
27.13 Recombinação 699

28 Telescópios 703
28.1 Refrator ou refletor 704
28.2 Radiotelescópio 708
28.3 Comprando um telescópio 710
28.3.1 Características óticas dos telescópios 714
28.3.2 Binóculos 715
28.4 Mínimos Quadrados 718
28.5 Mínimos quadrados lineares 721
28.6 Mínimos quadrados não lineares 722
28.7 Formulação Geral 724
28.8 Determinação das incertezas 725
28.9 Matriz Covariança 726
28.10 χ^2 727
28.11 Estimativa Robusta 729
28.11.1 Probabilidade 729
28.12 Determinação das incertezas 733

A Biografias 737
A.1 Nicolau Copérnico 737
A.2 Tycho Brahe 740
A.3 Johannes Kepler 743
A.4 Galileo Galilei 748
A.5 Christiaan Huygens 753
A.6 Isaac Newton 755
A.7 Gian Domenico Cassini 759
A.8 Edmond Halley 760

Bibliografia 763

Lista de Figuras

1.1 Reprodução do Almagesto 5
1.2 Mapa do céu na área da constelação do Órion. 6

2.1 Esfera Celeste 9
2.2 Esfera celeste visível para um certo lugar do hemisfério sul . 10
2.3 Horizonte 11
2.4 Círculos fundamentais da esfera celeste. 13

3.1 Coordenadas horizontais 17
3.2 Coordenadas equatoriais 17
3.3 Definição astronômica de latitude 19
3.4 Ângulo horário 20
3.5 Hora sideral. 21

4.1 Movimento dos astros em diferentes latitudes. 23
4.2 Calotas circumpolares. 25
4.3 Círculos diurnos do Sol 26

6.1 Dia Solar 36

7.1 Gnômon 44
7.2 Posições do Sol na eclíptica no início de cada estação 46
7.3 Causa das estações do ano. 47
7.4 Insolação. 48

8.1 Lua cheia ao nascer. 52
8.2 Representação esquemática do movimento da Lua em torno da Terra 55
8.3 Geometria da sombra (umbra e penumbra) 56
8.4 Eclipse Solar 58
8.5 Diagrama de um eclipse lunar 59

8.6 Fases da Lua 63

9.1 Modelo de Ptolomeu. 66
9.2 Movimento retrógrado de um planeta superior. 67
9.3 Período sinódico e sideral. 69

10.1 Afélio e periélio da órbita planetária 78
10.2 Elipse 82
10.3 Fases de Vênus 83

11.1 Aceleração centrípeta. 86

12.1 Componentes de uma cônica. 102
12.2 Trajetória em coordenadas esféricas. 105
12.3 Transferência de Hohmann. 111

13.1 A força sobre a partícula m_2 é menor do que sobre o centro de massa 114
13.2 A maré alta segue a posição da Lua. 116
13.3 Forças sobre partículas em relação ao centro de massa 117
13.4 Marés vivas e marés mortas 119
13.5 A força de maré tende a sincronizar as órbitas, reduzindo a fricção. 120
13.6 Precessão de um pião. 125
13.7 Precessão do pólo norte celeste. 126
13.8 Precessão do pólo sul celeste. 127
13.9 Precessão do Equador Celeste. 128

14.1 Formação do sistema solar 134
14.2 O Sol, os planetas e Plutão 137
14.3 Interior dos planetas gigantes e terrestres. 139

15.1 Meteorito ALH84001. 150
15.2 Meteor Crater 151
15.3 Chicxulub 152
15.4 Anéis de Saturno. 153
15.5 Partes de um cometa 155
15.6 Cauda de um cometa 156
15.7 Cometa West. 157

16.1 Foto do Sol 159

16.2 Foto do Sol na linha de 584 Å do hélio (He I) 162
16.3 Manchas Solares 162
16.4 Distribuição de temperatura e densidade na atmosfera do Sol. 163
16.5 Eclipse do Sol 164
16.6 Flares Solares 165
16.7 Magnetosfera da Terra - cinturão de Van Allen. 166

18.1 Deslocamento aparente dos objetos vistos de ângulos distintos.177
18.2 Ângulo paralático 178
18.3 Ângulo plano α, correspondente a um arco a à uma distância r.179
18.4 Paralaxe heliocêntrica 180
18.5 Medida da velocidade da luz 182
18.6 Paralaxe e parsec 184

19.1 Binárias espectroscópicas 188
19.2 Centro de massa, CM, entre dois objetos M_1 e M_2. 191

20.1 Espectro eletromagnético. 194
20.2 Ângulo plano α e ângulo sólido ω 195
20.3 Intensidade específica na direção θ 196
20.4 Relação ente fluxo e distância. 197
20.5 Brilho superficial 198
20.6 Curvas de transmissão dos filtros UBV. 200
20.7 Sistema de Strömgren 203
20.8 Absorção atmosférica. 204
20.9 Excesso de cor 207
20.10 Gráfico da lei de Planck para diferentes temperaturas. 210
20.11 Ilustração da lei de Wien. 212

21.1 Imagem de um espectro de H 217
21.2 Níveis de energia do hidrogênio 225
21.3 Formação de linhas de absorção e de emissão. 226
21.4 Intensidade das Linhas Espectrais 229
21.5 Espectros por classe espectral 231
21.6 Espectros com Função de Planck 232

22.1 Diagrama HR. 242
22.2 Diagrama HR do HIPPARCOS 245
22.3 Diagrama HR dos aglomerados 247
22.4 Distribuição de estrelas por tipo 248
22.5 Relação massa-luminosidade. 250

22.6 Estrelas da sequência principal. 250
22.7 Sírius A e B 252
22.8 Ciclo próton-próton. 259
22.9 Energia de ligação dos átomos 269
22.10 Esquema de evolução estelar 273
22.11 Nebulosa Planetária 274
22.12 Simulação de Supernova 275
22.13 Diagrama HR teórico para 5 $M_{\odot}$ 278
22.14 Diagrama HR teórico até anã-branca 279
22.15 Estrelas Variáveis 288

23.1 Pressão 293
23.2 Distribuição de Fermi-Dirac 298
23.3 Diagrama $\rho - T$ 306
23.4 Secção de choque dos neutrinos 335
23.5 Espectro de neutrinos solares 336
23.6 Abundâncias com CNO 338
23.7 Abundâncias com Triplo-α 340
23.8 Intensidade e ângulo sólido 347
23.9 Deslocamento por convecção. 358
23.10 Convecção 364
23.11 Coeficiente de absorção monocromático. 388
23.12 Relação entre as opacidades 392
23.13 Regiões de domínio dos diferentes tipos de absorção. 392
23.14 Opacidade conductiva 395
23.15 Opacidade Total. 397
23.16 Opacidade de Rosseland 398
23.17 Fatores dominantes na taxa de reação nuclear. 406
23.18 Taxa de reação nuclear para $p + p$ e $3He^4$ 408
23.19 Taxa de reação nuclear para $C^{12} + p$ e $C^{12} + \alpha$ 410
23.20 Abundâncias Solares 412
23.21 Mário Schenberg 414
23.22 Emissão de neutrinos 415
23.23 Refrigeração por neutrinos 416
23.24 Variação na produção de neutrinos 417
23.25 Áxions 422
23.26 Emissão de Áxions 423
23.27 Emissão de Áxions e Neutrinos 424
23.28 Seqüência principal e zona completamente convectiva 444

23.29 Seqüência principal: diferentes composições químicas 445
23.30 Evolução a partir da seqüência principal. 450
23.31 Evolução de Pop. I 451
23.32 Modelos Evolucionários 452
23.33 Densidade e temperaturas centrais 453
23.34 Isócronas teóricas. 454
23.35 Isócrona de 12,5 Ganos 455
23.36 Evolução de 25 $M_\odot$ 460
23.37 Taxas de perda de massa para estrelas massivas. 461
23.38 Seqüências evolucionárias com perda de massa 462
23.39 Evolução da estrutura interna e 5 $M_\odot$ 463
23.40 Evolução da estrutura interna e 1,3 $M_\odot$ 464
23.41 Diagrama H-R de 4 a 9 $M_\odot$ 465
23.42 Variação do raio das estrelas com o tempo 466
23.43 Massa da anã-branca vs. massa inicial 467
23.44 Icko Iben Jr. 467
23.45 Zonas de Convecção 469
23.46 Diagrama HR teórico incluindo nebulosa planetária 470
23.47 Diagrama HR teórico para diversas massas 471
23.48 Evolução das DAs e Não DAs. 479
23.49 *Born Again* 480
23.50 Luminosidade em neutrinos 486
23.51 Temperatura de Cristalização 488
23.52 Transição de Fase 489
23.53 Efeito da separação de fase no esfriamento 490
23.54 Efeito da separação de fase na idade 491
23.55 Função luminosidade das anãs brancas 495
23.56 Anãs Brancas no Halo 496
23.57 Nova Cygni 1992 497
23.58 Emissão de neutrinos 498
23.59 Lóbulo de Roche 499
23.60 Disco de Acresção 499
23.61 Anéis em volta da SN1987A 500
23.62 Estrutura de uma estrela de nêutrons 515
23.63 Formação Estelar 531
23.64 Esquema de formação estelar 532
23.65 Discos Proto-Estelares 533
23.66 Espectro de uma protoestrela 534
23.67 Evolução de Proto-estrelas 535

23.68 Equipotenciais de um Sistema Binário 538
23.69 Equipotenciais para massas diferentes 539
23.70 Envelope Comum 542
23.71 Cenários para evolução de binárias 543
23.72 Cenário para SNIa 544

25.1 Via Láctea no céu do hemisfério sul 582
25.2 Plano galáctico 583
25.3 Faixa de instabilidade 586
25.4 Representação da Via Láctea 587
25.5 Componentes dos movimentos estelares. 589
25.6 Velocidades estelares a diferentes distâncias do centro galáctico. 593
25.7 Curva de rotação galáctica. 594
25.8 Velocidade do Sol 595
25.9 Nebulosa de Órion 598
25.10 Braço formado por rotação diferencial. 603
25.11 Braço espiral como onda de densidade 603

26.1 Classificação de galáxias de Hubble 609
26.2 Espirais Barradas 610
26.3 A galáxia elíptica gigante M87 612
26.4 A Grande Nuvem de Magalhães 613
26.5 Movimentos das estrelas em uma galáxia elíptica 614
26.6 Movimentos das estrelas em uma galáxia espiral. 614
26.7 Curva de rotação para a galáxia espiral NGC3198. 616
26.8 Perfil de brilho superficial de uma galáxia elíptica. 619
26.9 Perfil de brilho para uma galáxia espiral 620
26.10 O aglomerado de galáxias de Coma 621
26.11 Aglomerado de galáxias Abell 2218 622
26.12 Estrutura em grande escala 625
26.13 Quasar 3C 279 629
26.14 Modelo de quasar 630
26.15 Galáxias onde ocorrem quasares 631
26.16 Espectro de 3C 273 632
26.17 Espectro de um quasar com z=5 633
26.18 Imagem ótica e rádio de 3C219 634
26.19 Geometria de um movimento superluminal 635
26.20 Lei de Hubble 638

27.1 Paradoxo de Olbers. 640

27.2 Cruz de Einstein 644
27.3 Deslocamento do Perélio de Mercúrio 644
27.4 Distribuição em grande escala 645
27.5 Alexander Friedmann e Georges Lemaître 646
27.6 Radiação do Fundo do Universo: Penzias e Wilson 648
27.7 Comparação das medidas do COBE com Modelo Inflacionário 653
27.8 Abundâncias no Big-Bang 658
27.9 Experimento FIRAS do satélite COBE 659
27.10 Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) 666
27.11 Decomposição em esféricos harmônicos das flutuações 667
27.12 Representação esquemática de uma corda cósmica. 668

28.1 Triquetrum e Astrolábio. 703
28.2 Teodolito de Leonard Digges 704
28.3 Réplica do telescópio de Galileo de 3 cm de diâmetro. 705
28.4 Esquema de Refletor e Refrator. 705
28.5 Telescópio de Newton. 706
28.6 Sextante de Hadley 707
28.7 Telescópio Keck I, no Hawai'i, com 10 m de diâmetro. 707
28.8 Esquema de um telescópio catadrióptico. 708
28.9 O telescópio de James Nasmyth, com o próprio na lateral. . . 709
28.10 Conjunto de radiotelescópios do VLA: Very Large Array. . . 710
28.11 Telescópio Dobsoniano. 711
28.12 Telescópio Schmidt-Cassegrain 712
28.13 Telescópio apocromático. 712
28.14 Esquema de um binóculo. 716

Prefácio

O estudo da astronomia tem fascinado as pessoas desde os tempos mais remotos. A razão se torna evidente quando contemplamos o céu em uma noite limpa e escura. Depois que o Sol – nossa fonte de energia – se põe, as belezas do céu noturno surgem em todo o seu esplendor. A Lua se torna o objeto celeste mais importante, continuamente mudando de fase. As estrelas aparecem como uma miríade de pontos brilhantes, entre as quais os planetas se destacam por seu brilho e movimento entre as estrelas, lento mas claramente percebido. E a curiosidade para saber o que há além do que podemos enxergar é inevitável.

Por que estudar Astronomia? Nosso objetivo é utilizar o Universo como laboratório, deduzindo de sua observação as leis físicas que poderão ser utilizadas em coisas muito práticas, desde prever as marés e estudar a queda de asteróides sobre nossas cabeças, os efeitos do Sol sobre as redes de energia e comunicação, até como funcionam os reatores nucleares, analisar o aquecimento da atmosfera por efeito estufa causado pela poluição, necessários para a sobrevivência e desenvolvimento da raça humana.

Este texto foi escrito com a intenção de contribuir para a produção de textos de astronomia em português. Ele deve ser acessível a pessoas sem qualquer conhecimento prévio de astronomia e com pouco conhecimento de matemática. Embora alguns capítulos incluam derivações matemáticas, a não-compreensão desses cálculos não compromete a idéia geral do texto. O texto também pode ser usado em cursos introdutórios de astronomia em nível de graduação universitária, como está sendo utilizado na UFRGS para cursos de astrofísica, física, engenharia e geografia.

Esta terceira edição foi atualizada para incorporar conhecimentos recentes que a cada dia vão sendo adicionados ao nosso entendimento do Universo, que aumenta a um ritmo cada vez mais intenso à medida que a tecnologia nos permite testemunhar eventos como explosões de supernovas, explosões de raios gama, descoberta de novos planetas extrassolares e asteróides.

O texto atualizado, incluindo animações e algumas simulações, é mantido na internet, no endereço:

http://astro.if.ufrgs.br/

Constantes

- G $= 6,673 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2} = 6,673 \times 10^{-8}$ dina $\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}^2$
- Massa da Terra: $M_\oplus = 5,973332 \times 10^{24}$ kg
- Raio da Terra: $R_\oplus = 6\,378{,}1366$ km
- Massa do Sol: $M_\odot = 1,9887973 \times 10^{30}$ kg
- Raio do Sol: $R_\odot = 696\,000$ km
- Luminosidade do Sol: $L_\odot = 3,83 \times 10^{33}$ ergs/s $= 3,83 \times 10^{26}$ watts
- Massa da Lua $= 7,3474271 \times 10^{22}$ kg
- Raio da Lua $= 1738$ km
- Período orbital da Terra = 365,2564 dias
- Idade da Terra = 4,55 bilhões de anos
- Obliqüidade da eclíptica: $\varepsilon = 23^\circ\,26'\,21,412$”
- Período orbital da Lua = 27,32166 dias
- Distância Terra-Lua: $= 384\,000$ km
- Distância Terra-Sol: 1 UA $= 149\,597\,870\,691$ m
- Massa do próton: $m_p = 1,67265 \times 10^{-27}$ kg
- Massa do nêutron: $m_n = 1,67492 \times 10^{-27}$ kg
- Unidade de massa atômica: $m_{\mathrm{uma}} = 1,660538921(73) \times 10^{-27}$ kg
- Massa do elétron: $m_e = 9,1095 \times 10^{-31}$ kg
- Número de Avogadro: $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ mol^{-1}
- Constante de Boltzmann: $\mathrm{k} = 1,381{\times}10^{-23}$ J/K $= 1,381{\times}10^{-16}$ ergs/K
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ J m^{-2} s^{-1} K^{-4} $=$ $5,67 \times 10^{-5}$ ergs cm^{-2} s-1 K^{-4}
- Constante de densidade de radiação: $a = \frac{4\sigma}{c} = 7,565{\times}10^{-15}\mathrm{erg}\,\mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{K}^{-4}$

- Constante de Planck: $h = 6,626 \times 10^{-27}$ ergs s $= 6,626 \times 10^{-34}$ J s
- Velocidade da luz: c = 299 792,458 km/s
- Parsec: pc $= 3,086 \times 10^{16}$ m
- Ano-luz $= 9,461 \times 10^{15}$ m
- Ångstron: Å $=10^{-8}$ cm $= 10^{-10}$ m
- Velocidade do som no ar = 331 m/s
- Momentum magnético do nêutron $= -9,66236 \times 10^{-27} JT^{-1}$
- Momentum magnético do próton $= 14,106067 \times 10^{-27} JT^{-1}$
- Momentum magnético do elétron $= -9284,76 \times 10^{-27} JT^{-1}$

Capítulo 1

Astronomia antiga

As especulações sobre a natureza do Universo devem remontar aos tempos pré-históricos, por isso a astronomia é frequentemente considerada a mais antiga das ciências. Os registros astronômicos mais antigos datam de aproximadamente 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios. Naquela época, os astros eram estudados com objetivos práticos, como medir a passagem do tempo (fazer calendários) para prever a melhor época para o plantio e a colheita, ou com objetivos mais relacionados à astrologia, como fazer previsões do futuro, já que, não tendo qualquer conhecimento das leis da natureza (física), acreditavam que os deuses do céu tinham o poder da colheita, da chuva e mesmo da vida.

Vários séculos antes de Cristo, os chineses sabiam a duração do ano e usavam um calendário de 365 dias. Deixaram registros de anotações precisas de cometas, meteoros e meteoritos desde 700 a.C. Mais tarde, também observaram as estrelas que agora chamamos de novas.

Os babilônios, assírios e egípcios também sabiam a duração do ano desde épocas pré-cristãs. Em outras partes do mundo, evidências de conhecimentos astronômicos muito antigos foram deixadas na forma de monumentos, como o de Stonehenge, na Inglaterra, que data de 3000 a 1500 a.C. Nessa estrutura, algumas pedras estão alinhadas com o nascer e o pôr do Sol no início do verão e do inverno. Os maias, na América Central, também tinham conhecimentos de calendário e de fenômenos celestes, e os polinésios aprenderam a navegar por meio de observações celestes.

Há milhares de anos os astrônomos sabem que o Sol muda sua posição no céu ao longo do ano, se movendo cerca de 1° para leste por dia. O tempo para o Sol completar uma volta em relação às estrelas define um ano. O caminho aparente do Sol no céu durante o ano define a **Eclíptica** (porque

os eclipses ocorrem somente quando a Lua está próxima da eclíptica).

Como a Lua e os planetas percorrem o céu em uma região de 18 graus centrada na eclíptica, essa região é definida como o **Zodíaco**, dividida em 12 constelações com formas de animais (atualmente as constelações do Zodíaco são treze[1]). O ápice da ciência antiga se deu na Grécia, de 600 a.C. a 200 d.C., em níveis só ultrapassados no século XVI. Com o conhecimento herdado das culturas mais antigas, os gregos deram um enorme avanço à Astronomia por acreditarem ser possível compreender e descrever matematicamente os fenômenos do mundo natural. De seu esforço em conhecer a natureza do Cosmos, surgiram os primeiros conceitos de **Esfera Celeste**, uma esfera rotativa de material cristalino, incrustada de estrelas, tendo a Terra no centro. A imobilidade da Terra não foi totalmente unânime entre os astrônomos gregos, mas os poucos modelos alternativos com a Terra em rotação ou mesmo girando em torno do Sol tiveram pouca aceitação e foram logo esquecidos. Foi uma versão aprimorada do modelo geocêntrico proposto no início da civilização grega que prevaleceu tanto no oriente quanto no ocidente durante todo o período medieval.

1.1 Os astrônomos da Grécia antiga

Tales de Mileto (∼624 - 546 a.C.) introduziu na Grécia os fundamentos da geometria e da astronomia, trazidos do Egito. Pensava que a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água. Juntamente com seu discípulo **Anaximandro**, (∼610 - 546 a.C), também de Mileto, foi dos primeiros a propor modelos celestes baseados no movimento dos corpos celestes e não em manifestações dos deuses. Anaximandro descobriu a obliqüidade da eclíptica (inclinação do plano do equador da Terra em realação à trajetória anual aparente do Sol no céu).

Pitágoras de Samos (∼572 - 497 a.C.) acreditava na esfericidade da Terra, da Lua e de outros corpos celestes. Achava que os planetas, o Sol, e a Lua eram transportados por esferas separadas da que carregava as estrelas. Enfatizou a importância da matemática na descrição dos modelos cosmológicos que pudessem ser comparados com os movimentos observados

[1]Devido à precessão dos equinócios, o Sol atualmente cruza Áries de 19 de abril a 13 de maio, Touro de 14 de maio a 19 de junho, Gêmeos de 20 de junho a 20 de julho, Câncer de 21 de julho a 9 de agosto, Leão de 10 de agosto a 15 de setembro, Virgem de 16 de setembro a 30 de outubro, Libra de 31 de outubro a 22 de novembro, Escorpião de 23 de novembro a 29 de novembro, **Ofiúco** de 30 de novembro a 17 de dezembro, Sagitário de 18 de dezembro a 18 de janeiro, Capricórnio de 19 de janeiro a 15 de fevereiro, Aquário de 16 de fevereiro a 11 de março e Peixes de 12 de março a 18 de abril.

dos corpos celestes, em cuja regularidade via uma "harmonia cósmica". Os pitagóricos (seguidores de Pitágoras) foram os primeiros a chamar os universo de "cosmos", palavra que implicava ordem racional, simetria e beleza.

Filolaus de Cretona (∼470-390 a.C.) introduziu a idéia do movimento da Terra: ele imaginava que a Terra girava em torno de seu próprio eixo e, juntamente com o Sol, a Lua e os planetas, girava em torno de um "fogo central" que seria o centro do universo e fonte de toda a luz e energia.

Eudóxio de Cnidos (408-344 a.C) foi o primeiro a propor que a duração do ano era de 365 dias e 6 horas. Explicou os movimentos observados do Sol, da Lua e dos planetas através de um complexo e engenhoso sistema de 27 esferas concêntricas que se moviam a diferentes velocidades em torno da Terra, fixa no centro.

Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) coletou e sistematizou o conhecimento astronômico de seu tempo, procurando explicações racionais para todos os fenônomenos naturais. Explicou que as fases da Lua[2] dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou, também, os eclipses: um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra, já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. Rejeitou o movimento da Terra como alternativa ao movimento das estrelas argumentando que, se a Terra estivesse em movimento, os corpos cairiam para trás ao serem largados, e as estrelas deveriam apresentar movimentos aparentes entre si devido à paralaxe[3], o que não era observado. Afirmava que o Universo é esférico e finito.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro a propor um modelo heliocêntrico consistente para o sistema solar, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Arranjou os planetas na ordem de distância ao Sol que é aceita hoje. Desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra que o aproxima dos astrônomos modernos na solução de problemas astronômicos. Também mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua, e mesmo achando valores muito abaixo dos atuais para o tamanho do Sol em relação à Lua (apenas 30 vezes maior), concluiu que o Sol não poderia estar orbitando a Terra porque um corpo tão grande como

[2] Anaxágoras de Clazomenae (∼499-428 a.C.) já afirmava que a Lua refletia a luz do Sol e começou a estudar as causas dos eclipses.

[3] O movimento das estrelas de fato existe, mas é muito pequeno para ser observado a olho nu devido à enorme distância das etrelas. A primeira paralaxe estelar foi medida no século 19, por Friedrich Bessel, para a estrela 61 Cygni. O valor encontrado por ele foi $0{,}3''$, indicando uma distância de 10,3 anos-luz.

o Sol não poderia girar em torno de um corpo tão pequeno como a Terra.

Eratóstenes de Cirênia (276-194 a.C.), bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra. Ele notou que, na cidade egípcia de Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia do verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o Sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Já em Alexandria, situada ao norte de Siena, isso não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão na vertical, Eratóstenes observou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o Sol estava aproximadamente sete graus mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 5 000 estádios. Um estádio era uma unidade de distância usada na Grécia antiga. A distância de 5 000 estádios equivalia à distância de cinqüenta dias de viagem de camelo, que viaja a 16 km/dia. Como 7 graus corresponde a 1/50 de um círculo (360 graus), Alexandria deveria estar a 1/50 da circunferência da Terra ao norte de Siena, e a circunferência da Terra deveria ser 50x5 000 estádios. Infelizmente, não é possível se ter certeza do valor do estádio usado por Eratóstenes, já que os gregos usavam diferentes tipos de estádios. Se ele utilizou um estádio equivalente a 1/6 km, o valor está a 1% do valor correto de 40 000 km. O diâmetro da Terra é obtido dividindo-se a circunferência por π.

Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), considerado o maior astrônomo da era pré-cristã, construiu um observatório na ilha de Rodes, onde fez observações durante o período de 160 a 127 a.C. Como resultado, ele compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. A magnitude, que especificava o brilho da estrela, era dividida em seis categorias, de 1 a 6, sendo 1 a mais brilhante, e 6 a mais fraca visível a olho nu. Hiparco deduziu corretamente a direção dos pólos celestes, e até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26 000 anos para completar um ciclo.[4] Para deduzir a precessão, ele comparou as posições de várias estrelas com aquelas catalogadas por Timocharis de Alexandria e Aristyllus de Alexandria 150 anos antes (cerca de 283 a.C. a 260 a.C.). Estes eram membros da Escola Alexandrina do século III a.C. e foram os primeiros a medir as distâncias das estrelas de pontos fixos no céu (coordenadas eclípticas). Foram, também, dos primeiros a trabalhar na Biblioteca de Alexandria, que se chamava Museu, fundada pelo rei do Egito, Ptolémée Sôter Ier, em 305 a.C..

[4]Paul Schnabel, no *Zeitschrift für Assyriologie*, N.S., v.3, p. 1-60 (1926), afirma que a precessão já havia sido medida pelo astrônomo babilônio Cidenas (*Kidinnu*), em 343 a.C.. Cidenas também mediu o período sinódico da Lua, de 29,5 dias.



Figura 1.1: Reprodução de parte do Almagesto, de Claudius Ptolomaeus, escrito entre 127 e 151 d.C.. O termo almagesto é uma corruptela do árabe *Al Majisti*; em grego, o livro ficou conhecido como a *Mathematike syntaxis* (Compilação matemática) ou *He Megiste Syntaxis* (A maior coleção).[6]

Hiparco também deduziu o valor correto de 8/3 para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua e também que a Lua estava a 59 vezes o raio da Terra de distância; o valor correto é 60. Ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de 6 minutos.

Ptolomeu (85 d.C. - 165 d.C.) (Claudius Ptolemaeus) foi o último astrônomo importante da antiguidade. Não se sabe se ele era egípcio ou romano. Ele compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o Almagesto, que é a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia.[7] A contribuição mais importante de Ptolomeu foi uma representação geométrica do sistema solar, com círculos, epiciclos e equantes, que permitia predizer o movimento dos planetas com considerável precisão, e que foi usado até o Renascimento, no século XVI.

[7]Apesar da destruição da biblioteca de Alexandria, uma cópia do Almagesto foi encontrada no Iran em 765 d.C. e traduzida para o árabe. O espanhol Gerard de Cremona (1114-1187 d.C.) traduziu para o latim uma cópia do Almagesto deixada pelos árabes em Toledo, na Espanha.

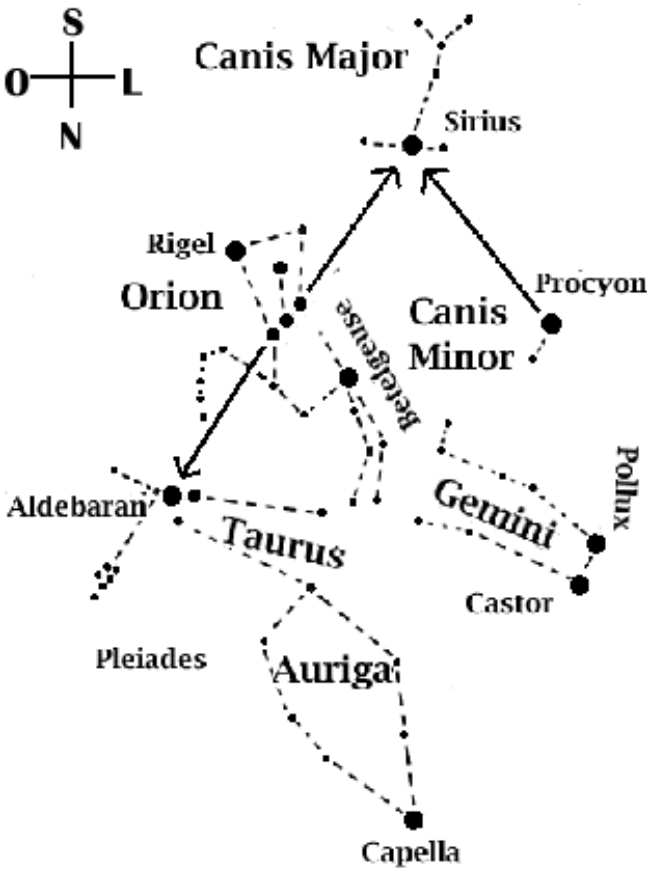


Figura 1.2: Mapa do céu na área da constelação do Órion.

1.2 Constelações

Constelações são agrupamentos aparentes de estrelas, os quais os astrônomos da antiguidade imaginaram formar figuras de pessoas, animais ou objetos que estivessem relacionados com sua cultura. Numa noite escura, pode-se ver entre 1000 e 1500 estrelas, sendo que cada estrela pertence a alguma constelação. As constelações nos ajudam a separar o céu em porções menores, mas identificá-las no céu é uma tarefa em geral bastante difícil.

Uma constelação fácil de enxergar é Órion, mostrada na figura (1.2) como

é vista no hemisfério sul. Para identificá-la devemos localizar três estrelas próximas entre si, de mesmo brilho e alinhadas. Elas são chamadas Três Marias e formam o cinturão da constelação de Órion, o caçador. A constelação tem a forma de um quadrilátero com as Três Marias no centro. O vértice nordeste do quadrilátero é formado pela estrela avermelhada Betelgeuse, que marca o ombro direito do caçador. O vértice sudoeste do quadrilátero é formado pela estrela azulada Rigel, que marca o pé esquerdo de Órion. Estas são as estrelas mais brilhantes da constelação. Como vemos, no hemisfério sul Órion aparece de ponta cabeça. Segundo a lenda, Órion estava acompanhado de dois cães de caça, representadas pelas constelações do Cão Maior e do Cão Menor. A estrela mais brilhante do Cão Maior, Sírius, é também a estrela mais brilhante do céu e é facilmente identificável a sudeste das Três Marias. Procyon é a estrela mais brilhante do Cão Menor e aparece a leste das Três Marias. Betelgeuse, Sírius e Procyon formam um grande triângulo de estrelas de brilhos semelhantes, como se pode ver no diagrama. As estrelas de brilhos diferentes são representadas por círculos de tamanhos diferentes.

As constelações surgiram na antiguidade para ajudar a identificar as estações do ano. Por exemplo, a constelação do Escorpião é típica do inverno do hemisfério sul, já que em junho ela é visível a noite toda. Já Órion é visível a noite toda em dezembro, e, portanto, típica do verão do hemisfério sul. Alguns historiadores suspeitam que muitos dos mitos associados às constelações foram inventados para ajudar os agricultores a lembrar quando deveriam plantar e colher. As constelações mudam com o tempo e, em 1929, a União Astronômica Internacional adotou 88 constelações oficiais, de modo que cada estrela do céu faz parte de uma constelação. A seguir, mostramos a lista alfabética das constelações, em latim e português. Essas constelações foram definidas por: Claudius Ptolomaeus, no *Almagesto* em cerca de 150 d.C.; Johann Bayer (1572-1625), astrônomo alemão, no *Uranometria* em 1603; Johannes Hevelius (1611-1689), astrônomo alemão-polonês, e Nicolas Louis de Lacaille (1713-1762), astrônomo francês, nos *Memórias* e *Coelum Australe Stelliferum* em 1752 e 1763.[8]

[8]Lacaille observou 9766 estrelas austrais em 1751-52, no Cabo da Boa Esperança e deu nome às constelações: Antlia, Caelum, Circinus, Fornax, Horologium, Mensa, Microscopium, Norma, Octans, Pictor, Pyxis, Reticulum, Sculptor e Telescopium, e renomeou Musca.

Andromeda	Andrômeda (mit.)	Lacerta	Lagarto
Antlia	Bomba de Ar	Leo	Leão
Apus	Ave do Paraíso	Leo Minor	Leão Menor
Aquarius	Aquário	Lepus	Lebre
Aquila	Águia	Libra	Libra (Balança)
Ara	Altar	Lupus	Lobo
Aries	Áries (Carneiro)	Lynx	Lince
Auriga	Cocheiro	Lyra	Lira
Boötes	Pastor	Mensa	Montanha da Mesa
Caelum	Buril de Escultor	Microscopium	Microscópio
Camelopardalis	Girafa	Monoceros	Unicórnio
Cancer	Câncer (Caranguejo)	Musca	Mosca
Canes Venatici	Cães de Caça	Normai	Régua
Canis Major	Cão Maior	Octans	Octante
Canis Minor	Cão Menor	Ophiuchus	Caçador de Serpentes
Capricornus	Capricórnio (Cabra)	Orion	Órion (Caçador)
Carina	Quilha (do Navio)	Pavo	Pavão
Cassiopeia	Cassiopéia (mit.)	Pegasus	Pégaso (Cavalo Alado)
Centaurus	Centauro	Perseus	Perseu (mit.)
Cepheus	Cefeu (mit.)	Phoenix	Fênix
Cetus	Baleia	Pictor	Cavalete do Pintor
Chamaeleon	Camaleão	Pisces	Peixes
Circinus	Compasso	Piscis Austrinus	Peixe Austral
Columba	Pomba	Puppis	Popa (do Navio)
Coma Berenices	Cabeleira	Pyxis	Bússola
Corona Austrina	Coroa Austral	Reticulum	Retículo
Corona Borealis	Coroa Boreal	Sagitta	Flecha
Corvus	Corvo	Sagittarius	Sagitário
Crater	Taça	Scorpius	Escorpião
Crux	Cruzeiro do Sul	Sculptor	Escultor
Cygnus	Cisne	Scutum	Escudo
Delphinus	Delfim	Serpens	Serpente
Dorado	Dourado (Peixe)	Sextans	Sextante
Draco	Dragão	Taurus	Touro
Equuleus	Cabeça de Cavalo	Telescopium	Telescópio
Eridanus	Eridano	Triangulum	Triângulo
Fornax	Forno	Triangulum Australe	Triângulo Austral
Gemini	Gêmeos	Tucana	Tucano
Grus	Grou	Ursa Major	Ursa Maior
Hercules	Hércules	Ursa Minor	Ursa Menor
Horologium	Relógio	Vela	Vela (do Navio)
Hydra	Cobra Fêmea	Virgo	Virgem
Hydrus	Cobra macho	Volans	Peixe Voador
Indus	Índio	Vulpecula	Raposa

Capítulo 2

A esfera celeste

Observando o céu em uma noite estrelada, num lugar de horizontes amplos, é comum termos a impressão de estar no meio de uma grande esfera incrustada de estrelas. Essa impressão inspirou, nos antigos gregos, a idéia da esfera celeste.

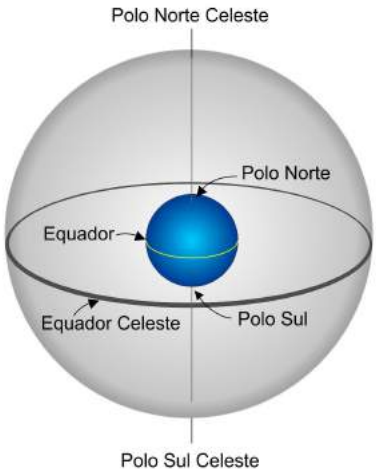


Figura 2.1: A esfera celeste é uma esfera imaginária, centrada na Terra, girando em torno de um eixo que é o prolongamento do eixo de rotação da Terra.

Com o passar das horas, os astros se movem no céu, nascendo a leste e se

pondo a oeste. Isso causa a impressão de que a esfera celeste está girando de leste para oeste, em torno de um eixo imaginário, que intercepta a esfera em dois pontos fixos, os pólos celestes. Na verdade, esse movimento, chamado movimento diurno dos astros, é um reflexo do movimento de rotação da Terra, que se faz de oeste para leste. O eixo de rotação da esfera celeste é o prolongamento do eixo de rotação da Terra, e os pólos celestes são as projeções, no céu, dos pólos terrestres.

Embora o Sol, a Lua e a maioria dos astros, aqui na nossa latitude ($\simeq 30°S$ para Porto Alegre) tenham nascer e ocaso, existem astros que nunca nascem nem se põem, permanecendo sempre acima do horizonte. Se pudéssemos observá-los durante 24 horas, os veríamos descrevendo uma circunferência completa no céu, no sentido horário. Esses astros são chamados circumpolares. O centro da circunferência descrita por eles coincide com o pólo celeste sul. Para os habitantes do hemisfério norte, as estrelas circumpolares descrevem uma circunferência em torno do pólo celeste norte, no sentido anti-horário. Mas as estrelas que são circumpolares lá não são as mesmas estrelas que são circumpolares aqui, pois o fato de uma estrela ser circumpolar – ou não – depende da latitude do lugar de observação.

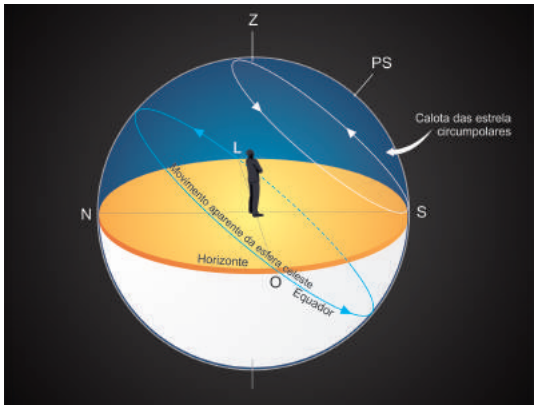


Figura 2.2: Esfera celeste visível para um certo lugar do hemisfério sul. A calota das estrelas circumpolares é a região limitada entre o pólo sul celeste (PS) e o círculo branco.

Os antigos gregos definiram alguns planos e pontos na esfera celeste, que são úteis para a determinação da posição dos astros no céu. São eles:

Horizonte: é o plano tangente à Terra e perpendicular à vertical do lugar

em que se encontra o observador. A vertical do lugar é definida por um fio a prumo. Como o raio da da Terra é pequeno frente ao raio da esfera celeste, considera-se que o plano do horizonte intercepta a esfera celeste em um círculo máximo, ou seja, passa pelo centro.

Zênite: é o ponto no qual a vertical do lugar intercepta a esfera celeste, acima do observador.

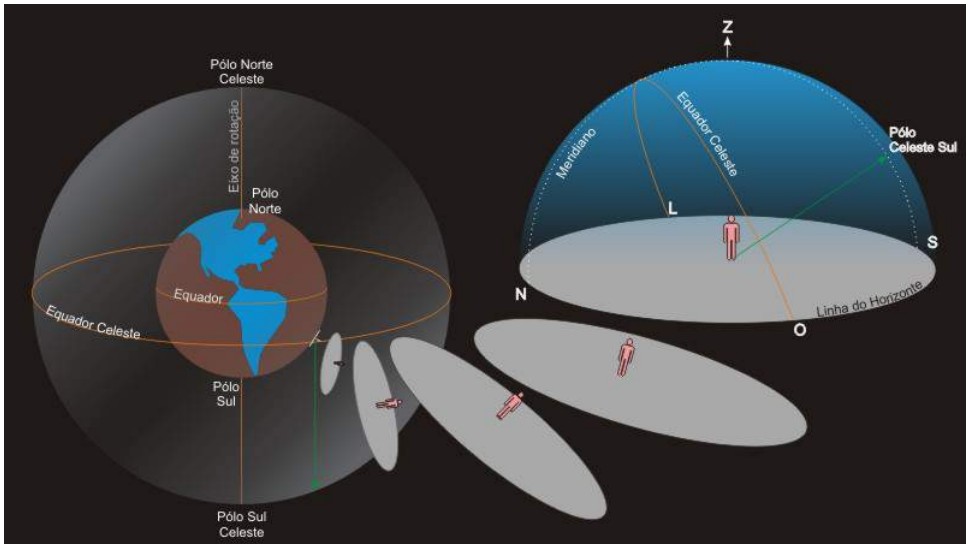


Figura 2.3: O horizonte é o plano tangente à superfície da Terra no lugar onde se encontra o observador (na figura, em um local do hemisfério sul). O horizonte limita a parte da esfera celeste que o observador pode enxergar, cujo ponto mais alto é o zênite (Z). A direção do pólo celeste (linha verde, na figura) faz um ângulo com a direção do zênite que depende da latitude do lugar.

Nadir: é o ponto diametralmente oposto ao Zênite.

Equador celeste: é o círculo máximo em que o prolongamento do equador da Terra intercepta a esfera celeste.

Pólo Celeste Norte: é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério norte.

Pólo Celeste Sul: é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério sul.

Círculo vertical: é qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que contém a vertical do lugar. Os círculos verticais começam no Zênite e terminam no Nadir.

Ponto Geográfico Norte (ou Ponto Cardeal Norte): é o ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo Pólo Celeste Norte intercepta o horizonte.

Ponto Geográfico Sul: é o ponto em que o círculo vertical que passa pelo Pólo Celeste Sul intercepta o horizonte. A linha sobre o horizonte que liga os pontos cardeais Norte e Sul chama-se linha Norte-Sul, ou linha meridiana. A linha Leste-Oeste é obtida traçando-se, sobre o horizonte, a perpendicular à linha Norte-Sul.

Círculos de altura: são círculos da esfera celeste paralelos ao horizonte. São também chamados almucântaras, ou paralelos de altura.

Círculos horários ou meridianos: são semicírculos da esfera celeste que contêm os dois pólos celestes. O meridiano que passa também pelo zênite se chama Meridiano Local.

Paralelos: são círculos da esfera celeste paralelos ao equador celeste. São também chamados círculos diurnos.

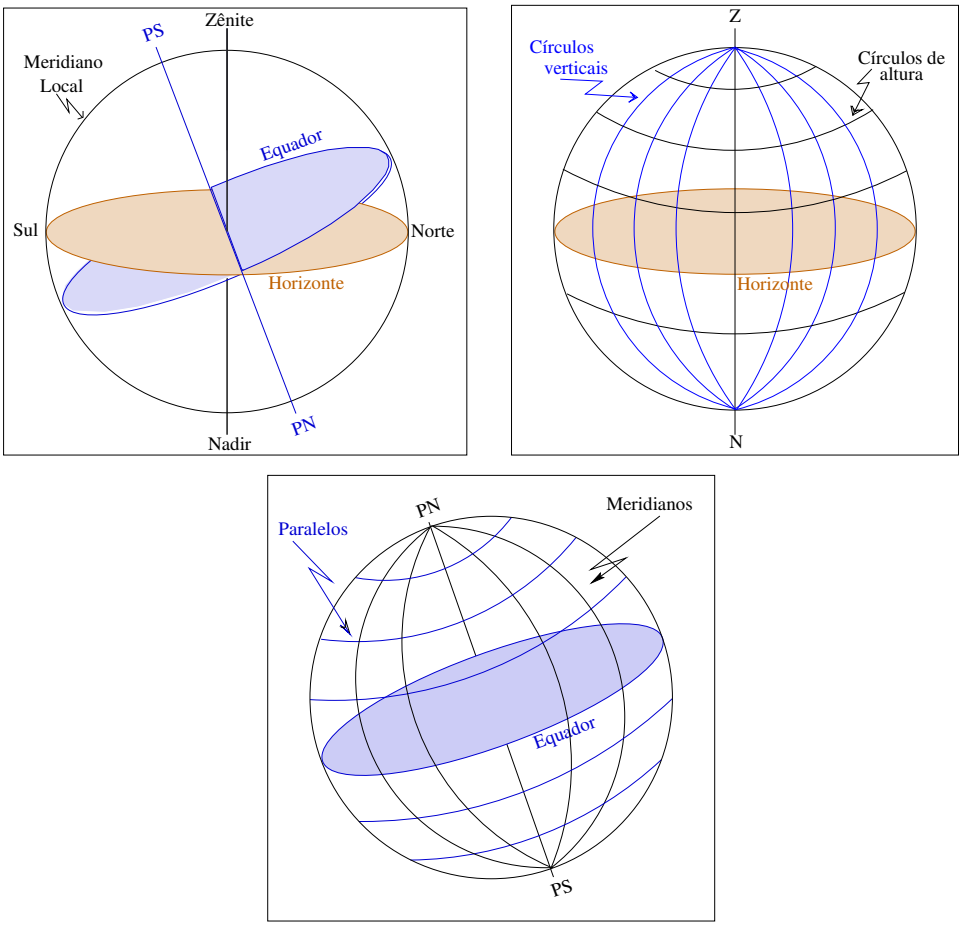


Figura 2.4: Círculos fundamentais da esfera celeste.

Capítulo 3

Sistemas de coordenadas astronômicas

Para determinar a posição de um astro no céu, precisamos definir um sistema de coordenadas. Nesse sistema, vamos utilizar apenas coordenadas angulares, sem nos preocuparmos com as distâncias dos astros. Para definirmos uma posição sobre uma esfera precisamos definir um eixo e um plano perpendicular a este eixo. A posição do astro será determinada através de dois ângulos de posição, um medido sobre um plano fundamental, e o outro medido perpendicularmente a ele. Antes de entrarmos nos sistemas de coordenadas astronômicas, convém recordar o sistema de coordenadas geográficas, usadas para medir posições sobre a superfície da Terra.

3.1 Coordenadas geográficas

Longitude geográfica (λ): é o arco do equador, com origem no meridiano de Greenwich e extremidade no meridiano do lugar. Varia de 0° a 180° para leste ou oeste de Greenwich. Usualmente, atribui-se o sinal positivo às longitudes a leste e o sinal negativo às longitudes a oeste. Também costuma-se representar a longitude de um lugar como a diferença entre a hora do lugar e a hora de Greenwich e, nesse caso, as longitudes a oeste de Greenwich variam de 0h a -12h e as longitudes a leste de Greenwich variam de 0h a +12h.

Portanto,

$$-180^\circ(\text{Oeste}) \leq \lambda \leq +180^\circ(\text{Leste})$$

ou

$$-12\text{h(O)} \leq \lambda \leq +12\text{h(E)}$$

Latitude geográfica (ϕ): é o arco[1] do meridiano do lugar, com origem no equador e extremidade no lugar. Varia entre -90° e +90°. O sinal negativo indica latitudes do hemisfério Sul e o sinal positivo hemisfério Norte.

$$-90^\circ \leq \phi \leq +90^\circ$$

3.2 Coordenadas astronômicas

3.2.1 O sistema horizontal

Esse sistema utiliza como plano fundamental o horizonte celeste. As coordenadas horizontais são azimute e altura.

Azimute (A): é o arco medido sobre o horizonte, no sentido horário (NLSO), com origem no ponto cardeal Norte e fim no círculo vertical do astro. O azimute varia entre 0° e 360°.

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

Altura (h): é o arco medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no horizonte e fim no astro. A altura varia entre -90° e +90°. O complemento da altura se chama distância zenital (z). Assim, a distância zenital é o arco medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no zênite e fim no astro. A distância zenital varia entre 0° e 180°. ($h + z = 90^\circ$)

$$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$$

$$0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

O sistema horizontal é um sistema *local*, no sentido de que é fixo na Terra. As coordenadas azimute e altura (ou azimute e distância zenital) dependem do lugar e do instante da observação e não são características do astro.

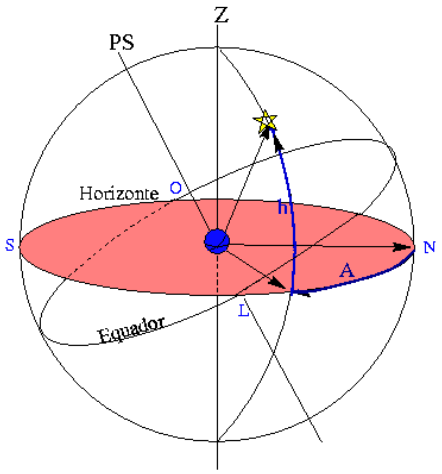


Figura 3.1: Coordenadas do sistema horizontal: altura (h) e azimute (A).

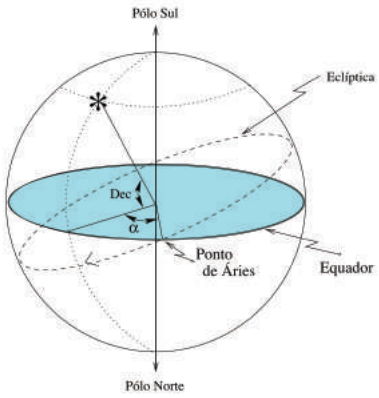


Figura 3.2: Coordenadas equatoriais: ascensão reta (α) e declinação (δ).

3.2.2 O sistema equatorial celeste

Esse sistema utiliza como plano fundamental o equador celeste. Suas coordenadas são a ascensão reta e a declinação.

[1] A medida de um arco é igual ao ângulo que ele subtende no centro da esfera.

Ascensão reta (α) ou (AR): arco medido sobre o equador, com origem no meridiano que passa pelo ponto Áries e fim no meridiano do astro. A ascensão reta varia entre 0h e 24h (ou entre 0° e 360°), aumentando para leste.

$$0\text{h} \leq \alpha \leq +24\text{h}$$

O Ponto Áries, também chamado ponto Gama (γ), ou Ponto Vernal, é um ponto do equador, ocupado pelo Sol quando passa do hemisfério sul celeste para o hemisfério norte celeste, definindo o equinócio de primavera do hemisfério norte (mais ou menos em 20 de março), isto é, em uma das duas intersecções do equador celeste com a eclíptica.

Declinação (δ): arco medido sobre o meridiano do astro, com origem no equador e extremidade no astro. A declinação varia entre -90° e +90°. O complemento da declinação se chama distância polar (Δ). ($\delta + \Delta = 90°$).

$$-90° \leq \delta \leq +90°$$

$$0° \leq \Delta \leq 180°$$

O sistema equatorial celeste é fixo na esfera celeste e, portanto, suas coordenadas *não dependem* do lugar e instante de observação. A ascensão reta e a declinação de um astro permanecem praticamente constantes por longos períodos de tempo.

Definição astronômica de latitude

A latitude geográfica é o ângulo entre o equador terrestre e o paralelo do lugar. Prolongando os lados desse ângulo até a esfera celeste, um lado intercepta a esfera celeste no equador e o outro no zênite (figura 3.3), o que significa que a latitude é igual ao ângulo entre o equador celeste e o zênite do lugar. Essa é a definição de declinação do zênite. Logo, **a latitude de um lugar é igual à declinação do zênite**.

Como o zênite é perpendicular ao horizonte, e o equador é perpendicular aos pólos, o ângulo entre o equador e o zênite é igual ao ângulo entre o horizonte e o pólo elevada, que é, por definição, a altura do pólo elevado. Portanto, **a latitude de um lugar é igual à altura do pólo elevado**.

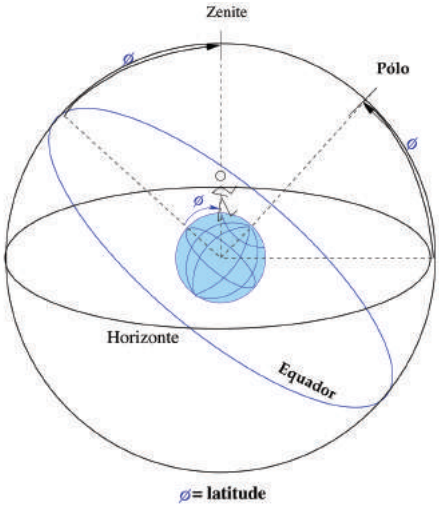


Figura 3.3: A latitude de um lugar (ϕ) é igual à declinação do zênite (δ_Z), e é igual à altura do pólo elevado (h_P).

3.2.3 O sistema equatorial local

Nesse sistema, o plano fundamental continua sendo o equador, mas a coordenada medida ao longo do equador não é mais a ascensão reta, mas sim uma coordenada não constante chamada ângulo horário. A outra coordenada continua sendo a declinação.

Ângulo horário (H): arco medido sobre o equador, com origem no meridiano local e extremidade no meridiano do astro. Varia entre -12h e +12h. O sinal negativo indica que o astro está a leste do meridiano, e o sinal positivo indica que ele está a oeste do meridiano.

$$-12\text{h} \leq H \leq +12\text{h}$$

3.2.4 Tempo sideral

O sistema equatorial celeste e sistema equatorial local, juntos, definem o conceito de tempo sideral. O tempo sideral, assim como o tempo solar, é uma medida do tempo, e aumenta ao longo do dia.

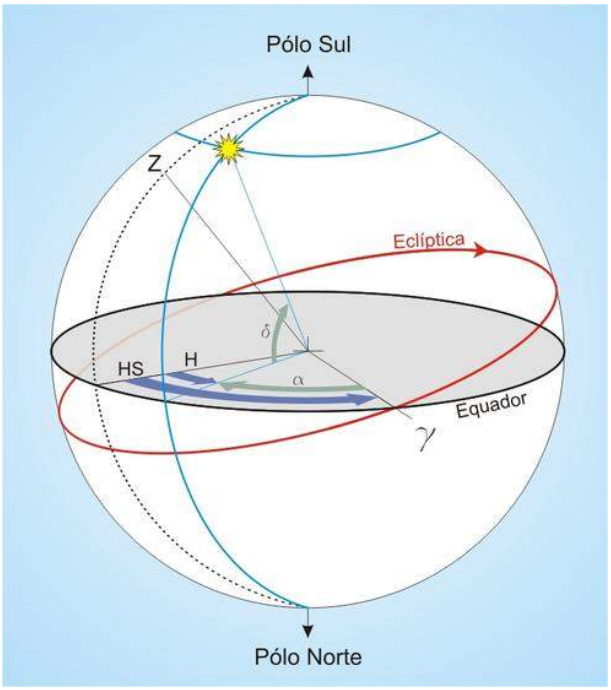


Figura 3.4: O ângulo horário (H) é o ângulo entre o meridiano local (linha pontilhada) e o meridiano do astro (linha azul), contado no sentido do movimento diurno. O ângulo horário do astro somado à sua ascenção reta (α), define a hora sideral (HS).

Hora sideral (HS): ângulo horário do ponto Áries. Pode ser medida a partir de qualquer estrela, pela relação:

$$\boxed{HS = H_\star + \alpha_\star}$$

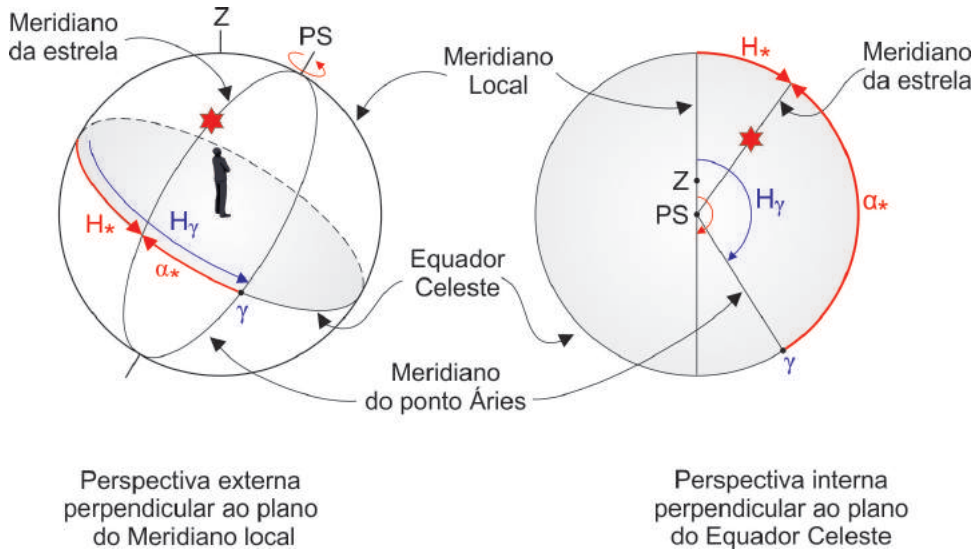


Figura 3.5: Definição de hora sideral (H_γ), em duas perspectivas diferentes.

Capítulo 4

Movimento diurno dos astros

O movimento diurno dos astros, de leste para oeste, é um reflexo do movimento de rotação da Terra, de oeste para leste. Ao longo do dia, todos os astros descrevem no céu arcos paralelos ao rquador. A orientação desses arcos em relação ao horizonte depende da latitude do lugar.

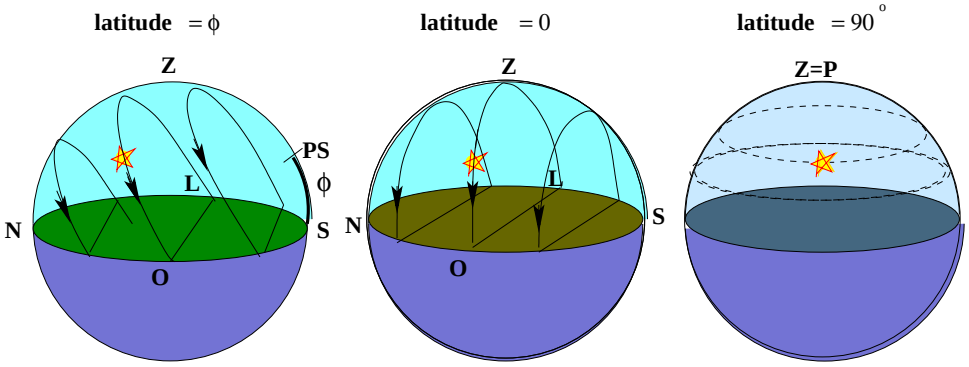


Figura 4.1: Movimento dos astros em diferentes latitudes.

1. **Nos pólos** ($\phi = \pm\ 90°$): todas as estrelas do mesmo hemisfério do observador permanecem 24 h acima do horizonte (não têm nascer nem ocaso) e descrevem no céu círculos paralelos ao horizonte. As estrelas do hemisfério oposto nunca podem ser vistas.

2. **No equador** ($\phi = \mathbf{0}°$): todas as estrelas nascem e se poẽm, permanecendo 12h acima do horizonte e 12h abaixo dele. A trajetória das

estrelas são arcos perpendiculares ao horizonte. Todas as estrelas do céu (dos dois hemisférios) podem ser vistas ao longo do ano.

3. **Em um lugar de latitude intermediária**: algumas estrelas têm nascer e ocaso, outras permanecem 24h acima do horizonte, outras permanecem 24h abaixo do horizonte. As estrelas visíveis descrevem no céu arcos com uma certa inclinação em relação ao horizonte, a qual depende da latitude do lugar.

4.1 Fenômenos do movimento diurno

4.1.1 Nascer e ocaso de um astro

O nascer e o ocaso de um astro são os instantes em que ele aparece e desaparece no horizonte, respectivamente. Nesses instantes, por definição, a altura do astro é *zero*, e sua distância zenital é 90°.

4.1.2 Passagem meridiana de um astro

Chama-se passagem meridiana ao instante em que o astro cruza o meridiano local. Durante o seu movimento diurno, o astro realiza duas passagens meridianas, ou duas culminações: a culminação superior, ou passagem meridiana superior, ou ainda máxima altura (porque, nesse instante, a altura do astro atinge o maior valor), e a passagem meridiana inferior, ou culminação inferior. No instante da passagem meridiana superior, cumpre-se a seguinte relação entre z, δ e ϕ:

$$z = \pm(\delta - \phi)$$

onde o sinal + vale se a culminação é feita ao norte do zênite e o sinal − se a culminação é feita ao sul do zênite.

4.1.3 Estrelas circumpolares

Estrelas circumpolares são aquelas que não têm nascer nem ocaso, descrevendo todo seu círculo diurno acima do horizonte. Portanto, as estrelas circumpolares fazem as duas passagens meridianas acima do horizonte. Para uma certa estrela com declinação δ ser circumpolar em um lugar de latitude ϕ deve se cumprir a relação:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi|$$

com δ e ϕ de mesmo sinal. Se tal relação se cumpre, mas δ e ϕ têm sinais contrários, a estrela é circumpolar num lugar de latitude $-\phi$.

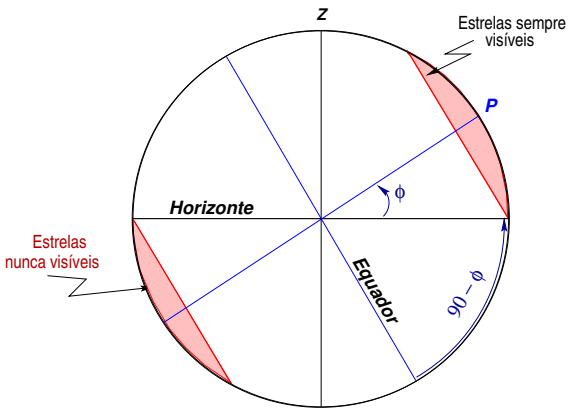


Figura 4.2: Calotas circumpolares em um lugar de latitude ϕ. (O meridiano local está no plano da folha, de forma que o equador e os círculos diurnos são vistos de perfil.)

4.2 Movimento diurno do Sol

Como um dia é definido como uma volta completa do Sol, isto é, o Sol percorre 360° em 24 horas, a velocidade aparente é de

$$v_{\text{aparente}} = \frac{360^\circ}{24\ \text{h}} = 15^\circ/\text{h}$$

O movimento diurno do Sol, como de todos os astros, é de leste para oeste, pois é reflexo do movimento de rotação da Terra em torno do próprio eixo. Mas, ao contrário das "estrelas fixas", que mantêm o círculo diurno com declinação constante ao longo do ano, o círculo diurno do Sol varia de dia para dia, afastando-se ou se aproximando do equador celeste dependendo da época do ano. A declinação do círculo diurno do Sol varia, no ciclo de um ano, entre -23,5° e +23,5° (figura 4.3).

A Lua e os planetas também variam sua posição entre as estrelas ao longo do ano e, portanto, também não mantém o círculo diurno fixo.

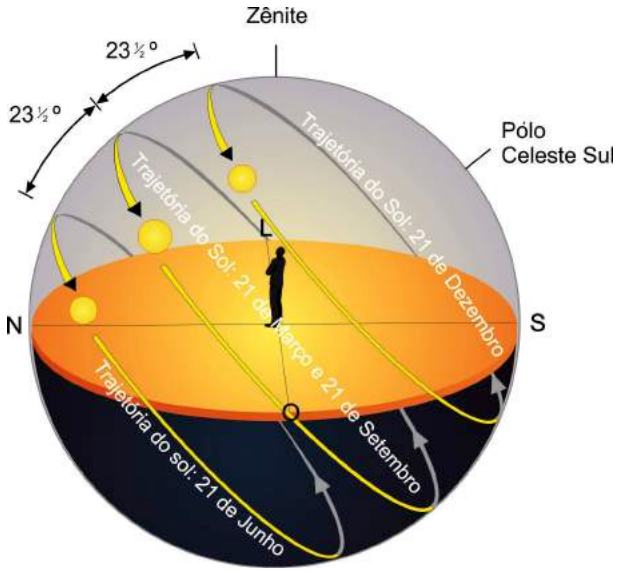


Figura 4.3: Os círculos diurnos do Sol variam em declinação entre -23,5° (em ≈ 21 de dezembro) e +23,5° (em ≈ 21 de junho).

Capítulo 5

Trigonometria esférica

A astronomia esférica, ou astronomia de posição, diz respeito, fundamentalmente, às direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância. É conveniente expressar essas direções em termos das posições sobre a superfície de uma esfera – a esfera celeste. Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Dessa forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações.

5.1 Definições básicas

Se um plano passa pelo centro de uma esfera, ele a dividirá em dois hemisférios idênticos, ao longo de um grande círculo, ou círculo máximo. Qualquer plano que corta a esfera sem passar pelo seu centro a intercepta em um círculo menor ou pequeno.

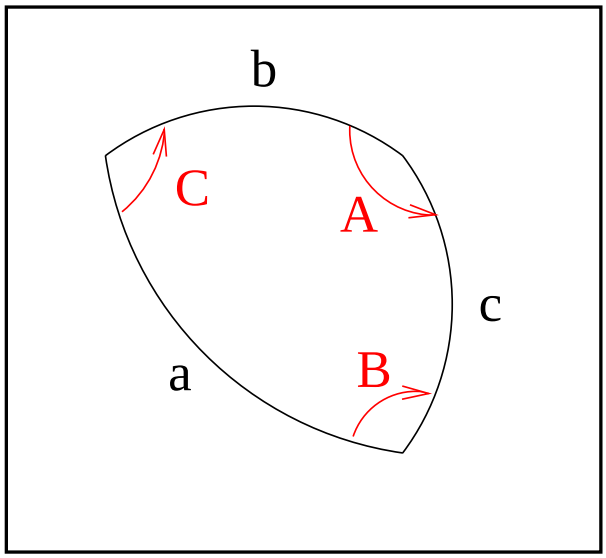
Quando dois círculos máximos se interceptam em um ponto, formam entre si um ângulo esférico. A medida de um ângulo esférico é igual a medida do ângulo plano entre as tangentes dos dois arcos que o formam.

Um ângulo esférico também é medido pelo arco esférico correspondente, que é o arco de um círculo máximo contido entre os dois lados do ângulo esférico e distantes 90° de seu vértice. A medida de um arco esférico, por sua vez, é igual ao ângulo que ele subentende no centro da circunferência.

5.2 Triângulos esféricos

Um triângulo esférico não é qualquer figura de três lados sobre a esfera; seus lados devem ser arcos de *grandes círculos*, ou seja, arcos esféricos. Denota-

mos os ângulos de um triângulo esférico por letras maiúsculas (A,B,C), e os seus lados por letras minúsculas (a,b,c).



5.2.1 Propriedades dos triângulos esféricos

1. A soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que 180 graus e menor do que 540 graus e não é constante, dependendo do triângulo. De fato, o excesso a 180 graus é diretamente proporcional à área do triângulo.

2. A soma dos lados de um triângulos esférico é maior do que zero e menor do que 180 graus.

3. Os lados maiores estão opostos aos ângulos maiores no triângulo.

4. A soma de dois lados do triângulo é sempre maior do que o terceiro lado, e a diferença é sempre menor.

5. Cada um dos lados do triângulo é menor do que 180 graus e isso se aplica também aos ângulos.

5.2.2 Solução de triângulos esféricos

Ao contrário da trigonometria plana, não é suficiente conhecer dois ângulos para resolver o triângulo. É sempre necessário conhecer no mínimo três

elementos: ou três ângulos, ou três lados, ou dois lados e um ângulo, ou um ângulo e dois lados.

Seja ABC um triângulo esférico como na figura, chamando os lados BC de a, CA de b e AB de c. O lado a mede o ângulo BOC subentendido no centro da esfera O pelo arco de grande círculo BC. Similarmente, b é medido pelo ângulo AOC e c pelo ângulo AOB. Seja AD a tangente em A do grande círculo AB, e AE a tangente em A do grande círculo AC. Neste caso, a reta OA é perpendicular a AD e AE. Por construção, AD está no plano do grande círculo AB. Portanto, extendendo a reta OB, ela interceptará a tangente AD no ponto D. E OC interceptará a tangente AE em E. O ângulo esférico BAC é definido como o ângulo entre as tangentes, em A, aos grandes círculos AB e AC. Logo, BAC=DAE e chamamos de A.

No triângulo plano OAD, o ângulo OAD é 90^o e o ângulo AOD é idêntico ao ângulo AOB, que chamamos de c. Portanto

$$AD = OA \tan c$$

$$OD = OA \sec c$$

Do triângulo plano OAE podemos deduzir

$$AE = OA \tan b$$

$$OE = OA \sec b$$

E do triângulo plano DAE temos

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos DAE$$

ou

$$DE^2 = OA^2[\tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan b \tan c \cos A]$$

Do triângulo plano DOE

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos DOE$$

Como DOE=BOC=a,

$$DE^2 = OA^2[\sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec b \sec c \cos a]$$

das quais obtemos

$$\sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec b \sec c \cos a \ = \tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan b \tan c \cos A$$

Como

$$\sec^2 c = 1 + \tan^2 c$$

$$\sec^2 b = 1 + \tan^2 b$$

obtemos

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen} b \, \text{sen} c \, \cos A$$

As fórmulas principais para a solução dos triângulos esféricos são:
Fórmula dos cossenos:

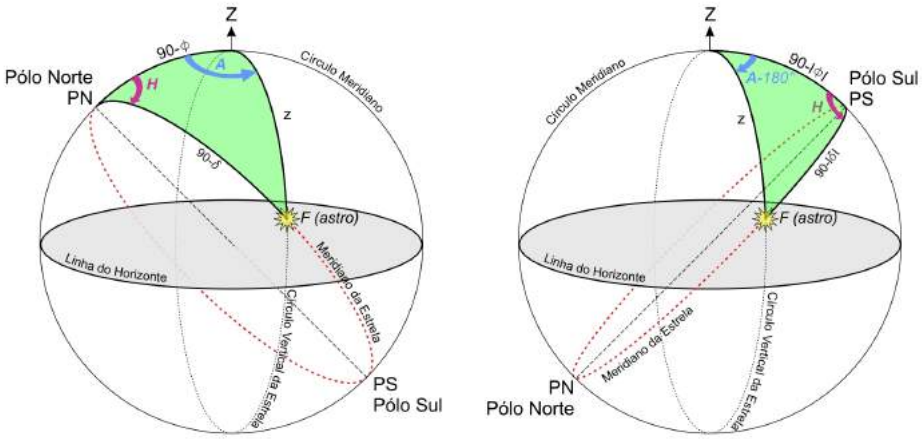
$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b \, \text{sen}\, c \cos A}$$

Fórmula dos senos:

$$\boxed{\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B} = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}}$$

5.3 O triângulo de posição

Denomina-se triângulo de posição o triângulo esférico situado na esfera celeste cujos vértices são o pólo elevado, o astro e o zênite.



Os lados e ângulos do triângulo de posição são:

- arco entre o zênite e o pólo = 90° - $|\phi|$
- arco entre o zênite e astro = z

- arco entre o pólo e o astro = 90° - $|\delta|$
- ângulo com vértice no zênite = A (no Hemisfério Norte) ou A - 180° (no Hemisfério Sul)
- ângulo com vértice no pólo = H
- ângulo com vértice na estrela

O triângulo de posição é usado para derivar as coordenadas do astro quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando conhecidas as coordenadas do astro. Também permite fazer as transformações de um sistema de coordenadas para outro.

Relações entre distância zenital (z), azimute (A), ângulo horário (H), e declinação (δ)

Pela fórmula dos cossenos, podemos tirar duas relações básicas entre os sistemas de coordenadas:

1.

$$\cos z = \cos(90^\circ - \phi)\cos(90^\circ - \delta) + \operatorname{sen}(90^\circ - \phi)\operatorname{sen}(90^\circ - \delta)\cos H$$

Donde:

$$\boxed{\cos z = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H}$$

e:

$$\boxed{\cos H = \cos z \sec\phi \sec\delta - \tan\phi\tan\delta}$$

2.

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \phi)\cos z + \operatorname{sen}(90^\circ - \phi)\operatorname{sen} z\ \cos A$$

De modo que:

$$\boxed{\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\phi\ \cos z + \cos\phi \operatorname{sen} z\ \cos A}$$

e

$$\boxed{\cos A = \operatorname{sen}\delta\ \csc z \sec\phi - \tan\phi\cot z}$$

5.4 Algumas aplicações:

5.4.1 Ângulo horário no ocaso

Determinar o ângulo horário no ocaso (z = 90°) para uma estrela de declinação δ, em um local de latitude ϕ.

$$\cos \widehat{ZF} = \cos \widehat{PZ} \cos \widehat{PF} + \operatorname{sen} \widehat{PZ} \operatorname{sen} \widehat{PF} \cos \widehat{ZPF}$$

ou

$$\cos 90^\circ = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

ou seja:

$$\boxed{\cos H = -\tan \phi \tan \delta}$$

Com essa fórmula podemos calcular, por exemplo, quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte em um certo local e em certa data do ano, pois, para qualquer astro, o tempo de permanência acima do horizonte será duas vezes o ângulo horário desse astro no momento do nascer ou ocaso.

Exemplo: Duração do dia claro em Porto Alegre

Quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte, em Porto Alegre ($\phi = -30^\circ$), no dia do solstício de verão no HS ($\delta_\odot = -23^\circ 27'$).

Especificamente em Porto Alegre, o Sol estará acima do horizonte aproximadamente 14 h e 10 min em 21 de dezembro, e 10 h e 10 min em 21 de junho. Note que a diferença de 10 minutos é devido à definição de que o dia começa com a borda superior do Sol no horizonte e termina com a borda superior do Sol no horizonte, e não o centro do disco solar, como assumido na fórmula anterior.

O azimute do astro no nascer (ou ocaso) também pode ser deduzido da figura:

$$\cos A = \operatorname{sen} \delta \sec \phi$$

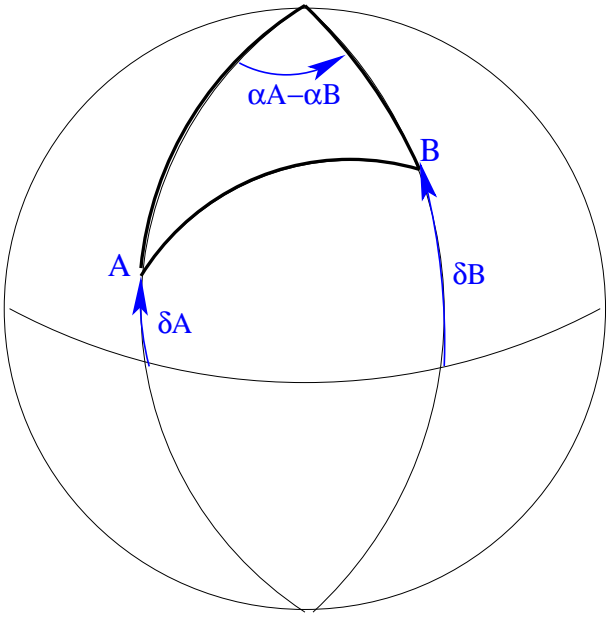
$$\cos A = \operatorname{sen} (-23^\circ 27') \sec(30^\circ) = -0,46$$

Logo, $A = 117^\circ$ (243°), o que significa entre o leste ($A = 90^\circ$) e o sul ($A = 180^\circ$).

5.4.2 Separação angular entre duas estrelas.

A separação angular entre duas estrelas é a distância medida ao longo do círculo máximo passando pelas duas estrelas. Sejam A e B as duas estrelas, e sejam α_A, δ_A, α_B e δ_B as suas coordenadas.

Podemos construir um triângulo esférico em que um dos lados seja a separação angular entre elas e os outros dois lados sejam as suas distâncias polares, ou seja, os arcos ao longo dos meridianos das estrelas desde o pólo (P) até as estrelas. Pela fórmula dos cossenos temos:



$$\cos\widehat{AB} = \cos\widehat{PA}\cos\widehat{PB} + \operatorname{sen}\widehat{PA}\operatorname{sen}\widehat{PB}\cos\widehat{APB}$$

Onde:

$$\widehat{AB} = \text{distância polar entre A e B}$$

$$\widehat{PA} = \text{distância polar de A} = 90^\circ - \delta_A$$

$$\widehat{PB} = \text{distância polar de B} = 90^\circ - \delta_B$$

$\widehat{APB}$ = ângulo entre o meridiano de A e o meridiano de B = $\alpha_A - \alpha_B$

E portanto:

$$\cos\widehat{PA} = \operatorname{sen}\delta_A$$

$$\cos\widehat{PB} = \operatorname{sen}\delta_B$$

$$\operatorname{sen}\widehat{PA} = \cos\delta_A$$

$$\operatorname{sen}\widehat{PB} = \cos\delta_B$$

$$\cos \widehat{APB} = \cos(\alpha_A - \alpha_B)$$

E finalmente:

$$\boxed{\cos \widehat{AB} = \text{sen}\delta_A \, \text{sen}\delta_B + \cos\delta_A \cos\delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)}$$

Exemplo: Tamanho angular do Cruzeiro do Sul.

Qual o tamanho da constelação do Cruzeiro do Sul, medido pelo eixo maior da Cruz?

O eixo maior da Cruz é formado pelas estrelas Gacrux ($\alpha = 12h\,31m\,11s$; $\delta = -57^\circ\,07'$) e Acrux ($\alpha = 12h\,26m\,37s$; $\delta = -63^\circ\,06'$)

Chamando D o tamanho do eixo maior da Cruz, e aplicando a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \cos D &= \text{sen}\delta_{Gacrux} \, \text{sen}\delta_{Acrux} + \\ &+ \cos\delta_{Gacrux} \cos\delta_{Acrux} \cos(\alpha_{Gacrux} - \alpha_{Acrux}) \end{aligned}$$

$$\delta_{Gacrux} = -57^\circ\,07' = -57,11^\circ$$

$$\alpha_{Gacrux} = 12h\,31m\,11s = 187,80^\circ$$

$$\delta_{Acrux} = -63^\circ\,06' = -63,10^\circ$$

$$\alpha_{Acrux} = 12h\,26m\,37s = 186,65^\circ$$

Substituindo esses valores na equação temos:

$$\begin{aligned} \cos D &= \text{sen}\,(-57,11^\circ)\,\text{sen}\,(-63,10^\circ) + \\ &+ \cos(-57,11^\circ)\cos(-63,10^\circ)\cos(187,80^\circ - 186,65^\circ) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\cos D = 0,9945 \Rightarrow D = 6^\circ$$

Capítulo 6

Medida do tempo

A medida do tempo se baseia no movimento de rotação da Terra, que provoca a rotação aparente da esfera celeste. Dependendo do objeto que tomamos como referência para medir a rotação da Terra, temos o *tempo solar* (toma como referência o Sol), e o *tempo sideral* (toma como referência o ponto Vernal).

6.1 Tempo sideral

O tempo sideral é baseado no movimento aparente do ponto Vernal.

Hora sideral: é o ângulo horário do ponto Vernal. Como vimos no capítulo anterior, a hora sideral pode ser medida a partir de qualquer estrela.

Dia sideral: é o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens sucessivas do ponto Vernal pelo meridiano do lugar.

6.2 Tempo solar

O tempo solar é baseado no movimento aparente do Sol.

Hora solar: é o ângulo horário do Sol.

Dia solar: é o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens sucessivas do Sol pelo meridiano do lugar. O dia solar é 3^m56^s mais longo do que o dia sideral. Essa diferença é devida ao movimento de translação da Terra em torno do Sol, de aproximadamente $1^\circ(\sim 4^m)$ por dia.

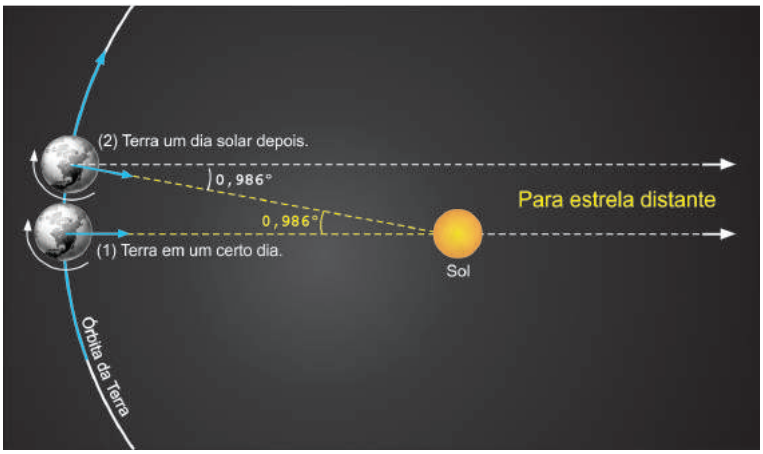


Figura 6.1: Ao mesmo tempo em que a Terra gira em torno do próprio eixo, ela translada em torno do Sol a uma velocidade angular de 0,986°por dia. Esse movimento causa o deslocamento aparente da direção do Sol em relação à direção de uma estrela fixa, pelos mesmos 0,986°por dia, no sentido contrário ao do movimento. Assim, o dia sideral se completa antes do dia solar.

Como o Sol não é um ponto, mas um disco, o ângulo horário do Sol se refere ao centro do Sol. E como o Sol não tem um movimento uniforme, ao longo do ano, fica difícil medir o tempo usando exatamente o Sol como padrão. Daí surgiu a definição de um sol "médio", que define um tempo solar médio. Os diferentes tipos de tempos solares (ou horas solares), estão definidas a seguir.

Tempo solar verdadeiro: é o ângulo horário do centro do Sol.

Tempo solar médio: é o ângulo horário do centro do sol médio. O sol médio é um sol fictício, que se move ao longo do Equador celeste (ao passo que o sol verdadeiro se move ao longo da eclíptica), com velocidade angular constante, de modo que os dias solares médios são iguais entre si (ao passo que os dias solares verdadeiros não são iguais entre si porque o movimento do Sol na eclíptica não tem velocidade angular constante). Mas o movimento do Sol na eclíptica é anualmente periódico, assim o ano solar médio é igual ao ano solar verdadeiro.

Tempo civil (Tc): usa como origem do dia o instante em que o sol médio

passa pelo meridiano inferior do lugar. A razão do tempo civil é não mudar a data durante as horas de maior atividade da humanidade nos ramos financeiros, comerciais e industriais, o que acarretaria inúmeros problemas de ordem prática.

Tempo universal (TU): é o tempo civil de Greenwich.

6.2.1 Fusos horários

De acordo com a definição de tempo civil, lugares de longitudes diferentes têm horas diferentes, porque têm meridianos diferentes. Inicialmente, cada nação tinha a sua hora, que era a hora do seu meridiano principal. Por exemplo, a Inglaterra tinha a hora do meridiano que passava por Greenwich, a França tinha a hora do meridiano que passava por Paris.

Como as diferenças de longitudes entre os meridianos escolhidos não eram horas e minutos exatos, as mudanças de horas de um país para outro implicavam cálculos incômodos, o que não era prático. Para evitar isso, adotou-se o convênio internacional dos fusos horários.

Cada fuso compreende 15° (= 1 h). Fuso zero é aquele cujo meridiano central passa por Greenwich. Os fusos variam de 0h a +12h para leste de Greenwich e de 0h a -12h para oeste de Greenwich. Todos os lugares de um determinado fuso têm a hora do meridiano central do fuso.

Hora legal: é a hora civil do meridiano central do fuso.

Fusos no Brasil: o Brasil abrange três fusos (Lei 11 662 de 24.04.2008):

- -2h: arquipélago de Fernando de Noronha
- -3h: estados do litoral, Minas, Goiás, Tocantins e Pará
- -4h: Amazonas, Mato Grosso do Norte, Mato Grosso do Sul e Acre.

6.2.2 Equação do tempo

A equação do tempo é definida como o ângulo horário do Sol, menos o ângulo horário do sol médio. Ela pode ser expressa como:

$$E = (\ell_\odot - \alpha_\odot) - (\ell_\odot - \ell_{\bar{\odot}}),$$

onde $\ell_\odot$ é a longitude eclíptica do Sol e $\ell_{\bar{\odot}}$ a longitude do sol médio. Essa equação divide o problema em dois termos, o primeiro chamado de *redução*

ao equador, leva em conta que o Sol real se move na eclíptica enquanto o sol médio, fictício, se move no equador, e o segundo de *equação do centro*, que leva em conta a elipticidade da órbita.

A equação do tempo pode ser expressa em uma série, envolvendo somente a longitude do sol médio:

$$\begin{aligned} E &= -103.^s9\,\mathrm{sen}\ell_{\odot} - 429.^s6\cos\ell_{\odot} + 596.^s3\,\mathrm{sen}2\ell_{\odot} - \\ &- 2.^s0\cos 2\ell_{\odot} + 4.^s3\,\mathrm{sen}3\ell_{\odot} + 19.^s3\cos 3\ell_{\odot} - 12.^s7\cos 4\ell_{\odot}\ldots \end{aligned}$$

A quantidade tabulada no *Astronomical Ephemeris* não é diretamente E, mas a efeméride do Sol no trânsito. Essa efeméride é o instante da passagem do Sol pelo meridiano da efeméride, e é 12 h menos a equação do tempo naquele instante.

6.3 Calendário

Desde a Antiguidade foram encontradas dificuldades para a criação de um calendário, pois o ano (duração da revolução aparente do Sol em torno da Terra) não é um múltiplo exato da duração do dia ou da duração do mês.

É importante distinguir dois tipos de anos:

Ano sideral: é o período de revolução da Terra em torno do Sol com relação às estrelas. Seu comprimento é de 365,2564 dias solares médios, ou 365d 6h 9m 10s.

Ano tropical: é o período de revolução da Terra em torno do Sol com relação ao Equinócio Vernal, isto é, com relação ao início da estações. Seu comprimento é 365,2422 dias solares médios, ou 365d 5h 48m 46s. Devido ao movimento de precessão da Terra, o ano tropical é levemente menor do que o ano sideral. O calendário se baseia no ano tropical.

Os egípcios, cujos trabalhos no calendário remontam a quatro milênios antes de Cristo, utilizaram inicialmente um ano de 360 dias começando com a enchente anual do Nilo. Mais tarde, quando o desvio na posição do Sol se tornou notável, cinco dias foram adicionados. Mas ainda havia um lento deslocamento que somava um dia a cada quatro anos. Então os egípcios deduziram que a duração do ano era de 365,25 dias.

Nosso calendário atual está baseado no antigo calendário romano, que era lunar. Como o período sinódico da Lua é de 29,5 dias, um mês tinha

29 dias e o outro 30 dias, o que totalizava 354 dias. Então, a cada três anos era introduzido um mês a mais para completar os aproximadamente três anos solares. A maneira de introduzir o 13° mês se tornou muito irregular, de forma que no ano 46 a.C., Júlio César (102-44 a.C.), orientado pelo astrônomo alexandrino Sosígenes, reformou o calendário, introduzindo o calendário juliano, no qual a cada três anos de 365 dias seguia outro de 366 dias (ano bissexto). Assim, o ano juliano tem em média 365,25 dias. O ano juliano vigorou por 1600 anos.

Em 325 d.C., o concílio de Nicéia fixou a *data da Páscoa* como sendo *o primeiro domingo depois da Lua Cheia que ocorre em ou após o Equinócio Vernal*, fixado em 21 de março.

Em 1582, durante o papado de Gregório XIII (1571-1630), o Equinócio Vernal já estava ocorrendo em 11 de março, antecipando muito a data da Páscoa. Daí, foi deduzido que o ano era mais curto do que 365,25 dias (hoje sabemos que tem 365,242199 dias). Essa diferença atingia um dia a cada 128 anos, sendo que nesse ano já completava dez dias. O papa, então, introduziu nova reforma no calendário, sob orientação do astrônomo jesuíta alemão Christophorus Clavius (Cristoph Klau 1538-1612), e Alyosius Lilius (Luigi Lilio 1510-1576), para regular a data da Páscoa, instituindo o calendário gregoriano.

As reformas feitas foram:

1. tirou 10 dias do ano de 1582, para recolocar o Equinócio Vernal em 21 de março. Assim, o dia seguinte a 4/10/1582 passou a ter a data de 15/10/1582;

2. introduziu a regra de que anos múltiplos de 100 não são bissextos, a menos que sejam também múltiplos de 400;

O ano do calendário gregoriano tem 365,2425 dias solares médios, ao passo que o ano tropical tem aproximadamente 365,2422 dias solares médios. A diferença de 0,0003 dias corresponde a 26 segundos (1 dia a cada 3300 anos). Assim:

$$1 \text{ ano tropical} = 365,2422 = 365 + 1/4 - 1/100 + 1/400 - 1/3300$$

ou

$$365,2422 = 365 + 0,25 - 0,01 + 0,0025 - 0,0003 = 365,2425 - 0,0003.$$

A data da Páscoa

A páscoa judaica (Pesach), que ocorre 163 dias antes do início do ano judaico, foi instituída na epoca de Moisés, uma festa comemorativa feita a Deus em agradecimento à libertação do povo de Israel escravizado por Farao, Rei do Egito. Esta data não é a mesma da Páscoa Juliana e Gregoriana.

O dia da Páscoa cristã, que marca a ressurreição de Cristo, de acordo com o decreto papal de 1582, seguindo o concílio de Nicéia de 325 d.C., é o primeiro domingo depois da lua cheia que ocorre no dia – ou depois de – 21 março. Entretanto, a data da lua cheia não é a real, mas a definida nas Tabelas Eclesiásticas. A Quarta-Feira de Cinzas ocorre 46 dias antes da Páscoa, e, portanto, a Terça-Feira de carnaval ocorre 47 dias antes da Páscoa.

Data da Páscoa durante a década de 2010:

- 4 de abril de 2010
- 24 de abril de 2011
- 8 de abril de 2012
- 31 de março de 2013
- 20 de abril de 2014
- 5 de abril de 2015
- 27 de março de 2016
- 16 de abril de 2017
- 1^o de abril de 2018
- 21 de abril de 2019
- 12 de abril de 2020

Para calcular a data da Páscoa para qualquer ano no calendário Gregoriano (o calendário civil no Brasil), usa-se a seguinte fórmula, com todas as variáveis inteiras, com os resíduos das divisões ignorados. Usa-se a para ano, m para mês, e d para dia.

$$c = a/100$$

$$n = a - 19 \times (a/19)$$

$$k = (c - 17)/25$$
$$i = c - c/4 - (c - k)/3 + 19 \times n + 15$$
$$i = i - 30 \times (i/30)$$
$$i = i - (i/28) \times (1 - (i/28) \times (29/(i + 1)) \times ((21 - n)/11))$$
$$j = a + a/4 + i + 2 - c + c/4$$
$$j = j - 7 \times (j/7)$$
$$l = i - j$$
$$m = 3 + (l + 40)/44$$
$$d = l + 28 - 31 \times (m/4)$$

Esse algoritmo é de J.-M.Oudin (1940) e impresso no *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, ed. P.K. Seidelmann (1992).

Ano bissexto - origem da palavra

No antigo calendário romano, o primeiro dia do mês se chamava *calendas*, e cada dia do mês anterior se contava retroativamente. Em 46 a.C., Júlio César mandou que o sexto dia antes das calendas de março deveria ser repetido uma vez em cada quatro anos, e era chamado *ante diem bis sextum Kalendas Martias* ou simplesmente *bissextum*. Daí o nome bissexto.

Século XXI

O século XXI (terceiro milênio) começou no dia 01/01/2001, porque não houve ano zero, e, portanto, o século I começou no ano 1. Somente em 550 d.C. os matemáticos hindus deram uma representação numérica ao número zero.

Data juliana

A data juliana foi proposta por Josephus Justus Scaliger (Joseph Juste Scaliger 1540-1609) em 1583, e é utilizada principalmente pelos astrônomos como uma maneira de calcular facilmente o intervalo de tempo decorrido entre diferentes eventos astronômicos. Essa facilidade vem do fato de que não existem meses e anos na data juliana; ela consta apenas do número de dias solares médios decorridos desde o início da era juliana, em 1 de janeiro de 4713 a.C., uma segunda-feira de uma ano bissexto. O dia juliano muda sempre às 12 h TU.

Era

Uma era zodiacal, como a era de Aquário, na perspectiva astronômica, é definida como o período, em anos, em que o Sol, no dia do Equinócio Vernal (equinócio de março), nasce em uma determinada constelação do zodíaco. Assim, a era de Peixes começou quando o Equinócio Vernal passou a acontecer com o Sol na constelação de Peixes, e a era de Aquário começará quando o Sol estiver na constelação de Aquário nesse dia. A posição do Sol entre as estrelas, no dia do Equinócio Vernal, parece mudar, com o passar dos séculos, devido ao movimento de precessão do eixo de rotação da Terra. Na verdade é a posição da Terra em sua órbita, no dia do Equinócio Vernal, que muda. Se todas as constelações zodiacais tivessem o mesmo tamanho, e fossem em número de 12, a duração de uma era seria de (26000 anos)/12, ou aproximadamente 2200 anos. No entanto, as constelações não têm o mesmo tamanho, e as constelações zodiacais atualmente são 13. A área de uma constelação é definida por uma borda imaginária que a separa, no céu, das outras constelações. Em 1929, a União Astronômica Internacional definiu as bordas das 88 constelações oficiais, publicadas em 1930 em um trabalho intitulado *Delimitation Scientifique des Constellations*. A borda estabelecida entre Peixes e Aquário coloca o início da era de Aquário em 2600 d.C.

Capítulo 7

Movimento anual do Sol

Devido ao movimento de translação da Terra em torno do Sol, o Sol aparentemente se move entre as estrelas, ao longo do ano, descrevendo uma trajetória na esfera celeste chamada eclíptica. A eclíptica é um círculo máximo que tem uma inclinação de $23°27'$ em relação ao equador celeste. É essa inclinação que causa as estações do ano.

7.1 Estações do ano

Uma observação simples que permite "ver" o movimento do Sol durante o ano é através do gnômon. Um gnômon nada mais é do que uma haste vertical fincada ao solo. Durante o dia, a haste, ao ser iluminada pelo Sol, forma uma sombra cujo tamanho depende da hora do dia e da época do ano. A direção da sombra ao meio-dia real local nos dá a direção norte-sul. Ao longo de um dia, a sombra é máxima no nascer e no ocaso do Sol, e é mínima ao meio-dia. Ao longo de um ano (à mesma hora do dia), a sombra é máxima no solstício de inverno, e mínima no solstício de verão. A bissetriz marca o tamanho da sombra nos equinócios. Foi observando a variação do tamanho da sombra do gnômon ao longo do ano que os antigos determinaram o comprimento do ano das estações, ou ano tropical.

7.1.1 Posições características do Sol

Durante o ano, o Sol ocupa quatro posições características na eclíptica:

- Equinócio de março ($\approx$ 20 março): Sol cruza o equador celeste, indo do hemisfério sul (HS) para o hemisfério norte (HN); na Terra, incide diretamente sobre o equador.

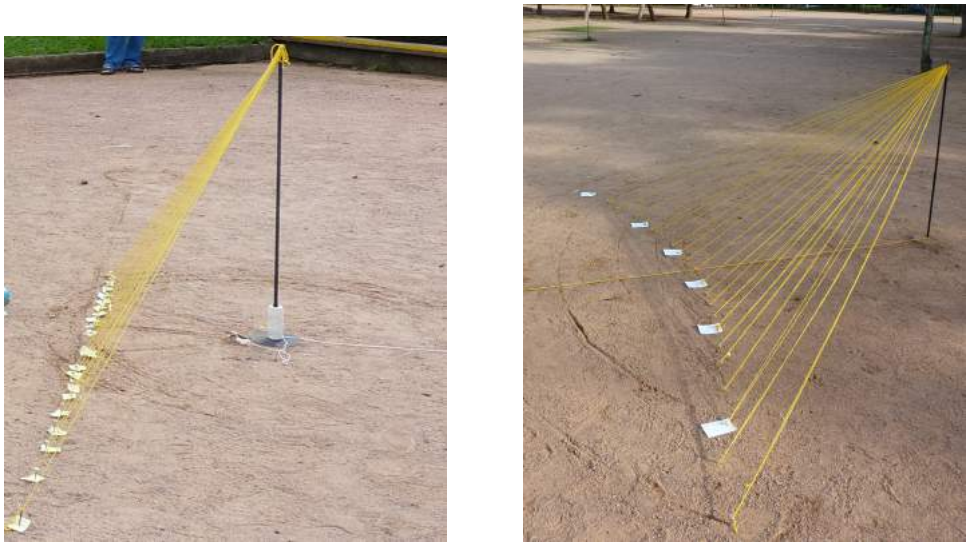


Figura 7.1: Observações com um gnômon em Porto Alegre no equinócio de outono (esquerda) e no solstício do inverno (direita). As linhas amarelas ligam a ponta do gnômon à ponta da sombra nas várias medidas. A sombra mínima dá a direção norte-sul.

  - ▷ $\alpha_\odot = 0^h$, $\delta_\odot = 0°$;
  - ▷ o dia claro e a noite duram 12 horas em toda a Terra (nos pólos, 24 h de crepúsculo);
  - ▷ No HS, é equinócio (lat: equi=igual+nox=noite) de outono; no HN é equinócio de primavera.

- Solstício de junho ($\approx$ 21 junho): Sol está na máxima declinação norte, incidindo diretamente na região do trópico de Câncer.
  - ▷ $\alpha_\odot = 6^h$, $\delta_\odot = +23.5°$ (N);
  - ▷ dia claro mais curto do ano no HS e mais longo do ano no HN. Em Porto Alegre o dia claro dura $\simeq 10^h 10^m$;
  - ▷ no pólo sul, Sol sempre abaixo do horizonte (24 horas de noite); no pólo norte, Sol sempre acima do horizonte (24 horas de dia);
  - ▷ no HS é solstício (lat: sol+sticium=parado) de inverno; no HN é solstício de verão.

- Equinócio de setembro ($\approx$ 22 setembro): Sol cruza o equador, indo do hemisfério norte para o hemisfério sul. Na Terra, incidência direta da luz solar sobre o equador.
  - ▷ $\alpha_\odot = 12^h$, $\delta_\odot = 0°$;
  - ▷ o dia claro e a noite duram 12 horas em toda a Terra (nos pólos, 24 horas de crepúsculo);
  - ▷ no HS é equinócio de primavera, no HN é equinócio de outono no HN.

- Solstício de dezembro ($\approx$ 21 dezembro): Sol está na máxima declinação sul incidindo diretamente na região do trópico de Capricórnio na Terra:
  - ▷ $\alpha_\odot = 18^h$, $\delta_\odot = -23.5°$ (S);
  - ▷ o dia claro mais longo do ano no HS e mais curto do ano no HN. Em Porto Alegre o dia claro dura $\simeq 14^h10^m$;
  - ▷ no pólo sul, dia claro de 24 horas, no pólo N, noite de 24 horas;
  - ▷ No HS é solstício de verão; no HN é solstício de inverno.

7.1.2 Estações em diferentes latitudes

Embora a órbita da Terra em torno do Sol seja uma elipse, e não um círculo, a distância da Terra ao Sol varia somente 3%, sendo que a Terra está mais próxima do Sol em janeiro. Mas é fácil lembrar que o Hemisfério Norte da Terra também está mais próximo do Sol em janeiro, e é inverno lá.

Como já vimos no início deste capítulo, a causa das estações é a inclinação do eixo de rotação da Terra com relação ao eixo perpendicular à sua órbita. Esse ângulo, chamado de obliqüidade da eclíptica, é de $23°27'$. Devido a essa inclinação, que se mantém praticamente constante à medida que a Terra orbita o Sol, os raios solares incidem mais diretamente em um hemisfério ou em outro, proporcionando mais horas com luz durante o dia a um hemisfério ou a outro e, portanto, aquecendo mais um hemisfério ou outro.

Em latitudes próximas ao equador da Terra, todas as estações são muito parecidas: todos os dias do ano o Sol fica praticamente 12 horas acima do horizonte e 12 horas abaixo do horizonte. A única diferença é a altura do Sol: no solstício de junho o Sol cruza o meridiano $23°27'$ ao norte do Zênite, no solstício de dezembro o Sol cruza o meridiano $23°27'$ ao sul do Zênite e, no resto do ano, ele cruza o meridiano entre esses dois pontos, sendo que

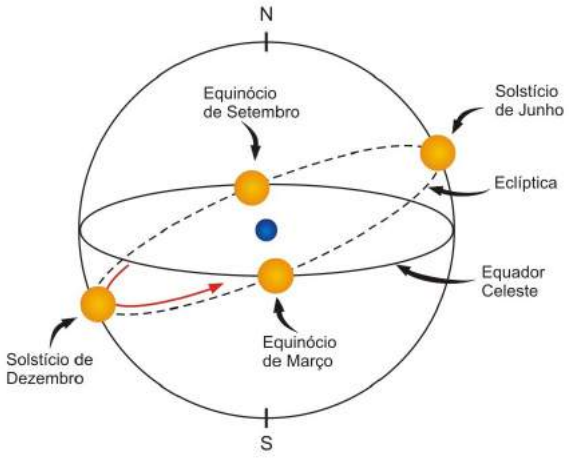


Figura 7.2: Posições do Sol na eclíptica no início de cada estação. Nos equinócios de março e de setembro o Sol se encontra em um dos dois pontos em que a eclíptica corta o equador celeste; nos solstícios de junho e de dezembro o Sol está em um dos dois pontos de máximo afastamento do equador.

nos equinócios ele passa exatamente no Zênite. Portanto, a altura do Sol ao meio-dia no equador não muda muito ao longo do ano, e a duração do dia claro se mantém sempre a mesma, por isso não existe muita diferença entre inverno, verão, primavera ou outono.

À medida que se afasta do equador, as estações ficam mais acentuadas, e as diferenças tornam-se máximas nos pólos.

7.2 Insolação

A quantidade de energia solar que chega, por unidade de tempo e por unidade de área, a uma superfície perpendicular aos raios solares, à distância média Terra-Sol, se chama **constante solar**, e vale 1367 W/m^2. Esse valor da constante solar é medido por satélites logo acima da atmosfera terrestre.

Em geral estamos interessados em conhecer a a quantidade de energia por unidade de área e por unidade de tempo que chega em um determinado lugar da superfície da Terra, que chamamos **insolação** do lugar. A insolação varia de acordo com o lugar, com a hora do dia e com a época do ano.

Devido à rotação da Terra, a energia média incidente no topo da atmos-

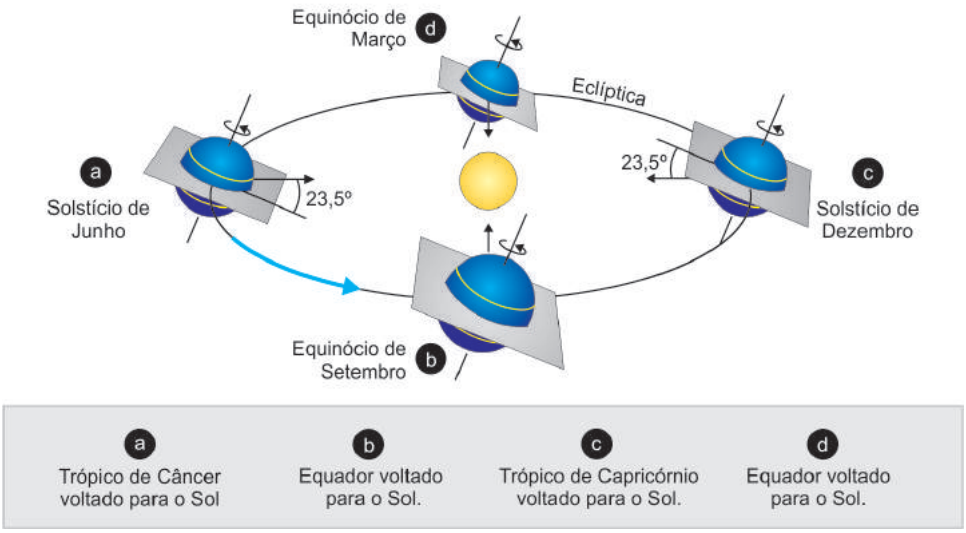


Figura 7.3: Causa das estações do ano. Devido à inclinação de 23,5° entre o equador da Terra e a eclíptica, à medida que a Terra se desloca na órbita muda o paralelo que está apontado diretamente para o Sol.

fera, por unidade de área e por unidade de tempo, é aproximadamente 1/4 da constante solar. Além disso, a atmosfera reflete 39% da radiação, de forma que apenas 61% é usada no aquecimento da Terra. Chamando E_z a energia média que chega perpendiculamente à superfície da Terra, por unidade de tempo e por unidade de área, temos que

$$E_z = 0,61 \times \frac{1}{4} \times 1367 \text{ W/m}^2 = 208 \text{ W/m}^2 = 750 \text{ kW-h/m}^2$$

Se definirmos insolação solar como a quantidade de energia solar que atinge uma unidade de área da Terra,

$$I = \frac{E_z}{A}$$

e considerando que, quando o Sol está a uma altura θ em relação ao horizonte, a mesma energia é espalhada por uma área

$$A' = \frac{A}{\operatorname{sen}\theta}$$

vemos que devido à variação da altura máxima do Sol para um lugar (devido à inclinação da órbita), acontece uma variação da área iluminada na superfície da Terra, o que leva a uma variação na insolação.

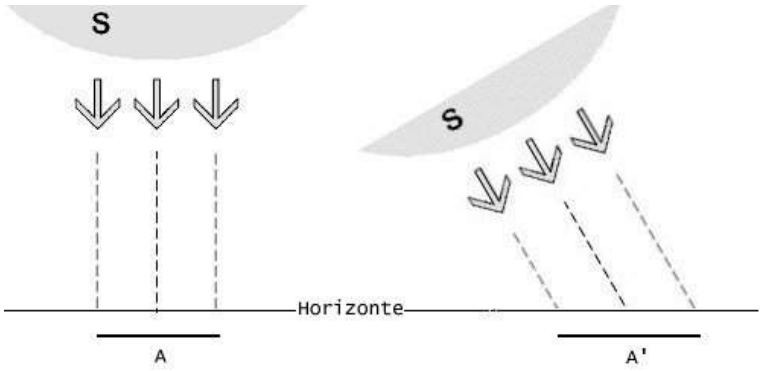


Figura 7.4: Quando aumenta a inclinação dos raios solares incidentes, aumenta a área da superfície iluminada por eles, diminuindo a insolação.

Para Porto Alegre, cuja latitude é 30°, a altura máxima do Sol no solstício de verão ($\approx$ 21 dez) é $\theta_V = 83,5°$, já que o Sol está a (30° lat - 23,5° decl.) $6,5°$ do zênite ao meio-dia.

Ao meio-dia, no solstício de inverno ($\approx$ 21 jun), a altura máxima do Sol é $\theta_I = 36,5°$, já que o Sol está a (30° lat + 23,5° decl.) $53,5°$ do zênite.

Desconsiderando, por enquanto, a variação da insolação solar devido à variação da distância da Terra ao Sol, isto é, considerando a energia solar incidente no Zênite (E_z) constante, temos:

$$\frac{I_V}{I_I} = \frac{\frac{E_z}{A_V}}{\frac{E_z}{A_I}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_V}{\operatorname{sen}\theta_I} = \frac{0,99}{0,59} = 1,66$$

isto é, a insolação em Porto Alegre é 66% maior no verão do que no inverno.

Em comparação, o efeito da variação da distância entre a Terra e o Sol pode ser calculado levando em conta que a energia do Sol por unidade de área que alcança a Terra é dada por:

$$E_z = \frac{E_\odot}{4\pi D_{\otimes\odot}^2}$$

onde $D_{\otimes\odot}$ é a distância da Terra do Sol no momento.

A variação da insolação solar devido à variação de 3% da distância Terra-Sol entre o afélio e o periélio é, portanto:

$$\frac{I_{\text{afélio}}}{I_{\text{periélio}}} = 0,97^2 = 0,94$$

isto é, em janeiro (periélio), a insolação solar é 6% maior do que em junho (afélio), o que tornaria as estações mais rigorosas no Hemisfério Sul do que no Norte. Este pequeno efeito é contrabalançado pela maior proporção de água no Hemisfério Sul, que as torna mais amenas.

Além da insolação, a duração do dia, que é de 14h 10m no solstício de verão e 10h 10m no solstício de inverno, em Porto Alegre, contribui nas estações do ano.

Capítulo 8

Movimentos da Lua

A Lua é o corpo celeste mais próximo da Terra, e portanto o que apresenta movimento mais notável para nós, com exceção de corpos passageiros, como meteoros. O valor atual da distância da Lua foi obtido por laser, utilizando um espelho colocado em sua superfície pelos astronautas. Medindo o tempo de ida e vinda de um feixe de laser disparado da Terra na direção da Lua, se obtém que sua distância varia de 356 800 km a 406 400 km, com um valor médio de 384 000 km. A excentricidade da órbita da Lua é de 0,0549.

O plano orbital da Lua tem uma inclinação de $5^o9'$ em relação à eclíptica. Apesar desse ângulo permanecer aproximadamente constante, o plano orbital não é fixo, movendo-se de maneira tal que seu eixo descreve um círculo completo em torno do eixo da eclíptica num período de 18,6 anos. Portanto, em relação ao equador da Terra, a órbita da Lua tem uma inclinação que varia de 18,4° (23,5° - 5,15°) a 28,7° (23,5° + 5,15°).

Em relação ao equador da Lua, o seu plano orbital tem uma inclinação de menos do que 1^o.

O diâmetro aparente médio da Lua é de 31' 5" ($0{,}518^o$), o mesmo tamanho do diâmetro aparente do Sol. Sabendo que a distância média da Lua é de 384 000 km, se deduz que seu diâmetro é de 3476 km (D=384 000 km × sen 0,518). A sua massa é de 1/81 da massa da Terra.

8.1 Fases da Lua

À medida que a Lua viaja ao redor da Terra ao longo do mês, ela passa por um ciclo de fases, durante o qual sua forma parece variar gradualmente. O ciclo completo dura aproximadamente 29,5 dias.

Esse fenômeno é bem compreendido desde a Antiguidade. Acredita-se



Figura 8.1: Lua cheia ao nascer.

que o grego Anaxágoras (± 430 a.C.) já conhecia sua causa, e Aristóteles (384 - 322 a.C.) registrou a explicação correta do fenômeno: as fases da Lua resultam do fato de que ela não é um corpo luminoso, e sim um corpo *iluminado* pela luz do Sol. A face iluminada da Lua é aquela que está voltada para o Sol. A *fase da lua* representa o quanto dessa face iluminada está voltada também para a Terra. Durante metado do ciclo essa porção está aumentando (lua crescente) e durante a outra metade ela está diminuindo (lua minguante). Tradicionalmente epenas as quatro fases mais características do ciclo - Lua Nova, Quarto-Crescente, Lua Cheia e Quarto-Minguante - recebem nomes, mas a porção que vemos iluminada da Lua, que é a sua fase, varia de dia para dia. Por essa razão os astrônomos definem a fase da Lua em termos de número de dias decorridos desde a Lua Nova (de 0 a 29,5) e em termos de fração iluminada da face visível (0% a 100%).

Lua Nova: É quando a face visível da Lua não recebe luz do Sol, pois os dois astros estão na mesma direção. Nessa fase, a Lua está no céu durante o dia, nascendo e se pondo aproximadamente junto com o Sol. Durante os dias subsequentes, a Lua vai ficando cada vez mais a leste do Sol, e portanto o lado oeste da face visível vai ficando crescentemente

mais iluminado, até que, aproximadamente uma semana depois, temos o Quarto-Crescente, com 50% da face iluminada.

Lua Quarto-Crescente: É quando a metade oeste da face voltada para a Terra está iluminada. Lua e Sol, vistos da Terra, estão separados de aproximadamente 90°. A Lua nasce aproximadamente ao meio-dia e se põe aproximadamente à meia-noite. Após esse dia, a fração iluminada da face visível continua a crescer pelo lado oeste, pois a Lua continua a leste do Sol, até que atinge a fase Cheia.

Lua Cheia 100% da face visível está iluminada. A Lua está no céu durante toda a noite, nasce quando o Sol se põe e se põe ao nascer do Sol. Lua e Sol, vistos da Terra, estão em direções opostas, separados de aproximadamente 180°, ou 12h. Nos dias subsequentes a porção da face iluminada passa a ficar cada vez menor à medida que a Lua fica cada vez mais a oeste do Sol, que a ilumina pelo lado leste. Aproximadamente sete dias depois, a fração iluminada já se reduziu a 50%, e temos o Quarto-Minguante.

Lua Quarto-Minguante A Lua está aproximadamente 90° a oeste do Sol, e vemos iluminada a metade leste de sua face visível. A Lua nasce aproximadamente à meia-noite e se põe aproximadamente ao meio-dia. Nos dias subsequentes a Lua continua a minguar, até atingir o dia 0 do novo ciclo.

8.1.1 Mês lunar e mês sideral

O intervalo de tempo entre duas fases iguais consecutivas é de 29d 12h 44m 2,9s ($\simeq$ 29,5 dias). Essa é a duração do **mês sinódico**, ou **lunação**, ou **período sinódico da Lua**.

O **período sideral da Lua**, ou **mês sideral** é o tempo necessário para a Lua completar uma volta em torno da Terra, em relação a uma estrela. Sua duração é de 27d 7h 43m 11s, sendo portanto aproximadamente 2,25 dias mais curto do que o mês sinódico.

8.1.2 Dia lunar

A Lua se move $360°/27,3\text{d} \approx 13°$ para leste, por dia, em relação às estrelas. Esse movimento é um reflexo da revolução da Lua em torno da Terra, com-

pletada em 27,32166 dias[1] (mês sideral). O Sol também se move $\approx 1^\circ$ por dia para leste, refletindo a translação da Terra em torno do Sol, completada em 365,2564 dias (ano sideral). Portanto, a Lua se move $\approx 12^\circ$ por dia, para leste, em relação ao Sol. Devido a isso, a cada dia a Lua cruza o meridiano local ≈ 50 min mais tarde do que no dia anterior. O dia lunar, portanto, tem aproximadamente 24h 50m (24h 48m).

8.1.3 Rotação da Lua

À medida que a Lua orbita em torno da Terra, completando seu ciclo de fases, ela *mantém sempre a mesma face voltada para a Terra.*

Isso indica que o seu período de translação *é igual* ao período de rotação em torno de seu próprio eixo. Portanto. a Lua tem rotação **sincronizada** com a translação.

É muito improvável que essa sincronização seja casual. Acredita-se que ela tenha acontecido como resultado das grandes forças de maré exercidas pela Terra na Lua no tempo em que a Lua era jovem e mais elástica. As deformações tipo bojos causadas na superfície da Lua pelas marés teriam freado a sua rotação até ela ficar com o bojo sempre voltado para a Terra, e portanto com período de rotação igual ao de translação. Essa perda de rotação teria em consequência provocado o afastamento maior entre Lua e Terra (para conservar o momentum angular). Atualmente a Lua continua afastando-se da Terra, a uma taxa de 4 cm/ano. Devido à rotação sincronizada da Lua, a face da Lua que não podemos ver chama-se face oculta, que só pode ser fotografada pelos astronautas em órbita da Lua. Note também que como a Lua mantém a mesma face voltada para a Terra, um astronauta na Lua não vê a Terra nascer ou se pôr. Se ele está na face voltada para a Terra, a Terra estará sempre visível. Se ele estiver na face oculta da Lua, nunca verá a Terra.

8.2 Eclipses

Um **eclipse** acontece sempre que um corpo entra na sombra de outro. Assim, quando a Lua entra na sombra da Terra, acontece um **eclipse lunar**. Quando a Terra é atingida pela sombra da Lua, acontece um **eclipse solar**.

[1] Como o sistema Terra—Lua sofre influência gravitacional do Sol e dos planetas, a Terra e a Lua não são esféricas e as marés provocam fricção dentro da Terra e da Lua, a órbita da Lua não é regular, e seu cálculo preciso envolve uma equação com mais de cem termos. O período sideral varia até 7 horas.

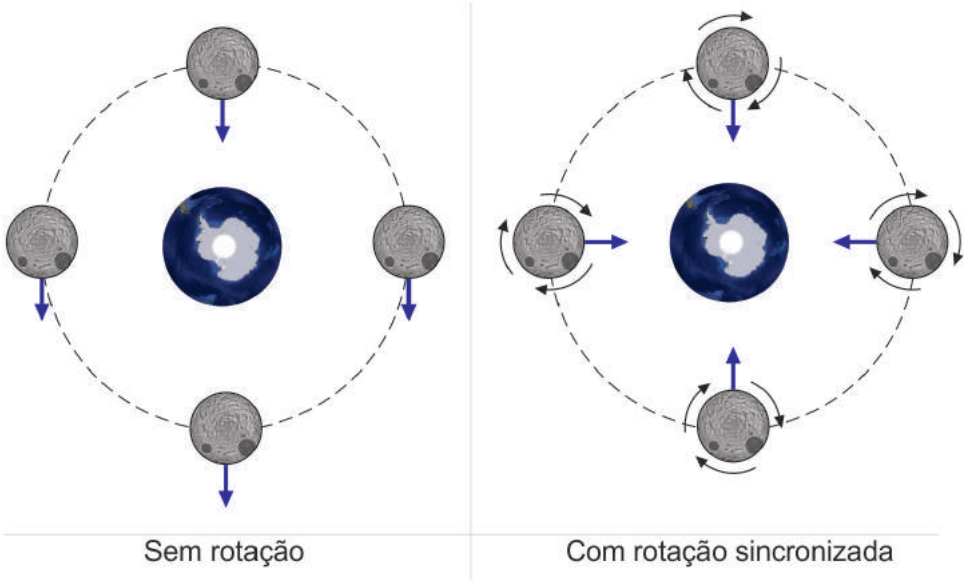


Figura 8.2: Representação esquemática do movimento da Lua em torno da Terra. Se a Lua não tivesse rotação (figura da esquerda), ficaria sempre com a mesma face voltada para o mesmo ponto do espaço, mudando a face voltada para a Terra. A única maneira de ela manter a mesma face sempre voltada para a Terra é girando em torno de seu próprio eixo com o mesmo período em que gira em torno da Terra (figura da direita).

8.2.1 Geometria da sombra

Quando um corpo extenso (não pontual) é iluminado por outro corpo extenso definem-se duas regiões de sombra:

umbra: região da sombra que não recebe luz de nenhum ponto da fonte.

penumbra: região da sombra que recebe luz de alguns pontos da fonte.

Cálculo do tamanho da sombra

Consideremos um corpo luminoso de raio R a uma distância d de uma esfera opaca de raio R'. Atrás do corpo opaco se formará um cone de sombra cuja altura queremos determinar.

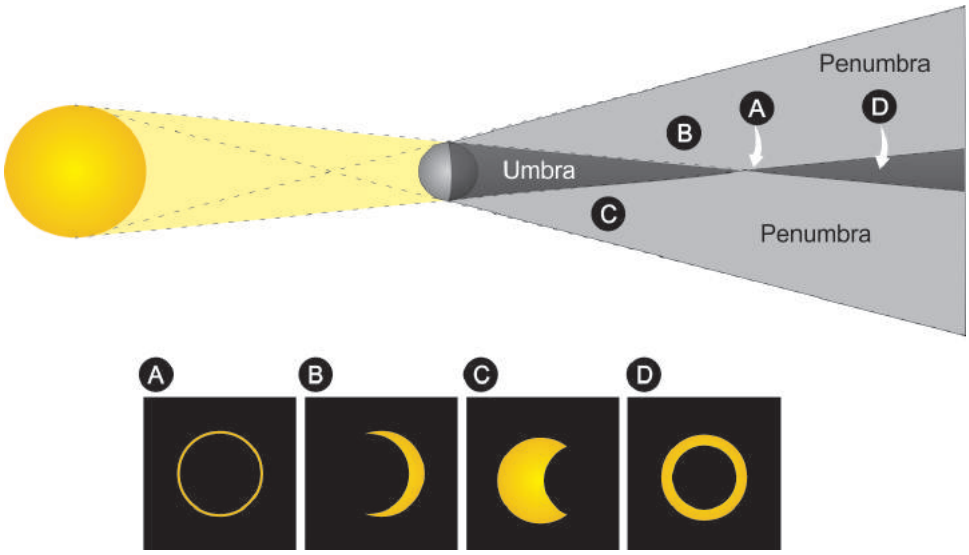
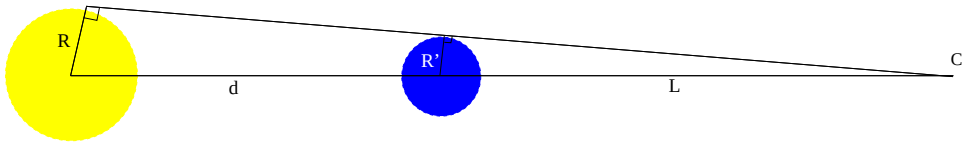


Figura 8.3: A parte superior da figura mostra a geometria da sombra (umbra e penumbra). A parte inferior mostra a aparência do Sol como seria visto por observadores nos pontos A, B, C e D da sombra. Um observador na umbra veria o disco do Sol completamente eclipsado.



Sendo:

- L = comprimento da sombra, isto é, a altura do cone de sombra
- d = distância da fonte à esfera opaca
- R = raio da fonte
- R' = raio da esfera opaca

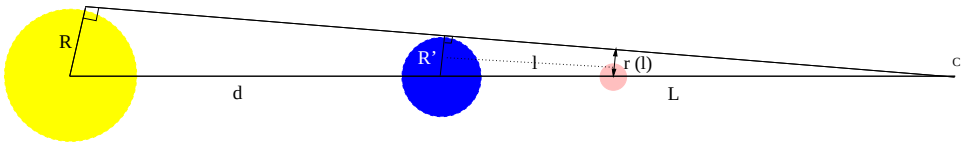
Por semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{R'}{L} = \frac{R}{L+d}$$

E portanto a altura do cone de sombra (L) é:

$$L = \frac{R'\,d}{R - R'}$$

Cálculo do raio da sombra



A seguir vamos determinar o tamanho da sombra a uma certa distância l da esfera opaca. Como a sombra é cônica, sua forma em qualquer ponto é circular.

Sendo:

- $r(l)$ = raio da sombra à distância l da esfera opaca
- L = comprimento da sombra
- R′ = raio da esfera opaca

Novamente por semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{r(l)}{L - l} = \frac{R'}{L}$$

E o raio da sombra à distância l da esfera opaca é:

$$r(l) = R'\,\frac{L - l}{L}$$

8.2.2 Eclipses do Sol e da Lua

Os eclipses do Sol e da Lua são os eventos mais espetaculares do céu.

Um **eclipse solar** ocorre quando a Lua está entre a Terra e o Sol, de forma que a sombra da Lua atinge a Terra.

Se o disco inteiro do Sol estiver atrás da Lua, o eclipse será *total*. Caso contrário, será *parcial*. Se a Lua estiver próxima de seu apogeu, o diâmetro da Lua será menor que o do Sol, e ocorrerá um eclipse *anular*.

O eclipse solar total começa quando o disco da Lua alcança a borda do disco do Sol, e aproximadamente uma hora depois o Sol fica completamente atrás da Lua. Nos últimos instantes antes da totalidade, as únicas partes

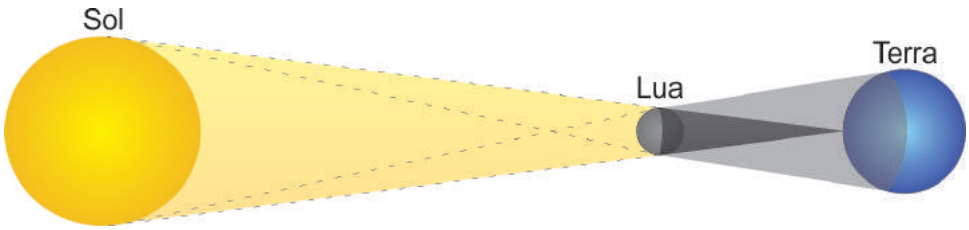


Figura 8.4: No eclipse solar a sombra da Lua atinge a Terra. Os observadores localizados na pequena região atingida pela umbra verão um eclipse solar total, os localizados na região bem maior atingida pela penumbra verão eclipses em diferentes graus de parcialidade.

.

visíveis do Sol são aquelas que brilham através de pequenos vales na borda irregular da Lua, um fenômeno conhecido como "anel de diamante". Durante a totalidade, o céu se torna escuro o suficiente para que se possa observar os planetas e as estrelas mais brilhantes. Após a fase de "anel de diamante" (já descrito por Edmund Halley no eclipse de 3 de maio de 1715), o disco do Sol fica completamente coberto pela Lua, e aparece a *coroa solar*, a atmosfera externa do Sol, composta de gases rarefeitos que se estendem por milhões de km. É extremamente perigoso olhar o Sol diretamente. Mesmo uma pequena exposição danifica permanentemente o olho, sem apresentar qualquer dor!

Durante um eclipse solar, a umbra da Lua na Terra tem no máximo 270 km de largura. Portanto um eclipse solar total só é visível, se o clima permitir, em uma estreita faixa sobre a Terra, de no máximo 270 km de largura, chamada de caminho do eclipse. Em uma região de aproximadamente 3000 km de cada lado do caminho do eclipse, ocorre um eclipse parcial.

Como vimos na seção 8.1.2, a Lua se move aproximadamente 12° por dia, para leste, em relação ao Sol, o que implica numa velocidade de:

$$\frac{12^\circ/\text{dia}}{360^\circ} \times 2\pi \times 384\,000\,\text{km} \simeq 80\,400\,\text{km/dia} \simeq 56\,\text{km/min}$$

A velocidade de um ponto da superfície da Terra devido à rotação para leste da Terra é,

$$\frac{2\pi R_\oplus}{1\,\text{dia}} = \frac{2\pi \times 6\,370\,\text{km}}{24\,\text{h}} = 1667\,\text{km/h} \simeq 28\,\text{km/min}$$

Como a velocidade da Lua no céu é maior do que a velocidade de rotação da Terra, a velocidade da sombra da Lua na Terra tem o mesmo sentido do

movimento (real) da Lua, ou seja, para leste. O valor da velocidade da sombra é, grosseiramente, $56\,\mathrm{km/min} - 28\,\mathrm{km/min} = 28\,\mathrm{km/min}$. Cálculos mais precisos, levando-se em conta o ângulo entre os dois movimentos, mostram que a velocidade da Lua em relação a um certo ponto da Terra é de pelo menos 34 km/min para leste. A duração da totalidade do eclipse, em um certo ponto da Terra, será o tempo desde o instante em que a borda leste da umbra da Lua toca esse ponto até o instante em que a borda oeste da Lua o toca. Esse tempo é igual ao tamanho da umbra dividido pela velocidade com que ela anda, aproximadamente,

$$\frac{270\,\mathrm{km}}{34\,\mathrm{km/min}} = 7,9\,\mathrm{min}$$

Na realidade, a totalidade de um eclipse dura no máximo 7,5 minutos.

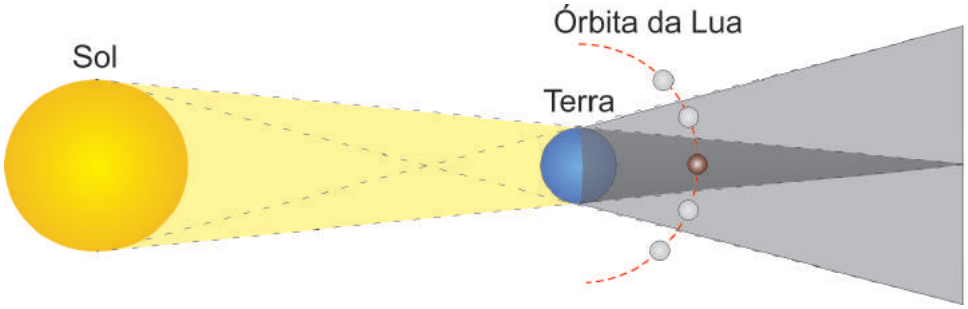


Figura 8.5: Diagrama de um eclipse lunar. A umbra da Terra, à distância em que é cruzada pela Lua, tem um diâmetro de aproximadamente 2,5 vezes o diâmetro da Lua.

Um **eclipse lunar** acontece quando a Lua entra na sombra da Terra. Se ela fica inteiramente imersa na umbra da Terra o eclipse é *total*; se somente parte dela passa pela umbra, e o resto passa pela penumbra, o eclipse é *parcial*. Se a Lua passa somente na penumbra, o eclipse é *penumbral*. Um eclipse total é sempre acompanhado das fases penumbral e parcial. Um eclipse penumbral não é fácil de ver a olho nu, pois o brilho da Lua permanece quase o mesmo. Durante a fase total, a Lua ressurge inteira, com uma luminosidade tênue e avermelhada. Isso acontece porque parte da luz solar é refractada na atmosfera da Terra e atinge a Lua. Porém essa luz está quase totalmente desprovida dos raios azuis, que sofreram forte espalhamento e absorção na espessa camada atmosférica atravessada. À distância da Lua, 384 000 km, a umbra da Terra tem um diâmetro de 9 200 km em média, cobrindo 2,6

diâmetros da lua. Esses valores variam um pouco porque dependem das distâncias relativas entre Sol, Terra e Lua em cada eclipse. Como a velocidade orbital da Lua é de 3 682 km/h, a lua pode levar até 150 minutos para atravessar a umbra, mas a fase de totalidade nunca dura mais do que 100 minutos. A duração máxima de um eclipse lunar, incluindo as fases de parcialidade, é 3,8 horas. Em contraste com um eclipse do Sol, que só é visível em uma pequena região da Terra, um eclipse da Lua é visível por todos que possam ver a Lua, ou seja, por todo o hemisfério da Terra onde é noite. Devido a isso, os eclipses da Lua são vistos com maior frequência que eclipses do Sol, de um dado local na Terra.

Temporadas dos eclipses

Se o plano orbital da Lua coincidisse com o plano da eclíptica, aconteceria um eclipse solar a cada Lua nova e um eclipse lunar a cada Lua cheia. No entanto, o plano orbital da Lua não coincide com o plano da eclíptica, mas sim está inclinado 5° em relação em relação a este. Os pontos de interseções entre as duas órbitas se chamam nodos, e a linha que une os dois nodos se chama linha dos nodos. Para ocorrer um eclipse, a Lua, além de estar na fase Nova ou Cheia, precisa estar no plano da eclíptica, ou seja, precisa estar em um dos nodos ou próxima a ele. Como o sistema Terra-Lua orbita o Sol, aproximadamente duas vezes por ano a linha dos nodos está alinhada com o Sol e a Terra. Estas são as temporadas dos eclipses, quando os eclipses podem ocorrer. Quando a Lua passar pelo nodo durante a temporada de eclipses, ocorre um eclipse. Como a órbita da Lua gradualmente gira sobre seu eixo, com um período de 18,6 anos de regressão dos nodos, as temporadas ocorrem a cada 173 dias, e não exatamente a cada meio ano. A distância angular da Lua ao nodo precisa ser menor que 4,6° para um eclipse lunar total, e menor que 10,3° para um eclipse solar total, o que estende a temporada de eclipses para 31 a 38 dias, dependendo dos tamanhos aparentes e velocidades aparentes do Sol e da Lua, que variam porque as órbitas da Terra e da Lua são elípticas, de modo que pelo menos um eclipse ocorre a cada 173 dias. Em cada temporada, ocorrem de um a três eclipses. No caso de ocorrer somente um eclipse será um eclipse solar; se ocorrerem três serão dois solares e um lunar. As temporadas dos eclipses são separadas por 173 dias [(1 ano-20 dias)/2]. Em um ano, acontecem no mínimo dois eclipses, sendo os dois solares, e no máximo sete eclipses, sendo cinco solares e 2 lunares ou quatro solares e três lunares.

Tabela 8.1: Eclipses do Sol 2010-2020

Data	**Tempo Dinâmico (centro)**	**Latitude (centro)**	**Longitude (centro)**	**Tipo de Eclipse**
15 Jan 2010	07:07:39	2 N	69 E	Anular
11 Jul 2010	19:34:38	20 S	122 O	Total
4 Jan 2011	08:51:42	65 N	21 E	Parcial
1 Jun 2011	21:17:18	68 N	47 E	Parcial
1 Jul 2011	08:39:30	65 S	29 E	Penumbral
25 Nov 2011	06:21:24	69 S	82 O	Parcial
20 Mai 2012	23:53:54	49 N	176 E	Anular
13 Nov 2012	22:12:55	40 S	161 O	Total
10 Mai 2013	00:26:20	2 N	175 E	Anular
3 Nov 2013	12:47:36	3 N	12 O	Total
29 Abr 2014	06:04:33	71 S	131 E	Anular
23 Out 2014	21:45:39	71 N	97 O	Parcial
20 Mar 2015	09:46:47	64 N	7 O	Total
13 Set 2015	06:55:19	72 S	2 O	Parcial
9 Mar 2016	01:58:19	10 N	149 E	Total
1 Set 2016	09:08:02	11 S	38 E	Anular
26 Fev 2017	14:54:33	35 S	31 O	Anular
21 Ago 2017	18:26:40	37 N	88 O	Total
15 Fev 2018	20:52:33	71 S	1 E	Parcial
13 Jul 2018	03:02:16	68 S	127 E	Parcial
11 Ago 2018	09:47:28	70 N	174 E	Parcial
6 Jan 2019	01:42:38	67 N	154 E	Parcial
2 Jul 2019	19:24:07	17 S	109 O	Total
26 Dez 2019	05:18:53	1 N	102 E	Anular
21 Jun 2020	06:41:15	31 N	80 E	Anular
14 Dez 2020	16:14:39	40 S	68 O	Total

A diferença entre o Tempo Dinâmico e o Tempo Universal, devido principalmente à fricção causada pelas marés, aumenta de 67s em 2010 para 74s em 2020.

Tabela 8.2: Eclipses da Lua 2010-2020

Data	**Tempo Dinâmico (centro)**	**Tipo de Eclipse**
26 Jun 2010	11:39:34	Parcial da Lua
21 Dez 2010	08:18:04	Total da Lua
15 Jun 2011	20:13:43	Total da Lua
10 Dez 2011	14:32:56	Total da Lua
04 Jun 2012	11:04:20	Parcial da Lua
28 Nov 2012	14:34:07	Penumbral da Lua
25 Abr 2013	20:08:38	Parcial da Lua
25 Mai 2013	04:11:06	Penumbral da Lua
18 Out 2013	23:51:25	Penumbral da Lua
15 Abr 2014	07:46:48	Total da Lua
08 Out 2014	10:55:44	Total da Lua
04 Abr 2015	12:01:24	Total da Lua
28 Set 2015	02:48:17	Total da Lua
23 Mar 2016	11:48:21	Penumbral da Lua
16 Set 2016	18:55:27	Penumbral da Lua
11 Fev 2017	00:45:03	Penumbral da Lua
07 Ago 2017	18:21:38	Parcial da Lua
31 Jan 2018	13:31:00	Total da Lua
27 Jul 2018	20:22:54	Total da Lua
21 Jan 2019	05:13:27	Total da Lua
16 Jul 2019	21:31:55	Parcial da Lua
10 Jan 2020	19:11:11	Penumbral da Lua
05 Jun 2020	19:26:14	Penumbral da Lua
05 Jul 2020	04:31:12	Penumbral da Lua
30 Nov 2020	09:44:01	Penumbral da Lua

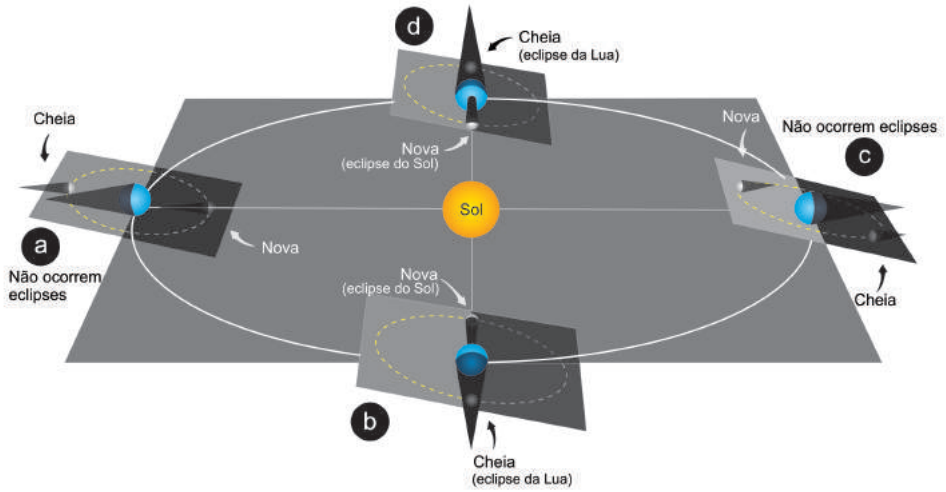


Figura 8.6: A figura representa a Lua em fases Nova e Cheia em quatro lunações diferentes (A, B, C e D). Nas lunações B e C , as fases Nova e Cheia acontecem quando a Lua está na eclíptica, então acontecem eclipses. Nas lunações A e C as fases Nova e Cheia acontecem com a Lua afastada da eclíptica e não acontecem eclipses.

Saros

A direção da linha dos nodos não é constante, mas se desloca devido a efeitos gravitacionais provocados pelo Sol. O período de tempo que a linha dos nodos leva pra dar uma volta completa chama-se **Saros**, e tem duração de 18 anos e 11 dias, ou 6585,32 dias. Nesse período de tempo, Sol, Lua e Terra retornam às mesmas posições relativas, e a sequência de eclipses solares e lunares se repete, mas não na mesma hora e no mesmo lugar. Um eclipse em um ciclo acontece aproximadamente 8 horas mais tarde e 120° de longitude mais a oeste do que no ciclo anterior.

8.3 Exemplos de cálculos de eclipses

1. Calcular o comprimento médio da sombra da Terra, considerando-se:

   - distância Terra-Sol: 149 600 000 km

- raio da Terra: 6370 km
- raio do Sol: 696 000 km

Como

$$\text{comprimento da sombra} = \frac{\text{distância da fonte} \times \text{raio da esfera}}{\text{raio da fonte} - \text{raio da esfera}}$$

Obtemos:

$$\text{comprimento da sombra} = \frac{149\,600\,000\text{km} \times 6370\text{km}}{696\,000\text{km} - 6370\text{km}}$$

ou

$$\text{comprimento da sombra} = 1\,381\,800\text{km}$$

2. Seja r o raio da Terra, $R = 109r$ o raio do Sol, $L = 23680r$ a distância entre o Sol e a Terra.

   - a) Qual é o comprimento do cone de sombra formado?

   $$h = \frac{L \times r}{R - r} = \frac{23680r^2}{109r - r} = 219,26r$$

   b) Qual é o raio deste cone a uma distância de $l = 60r$ por onde passa a Lua? Como

   $$\frac{r(l)}{h - l} = \frac{r}{h}$$

   $$r(l) = \frac{r}{h}(h - l) = \frac{r}{219,26r}(219,26r - 60r) = 0,726r$$

   c) Sendo $r_L = r/3,6$ o raio da Lua, quantos diâmetros lunares cabem nessa região da sombra?

   $$r(l)/r_L = \frac{0,726r}{r/3,6} = 2,6$$

Isto é, na distância da Lua, a umbra da Terra tem 9200 km. A penumbra tem 16 000 km e como a velocidade da Lua na sua órbita é de 3400 km/hr, um eclipse total da Lua dura cerca de 1h 40m e um eclipse parcial da Lua dura cerca de 6 h.

Capítulo 9

Movimento dos planetas

Os planetas estão muito mais próximos de nós do que as estrelas, de forma que eles parecem se mover, ao longo do ano, entre as estrelas de fundo. Esse movimento se faz, geralmente, de oeste para leste (não confundir com o movimento diurno, que é sempre de leste para oeste!), mas em certas épocas o movimento muda, passando a ser de leste para oeste. Esse movimento retrógrado pode durar vários meses (dependendo do planeta), até que fica mais lento e o planeta reverte novamente sua direção, retomando o movimento normal. O movimento observado de cada planeta é uma combinação do movimento do planeta em torno do Sol com o movimento da Terra em torno do Sol, e é simples de explicar quando sabemos que a Terra está em movimento, mas fica muito difícil de descrever num sistema em que a Terra esteja parada e seja o centro do movimento dos outros astros, ou seja, num sistema geocêntrico.

9.1 O modelo geocêntrico de Ptolomeu

Apesar disso, o geocentrismo foi uma idéia dominante na astronomia durante toda a Antiguidade e Idade Média. O sistema geocêntrico também é conhecido como sistema ptolemaico, pois foi **Claudius Ptolemaeus** (85 d.C.-165 d.C.), o último dos grandes astrônomos gregos, quem construiu o modelo geocêntrico mais completo e eficiente. Ptolomeu explicou o movimento dos planetas através de uma combinação de círculos: o planeta se move ao longo de um pequeno círculo chamado epiciclo, cujo centro se move em um círculo maior chamado deferente. A Terra fica numa posição um pouco afastada do centro do deferente (portanto, o deferente é um círculo excêntrico em relação à Terra). Até aqui, o modelo de Ptolomeu não diferia do modelo

usado por Hiparco aproximadamente 250 anos antes. A novidade introduzida por Ptolomeu (Figura 9.1) foi o equante, que é um ponto ao lado do centro do deferente oposto em relação à Terra, em relação ao qual o centro do epiciclo se move a uma taxa uniforme, e que tinha o objetivo de dar conta do movimento não uniforme dos planetas. O objetivo de Ptolomeu era o de

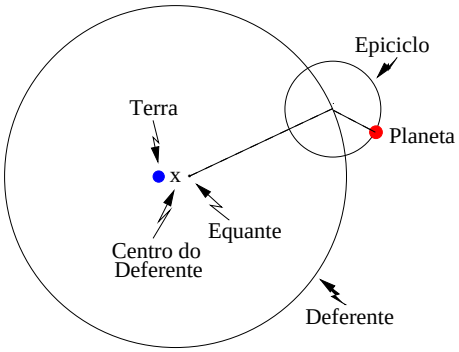


Figura 9.1: Modelo de Ptolomeu.

produzir um modelo que permitisse prever a posição dos planetas de forma correta e, nesse ponto, ele foi razoavelmente bem-sucedido. Por essa razão, esse modelo continuou sendo usado sem mudança substancial por cerca de 1300 anos.

9.2 Copérnico e o modelo heliocêntrico

No início do século XVI, a Renascença estava sacudindo as cinzas do obscurantismo da Idade Média e trazendo novo fôlego a todas as áreas do conhecimento humano. **Nicolau Copérnico** representou o Renascimento na astronomia. Copérnico (1473-1543) foi um astrônomo polonês com grande inclinação para a matemática. Estudando na Itália, ele leu sobre a hipótese heliocêntrica proposta (e não aceita) por Aristarco de Samos (310-230 a.C.), e achou que o Sol no centro do Universo era muito mais razoável do que a Terra. Copérnico registrou suas idéias num livro - *De Revolutionibus* - publicado no ano de sua morte.

As realizações mais importantes de Copérnico foram:

- introduziu o conceito de que a Terra é apenas um dos seis planetas (então conhecidos) girando em torno do Sol;

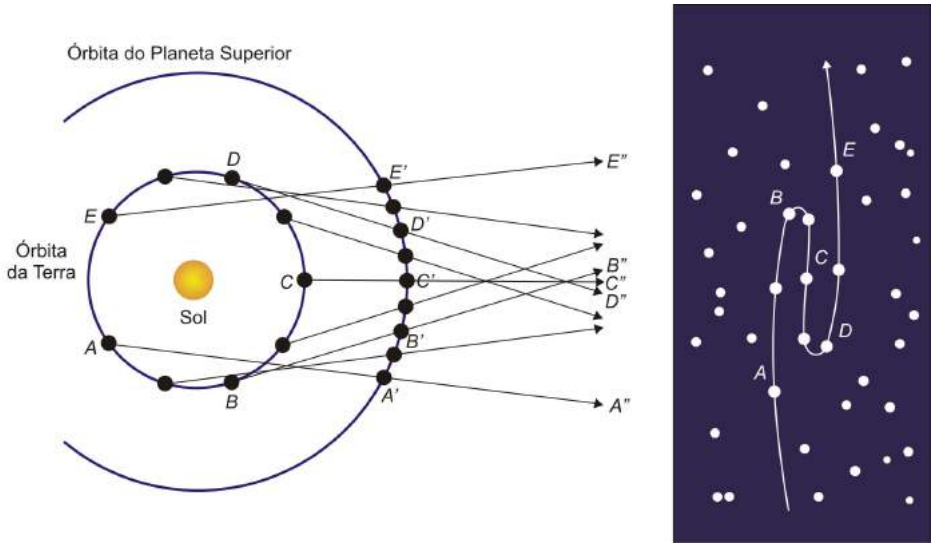


Figura 9.2: Movimento retrógrado de um planeta superior.

- colocou os planetas em ordem de distância ao Sol: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno (Urano, Netuno e Plutão);
- determinou as distâncias dos planetas ao Sol, em termos da distância Terra-Sol;
- deduziu que quanto mais perto do Sol está o planeta, maior é sua velocidade orbital. Dessa forma, o movimento retrógrado dos planetas foi facilmente explicado sem necessidade de epiciclos [ver figura (9.2)].

Convém notar que Copérnico manteve a idéia de que as órbitas dos planetas eram circulares e, para obter posições razoáveis, teve que manter pequenos epiciclos, mas não usou equantes.

9.3 Classificação dos planetas pela distância ao Sol

Planetas inferiores: Mercúrio e Vênus. Têm órbitas menores do que a órbita da Terra. Os dois planetas estão sempre muito próximos do Sol, alcançando o máximo afastamento angular em relação ao Sol de 28°, no caso de Mercúrio, e 48°, no caso de Vênus. Por essa razão, eles só são visíveis ao anoitecer, logo após o pôr-do-sol (astro vespertino), ou ao amanhecer, logo antes do nascer do Sol (astro matutino).

Planetas superiores: Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão. Têm órbitas maiores do que a da Terra. Podem estar a qualquer distância angular do Sol, podendo ser observados no meio da noite.

9.4 Configurações planetárias

Para definir as configurações dos planetas, que são as posições características dos planetas em suas órbitas, vistas da terra, convém antes definir elongação:

elongação (e): distância angular do planeta ao Sol, vista da Terra.

9.4.1 Configurações de um planeta inferior

- conjunção inferior: o planeta está na mesma direção do Sol ($e = 0$) e mais próximo da Terra do que o Sol.
- conjunção superior: o planeta está na mesma direção do Sol ($e = 0$), e mais longe da Terra do que o Sol.
- máxima elongação: a distância angular entre o planeta e o Sol é máxima, e vale 28° no caso de Mercúrio, e 48° no caso de Vênus. Na máxima elongação *ocidental*, o planeta está a oeste do Sol (nasce e se põe antes do Sol) e, portanto, é visível ao amanhecer, no lado leste. Na máxima elongação *oriental*, o planeta está a leste do Sol (nasce e se põe depois do Sol) e é visível ao anoitecer, no lado oeste.

9.4.2 Configurações de um planeta superior

- conjunção: o planeta está na mesma direção do Sol ($e = 0$), e mais longe da Terra do que o Sol;
- oposição: o planeta está na direção oposta ao Sol ($e = 180°$). O planeta está no céu durante toda a noite;
- quadratura ($e = 90°$): O planeta está 6h a leste do Sol (quadratura *oriental*) ou a oeste do Sol (quadratura *ocidental*).

9.5 Período sinódico e sideral dos planetas

Período sinódico (S): é o intervalo de tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivas. É o período de revolução *aparente* do planeta, em relação à Terra.

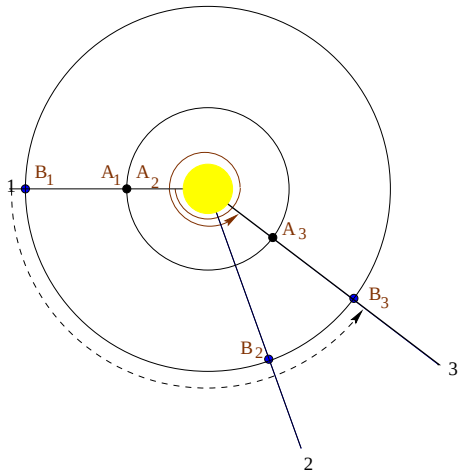


Figura 9.3: Período sinódico e sideral.

Período sideral (P): é o período real de translação do planeta em torno do Sol, em relação a uma estrela fixa.

9.5.1 Relação entre os dois períodos

Considere dois planetas, A e B, como na figura 9.5.1. O planeta A move-se mais rápido do que o planeta B, por estar numa órbita mais interna. Na posição (1), o planeta A passa entre os planeta B e o Sol. O planeta A está em conjunção inferior visto de B, e o planeta B está em oposição visto de A. Quando A completou uma revolução em torno do Sol, e retornou à posição (1), o planeta B moveu para a posição (2). De fato, A não alcança o planeta B até os dois estarem na posição (3), quando as posições de A e B em relação ao Sol voltam a ser as mesmas que na situação (1), e terá decorrido um período sinódico para A e B. Mas, nesse ponto, o planeta A terá ganho uma volta completa (360°) em relação a B.

Para achar a relação entre o período sinódico e o período sideral, vamos chamar de P_i o período sideral do planeta interior, e de P_e o período sideral do planeta exterior. S é o período sinódico, que é o mesmo para os dois.

O planeta interior, movendo-se $\frac{360°}{P_i}$ por dia, viaja mais rápido do que o planeta exterior, que se move a $\frac{360°}{P_e}$ por dia.

Após um dia, o planeta interior terá ganho um ângulo de $\frac{360°}{P_i} - \frac{360°}{P_e}$ em relação ao planeta exterior. Por definição de período sinódico, esse ganho é

igual a $\frac{360^\circ}{S}$, já que em S dias esse ganho será igual a 360°. Ou seja:

$$\frac{360^\circ}{S} = \left(\frac{360^\circ}{P_i} - \frac{360^\circ}{P_e}\right)$$

que é o mesmo que:

$$\boxed{\frac{1}{S} = \left(\frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_e}\right)}$$

9.6 Exemplos de períodos

1. Sabendo-se que Marte leva 780 dias para nascer quando o Sol se põe duas vezes seguidas, qual é o período sideral (orbital) de Marte? Usamos a fórmula

   $$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_e}$$

   identificando que, neste caso, i=Terra e P_i=1 ano, e=Marte e S=780 d / 365,25 (dias/ano) = 2,14 anos, já que o período entre duas oposições é o período **sinódico S**.

   Calculado-se

   $$\frac{1}{P_e} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{S}$$

   obtém-se P_e=1,87 anos = 687 dias.

2. Sabendo-se que Vênus leva 583,93 dias para aparecer em elongação máxima a leste duas vezes seguidas (se põe 3 horas depois do Sol), qual seu período sideral (orbital)? Usamos a fórmula

   $$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_e}$$

   identificando que, neste caso, e=Terra e P_e= 365,25 dias, i=Vênus e S=583,93 dias, já que o período entre duas elongações máximas a leste é o período **sinódico S**.

   Calculado-se

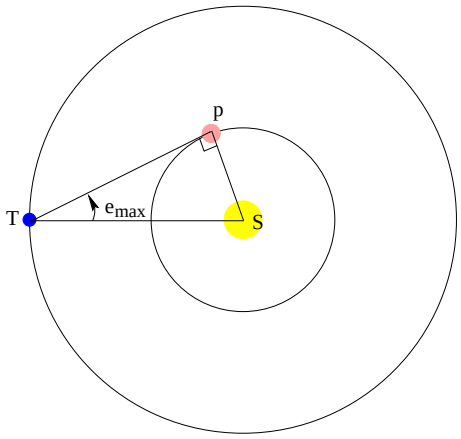
   $$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{S}$$

   obtém-se P_i= 224,7 dias.

9.7 Distâncias dentro do Sistema Solar

Copérnico determinou as distâncias dentro do sistema solar em termos da distância Terra-Sol, ou seja, em unidades astronômicas (UA).

9.7.1 Distâncias dos planetas inferiores



Quando o planeta inferior está em máxima elongação (e_M), o ângulo entre Terra e Sol, na posição do planeta, será de 90°. Então, nessa situação Sol, Terra e planeta formam um triângulo retângulo, e a distância do planeta ao Sol será:

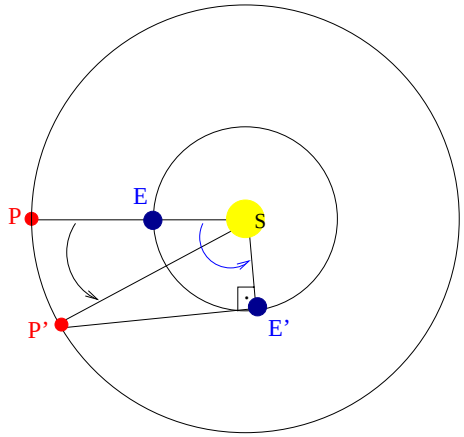
$$\operatorname{sen} e_M = \frac{\text{distância}_{(\text{planeta}-\text{Sol})}}{\text{distância}_{(\text{Terra}-\text{Sol})}}$$

Portanto:

$$\text{distância}_{(\text{planeta}-\text{Sol})} = \operatorname{sen} e_M \times 1\,\text{UA}$$

No caso de Mercúrio, cuja órbita tem alta excentricidade, a elongação máxima varia de 23° a 28°, e a distância de 0,39 a 0,46 UA.

9.7.2 Distâncias dos planetas superiores



Observando Marte, Copérnico viu que o intervalo de tempo decorrido entre uma *oposição* e uma *quadratura* é de *106 dias*.

Nesse período de 106 dias, a Terra percorre uma distância angular de 104,5°, pois se em 365 dias ela percorre 360°, em 106 dias ela percorre 106/365 × 360°.

Como o período sideral de Marte é de 687 dias, então a distância angular percorrida por Marte nesse mesmo período de 106 dias será *55,5*° (106/687 × 360°).

Agora, considerando o triângulo formado pelo Sol, Terra e Marte na quadratura (SE'P' na figura), o ângulo entre o Sol e o planeta, visto da Terra, é de 90°, e o ângulo entre Terra e Marte, visto do Sol, é de 104,5° - 55,5° = 49°.

Então, a distância entre Marte e Sol é:

$$\text{distância}_{(Sol-Marte)} = \frac{1\,\text{UA}}{\cos 49^\circ} = 1,52\,\text{UA}$$

A tabela a seguir mostra uma comparação entre os valores das distâncias dos planetas ao Sol, em unidades astronômicas, determinadas por Copérnico, e os valores atuais.

Planeta	Copérnico	Moderno
Mercúrio	0,38	0,387
Vênus	0,72	0,723
Terra	1	1
Marte	1,52	1,523
Júpiter	5,22	5,202
Saturno	9,17	9,554

Apesar do grande sucesso de Copérnico em determinar as distâncias dos planetas ao Sol, e na simplicidade da explicação do movimento observado dos planetas no seu sistema, as posições *previstas* para os planetas nesse sistema não eram melhores do que as posições previstas no sistema de Ptolomeu.

Uma relação empírica para a distância média dos planetas em torno do Sol foi proposta em 1770 por Johann Elert Bode (1747-1826) e Johann Daniel Titius (1729-1796)

$$a = \frac{2^n \times 3 + 4}{10}$$

com $n = -\infty$ para Mercúrio, n=0 para Vênus, n=1 para a Terra, n=2 para Marte, n=3 para o cinturão de asteróides, n=4 para Júpiter, n=5 para Saturno, n=6 para Urano, Netuno não fita, e n=7 para Plutão. Esta relação indica que deve haver algum tipo de resonância mecânica no disco protoplanetário que deu origem ao Sistema Solar.

Capítulo 10

As leis de Kepler

A Teoria Heliocêntrica conseguiu dar explicações mais simples e naturais para os fenômenos observados (por exemplo, o movimento retrógrado dos planetas), porém Copérnico não conseguiu prever as posições dos planetas de forma precisa, nem conseguiu provar que a Terra estava em movimento.

10.1 Tycho

Três anos após a morte de Copérnico, nasceu o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), o último grande astrônomo observacional antes da invenção do telescópio. Usando instrumentos fabricados por ele mesmo, Tycho fez extensas observações das posições de planetas e estrelas, com uma precisão em muitos casos melhor do que 1 minuto de arco (1/30 do diâmetro do Sol).

O excelente trabalho de Tycho como observador lhe propiciou o patrocínio do rei da Dinamarca, Frederic II (1534-1588), e assim Tycho pôde construir seu próprio observatório, na ilha báltica de Hveen. Após a morte do rei, entretanto, seu sucessor se desentendeu com Tycho e retirou seus privilégios. Assim, em 1597, Tycho, forçado a deixar a Dinamarca, foi trabalhar como astrônomo da corte para o imperador da Boêmia, em Praga.

Tycho Brahe não acreditava na hipótese heliocêntrica de Copérnico, mas foram suas observações dos planetas que levaram às leis de Kepler do movimento planetário.

Em 1600 (um ano antes de sua morte), Tycho contratou para ajudá-lo na análise dos dados sobre os planetas, colhidos durante 20 anos, um jovem e hábil matemático alemão chamado Johannes Kepler.

10.2 Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) estudou inicialmente para seguir carreira teológica. Na Universidade, leu sobre os princípios de Copérnico e logo se tornou um entusiástico defensor do heliocentrismo. Em 1594, conseguiu um posto de professor de matemática e astronomia em uma escola secundária em Graz, na Áustria, mas, poucos anos depois, por pressões da Igreja Católica com a Contra-Reforma, Kepler, que era protestante, foi expulso da cidade, e foi, então, para Praga trabalhar com Tycho Brahe.

Quando Tycho morreu, Kepler "herdou" seu posto e seus dados, a cujo estudo se dedicou pelos vinte anos seguintes.

O planeta para o qual havia o maior número de dados era Marte. Kepler conseguiu determinar as diferentes posições da Terra após cada período sideral de Marte e, assim, conseguiu traçar a órbita da Terra. Verificou que essa órbita era muito bem ajustada por um círculo excêntrico, isto é, com o Sol um pouco afastado do centro.

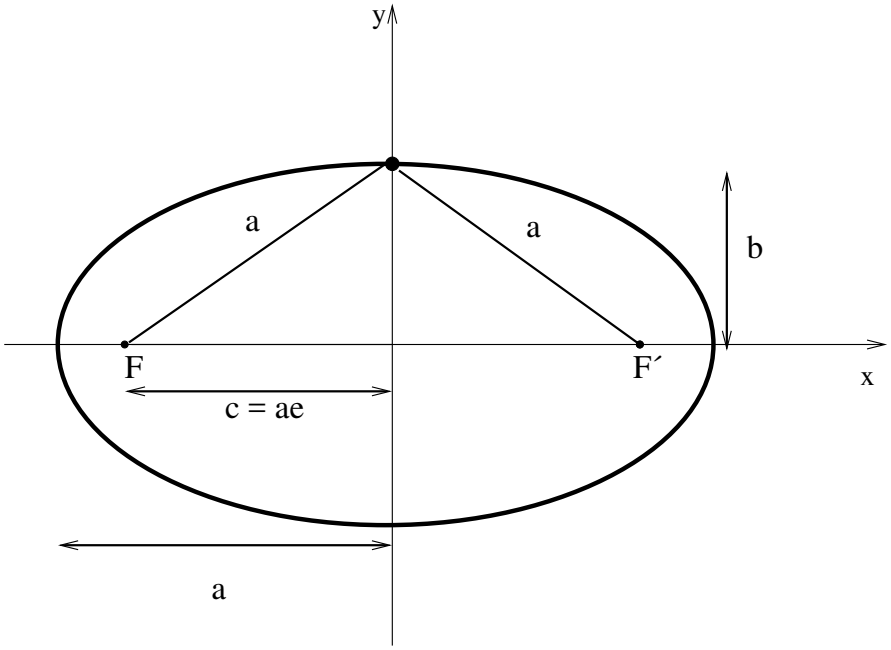
Kepler conseguiu também determinar a órbita de Marte, mas, ao tentar ajustá-la com um círculo, não teve sucesso. Ele continuou insistindo nessa tentativa por vários anos e, em certo ponto, encontrou uma órbita circular que concordava com as observações com um erro de 8 minutos de arco. Mas sabendo que as observações de Tycho não poderiam ter um erro desse tamanho (apesar disso significar um erro de apenas 1/4 do tamanho do Sol), Kepler, com a integridade que lhe era peculiar, descartou essa possibilidade.

Finalmente, passou à tentativa de representar a órbita de Marte com uma oval, e rapidamente descobriu que uma elipse ajustava muito bem os dados. A posição do Sol coincidia com um dos focos da elipse. Ficou assim explicada também a trajetória quase circular da Terra, com o Sol afastado do centro.

10.2.1 Propriedades das elipses

- Em qualquer ponto da curva, a soma das distâncias desse ponto aos dois focos é constante. Sendo F e F' os focos, P um ponto sobre a elipse, e a o seu semi-eixo maior, então:

$$FP + F'P = \text{constante} = 2a$$



- Quanto maior a distância entre os dois focos, maior é a *excentricidade (e)* da elipse. Sendo c a distância do centro a cada foco, a o semi-eixo maior, e b o semi-eixo menor, a excentricidade é definida por;

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}}$$

  já que quando o ponto está exatamente sobre b temos um triângulo retângulo, com $a^2 = b^2 + c^2$.

- Se imaginamos que um dos focos da órbita do planeta é ocupado pelo Sol, o ponto da órbita mais próximo do Sol é chamado periélio, e o ponto mais distante é chamado afélio. A distância do periélio ao foco (R_p) é:

$$R_p = a - c = a - a \cdot e = a(1 - e)$$

  e a distância do afélio ao foco (R_a) é:

$$R_a = a + c = a + a \cdot e = a(1 + e)$$

- Equação da elipse em coordenadas polares

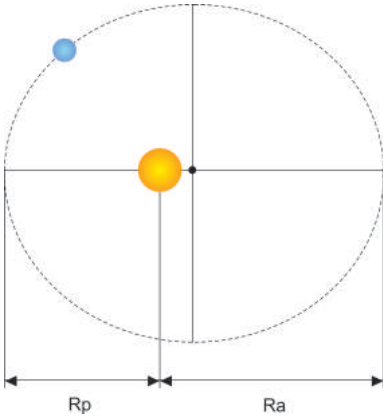
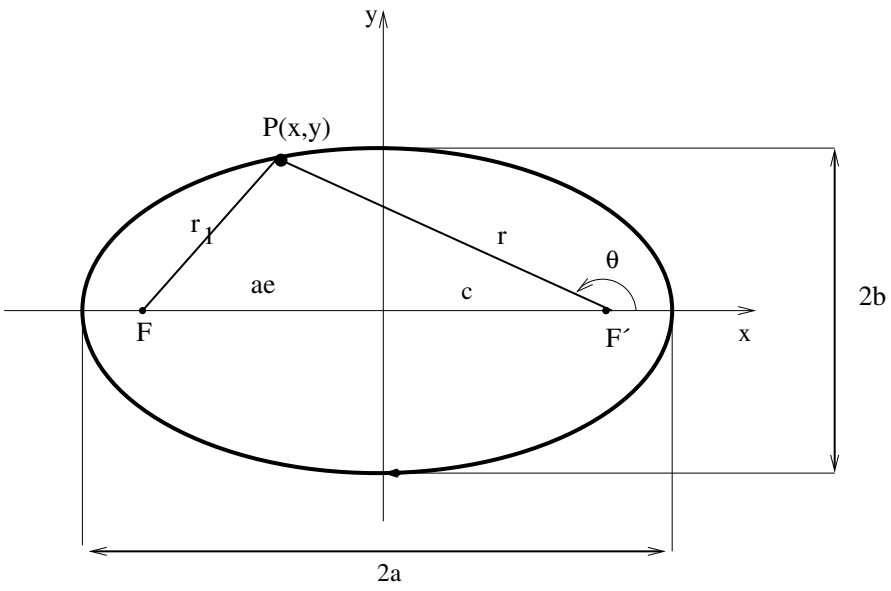


Figura 10.1: Os pontos de afélio e periélio se localizam nas extremidades do eixo maior da órbita elíptica. No periélio a distância do planeta ao Sol é mínima (Rp) e no afélio é máxima (Ra).

Uma elipse é por definição um conjunto de pontos eqüidistantes de dois focos separados por $2ae$, onde a é o semi-eixo maior e e a excentricidade.



Seja um ponto P(r,θ) ou P(x,y) sobre a elipse, onde θ é chamado de

anomalia verdadeira.

Pela lei dos cossenos:

$$r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r\,(2ae)\,\cos\theta$$

Por definição de elipse,

$$r + r_1 \equiv 2a$$

ou seja:

$$r_1 = 2a - r$$

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$

$$4a^2 + r^2 - 4ar = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$

$$a^2(1 - e^2) = ar(1 + e\cos\theta)$$

e finalmente:

$$\boxed{r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e\cos\theta)}}$$

- Área da elipse

Em coordenadas cartesianas:

$$r_1^2 = (x + ae)^2 + y^2 \qquad (a)$$

$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 \qquad (b)$$

Subtraindo-se (a) - (b) e usando $r = 2a - r_1$, temos:

$$r_1 = a + ex \qquad (c)$$

Levando-se em conta que o semi-eixo menor é dado por $b^2 = a^2(1 - e^2)$, o que pode ser facilmente derivado pelo teorema de Pitágoras colocando-se o ponto P(r,θ) em $\theta = 90^o$, e substituindo-se (c) em (a), temos a equação de uma elipse em coordenadas cartesianas:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ou

$$x = a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

A área da elipse é dada por:

$$A = 4\int_0^b dy \int_o^x dx$$

$$A = 4\int_0^b a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dy$$

Substituindo-se $y = b\,\mathrm{sen}z$, e $dy = b\cos z\, dz$

$$A = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\mathrm{sen}z)^2}\,\cos z\, dz$$

e, como $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, logo $1 - \mathrm{sen}^2 z = \cos^2 z$, resulta:

$$A = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 z\, dz$$

Como

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z\, dz = \pi/4$$

$$\boxed{A = \pi ab}$$

10.2.2 As três leis

1. Lei das órbitas elípticas (1609): a órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol em um dos focos. Como conseqüência da órbita ser elíptica, a distância do Sol ao planeta varia ao longo de sua órbita.

2. Lei da áreas (1609): a reta unindo o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. O significado físico dessa lei é que a velocidade orbital não é uniforme, mas varia de forma regular: quanto mais distante o planeta está do Sol, mais devagar ele se move. Dizendo de outra maneira, essa lei estabelece que *a velocidade areal é constante.*

3. Lei harmônica (1618): o quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol. Essa lei estabelece que planetas com órbitas maiores se movem mais lentamente em torno do Sol e, portanto, isso implica que a força entre o Sol e o planeta decresce com a distância ao Sol.

   Sendo P o período sideral do planeta, a o semi-eixo maior da órbita, que é igual à distância média do planeta ao Sol, e K uma constante, podemos expressar a 3^a lei como:

$$\boxed{P^2 = Ka^3}$$

Se medimos P em anos (o período sideral da Terra), e a em unidades astronômicas (a distância média da Terra ao Sol), então K = 1, e podemos escrever a 3^a lei como:

$$P^2 = a^3$$

A tabela a seguir mostra como fica a 3^a Lei de Kepler para os planetas visíveis a olho nu.

Planeta	Semi-eixo Maior (UA)	Período (anos)	a^3	P^2
Mercúrio	0,387	0,241	0,058	0,058
Vênus	0,723	0,615	0,378	0,378
Terra	1,000	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	3,537	3,537
Júpiter	5,203	11,862	140,8	140,7
Saturno	9,534	29,456	867,9	867,7

10.3 Galileo

Uma grande contribuição ao Modelo Heliocêntrico foi dado pelo italiano Galileo Galilei (1564 - 1642). Galileo foi o pai da moderna física experimental e da astronomia telescópica. Seus experimentos em mecânica estabeleceram os conceitos de inércia e de que a aceleração de corpos em queda livre não depende de seu peso, que foram mais tarde incorporados às leis do movimento de Newton.

Galileo começou suas observações telescópicas em 1610, usando um telescópio construído por ele mesmo. No entanto, não cabe a Galileo o crédito da invenção do telescópio, pois o primeiro telescópio foi patenteado pelo holandês Hans Lippershey, em 1609. Galileo soube dessa descoberta em 1609, e, sem ter visto o telescópio de Lippershey, construiu o seu próprio, com aumento de 3 vezes. Em seguida, ele construiu outros instrumentos, e o melhor tinha aumento de 30 vezes. Galileo, apontando o telescópio para o céu, fez várias descobertas importantes, como:

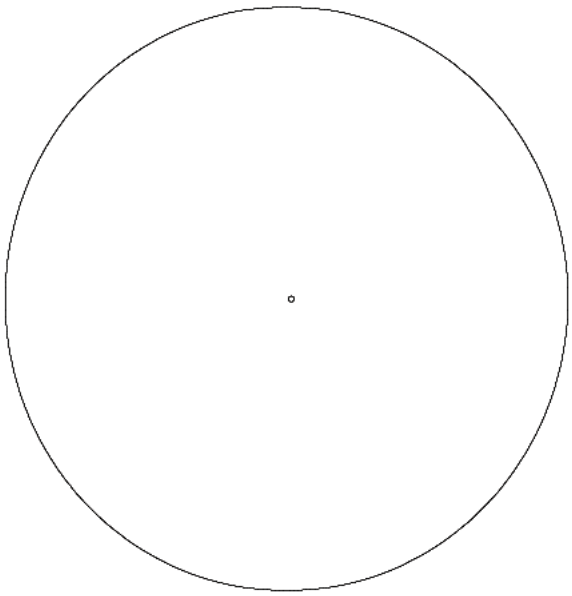


Figura 10.2: Embora as órbitas dos planetas sejam elipses, as elipticidades são tão pequenas que elas se parecem com círculos. Nesta figura mostramos a elipse que descreve a órbita da Terra em torno do Sol, na forma correta. A posição do Sol, no foco, está marcada por um pequeno círculo.

- descobriu que a Via Láctea era constituída por uma infinidade de estrelas;

- descobriu que Júpiter tinha quatro satélites, ou luas, orbitando em torno dele, com período entre 2 e 17 dias. Esses satélites são chamados "galileanos", e são: Io, Europa, Ganimedes e Calisto[1]. Desde então, mais 35 satélites foram descobertos em Júpiter.

  Essa descoberta de Galileo foi particularmente importante porque mostrou que podia haver centros de movimento que, por sua vez, também estavam em movimento e, portanto, o fato da Lua girar em torno da

[1] O astrônomo alemão Simon Marius (Mayr) (1573-1624) afirma ter descoberto os satélites algumas semanas antes de Galileo, mas Galileo, descobrindo-os independentemente em 7 e 13 de janeiro de 1610, publicou primeiro, no seu *Siderius Nuncius*, em março de 1610. Os nomes dos satélites foram dados por Marius em 1614, seguindo sugestão, da mitologia, de Johannes Kepler.

Terra não implicava que a Terra estivesse parada;

- descobriu que Vênus passa por um ciclo de fases, assim como a Lua.

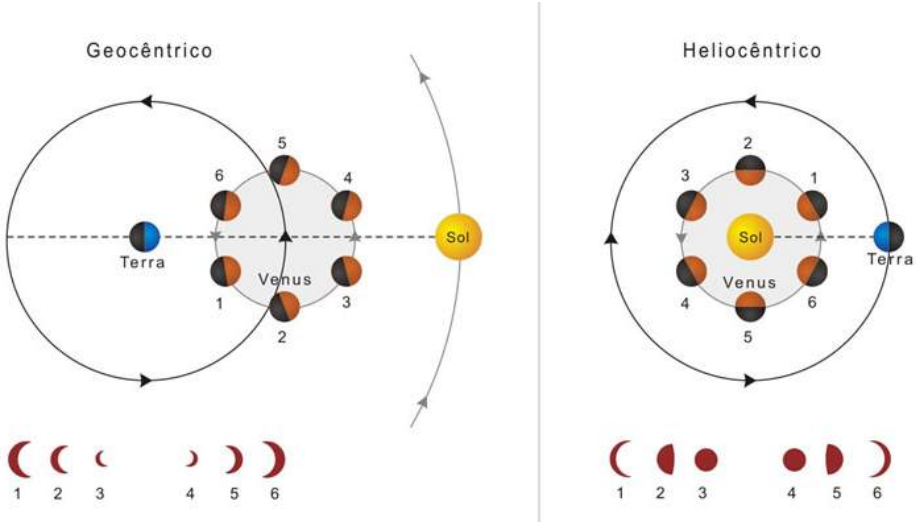


Figura 10.3: Posições relativas de Vênus em relação à Terra e ao Sol nos sistemas geocênctrico e heliocêntrico e as formas como seria visto por um observador na Terra quando estivesse em diferentes pontos da órbita. No sistema geocêntrico o planeta ficaria o tempo todo com a maior parte de sua superfície iluminada voltada na direção oposta à da Terra, e seria visto sempre com um crescente ou minguante côncavo; o sistema heliocêntrico reproduz as fases que são observadas ao telescópio.

Essa descoberta também foi fundamental porque, no sistema ptolemaico, Vênus está sempre mais próximo da Terra do que o Sol, e como Vênus está sempre próximo do Sol, ele nunca poderia ter toda sua face iluminada voltada para nós e, portanto, deveria sempre aparecer como nova ou crescente. Ao ver que Vênus muitas vezes aparece em fase quase totalmente cheia, Galileo concluiu que ele viaja ao redor do Sol, passando às vezes pela frente dele e outras vezes por trás dele, e não revolve em torno da Terra;

- descobriu a superfície em relevo da Lua, e as manchas do Sol. Ao ver que a Lua tem cavidades e elevações assim como a Terra, e que o Sol também não tem a superfície lisa, mas apresenta marcas, provou que os

corpos celestes não são esferas perfeitas, mas sim têm irregularidades, assim como a Terra. Portanto a Terra não é diferente dos outros corpos, e pode ser também um corpo celeste.

As descobertas de Galileo proporcionaram evidências em suporte ao sistema heliocêntrico. Por causa disso, ele foi chamado à depor ante a Inquisição Romana, sob acusação de heresia, e obrigado a se retratar. Somente em setembro de 1822, o Santo Ofício decidiu retirar as suas obras, assim como as de Copérnico e de Kepler, do Índice de Livros Proibidos. Galileo foi redimido em 1992, quando a comissão constituída pelo Papa João Paulo II [Karol Joseph Wojtyla (1920-2005)] reconheceu o erro do Vaticano.

Capítulo 11

Newton

Estudando o movimento dos corpos, Galileo Galilei (1564–1642) descobriu, através de experimentos, que "um corpo que se move, continuará em movimento a menos que uma força seja aplicada e que o force a parar." Galileo argumentou que o movimento é tão natural quanto o repouso, isto é, um corpo que está em repouso permanece em repouso, a menos que seja submetido a uma força que o faça mover-se. Se um objeto já está se movimentando, ele continuará em movimento, a menos que seja submetido a uma força que o faça parar.

Galileo, que descobriu os satélites de Júpiter, comunicou seus dados a Kepler, que verificou que eles obedeciam às Três Leis de Kepler, porém com um valor da constante **K** diferente na 3^a. Lei.

Sessenta anos depois, o inglês Isaac Newton (1643-1727) foi quem deu uma explicação completa ao movimento e à forma como as forças atuam. A descrição está contida nas suas 3 leis.

Primeira Lei: **Inércia**, elaborada a partir de Galileo: em ausência de forças externas, um objeto em repouso permanece em repouso, e um objeto em movimento permanece em movimento, ficando em movimento retilíneo e com velocidade constante. Essa propriedade do corpo que resiste à mudança, chama-se inércia. A medida da inércia de um corpo é seu *momentum*. Newton definiu o *momentum* de um objeto como sendo proporcional à sua velocidade. A constante de proporcionalidade, que é a sua propriedade que resiste à mudança, é a sua massa:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{constante se } \vec{F} = 0$$

Segunda Lei: **Lei da Força**, relaciona a mudança de velocidade do objeto com a força aplicada sobre ele. A força líquida aplicada a um objeto é igual

à massa do objeto vezes a aceleração causada ao corpo por essa força. A aceleração é na mesma direção da força.

$$\boxed{\vec{F} = m \times \vec{a} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Terceira Lei: **Ação e Reação**, estabelece que, se o objeto exerce uma força sobre outro objeto, esse outro exerce uma força igual e contrária.

Newton pôde explicar o movimento dos planetas em torno do Sol, assumindo a hipótese de uma força dirigida ao Sol, que produz uma aceleração que força a velocidade do planeta a mudar de direção continuamente. Como foi que Newton descobriu a Lei da Gravitação Universal? Considerando o movimento da Lua em torno da Terra e as leis de Kepler.

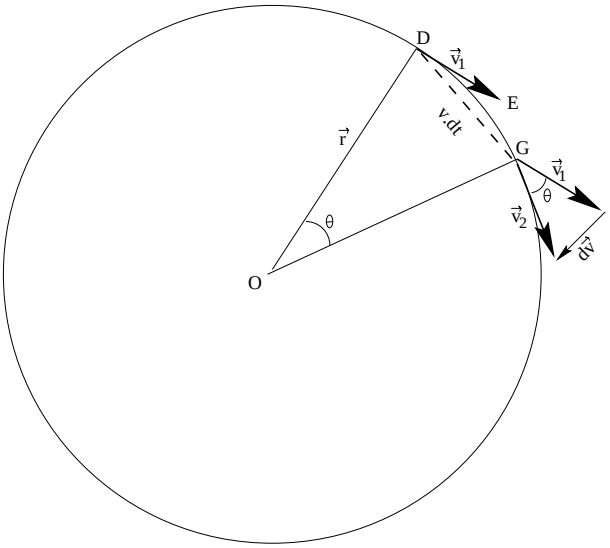


Figura 11.1: Aceleração centrípeta.

Aceleração em órbitas circulares: o holandês Christiaan Huygens (1629–1695), em 1673, e independentemente Newton, em 1665, (mas publicado apenas em 1687, no *Principia*), descreveram a aceleração centrípeta.

Consideremos uma partícula que se move em um círculo (figura 11.1). No instante t a partícula está em D, com velocidade $\vec{v}_1$ na direção DE. Pela 1a. lei de Newton, se não existe uma força agindo sobre o corpo, ele continuará em movimento na direção DE. Após Δt, a partícula está em G, e percorreu

a distância $v \times \Delta t$, e está com velocidade $\vec{v}_2$, de mesmo módulo v, mas em outra direção.

Seja θ o ângulo entre o ponto D e o ponto G. θ também é o ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$\theta = \frac{v\Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

e, portanto, a aceleração:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Se a partícula tem massa m, a força central necessária para produzir a aceleração é:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Claramente, a dedução é válida se Δv e Δt são extremamente pequenos, e é um exemplo da aplicação do cálculo diferencial, que foi desenvolvido pela primeira vez por Newton.

Um pouco de história

Em sua próprias palavras, Newton, como citado no prefácio do catálogo dos *Portsmouth Papers*, descreve como utilizou as Leis de Kepler para derivar a gravitação universal. *"In the year 1665, I began to think of gravity extending to the orb of the Moon, and having found out how to estimate the force with which [a] globe revolving within a sphere presses the surface of the sphere, from Kepler's Rule of the periodical times being in a sesquialterate proportion of their distances from the centers of their orbs I deduced that the forces which keep the Planets in their orbs must [be] reciprocally as the squares of their distances from the centers about which they revolve: and thereby compared the force requisite to keep the Moon in her orb with the force of gravity as the surface of the earth, and found them answer pretty nearly."*

Em 1668, Newton construiu um telescópio refletor, usado atualmente em todos os observatórios profissionais, com um espelho curvo ao invés de uma lente, como nos telescópios refratores de Galileo e Kepler. O telescópio de Galileo, construído em 1609, era composto de uma lente convexa e uma lenta côncava. Kepler, no livro *Dioptrice*, publicado em 1611, explicou que seria melhor construir um telescópio com duas lentes convexas, como se usa atualmente. A descoberta de Newton do efeito de um prisma separando um feixe de luz branca é a base da espectroscopia.

Christiaan Huygens (1629–1695), que também construía seus telescópios, descobriu, em 1655, o satélite Titan de Saturno, e que as "orelhas" de Saturno descobertas em 1610 eram, na verdade, anéis (*De Saturni Luna Observatio Nova, 1656* e *Sistema Saturnia, 1659*). Em 1656, inventou o relógio de pêndulo e o patenteou no ano seguinte. Em 1673, publicou o *Oscillatorium Horologium*, no qual explicou o movimento do pêndulo e descreveu a força centrípeta.

11.1 Gravitação universal

Obviamente, a Terra exerce uma atração sobre os objetos que estão sobre sua superfície. Newton se deu conta de que essa força se estendia até a Lua e produzia a aceleração centrípeta necessária para manter a Lua em órbita. O mesmo acontece com o Sol e os planetas. Então, Newton levantou a hipótese da existência de uma força de atração universal entre os corpos em qualquer parte do Universo.

A força centrípeta que o Sol exerce sobre um planeta de massa m, que se move com velocidade v a uma distância r do Sol, é dada por:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Assumindo, nesse instante, uma órbita circular, que mais tarde será generalizada para qualquer tipo de órbita, o período P do planeta é dado por:

$$P = \frac{2\pi r}{v} \Longrightarrow v = \frac{2\pi r}{P}$$

Pela 3^a. Lei de Kepler,

$$P^2 = Kr^3$$

onde a constante K depende das unidades de P e r. Temos, então, que

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{Kr} \Longrightarrow v^2 \propto \frac{1}{r}$$

Seja m a massa do planeta e M a massa do Sol. A expressão da força centrípeta exercida pelo Sol no planeta pode, então, ser escrita como:

$$F \propto \frac{m}{r^2}$$

e, de acordo com a 3^a. lei de Newton, o planeta exerce uma força igual e contrária sobre o Sol. A força centrípeta exercida pelo planeta sobre o Sol, de massa M é dada por:

$$F \propto \frac{M}{r^2}$$

Newton deduziu, então, que:

$$\boxed{F = -\frac{GMm}{r^2}}$$

onde G é uma constante de proporcionalidade. Tanto o Sol quanto o planeta que se move em torno dele experimentam a mesma força, mas o Sol

permanece aproximadamente no centro do sistema solar porque a massa do Sol é aproximadamente mil vezes maior que a massa de todos os planetas somados.

Newton, então, concluiu que, para que a atração universal seja correta, deve existir uma força atrativa entre pares de objetos em qualquer região do universo, e essa força deve ser proporcional a suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias. A constante de proporcionalidade G depende das unidades das massas e da distância.

11.2 Derivação da "constante" K

Suponha dois corpos de massas m_1 e m_2, com velocidades v_1 e v_2, em órbita circular em torno do centro de massa comum, cuja distância a cada um é r_1 e r_2, respectivamente.

A atração gravitacional é dada por:

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

e as forças centrípetas por:

$$F_1 = \frac{m_1v_1^2}{r_1}$$

e

$$F_2 = \frac{m_2v_2^2}{r_2}$$

Como:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \Longrightarrow v_1^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2}$$

e o mesmo para m_2,

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_1v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2}$$

e

$$\frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2}$$

Eliminando-se m_1 na primeira e m_2 na segunda e somando-se, obtemos:

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2(r_1 + r_2)}{P^2}$$

ou:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}(r_1 + r_2)^3$$

Comparando essa expressão com a forma original da 3^a lei de Kepler:

$$P^2 = Ka^3$$

vemos que

$$\boxed{K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}} \tag{11.1}$$

Isso nos diz que a "constante" K, definida como a razão $\frac{P^2}{a^3}$, só é constante realmente se $(m_1 + m_2)$ permanece constante. Isso é o que acontece no caso dos planetas do sistema solar: como todos têm massa muito menor do que a massa do Sol, a soma da massa do Sol com a massa do planeta é sempre aproximadamente a mesma, independente do planeta. Por essa razão Kepler, ao formular sua 3^a lei, não percebeu a dependência com a massa.

Mas, se considerarmos sistemas onde os corpos principais são diferentes, então as razões $\frac{P^2}{a^3}$ serão diferentes. Por exemplo, todos os satélites de Júpiter têm praticamente a mesma razão $\frac{P^2}{a^3} = K_J$, que portanto podemos considerar constante entre elas, mas essa constante é diferente da razão $\frac{P^2}{a^3} = K_\odot$ comum aos planetas do sistema solar. Para estabelecermos a igualdade temos que introduzir a massa:

$$(M_\odot + m_p)\left(\frac{P^2}{a^3}\right)_\odot = (M_J + m_s)\left(\frac{P^2}{a^3}\right)_J = constante$$

ou, considerando as massas dos planetas desprezáveis frente à massa do Sol, e as massas dos satélites desprezáveis frente à massa de Júpiter, e representando a razão $\frac{P^2}{a^3}$ pela letra K, temos:

$$M_\odot\, K_\odot = M_J\, K_J = constante$$

Generalizando para quaisquer sistemas, podemos escrever:

$$M_1\, K_1 = M_2\, K_2 = ... = M_n\, K_n = constante$$

onde K_n é a razão entre o quadrado do período e o cubo do semi-eixo maior da órbita para os corpos do sistema de massa M_n.

Pela equação 11.1 sabemos que o valor dessa constante é $\frac{4\,\pi^2}{G}$, e temos então:

$$M_1K_1 = M_2K_2 = ... = M_nK_n = \frac{4\,\pi^2}{G}$$

Existem casos de sistemas gravitacionais em que não podemos desprezar a massa de nenhum corpo frente à do outro, como, por exemplo, muitos sistemas binários de estrelas.

Nesses casos, é mais correto escrever:

$$(M+m)_1K_1 = (M+m)_2K_2 = ... = (M+m)_nK_n = \frac{4\,\pi^2}{G} \qquad (11.2)$$

11.3 Determinação de massas

A terceira lei de Kepler na forma derivada por Newton pode se escrita como:

$$\boxed{(M+m) = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{a^3}{P^2}} \qquad (11.3)$$

que nada mais é do que a última parte da equação 11.2, onde foi substituído K por $\frac{P^2}{a^3}$.

No sistema internacional de unidades, $G = 6,673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$, ou $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$ e foi medida em laboratório pelo físico inglês Henry Cavendish (1731-1810) em 1798.

Mas, em astronomia, muitas vezes é mais conveniente adotar outras unidades que não as do sistema internacional. Por exemplo, em se tratando de sistemas nos quais o corpo maior é uma estrela, costuma-se determinar suas massas em unidades de massa do Sol, ou massas solares (massa do Sol = $M_\odot$), seus períodos em anos e suas distâncias entre si em unidades astronômicas. Em sistemas em que o corpo maior é um planeta, é mais conveniente expressar sua massa em unidades de massas da Terra (massa da Terra = $M_\oplus$), seu período em meses siderais e suas distâncias relativas em termos da distância entre Terra e Lua. Em ambos os sistemas o valor de G é $4\pi^2$, e a terceira lei de Kepler fica:

$$M + m = \frac{a^3}{P^2}$$

a qual é especialmente útil para a determinação de massas de corpos astronômicos.

Por exemplo, se se observa o período orbital e a distância de um satélite a seu planeta, pode-se calcular a massa combinada do planeta e do satélite,

em massas solares ou massas terrestres. Como a massa do satélite é muito pequena comparada com a massa do planeta, a massa calculada $(m + M)$ é essencialmente a massa do planeta (M).

Da mesma forma, observando-se o tamanho da órbita de uma estrela dupla, e o seu período orbital, pode-se deduzir as massas das estrelas no sistema binário. De fato, pode-se usar a terceira lei de Kepler na forma revisada por Newton para estimar a massa de nossa Galáxia e de outras galáxias.

Exemplo 1:

Deimos, o menor dos 2 satélites de Marte, tem período sideral de 1,262 dias e uma distância média ao centro de Marte de 23500 km. Qual a massa de Marte?

Podemos resolver este problema de diversas maneiras. Aqui vamos mostrar algumas delas.

1. Calculando a massa de Marte diretamente em massas terrestres. (Vamos usar a notação: Marte = Ma; Deimos = D; Terra = $\oplus$ e Lua = L).

   (a) Uma maneira de resolver o problema é compararando os parâmetros da órbita de Deimos em torno de Marte com os parâmetros da órbita da Lua em torno da Terra, sem introduzir o valor da constante.

   Desprezando a massa de Deimos e da Lua frente às massas de seus respectivos planetas, podemos escrever:

$$M_{Ma}K_{Ma} = M_{\oplus}K_{\oplus}$$

   sendo $K_{Ma} = (P_D)^2/(a_D)^3$ e $K_{\oplus} = (P_L)^2/(a_L)^3$. Então:

$$\frac{M_{Ma}}{M_{\oplus}} = \frac{(P_L)^2/(a_L)^3}{(P_D)^2/(a_D)^3} = \left(\frac{P_L}{P_D}\right)^2 \left(\frac{a_D}{a_L}\right)^3$$

   Sabendo que:

$$P_L = 27,32\,\text{dias}$$

$$P_D = 1,262\,\text{dias}$$

$$a_L = 384\,000\,\text{km}$$

$$a_D = 23\,500\,\mathrm{km}$$

Temos:

$$\frac{M_{Ma}}{M_\oplus} = \left(\frac{27,32\,\mathrm{dias}}{1,262\,\mathrm{dias}}\right)^2 \left(\frac{23500\,\mathrm{km}}{384000\,\mathrm{km}}\right)^3 = 0,1$$

$$\boxed{M_{Ma} = 0,1\,M_\oplus}$$

(b) Podemos chegar ao mesmo resultado usando a expressão formal da 3^a lei de Kepler (equação 11.3), escrevendo as distâncias em termos da distância Terra-Lua, as massas em massas terrestres, e os períodos em termos do período da Lua, ou seja, usando o sistema de unidades [distância T-L ($\mathrm{d_{TL}}$), massa terrestre ($M_\oplus$), mês sideral (mes)]:

$$M_{Ma} + m_D \simeq M_{Ma} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(a_D)^3}{(P_D)^2}$$

Fazendo as transformações de unidades:

$$P_D = (1,262/27,32)\,\mathrm{meses} = 4,62 \times 10^{-2}\,\mathrm{meses}$$

$$a_D = (23500/384000)\,\mathrm{d_{TL}} = 6,1 \times 10^{-2}\,\mathrm{d_{TL}}$$

$$G = 4\pi^2\,(\mathrm{d_{TL}})^3/(M_\oplus\,\mathrm{meses}^2) \Longrightarrow \frac{4\pi^2}{G} = 1\,(M_\oplus\,\mathrm{meses}^2)/(\mathrm{d_{TL}})^3$$

Temos:

$$M_{Ma} = \frac{\left(6,1 \times 10^{-2}\right)^3}{\left(4,62 \times 10^{-2}\right)^2} M_\oplus \Longrightarrow \boxed{M_{Ma} = 0,1\,M_\oplus}$$

2. Calculando diretamente a massa de Marte em massas solares ($M_\odot$).

(a) Compararando o movimento de Deimos em torno de Marte com o movimento da Terra em torno do Sol:

$$M_{Ma}K_{Ma} = M_\odot K_\odot$$

onde $K_\odot = (P_\oplus)^2/(a_\oplus)^3$ e $K_{Ma} = (P_D)^2/(a_D)^3$ Então:

$$\frac{M_{Ma}}{M_\odot} = \frac{(P_\oplus)^2/(a_\oplus)^3}{(P_D)^2/(a_D)^3} = \left(\frac{P_\oplus}{P_D}\right)^2 \left(\frac{a_D}{a_\oplus}\right)^3$$

Sabendo que:

$$P_\oplus = 365,25\,\text{dias}$$

$$P_D = 1,262\,\text{dias}$$

$$a_\oplus = 1,5 \times 10^8\,\text{km}$$

$$a_D = 2,35 \times 10^4\,\text{km}$$

Temos:

$$\frac{M_{Ma}}{M_\odot} = \left(\frac{365,25\,\text{dias}}{1,262\,\text{dias}}\right)^2 \left(\frac{2,35 \times 10^4\,\text{km}}{1,5 \times 10^8\,\text{km}}\right)^3 = 3,2 \times 10^{-7}$$

$$\boxed{M_{Ma} = 3,2 \times 10^{-7}\,M_\odot}$$

(b) Usando a equação 11.3 e adotando o sistema de unidades [UA, $M_\odot$, ano]

$$M_{Ma} + m_D \simeq M_{Ma} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{{a_D}^3}{{P_D}^2}$$

Fazendo a transformação de unidades:

$$P_D = (1,262/365,25)\,\text{anos} = 3,46 \times 10^{-3}\,\text{anos}$$

$$a_D = (2,35 \times 10^4/1,5 \times 10^8)\,\text{UA} = 1,57 \times 10^{-4}\,\text{UA}$$

$$G = 4\pi^2\,\text{UA}^3/(M_\odot\,\text{ano}^2) \Longrightarrow 4\pi^2/G = 1\,(M_\odot\,\text{ano}^2)/\text{UA}^3$$

Temos:

$$M_{Ma} = \frac{(1,57 \times 10^{-4})^3}{(3,46 \times 10^{-3})^2} M_\odot \Longrightarrow \boxed{M_{Ma} = 3,2 \times 10^{-7} M_\odot}$$

3. Calculando diretamente a massa de Marte em quilogramas, ou seja, usando os sistema internacional [m, kg, s]

$$M_{Ma} + m_D \simeq M_{Ma} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(a_D)^3}{(P_D)^2}$$

Escrevendo todos os dados em unidades do sistema internacional:

$$P_D = 1,262\,\text{dias} = 1,09 \times 10^5\,\text{s}$$

$$a_D = 23\,500\,\text{km} = 2,35 \times 10^5\,\text{m}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{kg}\,\text{s}^2)$$

Temos:

$$M_{Ma} = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11}} \frac{\mathrm{kg\,s^2}}{\mathrm{m^3}} \frac{(2,35 \times 10^5 \mathrm{m})^3}{(1,09 \times 10^5 \mathrm{s})^2}$$

$$\boxed{M_{Ma} = 6,4 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}}$$

Exemplo 2:

Duas estrelas idênticas ao Sol giram uma em torno da outra a uma distância de 0,1 UA. Qual o período de revolução das estrelas?

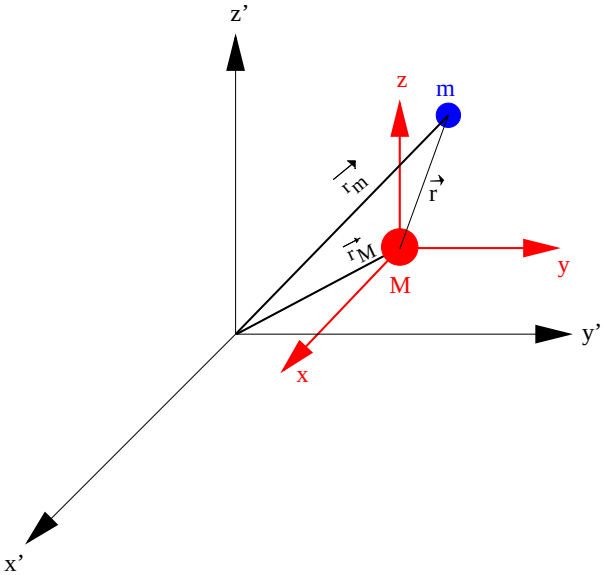
$$2M_\odot = \frac{(0,1UA)^3}{P^2} \Longrightarrow P = \sqrt{\frac{0,001}{2}} = 0,022\,\mathrm{anos}$$

Capítulo 12

Leis de Kepler generalizadas

A lei da gravitação universal, que relaciona a força entre duas massas M e m, separadas por $\vec{r}$, derivada por Newton é dada por:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



12.1 Equação do movimento

Vamos utilizar a nomenclatura:

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}}$$

Na verdade, qualquer que seja a variável x,

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$$

Da lei da gravitação de Newton se pode derivar as leis de Kepler. Aplicando-se a lei da gravitação e a segunda lei do movimento ($\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$), temos:

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

e pela lei da ação e reação,

$$M\ddot{\vec{r}}_M = G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

onde

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$$

e $\vec{r}_m$ e $\vec{r}_M$ são os vetores posição de m e M com relação a um sistema inercial.

Essas equações podem ser escritas como:

$$\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}}_M = \frac{Gm}{r^3}\vec{r}$$

Subtraindo-se essas duas equações:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r}$$

Definindo-se $\mu = G(m + M)$, podemos escrever:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \tag{1}$$

Essa é a equação diferencial vetorial do *movimento relativo de dois corpos*. A solução dessa equação nos dá a órbita relativa dos corpos (planeta, cometa, satélite, etc). Em princípio, a solução descreve como o raio vetor $\vec{r}$ varia com o tempo, mas sua solução não é simples. Como a equação é diferencial vetorial de segunda ordem, isto é, envolve segunda derivada de vetores, precisamos de seis constantes para obter a solução. Por exemplo, se soubermos a posição tridimensional e a velocidade de um planeta num certo tempo, poderemos calcular sua posição e velocidade em qualquer outro tempo.

Nossa solução envolve demonstrar que a conservação da energia e do *momentum* angular são conseqüências das leis de Newton.

12.2 Conservação da energia total do sistema

Multiplicando-se a equação (1) escalarmente por $\dot{\vec{r}}$ temos:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

Como $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e $\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$, temos:

$$\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

Seja α o ângulo entre o raio vetor e a velocidade:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\, v\, \cos\alpha$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = v\, \dot{v}\, \cos(-\alpha)$$

Tendo em vista que $cos(-\alpha) = \cos\,\alpha$, e ainda que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\, \dot{v}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) = -\frac{\mu \dot{r}}{r^2}\frac{r}{r} = -\frac{\mu \dot{r} r}{r^3}$$

então:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 0$$

de onde se conclui, imediatamente, que:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \epsilon = \text{constante} \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m+M)}{r} = \epsilon = \text{constante}$$

que é a equação de energia do sistema (ϵ = energia por unidade de massa).

12.3 Conservação do momentum angular

Multiplicando-se vetorialmente a equação de movimento (1) por $\vec{r}$ pela esquerda, temos:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

Como $\vec{r} \times \vec{r} \equiv 0$, temos

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

Mas

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

Como $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} \equiv 0$, a equação acima implica

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

ou o termo entre parênteses deve ser uma constante, que vamos chamar de *momentum* angular, $\vec{h}$:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{h} = \text{constante} \tag{3}$$

Essa é a lei da conservação do *momentum* angular. h é o *momentum* angular por unidade de massa. Note que $\vec{h}$, o vetor *momentum* angular, é sempre perpendicular ao movimento, por sua definição (3).

12.4 Primeira lei de Kepler: Lei das órbitas

Multiplicando-se vetorialmente a equação (1) por $\vec{h}$:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}(\vec{h} \times \vec{r}) \tag{4}$$

já levando-se em conta que: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. A parte da direita de (4) pode ser escrita como:

$$\frac{\mu}{r^3}(\vec{h} \times \vec{r}) = \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}$$

Como

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

então:

$$\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = \frac{\mu}{r^3}\vec{v}\, r^2 - \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} = \frac{\mu}{r}\vec{v} - \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\, \vec{r}$$

Como

$$\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu}{r}\vec{v} - \frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)\,\vec{r}$$

então:

$$\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{h}\times\vec{r}\right) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

O lado esquerdo da equação (4) pode ser escrito como:

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)$$

já que:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right) = \ddot{\vec{r}}\times\vec{h} + \dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{h}}$$

e como $\vec{h}$ é constante, $\dot{\vec{h}} = 0$. A equação (4) pode, portanto, ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

ou seja, integrando-se sobre t:

$$\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \frac{\mu}{r}\vec{r} + \vec{\beta}$$

onde $\vec{\beta}$ é um vetor constante. Como $\vec{h}$ é perpendicular ao plano da órbita, $\dot{\vec{r}}\times\vec{h}$ está no plano da órbita, junto com $\vec{r}$, de modo que $\vec{\beta}$ também. Na verdade, $\vec{\beta}$ está na direção do pericentro, como veremos a seguir.

Até agora, encontramos dois vetores constantes, $\vec{h}$ e $\vec{\beta}$, e um escalar constante, ϵ, de modo que já temos sete integrais. Entretanto, elas não são todas independentes. Por exemplo, como $\vec{\beta}$ está no plano da órbita, e $\vec{h}$ em um plano perpendicular a este, $\vec{\beta}\cdot\vec{h} = 0$.

Multiplicando-se escalarmente por $\vec{r}$, temos:

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \frac{\mu}{r}\vec{r}\cdot\vec{r} + \vec{\beta}\cdot\vec{r}$$

Como

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\cdot h = \frac{\mu}{r}r^2 + \beta\, r\cos\gamma$$

onde γ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{\beta}$, e $\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{h}$, temos:

$$h^2 = \mu\, r + \beta\, r\,\cos\gamma$$

ou

$$h^2 = r\,\mu\left(1 + \frac{\beta}{\mu}\cos\gamma\right)$$

e, finalmente:

$$\boxed{r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{\beta}{\mu}\cos\gamma}}$$

que é a equação da trajetória. Essa é a equação de uma cônica com foco na origem:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

onde p é chamado de *semi-lactus rectum*, e é a excentricidade e θ é o ângulo entre o foco e o vetor posição $\vec{r}$. As cônicas foram estudadas pelo matemático grego Apolônio de Perga (c.262 a.C.-c.190 a.C.) em 200 a.C. Somente para

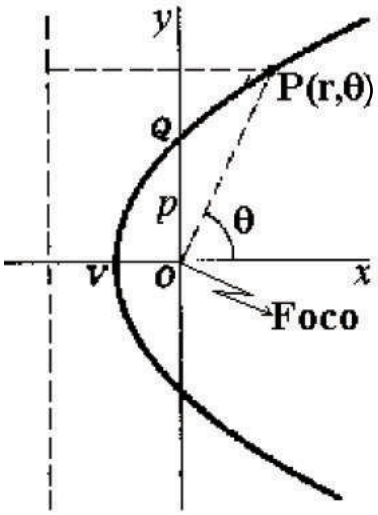


Figura 12.1: Componentes de uma cônica.

$\beta/\mu < 1$ o movimento é finito, e a órbita é uma elipse. Note que r é mínimo quando $\gamma = 0$, isto é, na direção de $\vec{\beta}$, provando que $\vec{\beta}$ aponta na direção do pericentro.

Lembrando que $\mu = G(m + M)$, e comparando com a equação da elipse

$$\boxed{r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\cos\theta}}$$

vemos que a equação da trajetória descreve uma elipse com:

$$\frac{h^2}{\mu} \equiv p = a(1 - e^2)$$

e

$$e = \frac{\beta}{\mu}$$

p é o *semi-lactus rectum*, e é a excentricidade da elipse, e $\theta = \gamma$ é o ângulo entre o ponto da elipse mais próximo do foco (pericentro) e o vetor posição $\vec{r}$. Essa é a demonstração de que a órbita é elíptica, como diz a primeira lei de Kepler.

Se $e = \beta/\mu \geq 1$, o movimento é infinito, isto é, não se repete. Se $e = 1$ o corpo se move em uma parábola, e se $e > 1$ em uma hipérbole, o que não é o caso dos planetas, mas as vezes dos cometas e asteróides.

Da equação que introduziu $\vec{\beta}$ temos:

$$\vec{\beta} = \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \frac{\mu}{r}\,\vec{r}$$

$$\beta^2 = (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) + \mu^2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^2} - 2(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \frac{\mu}{r}\,\vec{r}$$

Como $\dot{\vec{r}}$ é perpendicular a $\vec{h}$, pela definição do *momentum* angular $\vec{h}$:

$$|\dot{\vec{r}} \times \vec{h}| = |\dot{\vec{r}}||\vec{h}| \rightarrow ((\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot (\vec{r} \times \vec{h}) = v^2 h^2$$

de modo que:

$$\beta^2 = v^2 h^2 + \mu^2 - 2\frac{\mu}{r}\,[\dot{\vec{r}} \times \vec{h} \cdot \vec{r}]$$

Mas

$$[\dot{\vec{r}} \times \vec{h} \cdot \vec{r}] = -[\,\vec{h} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}] = [\,\vec{h} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{r}]$$

e como $\dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{h}$,

$$\beta^2 = v^2 h^2 + \mu^2 - 2\frac{\mu}{r}\,h^2$$

Como $e = \frac{\beta}{\mu}$, $\beta^2 = \mu^2 e^2$, logo:

$$\mu^2 e^2 - \mu^2 = v^2 h^2 - 2\frac{\mu}{r}\,h^2 = 2h^2\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = 2h^2\epsilon$$

ou seja:

$$\mu^2(e^2-1) = 2h^2\epsilon \rightarrow \epsilon = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2-1)$$

Dessa forma, fica provado que a excentricidade depende da energia do sistema.

Resumindo, a lei das órbitas elípticas dos planetas é uma conseqüência do tipo de força que atua entre os planetas e o Sol. Newton mostrou que as únicas órbitas possíveis para um corpo interagindo gravitacionalmente com outro são as secções cônicas: círculo, elipse, parábola ou hipérbole.

Um círculo pode ser pensado como uma elipse com $e = 0$ e $a = b$. Uma parábola pode ser pensada como uma elipse com $e = 1$ e $a = \infty$. Uma hipérbole pode ser pensada como uma elipse com $e > 1$ e $a < 0$.

Se o corpo tiver movimento periódico, como os planetas, sua trajetória será circular ou elíptica; se o movimento não for periódico, como é o caso de alguns cometas e asteróides, a trajetória será parabólica ou hiperbólica. O fator decisivo sobre o tipo de órbita é a energia do sistema.

12.5 Segunda lei de Kepler: Lei das áreas

A partir da conservação do *momentum* angular (3),

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

e escrevendo em coordenadas polares, $\vec{v} = d\vec{r}/dt = r\, d\Phi/dt\, \hat{e}_\Phi + dr/dt\hat{e}_r$, onde $\hat{e}_\Phi$ é o vetor unitário na direção de Φ e $\hat{e}_r$ o vetor unitário na direção de $\vec{r}$. Logo

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = h = r \cdot r\frac{d\Phi}{dt} \cdot \text{sen}(\hat{e}_r, \hat{e}_\Phi)$$

Como $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\Phi$ são perpendiculares entre si, segue que

$$h = r^2\dot{\Phi} = \text{constante}$$

Sejam P_1 e P_2 duas posições sucessivas do corpo num intervalo δt. O elemento de área nesse intervalo de tempo é:

$$\delta A = \frac{r \cdot r\delta\Phi}{2}$$

ou

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{r^2}{2}\frac{\delta\Phi}{\delta t}$$

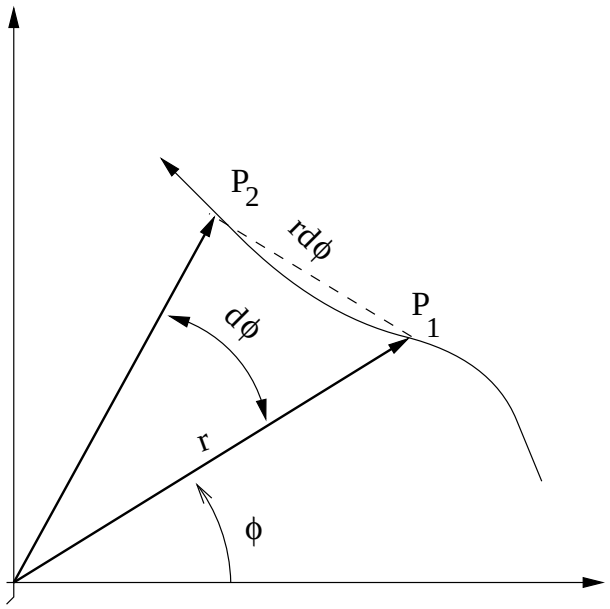


Figura 12.2: Trajetória em coordenadas esféricas.

Para $\delta t \to 0$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\Phi}}{2} = \frac{h}{2} \tag{5}$$

Como a conservação do *momentum* angular (3) prova que h é uma constante, dA/dt é uma constante, que é a lei das áreas. A lei das áreas de Kepler é, portanto, um conseqüência direta da lei de conservação do *momentum* angular.

12.6 Terceira lei de Kepler: Lei harmônica

Duas relações das elipses são:

$$A = \pi ab$$

onde A é a área, a o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor, e

$$b = a\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Da lei das áreas, (5), temos:

$$dA = \frac{h}{2}dt$$

Integrando-se sobre um período, P,

$$\pi ab = \frac{h}{2}P \tag{6}$$

Substituindo-se b acima, e a definição do *semi-lactus rectum*,

$$b = a\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}} = (pa)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{ah^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Elevando-se (6) ao quadrado:

$$\pi^2 a^2 \frac{a}{\mu} h^2 = \frac{h^2}{4}P^2$$

ou

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$$

Essa é a terceira lei de Kepler, generalizada por Newton,

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}a^3} \tag{7}$$

Dessa forma fica demonstrado que as três leis de Kepler podem ser deduzidas das leis de Newton.

A "constante" de Kepler depende, portanto, da soma das massas dos corpos. No caso dos planetas do sistema solar, que orbitam o Sol, essa soma é praticamente igual à massa do Sol e, portanto, aproximadamente constante. Na secção 11.2, vimos como a 3.^{a} lei de Kepler, na forma derivada por Newton é usada para determinar massas de corpos astronômicos.

12.7 A equação da energia

Podemos derivar a equação da energia calculando-se o valor do *momentum* angular e da energia no periélio, já que são constantes. No periélio:

$$r_p = a(1 - e)$$

$$h = r_p v_p$$

já que $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares entre si. Para a energia (2), temos:

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{r_p}\left(\frac{h^2}{2r_p} - \mu\right)$$

Por outro lado, da definição do *semi-lactus rectum*, temos

$$h^2 = \mu\, p = \mu\, a(1-e^2)$$

Substituindo-se h e r_p em ϵ, temos:

$$\epsilon = \frac{1}{a(1-e)}\left[\frac{\mu\, a(1-e^2)}{2a(1-e)} - \mu\right] = \frac{\mu}{a(1-e)}\left[\frac{(1+e)}{2} - 1\right]$$

pois $(1-e)(1+e) = 1-e^2$,

$$\epsilon = \frac{\mu}{2a}\left[\frac{(1+e-2)}{(1-e)}\right] = -\frac{\mu}{2a}\frac{(1-e)}{(1-e)}$$

$$\boxed{\epsilon = -\frac{\mu}{2a}} \tag{8}$$

que é válido para qualquer órbita cônica e mostra que o semi-eixo maior da órbita só depende da energia do sistema.

$$\epsilon < 0 \Rightarrow a > 0 \qquad \text{elipse}$$

$$\epsilon = 0 \Rightarrow a = \infty \qquad \text{parábola}$$

$$\epsilon > 0 \Rightarrow a < 0 \qquad \text{hipérbole}$$

Da definição de *semi-lactus rectum* p,

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2) \Rightarrow a = \frac{h^2/\mu}{(1-e^2)}$$

Como a energia é definida por (8),

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2(1-e^2)}{2h^2}$$

Escrevendo a excentricidade em termos da energia:

$$-\frac{2h^2\epsilon}{\mu^2} = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2h^2\epsilon}{\mu^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2h^2\epsilon}{\mu^2}}$$

Logo, se:

$$\epsilon < 0 \Rightarrow e < 1 \qquad \text{elipse}$$

$$\epsilon = 0 \Rightarrow e = 1 \qquad \text{parábola}$$

$$\epsilon > 0 \Rightarrow e > 1 \qquad \text{hipérbole}$$

Das equações (2) e (8), vemos que

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

logo

$$\boxed{v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}}$$

que é a equação da velocidade do sistema.

12.7.1 Velocidade circular

Na órbita circular $a \equiv r$, e substituindo na equação da velocidade temos:

$$\boxed{v_{\text{circ}} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}}$$

Para um órbita circular, vemos que a energia total é negativa, já que:

$$\epsilon = \frac{\mu}{2r} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} = -\frac{G(M+m)}{2r} < 0$$

12.7.2 Velocidade de escape

Da equação de velocidade se pode deduzir facilmente a velocidade de escape do sistema, que representa a velocidade mínima para que o corpo escape da atração gravitacional do sistema. Essa velocidade é, por definição, aquela com a qual o corpo chega com velocidade zero no infinito ($v = 0$ em $r = \infty$), o que representa um órbita parabólica, já que $\epsilon = 0$. Assim, uma órbita parabólica pode ser considerada uma órbita elíptica com $e = 1$ e $a = \infty$. Nesse caso,

$$\epsilon = \frac{v_{\text{esc}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}} = \sqrt{2}v_{\text{circ}}}$$

Para um órbita hiperbólica, a energia total é positiva; a energia cinética é tão grande que a partícula pode escapar do sistema e se afastar dele. A parábola é o caso-limite entre a órbita fechada (elipse) e a hipérbole. Halley, usando o método de Newton, verificou que vários cometas têm órbita parabólica.

12.7.3 Problema de muitos corpos

Assumimos, até aqui, que a órbita é um problema de dois corpos. Na realidade, os planetas interferem entre si, perturbando a órbita dos outros. Ainda assim, suas órbitas não se desviam muito das cônicas, só que os elementos da órbita variam com o tempo e precisam ser calculados por aproximações sucessivas, pois a órbita não pode ser resolvida analiticamente. Para a órbita da Terra em torno do Sol, como a massa do Sol é 1047 vezes maior que a massa de Júpiter e Júpiter está 5,2 vezes mais distante do que o Sol, a força gravitacional de Júpiter sobre a Terra é 28 000 vezes menor que a do Sol e, portanto, seu efeito pode ser calculado pelo método das pertubações. Além disso, mesmo para só dois corpos macroscópicos, com a Terra e a Lua, a solução de dois corpos não é exata, pois nem a Terra nem a Lua são esferas perfeitas e, portanto, não se comportam como massas pontuais. Mais ainda, devido às marés, a Terra e a Lua não são sequer rígidas[1].

12.7.4 Exemplos

1) O Cometa Austin (1982g) se move em uma órbita parabólica. Qual foi sua velocidade em 8 de outubro de 1982, quando estava a 1,1 UA do Sol?

Como a órbita é parabólica, $\epsilon = 0$, e a velocidade chama-se velocidade de escape, v_{esc}, logo:

$$\epsilon = \frac{v_{esc}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2G(m + M_\odot)}{r}}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r}} = 40\,\mathrm{km/s}$$

2) o semi-eixo do planetóide 1982RA é de 1,568UA e sua distância ao Sol em 8 de outubro de 1982 era de 1,17 UA. Qual era sua velocidade?

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow \epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = 31\,\mathrm{km/s}$$

[1] O momento de quadrupolo da Terra e da Lua causam perturbações tanto perpendiculares ao plano da órbita quanto radiais.

Satélites artificiais

Desde o primeiro satélite artificial, o Sputnick, lançado pela União Soviética em 1957, mais de 3800 foguetes e 4600 satélites artificiais foram lançados da Terra. Desses, mais de 500 estão em funcionamento. Muitos explodiram, dando origem a mais de 100 000 fragmentos, menores que 10 cm, que não podem ser detectados por radares aqui na Terra. Esses fragmentos constituem o lixo espacial; cerca de 8000 fragmentos maiores são monitorados aqui da Terra, porque podem causar sérios danos às naves e satélites, tripulados ou não.

3) Qual é a altura de um satélite geoestacionário? Se o satélite é geoestacionário, isto é, permanece posicionado sobre um mesmo local da Terra, então seu período orbital tem que ser igual a um dia sideral = $23^h\,56^m = 86\,160$ segundos. Usando a Terceira Lei de Kepler,

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_T + m_s)}\,a^3$$

com $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg, $m_s \ll M_T$, $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$, temos:

$$a = \left[\frac{P^2 G M_T}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{3}} = 42172\,\mathrm{km}.$$

Como o raio da Terra é $R_T = 6370\,\mathrm{km}$, então a altura será $a - R_T = 42\,172$ km - 6370 km = 35 800 km.

4) Qual é a velocidade de um satélite em órbita circular a 300 km de altura sobre a Terra?

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

mas para uma órbita circular r=a, de modo que:

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Como r= 300 km + R_T = 6670 km:

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 7,5\,\mathrm{km/s}$$

Qual é o período orbital?

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_T + m_C)}\,a^3 = 90\,\mathrm{min}$$

5) Considerando que a órbita de menor energia para lançamento de uma nave a Marte, conhecida como transferência de Hohmann[2], é aquela que tem uma distância no periélio de 1UA (a da órbita da Terra) e uma distância de afélio de 1,52 UA (a da órbita de Marte, Figura 12.3), qual é o tempo de viagem?

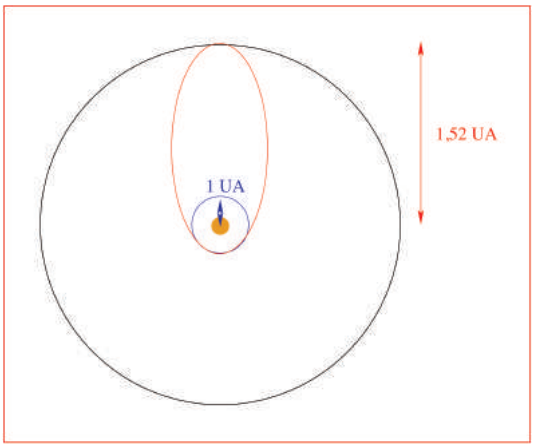


Figura 12.3: Transferência de Hohmann.

O semi-eixo maior a da órbita do nave é

$$a = \frac{r_P + r_A}{2} = 1,26\,\text{UA}$$

e, portanto, seu período é:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_\odot + m_n)}\,a^3 \longrightarrow P = 1,41\,\text{anos}$$

O tempo de viagem será metade do período orbital, portanto, de 8,5 meses. Qual a velocidade de lançamento?

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

e r=1 UA. Logo v= 33 km/s. Considerando-se que a Terra orbita o Sol com velocidade de:

$$v = \left(\frac{2\pi \cdot 1\text{UA}}{1\,\text{ano}}\right) = 30\,\text{km/s}$$

[2]Proposta pelo engenheiro alemão Walter Hohmann (1880-1945) em 1925.

só precisamos lançar a nave com 3 km/s, na mesma direção da órbita da Terra. Note que o lançamento da nave tem de ser bem programado para que Marte esteja na posição da órbita que a nave chegará.

6) Qual é o semi-eixo maior da órbita de um satélite lançado a 300 km de altura com uma velocidade de 10 km/s?

$$\boxed{v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}}$$

eliminado a, obtemos $a = 3,17\, R_T$.

7) Qual é a velocidade necessária para um satélite artificial escapar o campo gravitacional da Terra?

Como a massa do satélite pode ser desprezada em relação à massa da Terra:

$$\boxed{v_{\text{esc}}^{\otimes} = \sqrt{\frac{2GM_{\otimes}}{R_{\otimes}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 5,95 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{6\,370\,000\,\text{m}}} = 11,2\,\text{km/s}}$$

Buraco Negro

8) Qual é o raio de um buraco negro com a massa igual à massa do Sol?

Um buraco negro tem velocidade de escape igual a c, a velocidade da luz, já que nem a luz escapa dele, e nada pode ter velocidade maior do que a velocidade da luz. Então,

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R}} = c$$

e o raio é chamado de Raio de Schwarzschild, ou raio do horizonte de eventos:

$$\boxed{R_{Schw} = \frac{2GM}{c^2}}$$

$$R_{Schw}^{\odot} = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} = 3\,\text{km}$$

Embora o termo buraco negro só tenha sido introduzido em 1967 por John Archibald Wheeler (1911-2008), em 1783 o inglês John Michell (1724-1793) já tinha proposto que, se uma estrela tivesse massa suficiente, a força gravitacional impediria a luz de escapar. Karl Schwarzschild (1873-1916), em 1916 resolveu as equações da Relatividade Geral de Albert Einstein (1879-1955) e derivou corretamente o raio do horizonte de eventos, isto é, o tamanho da região, em volta da singularidade, da qual nada escapa.

Capítulo 13

Forças gravitacionais diferenciais

Corpos com simetria esférica agem, gravitacionalmente, como massas pontuais, para as quais as influências gravitacionais são facilmente calculadas. Na natureza, no entanto, os corpos na maioria das vezes não são perfeitamente esféricos. A principal contribuição à não-esfericidade em planetas é a sua *rotação*. Outra contribuição é proporcionada pelas forças gravitacionais diferenciais que corpos vizinhos exercem uns nos outros. Essas forças diferenciais resultam em fenômenos como *marés* e *precessão*.

A força total exercida sobre uma partícula será:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{centro de massa}} + d\vec{F}$$

A *força gravitacional diferencial* é a diferença entre as forças gravitacionais exercidas em duas partículas vizinhas por um terceiro corpo, mais distante. A Figura 13.1 ilustra a força diferencial entre as partículas m_1 e m_2 devido à atração gravitacional do corpo M. A força diferencial $\Delta\vec{F} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$ tende a separar as duas partículas m_1 e m_2 pois, em relação ao centro de massa, as duas se afastam. Se as duas partículas são parte do mesmo corpo, a força diferencial tende a alongá-lo ou mesmo rompê-lo.

13.1 Dedução da força diferencial

Considere as duas partículas da Figura 13.1. Chamemos de R a distância entre as duas partículas, e de r a distância de M à partícula m_2. O valor de ΔF será:

$$\Delta F = F_1 - F_2$$

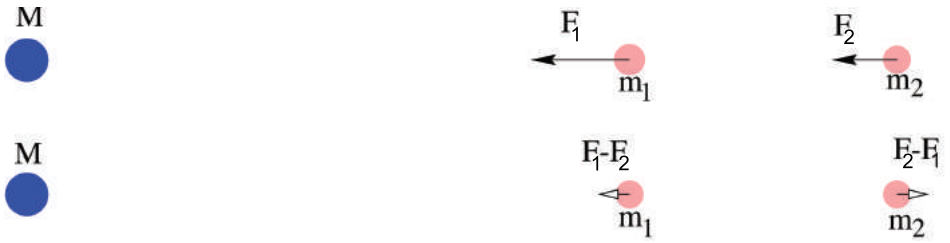


Figura 13.1: A força sobre a partícula m_2 é menor do que sobre o centro de massa das partículas m_1 e m_2.

Sendo:

$$F_1 = \frac{GMm_1}{(r-R)^2}$$

e

$$F_2 = \frac{GMm_2}{r^2}$$

Temos que:

$$F_1 - F_2 = GM\left[\frac{m_1}{(r-R)^2} - \frac{m_2}{r^2}\right]$$

Fazendo $m_1 = m_2 = \mathrm{m}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= GMm\left[\frac{r^2-(r-R)^2}{r^2(r-R)^2}\right] \\ &= GMm\left(\frac{2rR-R^2}{r^4-2Rr^3+r^2R^2}\right) \\ &= GMmR\left[\frac{2r-R}{r^4\left(1-\frac{2R}{r}+\frac{R^2}{r^2}\right)}\right] \end{aligned}$$

Para $r >> R$, $2r - R \simeq 2r$, e $\left(1 - \frac{2R}{r} + \frac{R^2}{r^2}\right) \simeq 1$. Portanto, a expressão da força diferencial fica:

$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3}R$$

Podemos chegar a esse mesmo resultado derivando a Lei de Gravitação Universal:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

Então:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2GMm}{r^3}$$

e

$$\boxed{dF = \frac{2GMm}{r^3}dr}$$

Essa é a expressão da força diferencial dF na direção de dr. É, basicamente, a mesma expressão derivada anteriormente, com a diferença de que aqui temos dr onde lá temos R. Isso nos diz, portanto, que dr é a separação entre os pontos para os quais se calcula a força diferencial.

13.2 Marés

As marés, na Terra, constituem um fenômeno resultante da atração gravitacional exercida pela Lua sobre a Terra e, em menor escala, da atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra.

A idéia básica da maré provocada pela Lua, por exemplo, é que a atração gravitacional sentida por cada ponto da Terra devido à Lua depende da distância do ponto à Lua. Portanto, a atração gravitacional sentida no lado da Terra que está mais próximo da Lua é *maior* do que a sentida no centro da Terra, e a atração gravitacional sentida no lado da Terra que está mais distante da Lua é *menor* do que a sentida no centro da Terra. Portanto, em relação ao centro da Terra, um lado está sendo puxado na direção da Lua, e o outro lado está sendo puxado na direção contrária. Como a água flui muito facilmente, ela se "empilha" nos dois lados da Terra, que fica com um bojo de água na direção da Lua e outro na direção contrária.

Enquanto a Terra gira no seu movimento diário, o bojo de água continua sempre apontando aproximadamente na direção da Lua. Em um certo momento, um certo ponto da Terra estará embaixo da Lua e terá maré alta. Seis horas mais tarde, a rotação da Terra terá levado esse ponto a 90° da Lua e ele terá maré baixa. Dali a mais seis horas, o mesmo ponto estará a 180° da Lua e terá maré alta novamente. Portanto, as marés acontecem duas vezes a cada 24h 50min, que é a duração do dia lunar. Se a Terra fosse totalmente coberta de água, a máxima altura da maré seria 1 m. Como a Terra não é completamente coberta de água, vários aspectos resultantes da distribuição das massas continentais contribuem para que a altura e a hora da maré variem de lugar a outro. Em algumas baías e estuários, as marés chegam a atingir 10 m de altura.

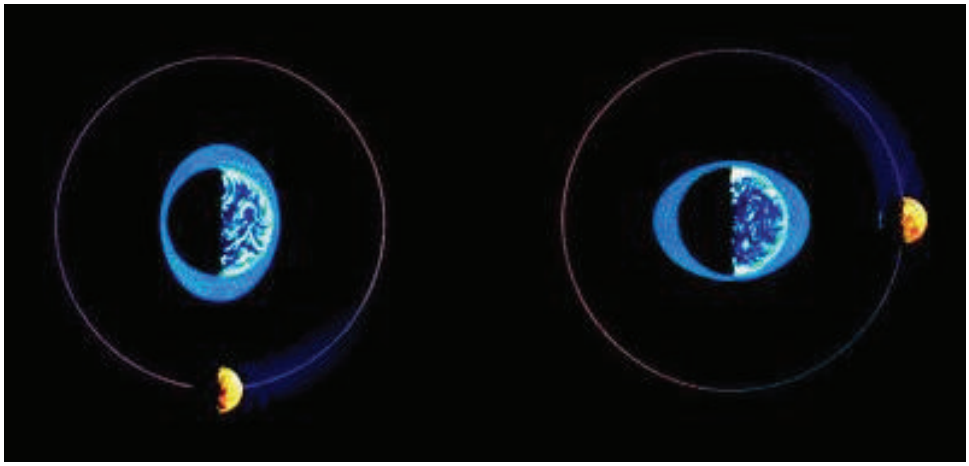
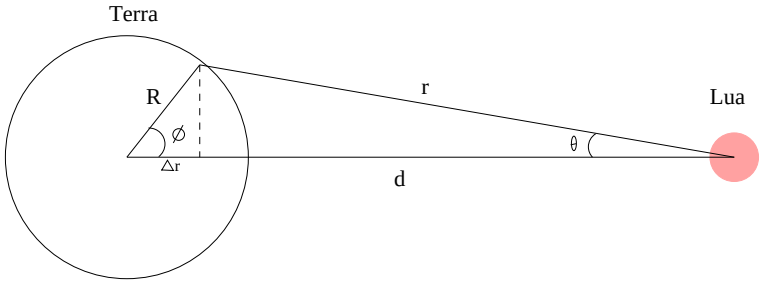


Figura 13.2: A maré alta segue a posição da Lua.

13.2.1 Expressão da força de maré

Considere a atração gravitacional F_P, sentida por uma partícula em um ponto P na superfície da Terra, situado a uma distância r da Lua. Seja d a distância centro a centro entre Terra e Lua, e R o raio da Terra.



A força diferencial ΔF no ponto P em relação ao centro da Terra é:

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}_P - \vec{F}_C$$

Como r é muito maior do que R, o ângulo θ é muito pequeno e a direção da força $\vec{F}_P$ é quase paralela à direção da força $\vec{F}_C$, ficando aproximadamente como na figura abaixo:

Portanto, se pode dizer, sem muita perda de precisão, que

$$\Delta F = F_P - F_C$$

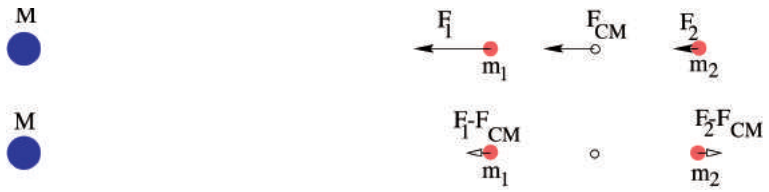


Figura 13.3: Forças sobre duas partículas em relação ao centro de massa destas partículas, CM.

O valor de ΔF já foi derivado na seção (13.1), e vale

$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3}\Delta r$$

Nessa expressão, M é a massa do corpo que provoca a maré (a Lua no nosso exemplo), m é a massa da partícula teste, r é a distância entre M e m, (em média, a distância Terra-Lua, ou d na figura acima), e Δr é a variação nessa distância, que é a causadora da variação na força gravitacional para diferentes pontos da Terra. No caso da figura acima, a variação em r entre os pontos P e C é $R\cos\phi$. Considerando que a força gravitacional média da Lua sobre a Terra está aplicada no centro da Terra, a variação máxima nessa força acontece para os pontos que estão sobre a superfície da Terra, na direção da linha que une os centros da Terra e da Lua. A diferença de distância entre esses pontos e o centro da Terra é o próprio raio da Terra, R, e, conseqüentemente, a máxima *aceleração* de maré na Terra, devido à Lua, é

$$\frac{\Delta F}{m} = 2\,G\frac{M}{d^3}R$$

Portanto, a força de maré em um corpo de raio R, provocada por um corpo de massa M, localizado a uma distância d, é:

$$\Delta F \propto \frac{M}{d^3}R$$

A força ΔF pode ser decomposta em uma componente vertical à superfície da Terra e uma componente horizontal. A componente vertical provoca apenas uma leve variação do peso das massas localizadas no ponto onde estamos calculando a força de maré; é a componente horizontal que provoca a maré propriamente dita.

13.2.2 Comparação das marés produzidas na Terra pela Lua e pelo Sol

Como vemos na equação anterior, a força de maré é diretamente proporcional à massa do corpo que provoca a maré e inversamente proporcional ao cubo da distância entre o corpo que provoca a maré e o que sofre a maré.

Vamos comparar as marés produzidas pelo Sol e pela Lua em uma partícula de massa m na superfície da Terra.

$$\boxed{\frac{dF_\odot}{dF_L} = \frac{M_\odot}{M_L}\left(\frac{d_L}{d_\odot}\right)^3 = \frac{2\times 10^{30}\,\text{kg}}{7,35\times 10^{22}\,\text{kg}}\left(\frac{384\,000\,\text{km}}{149\,600\,000\,\text{km}}\right)^3 = 0,46}$$

Em conclusão, embora a massa do Sol seja muito maior do que a da Lua, por ele estar também muito mais distante a maré provocada pelo Sol tem menos da metade do efeito da provocada pela Lua. Mas os efeitos das duas marés se combinam vetorialmente, de forma que a intensidade da maré resultante depende da elongação da Lua. Na Lua Nova e na Lua Cheia, as duas forças se somam e produzem as marés cheias mais altas e marés baixas mais baixa, chamadas marés de sizígia ou marés vivas. Na Lua Quarto-Crescente ou Minguante os efeitos da maré são atenuados, e as marés nessas fases são chamadas marés de quadratura ou marés mortas.

13.2.3 As marés, a rotação sincronizada da Lua e a evolução do sistema Terra-Lua

A força de maré causada em uma partícula na Lua, pela Terra, é dada por:

$$dF_{(T\to L)} = \frac{2GM_{\text{Terra}}m_{\text{partícula}}}{d^3_{L-T}}R_{\text{Lua}}$$

e a força de maré causada em uma partícula na Terra, pela Lua, é dada por:

$$dF_{(L\to T)} = \frac{2GM_{\text{Lua}}m_{\text{partícula}}}{d^3_{L-T}}R_{\text{Terra}}$$

$$\boxed{dF_{(T\to L)} = \frac{M_{\text{Terra}}}{M_{\text{Lua}}}\frac{R_{\text{Lua}}}{R_{\text{Terra}}}dF_{(L\to T)} \simeq 20dF_{(L\to T)}}$$

já que

$$\begin{array}{rcl} R_{\text{Lua}} & = \text{raio da Lua} = & 1738\ \text{km} \\ R_{\text{Terra}} & = \text{raio da Terra} = & 6\,370\ \text{km} \end{array}$$

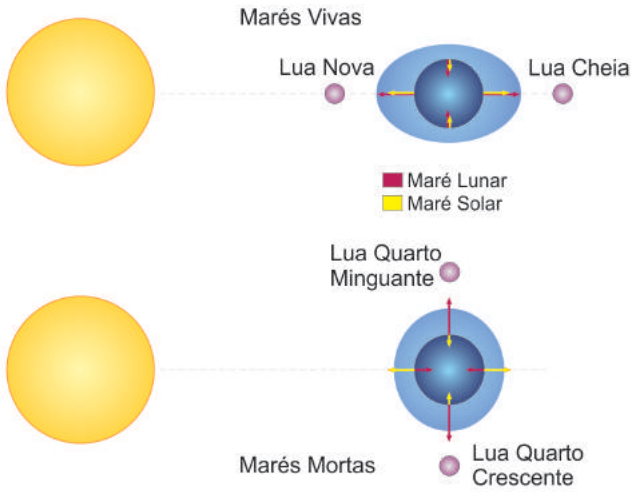


Figura 13.4: Quando a Lua está nas fases Nova e Cheia, as forças de maré provocadas pela Lua e pelo Sol estão no mesmo sentido, de forma que a maré resultante é mais intensa (marés vivas). Quando a Lua está em quadratura, as forças de maré provocadas pela Lua e pelo Sol estão em sentidos contrários, de forma que a maré resultante fica atenuada (marés mortas).

$R_\odot$	= raio do Sol =	696 000 km
d_{L-T}	= distância Lua–Terra =	384 000 km
d_{S-T}	= distância Sol–Terra =	149 600 000 km
$M_\odot$	= massa do Sol =	$1,98 \times 10^{30}$ kg
M_{Terra}	= massa da Terra =	$5,97 \times 10^{24}$ kg
M_{Lua}	= massa da Lua =	$7,35 \times 10^{22}$ kg

Ou seja, a força de maré na Lua provocada pela Terra é, aproximadamente, 20 vezes a força de maré na Terra provocada pela Lua. Acredita-se que, no passado, o período de rotação da Lua era menor do que o seu período de translação em torno da Terra. Ao girar, ela tentava arrastar consigo os bojos de maré, que sempre ficavam alinhados na direção da Terra. Assim, havia um movimento relativo entre as diferentes partes da Lua, o qual gerava atrito, que por sua vez tendia a frear a rotação. Devido a esse atrito, a Lua foi perdendo energia de rotação até ficar com a *rotação sincronizada*, estado em que o período sideral é exatamente igual ao período de revolução. Não é só a Lua que tem rotação sincronizada; os dois satélites de Marte, Phobos

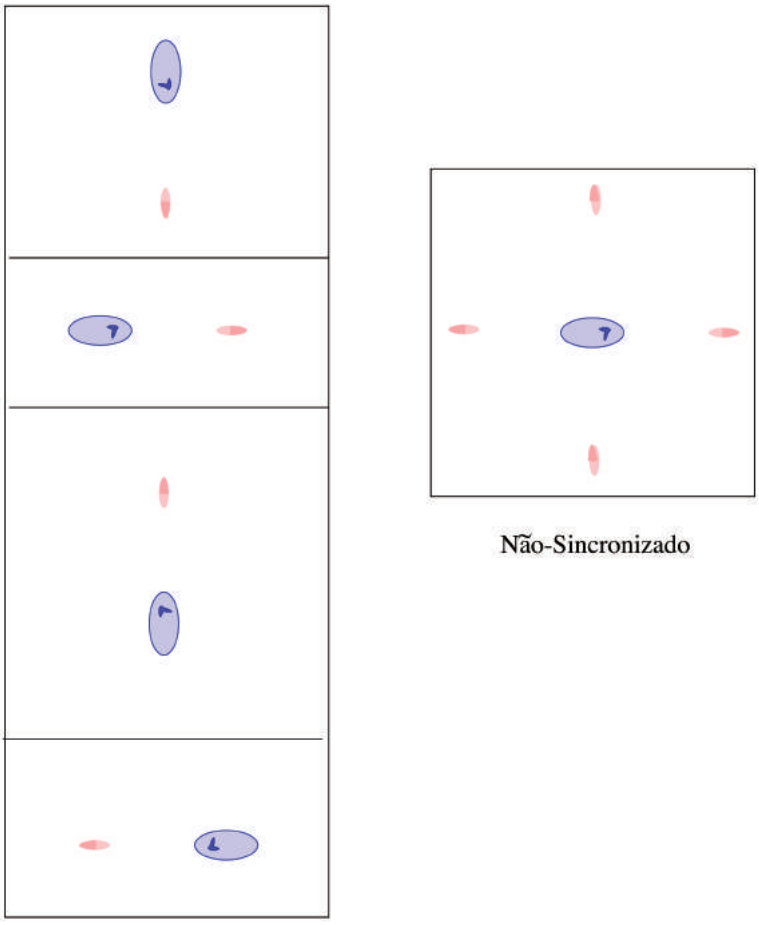


Figura 13.5: A força de maré tende a sincronizar as órbitas, reduzindo a fricção.

e Deimos, cinco luas de Júpiter (incluindo os quatro satélites galileanos), 9 luas de Urano, a lua Tritão de Netuno, todos têm rotação sincronizada com translação. No caso do sistema Plutão-Caronte, a sincronização é total, ou seja, os períodos de rotação e translação de Plutão e Caronte são iguais.

Na órbita circular e sincronizada não existe movimento relativo. A distorção ainda ocorre, mas há equilíbrio que não envolve qualquer movimento relativo por qualquer parte da matéria.

No estado atual de evolução do sistema Terra-Lua, a Terra ainda tem de girar sob os bojos de maré, que ficam sempre apontados para a Lua. O atrito gerado faz com que a rotação da Terra diminua, aumentando o dia em 0,002 segundos por século.

Se o *momentum* angular de rotação da Terra diminui por fricção, então a Lua tem de aumentar seu *momentum* angular orbital, movendo-se para mais longe da Terra.

Vamos ver porque isso acontece: o *momentum* angular de translação da Lua é dado por $\vec{\ell} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$, onde r é o raio da órbita e v a velocidade orbital. Como $v = 2\pi r/P$ e o período $P^2 = kr^3$, então:

$$v = \frac{2\pi r}{k^{1/2} r^{3/2}} = \frac{2\pi}{k^{1/2}} r^{-1/2}$$

$$\ell = m \frac{2\pi}{k^{1/2}} r \cdot r^{-1/2} = m \frac{2\pi}{k^{1/2}} r^{1/2}$$

ou seja, aumentando o raio da órbita r, aumenta o *momentum* angular orbital, compensando a redução do *momentum* angular de rotação (spin).

$$\overrightarrow{\ell_{\text{total}}} = \overrightarrow{\ell^{\text{rotação}}_{\text{Terra}}} + \overrightarrow{\ell^{\text{rotação}}_{\text{Lua}}} + \overrightarrow{\ell^{\text{translação}}_{\text{Terra-Lua}}}$$

No futuro distante, a sincronização da órbita da Terra com a Lua implicará que o dia e o mês terão a mesma duração, que será igual a aproximadamente 35 dias atuais! No passado, a Terra devia girar mais rápido e, portanto, o dia devia ser mais curto. De fato, estudos paleontológicos indicam que 100 milhões anos atrás o ano tinha 400 dias; o dia 21 horas; e as marés eram muito mais intensas, pois a Lua estava mais próxima. A evidência vem de certas criaturas marinhas cujas conchas têm bandas de crescimento diários e mensais, permitindo que os cientistas contem os números de bandas em um ciclo mensal em fósseis de idades diferentes.

13.2.4 Limite de Roche

Uma conseqüência das forças de maré é que um satélite em geral não pode chegar muito perto de seu planeta sem se romper. O *limite de Roche* é a distância mínima do centro do planeta que um satélite pode chegar sem se tornar instável frente a rompimento por maré.

Em 1850, o astrônomo e matemático francês Edouard Roche (1820-1883) demonstrou que, para um *satélite fluido, mantido apenas por sua autogravidade*, de densidade média ρ_m, orbitando em torno de um planeta de

densidade média ρ_M e raio R, a distância mínima do planeta em que o satélite pode orbitar estavelmente é

$$\boxed{d = 2,44 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R}$$

Se o planeta e o satélite tiverem densidades iguais, o limite de Roche é 2,44 vezes o raio do planeta.

Uma derivação simples do limite se obtém considerando duas partículas de massas m iguais, e se tocando, isto é, separadas somente por uma distância dr. A força gravitacional entre as partículas é dada por:

$$F_G = \frac{Gmm}{(dr)^2}$$

e a força de maré de um corpo de massa M, e a uma distância d, sobre elas será:

$$F_M = \frac{2GMm\,dr}{d^3}$$

Para as duas partículas permanecerem juntas, a força gravitacional entre elas tem de balançar a força de maré, logo

$$\frac{Gmm}{(dr)^2} = \frac{2GMm\,dr}{d^3}$$

e

$$d = (2M/m)^{1/3}\,dr$$

Seja

$$\rho_M = \frac{M}{4/3\pi R^3}$$

e

$$\rho_m = \frac{2m}{8/3\pi(dr/2)^3}$$

$$d = (16)^{1/3} \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R = 2,51 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R$$

O valor da constante numérica, 2,51 em vez de 2,44, é porque não levamos em conta que as partículas formam um fluido. O limite de estabilidade de Roche se aplica somente a satélites fluidos, sem tensões intrínsecas.

Em 1974, Hans R. Aggarwald e Vern R. Oberbeck estudaram o caso de ruptura por maré de corpos esferoidais sólidos, rochosos ou gelados,

mantidos coesos por forças de tensão intrínsecas de seu material. Encontraram que, para satélites desse tipo, com diâmetros maiores do que 40 km, a distância mínima que eles podem chegar de seu planeta sem quebrar é:

$$d = 1,38 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R$$

Para corpos externos que se aproximam do planeta a distância que eles podem chegar é ainda um pouquinho menor. Naturalmente, os satélites ou corpos impactantes podem ser quebrados por outras causas, como por tensões aerodinâmicas, dependendo da densidade da atmosfera do planeta.

Enfim, os limites reais de aproximação mínima para os corpos serem estáveis frente a forças de maré dependem do tamanho e tensão interna dos corpos. Satélites sólidos podem chegar mais perto do planeta do que satélites fluidos porque as forças de tensão interna das rochas que o constituem o mantêm estável. Corpos menores do que 40 km podem chegar ainda mais perto do planeta sem quebrar por forças de maré desde que eles sejam pequenos e duros o suficiente. Por exemplo, os anéis de Saturno estão dentro do limite de Roche de Saturno, o que significa que as pequenas partículas que formam o anel têm forças coesivas maiores do que as forças de maré. Entretanto, à medida que aumenta o tamanho da partícula, suas forças coesivas ficam menos importantes comparadas com as forças de maré, e essa é uma provável explicação para o fato dessas partículas nunca terem se juntado para formar um satélite. É possível que os anéis de Saturno sejam resultado de um satélite ou cometa que se aproximou demais do planeta e se quebrou devido às forças de maré.

Questão: Qual a menor distância que a Lua pode chegar da Terra sem se romper? Usamos

$$d = 1,38 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R$$

considerando que:

- $M_{\text{Terra}} = 5,97 \times 10^{24}$ kg
- $R_{\text{Terra}} = 6\,370$ km
- $M_{\text{Lua}} = 7,35 \times 10^{22}$ kg
- $R_{\text{Lua}} = 1738$ km

Obtemos:

$$\rho_{\text{Terra}} = \frac{M_{\text{Terra}}}{\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{Terra}}} = 5514\,\text{kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{Lua}} = \frac{M_{\text{Lua}}}{\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{Lua}}} = 3342\,\text{kg/m}^3$$

Portanto

$$d = 1,38\left(\frac{5514\,\text{kg/m}^3}{3342\,\text{kg/m}^3}\right)^{\frac{1}{3}} 6370\,\text{km} = 7527\,\text{km}$$

13.3 Precessão

Um outro efeito das forças diferenciais do Sol e da Lua na Terra, além das marés, é o movimento de *precessão* da Terra.

O que causa a precessão?

A Terra não é perfeitamente esférica, mas achatada nos pólos e bojuda no equador. Seu diâmetro equatorial é cerca de 40 km maior do que o diâmetro polar. Além disso, o plano do equador terrestre e, portanto, o plano do bojo equatorial, está inclinado cerca de 23° 26' em relação ao plano da eclíptica, que por sua vez está inclinado 5° 8' em relação ao plano da órbita da Lua. Por causa disso, as forças diferenciais (que ficam mais importantes nos dois bojos da Terra) tendem não apenas a achatá-la ainda mais, mas também tendem a "endireitar" o seu eixo, alinhando-o com o eixo da eclíptica (veja a figura a seguir).

Como a Terra está girando, o eixo da Terra não se alinha com o eixo da eclíptica, mas *precessiona* em torno dele, da mesma forma que um pião posto a girar precessiona em torno do eixo vertical ao solo.

No caso do pião, o seu peso gera um torque

$$\vec{N} = \vec{r} \times m\vec{g}.$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do centro de massa do pião em relação ao ponto de contacto com o solo, e $m\vec{g}$ é a força peso. Portanto, o torque $\vec{N}$ é paralelo ao solo, perpendicular à força peso, e perpendicular ao *momentum* angular de rotação do pião. Em módulo, seu valor é $N = mgr$.

Como o torque é dado por:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

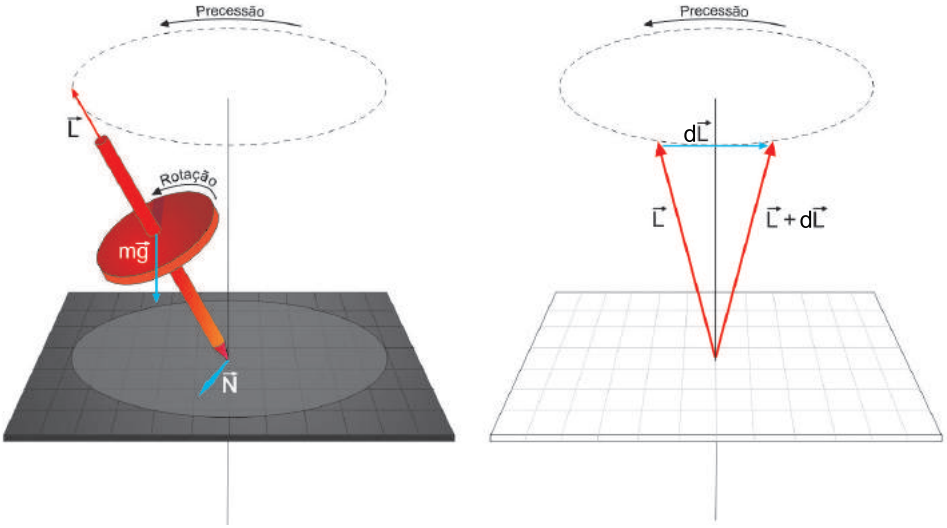


Figura 13.6: Em um pião, o peso ($m\vec{g}$) provoca um torque ($\vec{N}$) perpendicular ao *momentum* angular do pião ($\vec{L}$), o qual causa uma variação ($d\vec{L}$) no *momentum* angular, perpendicular a ($\vec{L}$), que altera sua direção sem alterar seu módulo.

o seu efeito é variar o *momentum* angular do pião. Essa variação é expressa por

$$d\vec{L} = \vec{N}\, dt$$

ou seja, tem a mesma direção de $\vec{N}$.

Como $\vec{L}$ e $\vec{N}$ são perpendiculares, o torque não altera o módulo de $\vec{L}$, mas apenas sua direção, fazendo-o precessionar em torno do eixo perpendicular ao solo.

No caso da Terra, as forças diferenciais gravitacionais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao *momentum* angular de rotação da Terra, seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação. Portanto, os pólos celestes não ocupam uma posição fixa no céu: cada pólo celeste se move lentamente em torno do respectivo pólo da eclíptica, descrevendo uma circunferência em torno dele com raio de 23° 26' 21.418". O tempo necessário para descrever uma volta completa é 25 770 anos. Atualmente, o Pólo Celeste Norte está nas proximidades da estrela Polar, na constelação da Ursa Menor, mas isso não será sempre as-

sim. Daqui a cerca de 13 000 anos ele estará nas proximidades da estrela Vega, na constelação de Lira. Apesar de o movimento de precessão ser tão

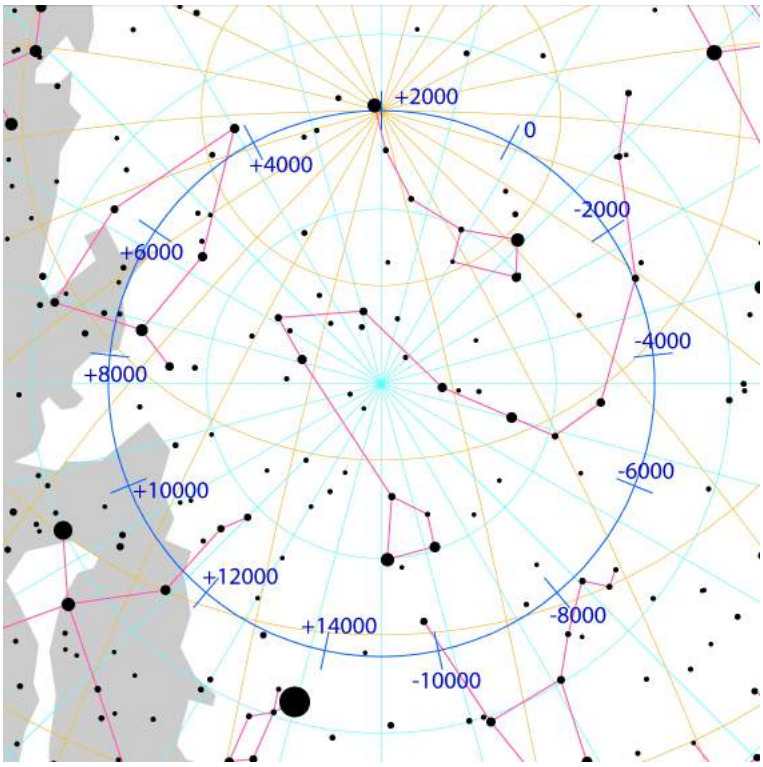


Figura 13.7: Precessão do pólo norte celeste.

lento (apenas 50,290966″ por ano), ele foi percebido já pelo astrônomo grego Hiparco, no ano 129 a.C., ao comparar suas observações da posição da estrela Spica (α Virginis) com observações feitas por Timocharis de Alexandria (c.320-c.260 a.C.) em 273 a.C. Timocharis tinha medido que Spica estava a 172° do ponto vernal, mas Hiparco media somente 174°. Ele concluiu que o ponto vernal havia se movido 2 graus em 144 anos. O movimento de precessão da Terra é conhecido como *precessão dos equinócios*, porque, devido a ele, os equinócios se deslocam ao longo da eclíptica no sentido de ir ao encontro do Sol (retrógrado em relação ao movimento da Terra em torno do Sol). O Sol leva 20 min para se mover 50″ na eclíptica (na verdade a Terra leva 20 min para se mover 50″ na sua órbita). Por causa disso, o ano tropical, que é medido em relação aos equinócios, é 20 min mais curto do que

o ano sideral, medido em relação às estrelas. A precessão não tem nenhum

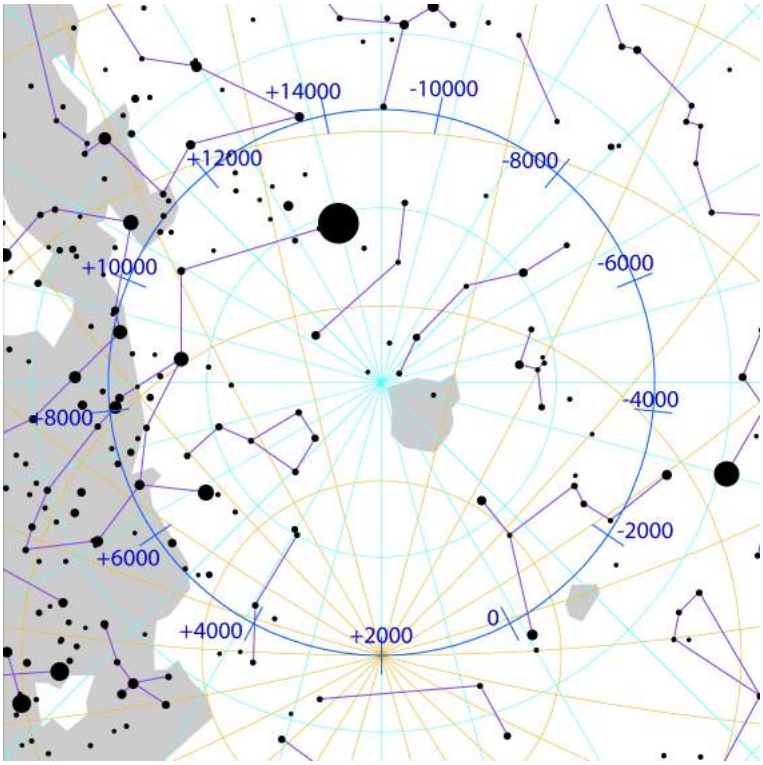


Figura 13.8: Precessão do pólo sul celeste.

efeito importante sobre as estações, uma vez que o eixo da Terra mantém sua inclinação de 23,5° em relação ao eixo da eclíptica enquanto precessiona em torno dele. Como o ano do nosso calendário é baseado nos equinócios, a primavera continua iniciando em setembro no Hemisfério Sul, e em março no Hemisfério Norte. A única coisa que muda é o ponto da órbita em que a Terra se encontra quando acontece uma determinada estação. Devido a isso, mudam as estrelas visíveis durante a noite nessa determinada estação. Por exemplo, atualmente Órion é uma constelação característica de dezembro, e o Escorpião é uma constelação característica de junho. Daqui a cerca de 13 000 anos será o oposto.

Também a intensidade das estações pode ser alterada. Por exemplo, atualmente é verão no hemisfério sul quando a Terra está no periélio, e inverno no hemisfério sul quando a Terra está no afélio. Daqui a cerca

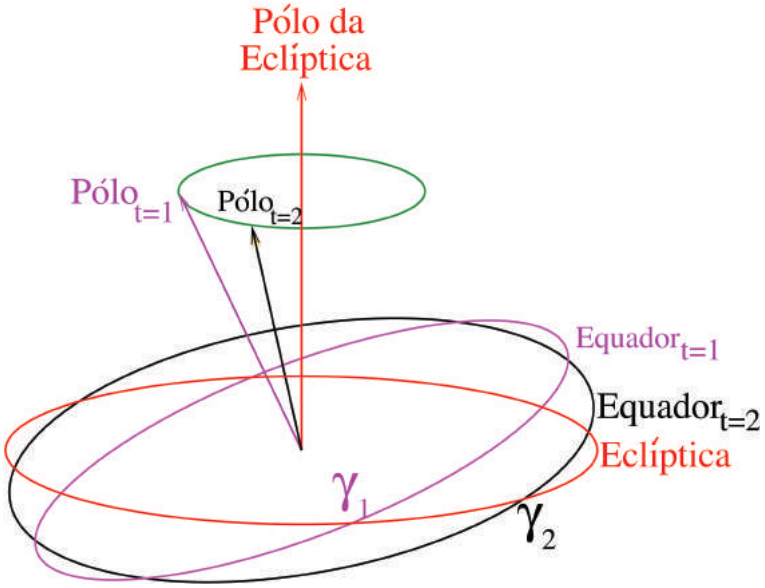


Figura 13.9: Precessão do Equador Celeste.

de 13 000 anos a situação se reverterá, e possívelmente as estações ficarão mais acentuadas no hemisfério norte e mais atenuadas no hemisfério sul, comparadas com as atuais.

A conseqüência mais importante da precessão é a variação da ascensão reta e da declinação das estrelas. Por isso os astrônomos, ao apontarem seus telescópios para o céu, devem corrigir as coordenadas tabeladas da estrela que vão observar pelo efeito de precessão acumulado desde a data em que as coordenadas foram registradas até a data da observação.

Por completeza, devido ao torque causado pela Lua, Sol e outros planetas, além dos deslocamentos de matéria em diferentes partes do planeta: elasticidade do manto, achatamento da Terra, estrutura e propriedades da borda entre núcleo e manto, reologia do núcleo, variabilidade dos oceanos e da atmosfera, a inclinação (obliqüidade) do eixo da Terra em relação ao eixo da eclíptica está decrescendo 0,46815 ”/ano, ou

$$\epsilon = 23^\circ 26' 21,418 - 0,46815"t - 0,0000059"t^2 + 0,00001813"t^3$$

com $t \equiv (\text{ano} - 2000)$.

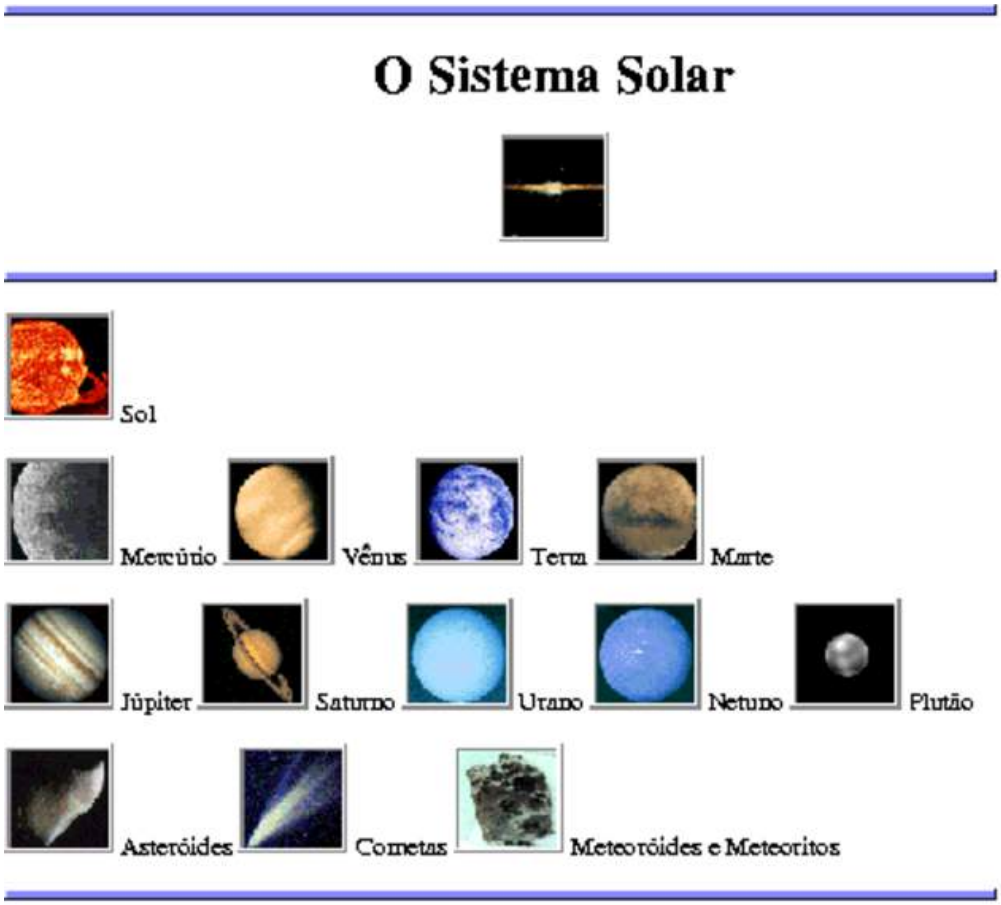
A próxima correção ao movimento chama-se **nutação** e trata-se da componente não circular (bamboleio) do movimento do pólo da Terra em torno

do pólo da eclíptica, causada principalmente por pequenas variações na inclinação da órbita da Lua e pelo deslocamento dos nódos da órbita. A principal contribuição da nutação tem uma amplitude de $\Delta\epsilon = 9,2025$" e período de 18,613 anos, mas contribuições menores, como 0,57"com período de 182,62 dias, também estão presentes.

As forças diferenciais do Sol e da Lua sobre a Terra são mais complexas do que nossa aproximação pois os três corpos não são esféricos. Existe ainda a pequena contribuiçao das forças diferenciais causada pelos planetas sobre a Terra.

Capítulo 14

O Sol e os planetas



Nosso sistema solar está composto pela nossa estrela, o Sol, pelos oito planetas com suas luas e anéis, pelos asteróides, planetas anões e pelos cometas. O corpo dominante do sistema é o Sol, como pode ser visto na tabela a seguir. Todos os planetas giram em torno do Sol aproximadamente no mesmo plano e no mesmo sentido, e quase todos os planetas giram em torno de seu próprio eixo no mesmo sentido da translação em torno do Sol.

Tabela 14.1: Massa no Sistema Solar

Componente	Massa
Sol	99,85%
Júpiter	0,10%
Demais planetas	0,04%
Cometas	0,01% (?)
Satélites e anéis	0,000 05%
Asteróides	0,000 000 2%
Meteoróides e poeira	0,000 000 1% (?)

14.1 Origem do sistema solar

A hipótese moderna para a origem do sistema solar é baseada na hipótese nebular, sugerida em 1755 pelo filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804), e em 1796 desenvolvida pelo matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), em seu livro *Exposition du Systéme du Monde*. Laplace, que desenvolveu a teoria das probabilidades, calculou que como todos os planetas estão no mesmo plano, giram em torno do Sol na mesma direção, e também giram em torno de si mesmos na mesma direção (com exceção de Vênus), só poderiam ter se formado de uma mesma grande nuvem de partículas em rotação. Essa hipótese sugeria que uma grande nuvem rotante de gás interestelar, a nebulosa solar, colapsou para dar origem ao Sol e aos planetas. Uma vez que a contração iniciou, a força gravitacional da nuvem atuando em si mesma acelerou o colapso. À medida que a nuvem colapsava, a rotação da nuvem aumentava por conservação do *momentum* angular e, com o passar do tempo, a massa de gás rotante assumiria uma forma discoidal, com uma concentração central que deu origem ao Sol. Os planetas teriam se formado a partir do material no disco.

As observações modernas indicam que muitas nuvens de gás interestelar estão no processo de colapsar em estrelas, e os argumentos físicos que

Tabela 14.2: Composição Química da Atmosfera do Sol

Elemento	Z	A	Percentagem em massa	Percentagem em número de partículas
H	1	1	70,57 %	91,2%
He	2	4	27,52%	8,7%
O	8	16	0,9592%	0,078%
C	6	12	0,3032%	0,043%
Ne	10	20	0,1548%	
Fe	26	56	0,1169%	
N	7	14	0,1105%	
Si	14	28	0,0653%	
Mg	12	24	0,0513%	
S	16	32	0,0396%	
Ne	12	24	0,0208%	
Mg	12	26	0,0079%	
Ar	18	36	0,0077%	
Fe	26	54	0,0072%	
Mg	12	25	0,0069%	
Ca	20	40	0,0060%	
Al	13	27	0,0058%	
Ni	28	58	0,0049%	
C	6	13	0,0037%	
He	2	3	0,0035%	
Si	14	29	0,0034%	
Na	11	23	0,0033%	
Fe	26	57	0,0028%	
Si	14	30	0,0024%	
H	1	2	0,0023%	

predizem o achatamento e o aumento da taxa de spin estão corretos. A contribuição moderna à hipótese nebular diz respeito principalmente a como os planetas se formaram a partir do gás no disco e foi desenvolvida em 1945 pelo físico alemão Carl Friedrich Freiherr von Weizäcker (1912-2007). Após o colapso da nuvem, ela começou a esfriar; apenas o proto-sol, no centro, manteve sua temperatura. O resfriamento acarretou a condensação rápida

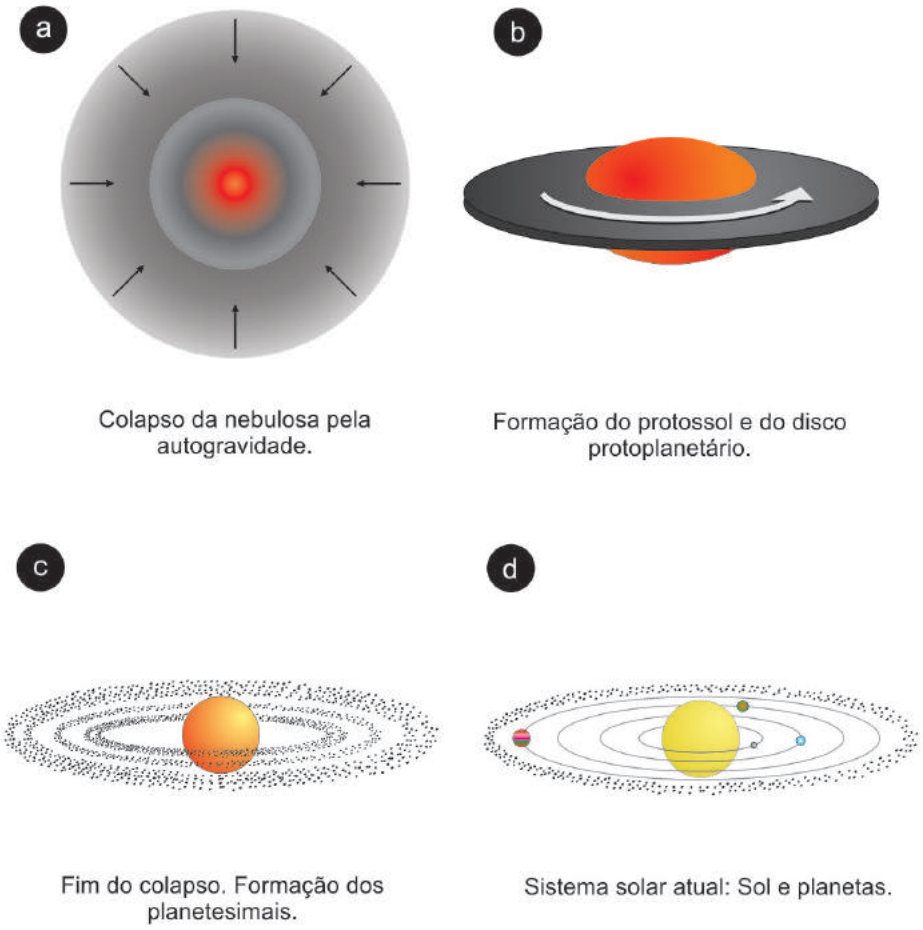


Figura 14.1: Etapas do processo de formação do Sistema Solar de acordo com o modelo da nebulosa solar.

do material, o que deu origem aos planetesimais, agregados de material com tamanhos da ordem de quilômetros de diâmetro, cuja composição dependia da distância ao Sol: regiões mais externas tinham temperaturas mais baixas, e mesmo os materiais voláteis tinham condições de se condensar, ao passo que, nas regiões mais internas e quentes, as substâncias voláteis foram perdidas. Os planetesimais, a seguir, cresceram por acreção de material para dar origem a objetos maiores, os núcleos planetários. Na parte externa do sistema solar, onde o material condensado da nebulosa continha silicatos e

gelos, esses núcleos cresceram até atingir massas da ordem de dez vezes a massa da Terra, ficando tão grandes a ponto de poderem atrair o gás a seu redor e então cresceram mais ainda por acreção de grande quantidade de hidrogênio e hélio da nebulosa solar. Deram origem, assim, aos planetas jovianos. Na parte interna, onde apenas os silicatos estavam presentes, os núcleos planetários não puderam crescer muito, dando origem aos planetas terrestres.

14.2 Planetologia comparada

14.2.1 Características gerais dos planetas

Existem dois tipos básicos de planetas, os terrestres, que são do tipo da Terra, e os jovianos, que são do tipo de Júpiter. Os planetas terrestres compreendem os quatro planetas mais próximos do Sol: Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. Os jovianos compreendem os quatro planetas mais distantes: Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Urano foi descoberto em 1781 por William Herschel (1738-1822) e Netuno em 1846 por previsão de Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) e John Couch Adams (1819-1892).

Plutão, descoberto em 1930 por Clyde William Tombaugh (1906-1997), não se enquadra em nenhuma das categorias, e foi reclassificado em 2006 como um dos planetas anões conhecidos, como Éris, Ceres e Caronte; durante vinte anos do período de Plutão, de 248 anos, em torno do Sol, como entre 1979 e 11 de fevereiro de 1999, Plutão fica mais próximo do Sol do que Netuno.

As características fundamentais de cada tipo estão resumidas na tabela 14.3:

Tabela 14.3: Características dos tipos de planetas

	Terrestres	Jovianos
massa	pequena ($\leq M_\oplus$)	grande ($\geq 14M_\oplus$)
tamanho	pequeno	grande
densidade	grande	pequena
distância ao Sol	pequena	grande
composição química	rochas e metais pesados	elementos leves
	silicatos, óxidos, Ni, Fe	H, He, H_2O,
		CO_2, CH_4, NH_3
n.° de satélites	poucos ou nenhum	muitos

14.2.2 Propriedades fundamentais dos planetas

Massa: determinada medindo a influência gravitacional do planeta em um satélite natural ou em uma nave espacial, ou em outros planetas, e, então, aplicando as leis de Kepler e Newton;

Raio: medido diretamente do tamanho angular, quando se conhece a distância;

Distância ao Sol: é determinada a partir da paralaxe geocêntrica do planeta, ou, mais modernamente, por medidas de radar;

Composição química: pode ser estimada a partir da densidade média do planeta. Por exemplo, uma densidade de 1000 kg/m^3 é típica de materiais congelados; valores de 2800 a 3900 são típicos de rochas vulcânicas e meteoritos rochosos; valores de 5000 a 6000 correspondem a minerais ricos em ferro, e valores em torno de 7900 são típicos de meteoritos ferrosos.

Outras propriedades importantes dos planetas são:

Rotação: todos os planetas apresentam rotação, detectada diretamente a partir da observação de aspectos de sua superfície, ou por medidas de efeito Doppler de ondas de radar enviadas a ele, ou, ainda, por medidas da taxa de rotação do campo magnético do planeta. O efeito Doppler aparece porque, quando o planeta está girando, as duas bordas têm velocidades radiais com sentidos opostos: uma se afasta do observador, a outra se aproxima; as ondas refletidas na borda que se aproxima apresentam deslocamento Doppler para comprimentos e onda menores, e as ondas refletidas na borda que se afasta apresentam deslocamento para comprimentos de onda maiores. A medida da rotação através do campo magnético é usada no caso dos planetas jovianos, que não refletem ondas de radar, e cujos aspectos observáveis dizem respeito a ventos na sua atmosfera.

Temperatura: como os planetas obtêm a maior parte de sua energia da luz solar, suas temperaturas dependem basicamente de sua distância ao Sol. Existe uma relação simples entre a temperatura característica, ou temperatura efetiva de um planeta, e sua distância ao Sol (a):

$$T_{\rm ef} \propto \sqrt{1/a}$$

Assim, sabendo a temperatura efetiva da Terra (260 K, na ausência de atmosfera), podemos estimar a temperatura efetiva dos outros planetas

simplesmente dividindo 260 pela raiz quadrada de sua distância ao Sol em unidades astronômicas.

Refletividade: parte da energia solar incidente sobre o planeta é refletida, e parte é absorvida. A fração da energia solar total incidente que é refletida chama-se albedo (A).

$$A = \frac{\text{energia espalhada em todas as direções}}{\text{energia solar incidente}}$$

O resto da energia (1-A), é absorvida e re-emitida em forma da radiação infravermelha. Assim, se um objeto reflete toda a luz que incide nele, seu albedo é 1; se ele absorve toda a luz, seu albedo é 0.

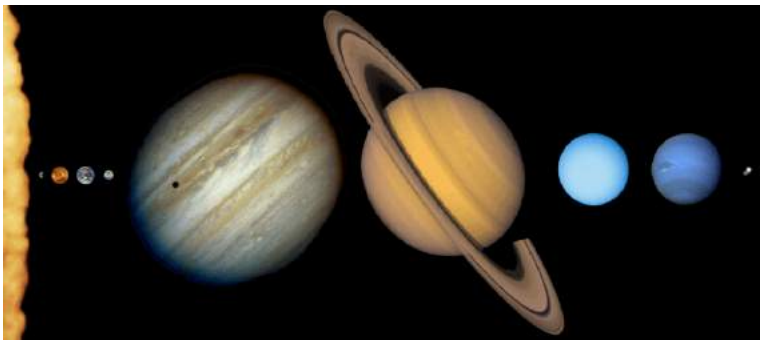


Figura 14.2: O Sol, à esquerda, os planetas e Plutão, à direita.

14.2.3 Estrutura Interna:

A estrutura interna de um planeta depende de como certos parâmetros físicos, como composição química, temperatura e densidade, variam com o raio. Em geral, a pressão aumenta próximo ao centro do planeta, e a temperatura também aumenta como conseqüência do aumento da pressão e do calor liberado no centro por decaimento de elementos radiativos. A composição química usualmente é diferenciada de acordo com a distância ao centro, e estruturada em camadas.

Uma maneira de conhecer a estrutura interna de um planeta é medir a transmissão de *ondas sísmicas* através dele. Essas ondas podem ser produzidas por terremotos naturais ou por impactos artificiais e se propagam em

materiais sólidos como rochas, portanto, é uma técnica que pode ser aplicada a todos os planetas terrestres. Até o momento, somente a estrutura da Terra e da Lua foram investigadas usando essa técnica, o que mostrou claramente a existência de um núcleo metálico na Terra e a ausência de núcleo metálico na Lua.

A estrutura interna dos planetas jovianos, que não têm uma superfície sólida, não pode ser observada através de ondas sísmicas. Uma alternativa é mapear o campo gravitacional estudando a órbita de uma sonda espacial quando ela passa pelo planeta. Outra maneira de conhecer o interior dos planetas jovianos, que são gasosos, é através de modelos usando formalismo hidrostático, como se faz no caso de estrelas.

A pressão central do planeta, por exemplo, pode ser obtida da equação de equilíbrio hidrostático. Essa equação leva em conta que, se o planeta não está nem se expandindo nem se contraindo, obedece à equação de equilíbrio hidrostático, isto é, em cada ponto, o peso das camadas superiores é balanceado pela força de pressão das camadas inferiores, ou

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}}$$

onde ρ é a densidade e M_r é a massa interna ao raio r. O sinal menos indica que a pressão aumenta à medida que o raio diminui. Integrando essa expressão desde a superfície até o centro, supondo que a densidade é aproximadamente constante e igual à densidade média do planeta, resulta que a pressão central é:

$$P_c = \frac{4\pi}{3} G R^2 \rho^2$$

A pressão a uma distância r do centro do planeta fica:

$$P_r = \frac{2\pi}{3} G\rho^2 \left(R^2 - r^2\right)$$

que em unidades do sistema internacional é:

$$P_r = 1,4 \times 10^{-10} \rho^2 \left(R^2 - r^2\right) \ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$$

De um modo geral, os planetas terrestres têm uma atmosfera gasosa, uma superfície sólida bem definida e um interior na maior parte sólido (embora a Terra tenha um núcleo externo líquido). Os planetas jovianos têm uma atmosfera gasosa, nenhuma superfície sólida, e um interior líquido na maior parte. As estruturas internas dos planetas jovianos e terrestres podem ser esquematizadas nas figuras a seguir.

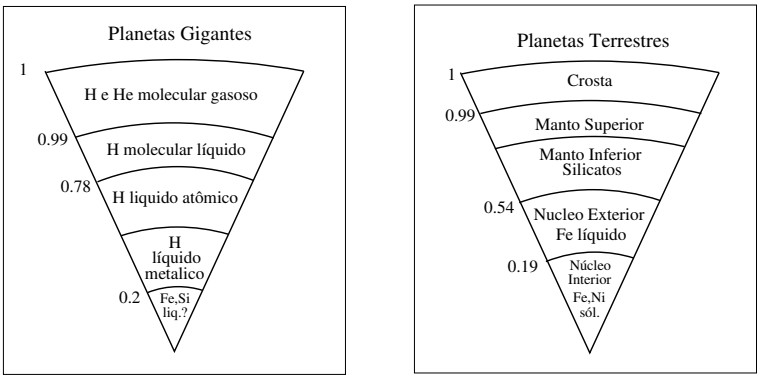


Figura 14.3: Interior dos planetas gigantes e terrestres.

As observações da espaçonave Galileo impuseram limites às massas dos núcleos de Júpiter, entre 0 e 10 massas terrestres, e de Saturno, entre 6 e 17 massas terrestres (Günther Wuchterl, Tristan Guillot, & Jack J. Lissauer 2000, Protostars and Planets IV, 1081).

14.2.4 Superfícies

As superfícies planetárias podem ser conhecidas de forma preliminar a partir do albedo, se o planeta não tem atmosfera espessa. Em planetas com atmosfera espessa, como os planetas jovianos e Vênus, o albedo não se refere à superfície.

As superfícies da Lua e de Mercúrio são parecidas, com grande número de crateras e grandes regiões baixas e planas. Marte apresenta uma superfície com montanhas, vales e canais. A superfície de Vênus não é visível devido às densas nuvens de ácido sulfúrico que cobrem o planeta, mas estudos em rádio revelam que essa superfície é composta, principalmente, de terrenos baixos e relativamente planos, mas também apresenta planaltos e montanhas.

Os principais processos que determinam alterações na crosta posteriormente à sua formação e que, portanto, determinam o rejuvenescimento da crosta, são: atividade geológica, erosão e crateramento.

Atividade geológica

A atividade geológica, compreendendo vulcanismo e atividade tectônica, depende da quantidade de calor interno no planeta. A atividade geológica é

decrescente para Terra, Vênus e Marte.

Na Terra, tanto a presença de vulcões ativos quanto o movimento das placas tectônicas contribuem para o renovamento da crosta. Em Marte, existem grandes vulcões, alguns deles podem ser ativos, mas não há evidência de tectonismo de placas.

Na Lua, atualmente, acontecem poucos sismos por anos (milhares, comparados com milhões na Terra), mas na época em que a Lua era jovem, há cerca de 4 ou 3 bilhões de anos atrás, houve um grande vazamento de lava na superfície, que posteriormente se solidificou, formando os mares lunares (regiões escuras, aparentemente baixa e planas que contêm muitas crateras). A Lua tem crosta assimétrica, sendo mais delgada (60 km) no lado voltado para a Terra e mais espessa (150 km) no lado oposto. O número de mares é maior no lado em que a crosta é delgada.

Vênus, aparentemente, é menos ativo do que a Terra, mas parece ter mais atividade geológica persistente do que Marte. Isso indica que Vênus teria retido mais do seu calor residual do que Marte, o que está de acordo com o fato de Vênus ser maior do que Marte. Também acontece atividade geológica em Io, o satélite de Júpiter mais próximo do planeta. Io apresenta um alto nível de atividade vulcânica. Ariel e Titânia, satélites de Urano, também apresentam sinais de atividade catastrófica recente.

Erosão

A erosão pode ser resultado da ação da atmosfera ou da hidrosfera. Não existe erosão em Mercúrio nem na Lua. Na Terra, existe erosão, como é evidenciado pela existência de rochas sedimentares. Mas o planeta em que a erosão é mais importante é Marte, devido às frequentes tempestades de poeira que assolam sua superfície.

Crateramento

As crateras aparecem em todos os planetas terrestres e em quase todos os satélites do Sistema Solar. Elas podem ter origem vulcânica ou de impacto. As crateras vulcânicas são, em geral, menores e mais fundas do que as de impacto. Na Terra, a maioria das crateras existentes são de origem vulcânica, uma vez que a atividade interna da Terra, assim como a erosão, apagaram grande parte dos efeitos de impactos ocorridos na época em que muitos corpos residuais do processo de formação povoavam o Sistema Solar. Mas na Lua, Mercúrio e Marte, as crateras de impacto são dominantes. As recentes

observações com radar da superfície de Vênus mostraram que esse planeta também tem crateras, mas ainda não se sabe ao certo sua principal origem.

O número de crateras de impacto numa superfície nos permite estimar sua idade, pois o número de crateras é proporcional ao tempo decorrido desde que a superfície foi exposta. Portanto, em um dado planeta, o terreno com maior número de crateras de impacto será sempre o mais antigo.

No impacto, a energia cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) do corpo impactante é transformada em calor e em uma onda de choque que se propaga pelo corpo impactado. A velocidade de colisão é, no mínimo, igual à velocidade de escape do corpo que está sendo colidido (11 km/s para a Terra, e 2,4 km/s para a Lua). Assim, para um asteróide típico, com raio de 1 km e densidade de 1 g/cm^3, sua energia cinética ao colidir com a Terra será (no mínimo) $E_c = 2,5 \times 10^{27}$erg $= 6,0 \times 10^7$ Kton T.N.T (a energia associada ao T.N.T. é $4,2 \times 10^{10}$ erg/g).

Para ter uma idéia do que isso representa, a energia associada a uma bomba atômica é de 20 Kton de T.N.T., logo no impacto mencionado, anteriormente, a energia liberada seria equivalente à de 3 milhões de bombas atômicas!

O tamanho da cratera gerada é proporcional à potência 1/3 da energia do impacto. Assim, sabendo que um impacto com energia de 1 Mton de T.N.T. abre uma cratera de 1 km de diâmetro, num impacto como o acima descrito a cratera aberta teria um diâmetro de 80 km.

A cratera de Chicxulub, no México, supostamente gerada no impacto que causou a extinção dos dinossauros, há 65 milhões de anos, tem diâmetro de 200 km, e acredita-se que o asteróide que a provocou tinha um diâmetro de, no mínimo, 10 km. A energia liberada nessa explosão foi equivalente a 5 bilhões de bombas nucleares do tamanho da bomba de Hiroshima. Cálculos atuais mostram que impactos grandes como esse, na Terra, ocorrem numa taxa de 1 a cada 30 milhões de anos.

14.2.5 Atmosferas

A composição da atmosfera dos planetas pode ser conhecida pela análise espectral da luz solar que eles refletem. Como essa luz solar refletida atravessou parte da atmosfera do planeta, e as moléculas do gás na atmosfera absorvem certos comprimentos de onda, o espectro apresenta certas linhas escuras que não aparecem no espectro solar. A identificação dessas linhas escuras permite identificar os gases que as produziram, assim como a pressão e a temperatura da atmosfera.

Os gases presentes na atmosfera de um planeta depende dos constituintes químicos de que o planeta se formou e da massa do planeta. Os planetas terrestres se formaram sem atmosferas extensas e sua atmosfera atual não é primitiva, mas formada ao longo do tempo geológico a partir de gases escapados de seu interior. O impacto com cometas também contribui com alguns componentes dessa atmosfera secundária.

Já os planetas massivos têm um tipo de atmosfera totalmente diferente, dominada pelos gases mais leves e mais comuns, especialmente hidrogênio e hélio. Evidentemente, esses planetas foram capazes de reter o gás presente no sistema solar na época de sua formação.

Retenção de atmosferas

A retenção de atmosferas é um compromisso entre a energia cinética (ou temperatura) das moléculas do gás e a velocidade de escape do planeta (ou de sua massa).

Sabe-se que, para um gás ideal, a energia cinética média de suas moléculas é $\frac{1}{2}m\overline{v}^2 = \frac{3}{2}kT$, onde T é a temperatura absoluta do gás, m é a massa das moléculas do gás e $\overline{v}$ sua velocidade média, e k é a constante de Boltzmann, com valor de $1,38 \times 10^{-23}$ Joule/K. Portanto, a velocidade média é

$$\boxed{\overline{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$

A velocidade das moléculas, portanto, depende da temperatura do gás e da massa molecular do gás. A uma mesma temperatura, quanto mais pesado o gás, menor a velocidade média de suas moléculas. Cálculos de mecânica estatística mostram que, para um planeta reter um certo gás por bilhões de anos, a velocidade média de suas moléculas deve ser menor do que 1/6 da velocidade de escape do planeta:

$$\boxed{\overline{v} \leq \frac{1}{6}v_{\text{escape}} = \frac{1}{6}\sqrt{2GM/r}}$$

Por exemplo, a velocidade média das moléculas do oxigênio, a uma temperatura de 293 K (temperatura típica na superfície da Terra), é de 0,5 km/s, e a velocidade média das moléculas do hidrogênio, na mesma temperatura é de 2 km/s. Como a velocidade de escape da Terra é 11 km/s, que é mais do que 6 vezes maior do que a velocidade média das moléculas de oxigênio, mas é menos do que 6 vezes maior do que a velocidade média das moléculas do hidrogênio, a atmosfera da Terra retém o oxigênio, mas não o hidrogênio.

Tabela 14.4: Velocidade de Escape dos Planetas

Planeta	Velocidade (km/s)
Mercúrio	4,2
Vênus	10,3
Terra	11,2
Lua	2,4
Marte	5,0
Júpiter	61
Saturno	37
Urano	22
Netuno	25

14.2.6 Efeito estufa

A maioria dos planetas que têm atmosferas experimenta alguma elevação da temperatura de sua superfície devido ao efeito de acobertamento pela atmosfera, o chamado *efeito estufa*. O efeito estufa é maior para Vênus, que, na realidade, tem uma temperatura superficial mais alta do que a de Mercúrio, embora esteja muito mais distante do Sol do que este.

Isso acontece por causa da grande quantidade de CO_2 na atmosfera de Vênus. Como esse gás é opaco à radiação infravermelha, quando a superfície do planeta absorve a luz solar e re-irradia parte dele como calor (radiação infravermelha), o dióxido de carbono na atmosfera impede que essa radiação escape para fora. Em conseqüência, a superfície aquece.

Na Terra, a quantidade de dióxido de carbono foi reduzida como conseqüência da existência de vida. Na ausência de vida, provavelmente teríamos uma atmosfera mais massiva e dominada por CO_2.

Os organismos vivos contribuem para a diminuição desse gás na atmosfera de duas maneiras: uma é que as criaturas marinhas usam os carbonatos como principal constituinte de suas conchas e carapaças protetoras. Quando elas morrem, essas cascas afundam e se petrificam, até que eventualmente são ejetadas para a superfície nas explosões vulcânicas. Mas os organismos vivos rapidamente os reciclam novamente. A outra maneira como a vida remove o CO_2 é pela produção de depósitos de combustíveis fósseis, o carvão. O petróleo não é mais necessariamente considerado um combustível fóssil (biogênico), pois pode ser um hidrocarboneto primordial (abiogênico) ao qual produtos biológicos foram adicionados.

Mesmo apesar de existir em pequena quantidade, o CO_2 presente na atmosfera da Terra ainda é o principal fator da produção do efeito estufa na Terra, embora o vapor d'água e os CFCs também contribuam. Nos últimos 200 000 anos a quantidade de CO_2 no ar esteve abaixo de 300 partes por milhão, mas no últimos 10 anos subiu acima de 350 partes por milhão e vem crescendo cerca de 1,5 partes por milhão ao ano. Os oceanos distribuem o calor do Sol através de suas correntes marítimas, e mudanças na temperatura da água nos oceanos causam variações climáticas, como o *El Niño*. Estima-se que a temperatura média da Terra está atualmente 1°C mais alta do que estava há um século atrás.

Propriedades dos Planetas do Sistema Solar

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
Distância média ao Sol (UA)	0,387	0,723	1	1,524	5,203	9,539	19,18	30,06	39,44
Distância média ao Sol (10^6 km)	57,9	108,2	149,6	227,94	778,4	1423,6	2867,0	4488,4	5909,6
Excentricidade da Órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,093	0,048	0,056	0,046	0,010	0,248
Período de Revolução	87,97d	224,7d	365,26d	686,98d	11,86a	29,46a	84,04a	164,8a	247,7a
Período de Rotação	58,6d	-243,0d	23h56m	24h37m	9h48m	10h12m	-17h54m	19h 6m	6d 9h
Inclinação do Eixo	$0,1^\circ$	177°	$23^\circ\ 27'$	25°	$3^\circ\ 05'$	$26^\circ\ 44'$	98°	30°	120°
Inclinação da Órbita à Eclíptica	7°	$3,4^\circ$	0°	$1,9^\circ$	$1,3^\circ$	$2,5^\circ$	$0,8^\circ$	$1,8^\circ$	$17,2^\circ$
Diâmetro Equatorial (km)	4878	12100	12756,34	6786	142984	120536	51108	49538	2306
Massa (kg)	$3,3\text{x}10^{23}$	$4,9\text{x}10^{24}$	$6,0\text{x}10^{24}$	$6,4\text{x}10^{23}$	$1,9\text{x}10^{27}$	$5,7\text{x}10^{26}$	$8,7\text{x}10^{25}$	$1,0\text{x}10^{26}$	$1,3\text{x}10^{22}$
Massa (M_{Terra})	0,055	0,815	1	0,107	317,9	95,2	14,6	17,2	0,002
Densidade (g/cm^3)	5,41	5,25	5,52	3,9	1,3	0,7	1,3	1,7	1,99
Achatamento	0	0	0,003	0,005	0,06	0,1	0,03	0,02	-
Temperatura (C)	407(s)dia -183(s)noite	-43(n) 470(s)	22(s)	-23(s)	-150(n)	-180(n)	-210(n)	-220(n)	-218(s)
Componentes da Atmosfera	traços de Na,He,H,O	96%CO_2 3,5% N	78%N_2 21% O_2	95%CO_2 3% N	90%H 10% He	97%H 3% He	83%H 15% He	74%H 25% He	CH_4 N,CO ?
Gravidade Superficial (g_{Terra})	0,37	0,88	1	0,38	2,64	1,15	1,17	1,18	0,11
No. de Satélites Conhecidos	0	0	1	2	65	62	27	14	5
Velocidade de Escape (km/s)	4,3	10,4	11,2	5,0	60	35,4	21	24	1,21

Capítulo 15

Corpos menores do Sistema Solar

15.1 Asteróides

Asteróides são um grupo numeroso de pequenos corpos (planetas menores) que orbitam o Sol. A maior parte dos asteróides conhecidos têm órbitas situadas entre as órbitas de Marte e Júpiter, a uma distância da ordem de 2,8 unidades astronômicas (UA) do Sol. Essa região é conhecida como o **Cinturão de Asteróides**.

O maior objeto do Cinturão de Asteróides é Ceres, que foi também o primeiro asteróide a ser descoberto, em 1801, pelo italiano Giuseppe Piazzi (1746-1826). Ceres tem 1000 km de diâmetro e massa de um centésimo da massa da Lua. Outros asteróides grandes dessa região são Palas, descoberto em 1802, por Heinrich Wilhelm Mattäus Olbers (1758-1840) e Juno, descoberto em 1804 por Karl Ludwig Harding ((1765-1834).

A partir de 1992 foram descobertos vários asteróides situados além da órbita de Netuno, chamados objetos transnetunianos. Esses objetos formam o chamado **Cinturão de Kuiper**, um cinturão de restos gelados que está no plano do sistema solar e se estende desde após a órbita de Netuno até 150 UA do Sol. A forma achatada do cinturão de Kuiper indica que os objetos que o forma são remanescentes dos planetesimais formados no disco da nebulosa solar. Todos os asteróides, sejam do cinturão principal, sejam do cinturão de Kuiper, são menores do que a Lua. Atualmente, existem mais de 12000 asteróides catalogados, cerca de 30 têm diâmetros maiores do que 200m, mas devem existir acima de 100 mil com mais de 1 km de diâmetro. Devem existir no mínimo 70000 com diâmetros maiores do que 100 km no

cinturão de Kuiper.

15.2 Objetos do Cinturão de Kuiper

Este cinturão foi predito pelos cálculos dos astrônomos Kenneth Essex Edgeworth (1880-1972) em 1949 e e Gerard Peter Kuiper (1905-1973) em 1951. Desde a primeira descoberta de um asteróide transnetuniano por David C. Jewitt & Jane X. Luu em 1992, foram descobertos mais de 600 asteróides candidatos a a pertencerem ao Cinturão de Kuiper, a maioria com cerca de 100 km de diâmetro. Entre os maiores estão Varuna e 2002 AW197, ambos com 450 km de raio, Ixion, com 530 km de raio, e 1996TL66, com raio de 316 km. 1996TL66 e 2002AW197 não são objetos transnetunianos clássicos, pois sua órbita vai muito além da média do cinturão de Kuiper. 1966TL66, por exemplo, tem órbita com semi-eixo maior de 85 UA (o semi-eixo maior da órbita de Plutão é 39 UA), e uma excentricidade que o leva de uma distância mínima do Sol de 35 UA a uma distância máxima de 136 UA. Sua descoberta sugere que o Cinturão de Kuiper se estende além de 50 UA, e pode conter muito mais massa ($\simeq 0,5\ M_{\otimes}$) do que anteriomente se pensava.

Em 2002 foi descoberto o objeto transnetuniano 2002LM60, com 1250 km de diâmetro, maior do que Ceres. Esse asteróide foi batizado de Quaoar, "força de criação" na língua da tripo Tongva, os primeiros habitantes da bacia de Los Angeles. Em fevereiro de 2004 foi descoberto o Sedna, com raio entre 550 e 900 km, a uma distância de 13 bilhões de km, que passou a ser considerado o maior asteróide do sistema solar.

Éris (2003 UB313), um asteróide do cinturão de Kuiper (asteróide transnetuniano), descoberto em 2005 por Michael E. Brown (1965-), Chadwick A. Trujillo (1973-) e David Lincoln Rabinowitz (1960-), é maior do que Plutão, conforme as medidas feitas com o Telescópio Espacial Hubble em 9 e 10 de dezembro de 2005, que resultaram em um diâmetro de 2398 ± 97 km, comparado com 2288 km de Plutão. O asteróide Eris varia de distância ao Sol entre 38 UA e 98 UA (a=67,73 UA, P=557,44 anos), provavelmente foi deslocado de sua órbita por Netuno, e tem um plano de órbita bem inclinado em relação ao dos planetas (44^o). O asteróide 2003 UB313 tem um satélite, S/2005 (2003 UB313) 1, fotografado pela primeira vez por Michael E. Brown com um dos telescópios de 10 m do W.M. Keck Observatory, no Hawai'i. O planeta anão 2003 UB313 recebeu em 13 de setembro de 2006 o nome oficial de Éris, a deusa da discórdia na mitologia grega. Seu satélite recebeu o nome Dysnomia, que na mitologia é o espírito demoníaco da falta de lei. Pela órbita de Dysnomia se mede que Eris é 27% mais massivo que

Plutão.

15.3 Meteoros

Meteoro é o fenômeno luminoso quando um pequeno asteróide, chamado meteoróide, se choca com a atmosfera da Terra. O termo vem do grego *meteoron*, que significa fenômeno no céu. Ao penetrar na atmosfera da Terra, gera calor por atrito com a atmosfera, deixando um rastro brilhante facilmente visível a olho nu. Existem aproximadamente 50 asteróides com diâmetro maior de 20 km, que se aproximam da Terra, colidindo com uma taxa de aproximadamente 1 a cada 1 milhão de anos. Dois a três novos são descobertos por ano e suas órbitas são muitas vezes instáveis.

Meteoritos são meteoros que atravessam a atmosfera da Terra sem serem completamente vaporizados, caindo ao solo. Do estudo dos meteoritos se pode aprender muito sobre o tipo de material a partir do qual se formaram os planetas interiores, uma vez que são fragmentos primitivos do sistema solar.

Existem 3 tipos de meteoritos: os metálicos, os rochosos, e os metálico-rochosos. Os rochosos são os mais abundantes, compreendendo 90% de todos meteoritos conhecidos. Um tipo de meteoritos rochosos são os condritos carbonáceos, que representam o tipo mais antigo de meteoritos, com aproximadamente 4,5 bilhões de anos, e não parecem ter sofrido alteração desde a época de sua formação. Os metálicos são compostos principalmente de ferro e níquel. Na Terra, caem aproximadamente 25 milhões por dia, a grande maioria com algumas microgramas.

O asteróide Ida, com 50 km de diâmetro, foi fotografado em 1993 pela sonda Galileo, e foi, então, descoberto que ele possui um satélite, Dactyl, de 1,5 km de diâmetro, a 100 km de distância.

Mais de 9000 asteróides têm órbitas bem determinadas. Eles orbitam o Sol aproximadamente na mesma direção dos planetas (de oeste para leste) e a maioria no mesmo plano.

O Cinturão de Asteróides principal contém asteróides com semi-eixo maior de 2,2 a 3,3 UA, correspondendo a períodos orbitais de 3,3 a 6 anos. Provavelmente, mais de 90% de todos os asteróides estão nesse Cinturão. Os grandes asteróides têm densidade da ordem de 2,5 g/cm^3.

Em agosto de 1996, cientistas da NASA revelaram evidências indiretas de possíveis fósseis microscópicos que poderiam ter se desenvolvido em Marte 3,6 bilhões de anos atrás no meteorito marciano ALH84001 (Figura 15.1). Sua denominação vem do fato de ter sido o meteorito número 001, coletado



Figura 15.1: Meteorito ALH84001.

em 1984, na região chamada Allan Hills, na Antártica. Esse meteorito, de 1,9 kg, é um dos 30 meteoritos já coletados na Terra, que, se acredita, foram arrancados de Marte por colisões de asteróides. ALH84001 cristalizou-se no magma de Marte 4,5 bilhões de anos atrás, foi arrancado de Marte 16 milhões de anos atrás, e caiu na Antártica 13 mil anos atrás. Ele mostra traços de hidrocarbonetos policíclicos aromáticos e depósitos minerais parecidos com os causados por nanobactérias na Terra e, portanto, indicando que poderia ter havido vida em Marte no passado remoto. Essa é a primeira evidência da possível existência de vida fora da Terra e levanta a questão de se a vida começou em outros pontos do Universo além da Terra, espontaneamente. Em outubro de 1996, cientistas ingleses descobriram traços de carbono orgânico em outro meteorito marciano, ETA79001, novamente uma evidência circunstancial, para a qual vida é somente uma das possíveis interpretações. A sonda Sojourner, da missão Mars Pathfinder de julho a setembro de 1997, comprovou que a composição química das rochas marcianas é, de fato, muito similar à composição dos meteoritos como o ALH84001.

15.4 Impactos na Terra

Duas vezes no século XX grandes objetos colidiram com a Terra. Em 30 de junho de 1908, um asteróide ou cometa de aproximadamente 100 mil toneladas explodiu na atmosfera perto do Rio Tunguska, na Sibéria, derrubando milhares de km^2 de árvores, e matando muitos animais. O segundo impacto ocorreu em 12 de fevereiro de 1947, na cadeia de montanhas Sikhote-Alin, perto de Vladivostok, também na Sibéria. O impacto, causado por um asteróide de ferro-níquel de aproximadamente 100 toneladas que se rompeu no



Figura 15.2: Foto da Meteor Crater, ou Cratera Barringer [Daniel Moreau Barringer (1860-1929), que demonstrou que a cratera era devido ao impacto de um meteorito], no Arizona, que tem 1,2 km de diâmetro e 50 mil anos.

ar, foi visto por centenas de pessoas e deixou mais de 106 crateras, com tamanhos de até 28 m de diâmetro. Mais de 28 toneladas em 9000 meteoritos metálicos foram recuperados. O maior pedaço pesa 1745 kg.

A extinção dos dinossauros, 65 milhões de anos atrás, é consistente com um impacto de um asteróide ou cometa de mais de 10 km de diâmetro, que abriu uma cratera de 200 km de diâmetro perto de Chicxulub, na península de Yucatan, no México. O impacto liberou uma energia equivalente a 5 bilhões de bombas atômicas como a usada sobre Hiroshima em 1945. A imagem mostra as variações gravimétricas do local, já que parte está sob o oceano. Outras crateras com a mesma idade têm sido descobertas, como a cratera Boltysh, de 24 km de largura na Ucrânia e a cratera Silverpit, no fundo do Mar do Norte na costa da Inglaterra, com 19 km de largura. A proposta de que a grande extinção de organismos terrestres e marinhos, vertebrados e invertebrados que ocorreu há 65 milhões de anos (transição do período Cretáceo para o Terciário) tem origem num grande impacto é do físico americano Luis Walter Alvarez (1911-1988), ganhador do prêmio Nobel em 1968 por seus estudos de partículas sub-atômicas, e seu filho Walter Alvarez (1940-), geólogo americano, que notaram que a extinção se deu por alterações climáticas que atingiram toda a Terra, com um esfriamento na superfície e pela existência de uma fina camada de barro com uma alta taxa de irídio (um metal raro, similar à platina) em várias partes do globo nesta época, consistente com uma grande nuvem de pó que se espalhou por todo o planeta, cobrindo a luz do Sol. Com a queda da fotossíntese, as plantas

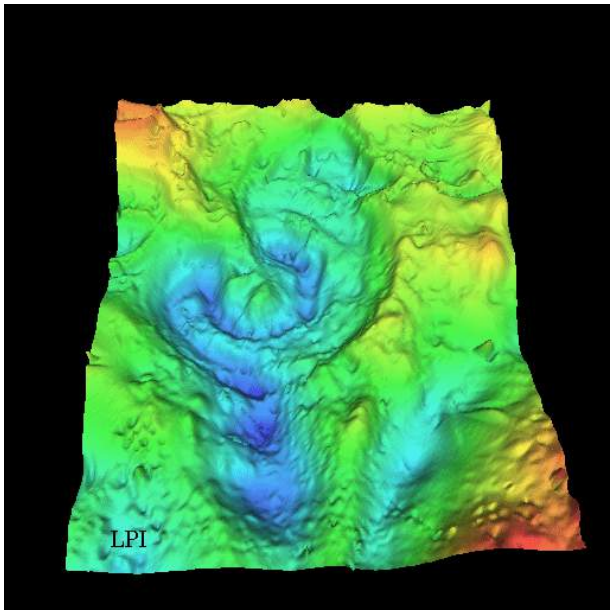


Figura 15.3: Medidas gravimétricas de Chicxulub.

morreriam e os dinossauros morreriam por falta de alimentos. Um evento similar poderia ser uma grande explosão vulcânica, mas isto não explicaria a deposição de irídio, nem a existência da cratera de Chicxulub. Asteróides são mais ricos em irídio do que a crosta da Terra.

Esse não é um evento único; a cada dia, a Terra é atingida por corpos interplanetários, a maioria deles microscópicos, com uma massa acumulada de 10 000 toneladas, e a cada aproximadamente 30 milhões de anos, um grande impacto ocorre na Terra.

15.5 Satélites

Em geral, o número de satélites de um planeta está associado à sua massa. O maior satélite do sistema solar é Ganimedes, um dos quatro satélites galileanos de Júpiter, com raio de 2631 km. O segundo é Titan, de Saturno, com 2575 km de raio. Ambos são maiores do que o planeta Mercúrio, que tem 2439 km de raio. Titan apresenta a notável característica de possuir uma atmosfera densa, rica em compostos de carbono e metano. Note que a Lua, com 3475 km de diâmetro, é maior do que Plutão, que tem 2350 km

de diâmetro.

A maioria dos satélites revolve em torno do respectivo planeta no sentido de oeste para leste e a maioria tem órbita aproximadamente no plano equatorial de seu planeta.

15.6 Anéis

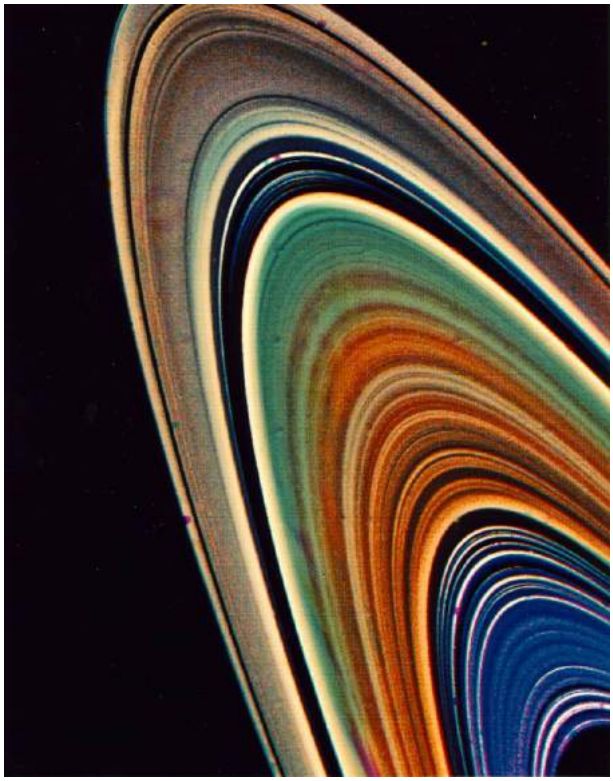


Figura 15.4: Anéis de Saturno.

Os quatro planetas jovianos apresentam um sistema de anéis, constituídos por bilhões de pequenas partículas orbitando muito próximo de seu planeta. Nos quatro planetas, os anéis estão dentro do limite de Roche, e devem ter se formado pela quebra de um satélite ou a partir de material que nunca se aglomerou para formar um satélite. Saturno é, de longe, o que possui anéis mais espetaculares. Eles são constituídos, principalmente, por pequenas

partículas de gelo, que refletem muito bem a luz. Já os anéis de Urano, Netuno e Júpiter (nessa ordem de massa constituinte), são feitos de partículas escuras, sendo invisíveis da Terra. Já em 1857, James Clerk Maxwell (1831-1879) demonstrou que os anéis só poderiam permanecer em órbitas estáveis se fossem constituídos de pequenas partículas.

15.7 Cometas

Os cometas constituem outro conjunto de pequenos corpos orbitando o Sistema Solar. Suas órbitas são elipses muito alongadas. Eles são muito pequenos e fracos para serem vistos mesmo com um telescópio, a não ser quando se aproximam do Sol. Nessas ocasiões, eles desenvolvem caudas brilhantes que algumas vezes podem ser vistas mesmo a olho nu.

Os cometas são feitos de uma mistura de gelo e poeira, como uma bola de gelo sujo, segundo o modelo proposto em 1950 por Fred Lawrence Whipple (1906-2004). À medida que se aproximam do Sol, parte do gelo sublima, formando uma grande nuvem de gás e poeira ao redor do cometa, chamada coma. A parte sólida e gelada no interior é o núcleo. A pressão de radiação do Sol empurra as partículas de gás e a poeira da coma formando a cauda. Essa cauda sempre aponta na direção oposta à do Sol e pode estender-se até 1 UA de comprimento.

Existem dois tipos de cauda: a cauda de Tipo I é reta, estreita e azulada; a cauda de Tipo II é curva, larga e amarelada. Um cometa pode apresentar apenas uma das caudas, mas frequentemente apresenta as duas. A cauda azulada é constituída de gases ionizados pela radiação ultravioleta do Sol, principalmente CO^+, N_2^+, e CO_2^+, que brilham por fluorescência, emitindo luz azul (a emissão do monóxido de carbono ionizado fica em $\lambda = 4200$ Å). Esses gases ionizados seguem as partículoas ionizadas expelidas pelo Sol, o vento Solar. A cauda amarelada é constituída de grãos de poeira empurrados pela pressão de radiação do Sol, que brilham porque refletem a luz solar. As partículas de poeira seguem órbitas keplerianas, quanto mais distante do Sol mais devagar elas andam, portanto as mas distantes vão ficando para trás em relação às mais próximas, dando à cauda a forma curva característica. Muitos cometas apresentam um envoltório de hidrogênio neutro que é invisível no óptico, mas em rádio pode ser a componente mais extensa do cometa, chamada envelope de hidrogênio.

Algumas vezes, é observada também uma anticauda, isto é, uma cauda na direção do Sol. Essa cauda é um efeito de perspectiva, causado por partículas grandes (0,1 a 1 mm de diâmetro), ejetadas do núcleo, que não

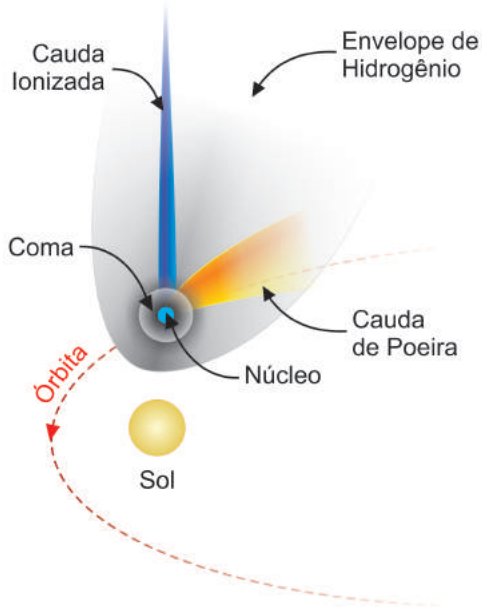


Figura 15.5: Representação esquemática das componentes de cometas: núcleo, coma, cauda ionizada, cauda de poeira e envelope de hidrogênio. A intensidade de cada componente varia de um cometa para outro.

são arrastadas pela pressão de radiação do Sol, permanecendo na órbita.

O núcleo irregular do Cometa Halley foi fotografado pela nave européia Giotto, que chegou a 1000 km do núcleo do cometa, que tem 13 por 8 km, densidade próxima a 1,0 g/cm^3, e massa de 6×10^{14} kg.

Edmond Halley (1656-1742), astrônomo britânico amigo de Isaac Newton foi o primeiro a mostrar que os cometas vistos em 1531, 1607 e 1682 eram, na verdade, o mesmo cometa, e portanto periódico, que é, desde então, chamado de Cometa Halley.

No início de 1997, o Cometa Hale–Bopp esteve visível a olho nu em praticamente todo o mundo, inclusive todo o Brasil.

Em julho de 1994, o cometa Shoemaker-Levy 9, descoberto por Carolyn Jean Spellmann Shoemaker (1929-), Eugene Merle Shoemaker (1928-1997) e David H. Levy (1948-) em 24 de março de 1993, e que tinha se fragmentado em mais de 21 pedaços, os maiores de até 1 km, colidiu com Júpiter, explodindo nas nuvens de amônia da atmosfera de Júpiter.

Concluindo, se um corpo pequeno apresenta uma atmosfera volátil vi-

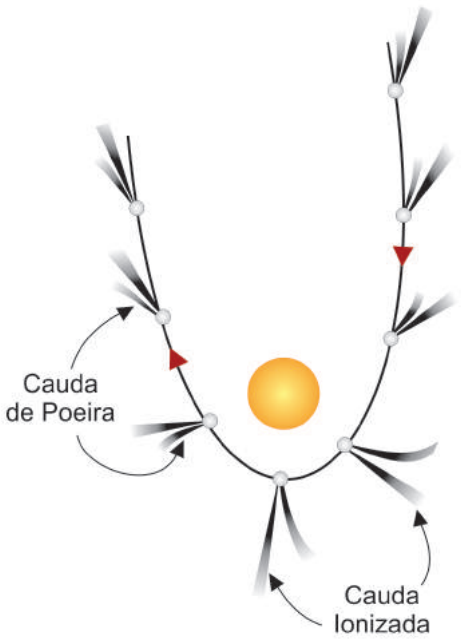


Figura 15.6: A cauda de um cometa aponta sempre na direção oposta ao Sol.

sível, chama-se cometa. Se não, chama-se asteróide.

15.7.1 Origem dos Cometas

Acredita-se que os cometas são corpos primitivos, presumivelmente sobras da formação do sistema solar, que se deu pelo colapso de uma nuvem molecular gigante. Esses corpos formariam uma vasta nuvem circundando o Sistema Solar, em órbitas com afélios a uma distância de aproximadamente 50 000 UA do Sol: a "Nuvem de Oort". Haveria aproximadamente 100 bilhões de núcleos cometários nessa nuvem. Eventualmente, a interação gravitacional com uma estrela próxima perturbaria a órbita de algum cometa, fazendo com que ele fosse lançado para as partes mais internas do sistema solar. Por exemplo, a estrela GL710, da constelação do Sagitário, que se encontra hoje a 63 anos-luz do Sol, vai passar dentro da nuvem de Oort daqui a aproximadamente 6 bilhões de anos, chegando a 1,1 anos-luz de distância do Sol. Outras estrelas que perturbarão a Nuvem de Oort, nos próximos



Figura 15.7: Cometa West (1976).

bilhões de anos, são Sírius, Próxima Centauri e a estrela de Barnard [Edward Emerson Barnard (1857-1923)]. Uma vez que o cometa é desviado para o interior do sistema solar, ele não sobrevive a mais do que 1000 passagens periélicas antes de perder todos os seus elementos voláteis.

15.8 Planeta X

Desde a descoberta de Plutão por Clyde William Tombaugh (1906-1997), em 1930, muitos astrônomos procuraram evidências dinâmicas ou fotográficas da existência de um 10° planeta, muitas vezes chamado Planeta X. A razão dessa procura é que a massa de Plutão parece muito pequena para dar conta de todas as irregularidades observadas no movimento de Netuno, que foi o que já havia motivado as pesquisas que levaram à descoberta de Plutão. Nenhum outro planeta do tamanho de Plutão foi encontrado, mas foram descobertos muitos objetos menores, com diâmetros da ordem de algumas centenas de quilômetros. Essas descobertas sugeriram a idéia, atualmente defendida por muitos astrônomos, de que a região externa do sistema solar é povoada por milhares de corpos gelados do tipo de Plutão, que formam o cinturão de Kuiper.

15.9 Chuva de meteoros

Cada vez que um cometa passa perto do Sol, ele perde, junto com seus componentes voláteis, parte de seus componentes sólidos, na forma de partículas que ficam orbitando em torno do Sol na mesma órbita do cometa. Cada vez que a Terra cruza a órbita de um cometa, ela encontra essa "nuvem" de partículas, e uma chuva de meteoros ocorre.

15.10 Luz zodiacal

No plano do Sistema Solar, que no céu fica na região do Zodíaco, existe grande concentração de poeira cometária. A reflexão da luz solar nessa poeira chama-se luz zodiacal e pode ser vista algumas horas após o pôr-do-sol ou antes de seu nascer, em lugares suficientemente escuros.

Capítulo 16

O Sol - a nossa estrela

O Sol, nossa fonte de luz e de vida, é a estrela mais próxima de nós, e a que melhor conhecemos. Basicamente, é uma enorme esfera de gás incandescente, em cujo núcleo acontece a geração de energia através de reações termonucleares. O estudo do Sol serve de base para o conhecimento das outras estrelas, que de tão distantes aparecem para nós como meros pontos de luz.

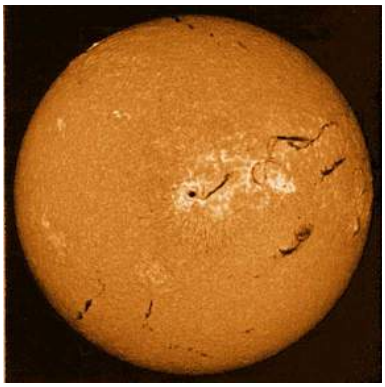


Figura 16.1: Foto do Sol na linha $H\alpha$ do hidrogênio, obtida pelo National Solar Observatory, EUA. Os filamentos escuros são proeminências.

Apesar de parecer tão grande e brilhante (seu brilho aparente é 200 bilhões de vezes maior do que o de Sírius, a estrela mais brilhante do céu noturno), na verdade o Sol é uma estrela bastante comum. Suas principais características são:

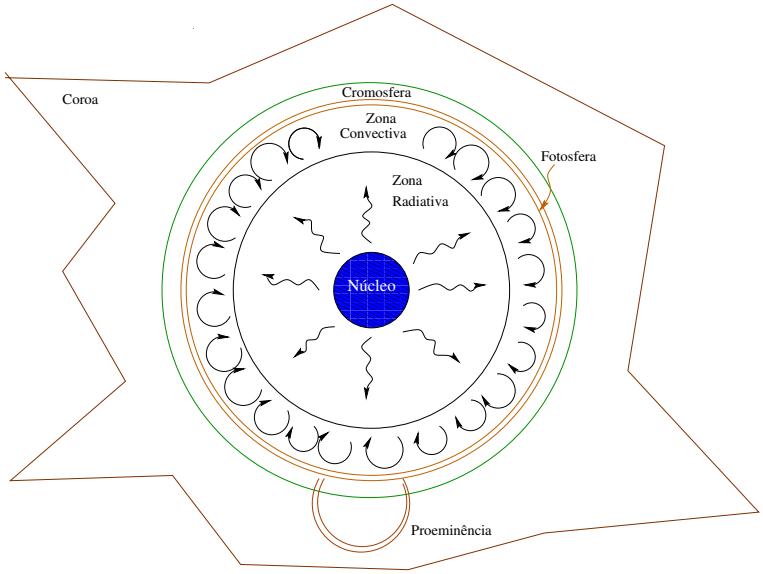
Massa	$M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg
Raio	$R_\odot = 6{,}960 \times 10^{8}$ m
Densidade média	$\rho = 1409\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$
Densidade central	$\rho_c = 1{,}6 \times 10^{5}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$
Distância	1 UA $= 1,496 \times 10^{8}$ km
Luminosidade	$L_\odot = 3,9 \times 10^{33}$ ergs/s
Temperatura efetiva	$T_{\mathrm{ef}} = 5785$ K
Temperatura central	$T_c = 1{,}5 \times 10^{7}$ K
Magnitude absoluta bolométrica	$M_{bol} = 4{,}72$
Magnitude absoluta visual	$M_V = 4{,}79$
Tipo espectral e classe de luminosidade	G2 V
Índices de cor	$B - V = 0{,}62$
	$U - B = 0{,}10$
Composição química principal	Hidrogênio = 91,2 %
	Hélio = 8,7%
	Oxigênio = 0,078 %
	Carbono = 0,049 %
Período rotacional no equador	25 d
na latitude 60°	29 d

Algumas das características listadas acima são obtidas mais ou menos diretamente. Por exemplo, a **distância** do Sol, chamada *Unidade Astronômica*, é medida por ondas de radar direcionadas a um planeta em uma posição favorável de sua órbita (por exemplo Vênus, quando Terra e Vênus estão do mesmo lado do Sol e alinhados com ele). O **tamanho** do Sol é obtido a partir de seu tamanho angular e da sua distância. A **massa** do Sol pode ser medida a partir do movimento orbital da Terra (ou de qualquer outro planeta) usando a terceira lei de Kepler. Sabendo então sua massa e seu raio temos a **densidade média** do Sol. Pela densidade média podemos inferir sua **composição química média**.

Outras características são determinadas a partir de modelos. Por exemplo, a equação de equilíbrio hidrostático, descrita no capítulo Evolução Estelar, permite determinar a **pressão** e a **temperatura** no centro do Sol, supondo que elas têm que ser extremamente altas para suportar o peso das camadas mais externas.

16.1 Estrutura do Sol

O modelo representado na figura mostra as principais regiões do Sol. A **fotosfera**, com cerca de 330 km de espessura e temperatura de 5785 K,



é a camada visível do Sol. Logo abaixo da fotosfera se localiza a **zona convectiva**, se estendendo por cerca de 15% do raio solar. Abaixo dessa camada está a **zona radiativa**, onde a energia flui por radiação. O **núcleo**, com temperatura de cerca de 10 milhões de Kelvin, é a região onde a energia é produzida, por reações termo-nucleares. A **cromosfera** é a camada da atmosfera solar logo acima da fotosfera. Ela tem cor avermelhada e é visível durante os eclipses solares, logo antes e após a totalidade. Estende-se por 10 mil km acima da fotosfera e a temperatura cresce da base para o topo, tendo um valor médio de 15 mil K. Ainda acima da cromosfera se encontra a **coroa**, também visível durante os eclipses totais. A coroa se estende por cerca de dois raios solares.

16.1.1 A fotosfera

A fotosfera do Sol tem a aparência da superfície de um líquido em ebulição, cheia de bolhas, ou grânulos. Este fenômeno é chamado de **granulação fotosférica**. Os grânulos têm em torno de 1500 km de diâmetro, e duram cerca de 10 min cada. Eles marcam os topos das colunas convectivas de gás quente, que se forma na zona convectiva, logo abaixo da fotosfera. As regiões escuras entre os grânulos são regiões onde o gás mais frio e mais denso escorrem para baixo. A maior parte do espectro visível do Sol tem origem em uma camada com cerca de 1000 km de extensão, em que a temperatura

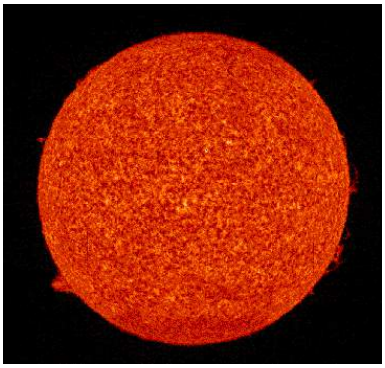


Figura 16.2: Foto do Sol na linha de 584 Å do hélio (He I), obtida pelo satélite SOHO (The Solar and Heliospheric Observatory), da ESA/NASA

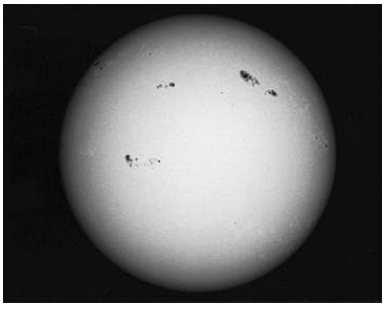


Figura 16.3: Foto do Sol em luz branca, mostrando algumas manchas solares

varia de cerca de 9000 K a 4000 K. A gravidade superficial do Sol é de $g = 2,738 \times 10^4$ cm/s^2=273,8 m/s^2 (Jorge E. Vernazza, Eugene H. Avrett & Rudolf Loeser, 1973, Astrophysical Journal, 184, 605).

O fenômeno fotosférico mais notável é o das **manchas solares**, regiões irregulares que aparecem mais escuras do que a fotosfera circundante e que muitas vezes podem ser observadas mesmo a olho nu, embora olhar diretamente para o Sol só não é perigoso quando ele está no horizonte. As manchas foram registradas na China já no ano 28 a.C., mas seu estudo científico começou com o uso do telescópio, sendo observadas (por projeção da imagem do Sol) por Galileo e Thomas Harriot (1560-1621) já em 1610, e por Johannes (1587-1616) e David Fabricius (1564-1617) e por Christoph Scheiner (1575-1650) em 1611. São constituídas de duas partes: a **umbra**, parte

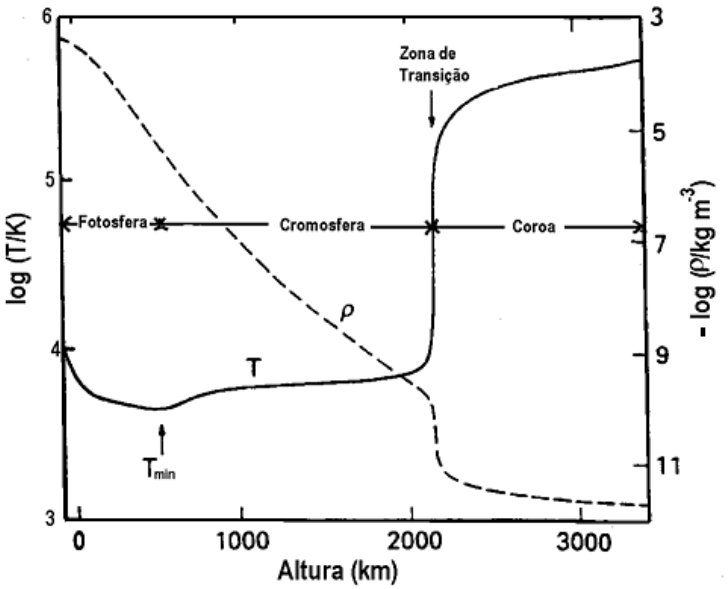


Figura 16.4: Distribuição de temperatura e densidade na atmosfera do Sol.

central mais escura, com temperaturas em torno de 3800 K, e a **penumbra**, região um pouco mais clara e com estrutura radial em torno da umbra. As manchas solares tendem a se formar em grupos, e estão associadas a intensos campos magnéticos no Sol. As manchas solares seguem um ciclo de 11 anos em que o número de manchas varia entre máximos e mínimos, descoberto em 1843 pelo astrônomo amador alemão Samuel Heinrich Schwabe (1789-1875).

16.1.2 A cromosfera

A cromosfera do Sol normalmente não é visível, porque sua radiação é muito mais fraca do que a da fotosfera. Ela pode ser observada, no entanto, durante os eclipses, quando a Lua esconde o disco da fotosfera. Veremos, no capítulo de espectroscopia, que o Sol tem um espectro contínuo com linhas escuras (de absorção). Esse espectro é o da fotosfera. No entanto, olhando a borda do Sol com um espectroscópio, durante um eclipse, temos a oportunidade de ver por alguns instantes o espectro da cromosfera, feito de linhas brilhantes, que mostram que a cromosfera é constituída de gases quentes que emitem luz na forma de linhas de emissão. Essas linhas são difíceis de serem observadas



Figura 16.5: Foto do eclipse total de 4 de novembro de 1994, obtida pelos autores em Santa Catarina, Brasil, mostrando a cromosfera.

contra a luz brilhante da fotosfera, por isso não as vemos no espectro solar normal.

Uma das linhas cromosféricas de emissão mais brilhantes é a linha de Balmer $H\alpha$, no comprimento de onda 6563 Å, que no espectro solar normal aparece em absorção. A linha $H\alpha$ está no vermelho, por isso a cromosfera tem cor avermelhada.

Uma fotografia do Sol tirada com filtro $H\alpha$ deixa passar a luz da cromosfera, e permite ver que a cromosfera tem uma aparência ondulada devido à presença de estruturas chamadas **espículas**, jatos de gás que se elevam a até 10 mil km acima da borda da cromosfera, e duram poucos minutos. As espículas, observadas contra o disco do Sol, aparecem como filamentos escuros; nas bordas, aparecem como labaredas brilhantes.

A temperatura na cromosfera varia de 4300 K na base a mais de 40 000 K a 2500 km de altura. Esse aquecimento da cromosfera deve ter uma fonte de energia que não são os fótons produzidos no interior do Sol, pois se a energia fosse gerada por fótons a cromosfera deveria ser mais fria do que fotosfera, e não mais quente. Atualmente se pensa que a fonte de energia são campos magnéticos variáveis formados na fotosfera e transportados para a coroa por correntes elétricas, deixando parte de sua energia na cromosfera.

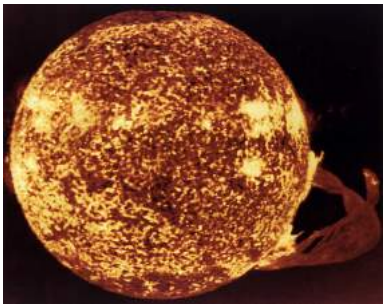


Figura 16.6: Foto do Sol obtida pela estação espacial Skylab da NASA em 19 de dezembro de 1973, com um dos mais espectacular flares solares já gravados. A proeminência abrange mais de 588 000 km. Os pólos solares apresentam pouca super-granulação, e um tom mais escuro do que o centro do disco.

16.1.3 A Coroa

A cromosfera gradualmente se funde na coroa, a camada mais externa e mais rarefeita da atmosfera do Sol. A coroa também é melhor observada durante eclipses, pois apesar de ter um brilho equivalente ao da lua cheia, ela fica obscurecida quando a fotosfera é visível.

O espectro da coroa mostra linhas muito brilhantes que, até 1940, não eram conhecidas. Atualmente sabemos que elas são produzidas por átomos de ferro, níquel, neônio e cálcio altamente ionizados, e não por algum elemento estranho, como anteriormente foi pensado. O fato de existirem esses elementos várias vezes ionizados na coroa implica que sua temperatura deve ser muito alta, pois é necessária muita energia para arrancar muitos elétrons de um átomo. A coroa deve ter uma temperatura em torno de 1 milhão de Kelvin.

A elevação da temperatura na coroa deve ter origem no mesmo processo físico que aquece a cromosfera: transporte de energia por correntes elétricas induzidas por campos magnéticos variáveis.

Da coroa emana o **vento solar**, um fluxo contínuo de partículas emitidas da coroa que acarretam uma perda de massa por parte do sol em torno de $10^{-13} M_{\odot}$ por ano. O vento solar que atinge a Terra (aproximadamente 7 prótons/cm^3 viajando a cerca de 400 km/s) é capturado pelo campo magnético da Terra, formando o **cinturão de Van Allen**, na magnetosfera terrestre. Este cinturão, descoberto pelo físico americano James Alfred Van

Allen (1914-2006) em 1958, só permite que as partículas carregadas entrem na atmosfera da Terra pelos pólos, causando as **auroras**, fenômenos luminosos de excitação e des-excitação dos átomos de oxigênio.

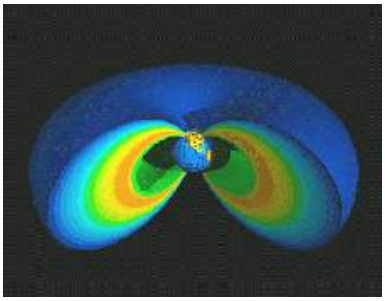


Figura 16.7: Magnetosfera da Terra - cinturão de Van Allen.

Além das partículas do vento solar, existem grandes ejeções de massa associadas às proeminências, que quando atingem a Terra causam danos às redes elétricas e aos satélites. O último máximo do ciclo de 11 anos ocorreu em 1989, e logo após uma grande proeminência solar, a rede elétrica na província de Quebec, no Canadá, sofreu uma grande sobrecarga elétrica que causou vários danos aos equipamentos. Algumas regiões da província ficaram até duas semanas sem luz elétrica. Em 1994, o satélite de comunicações E2 teve alguns circuitos queimados por uma sobrecarga estática, também associada com a ejecção de uma nuvem de plasma solar. O máximo do ciclo solar atual ocorreu em 15 de fevereiro de 2001, quando o campo magnético solar reverteu de polaridade. Uma ejeção coronal de massa também pode causar grandes ondas nas camadas externas do Sol, que podem estar relacionadas com o aquecimento da coroa.

Normalmente as partículas carregadas são desviadas pelo campo magnético da Terra para o Cinturão de Van Allen, e somente chegam à Terra próximo aos pólos. Entretanto o campo magnético terrestre não é um simples dipolo e existe uma depressão no campo, no Atlântico Sul, que faz com que partículas carregadas também cheguem ao solo na região conhecida como Anomalia Geomagnética do Atlântico Sul. A Anomalia Geomagnética do Atlântico Sul é uma mancha de fluxo invertido, isto é, uma mancha com fluxo magnético direcionado para dentro dentro do hemisfério de fluxo direcionado para fora. Existem outras manchas menores, tanto no hemisfério norte quanto no hemisfério sul, de acordo com as medições de campo magnético pelos satélites Magsat em 1980 e Oersted em 2000. Estas reversões de fluxo

são similares às que causam as manchas solares: o fluxo de material líquido e ionizado no núcleo da Terra é convectivo, turbulento e distorcido também por rotação diferencial do núcleo externo, líquido (2900 km a 5100 km de profundidade), sobre o núcleo sólido interno, cristalizado e que libera calor latente na cristalização das camadas externas e de separação de elementos menos densos, como sultefo de ferro e óxido de ferro. Estas manchas mudam de tamanho com o tempo e, quando aumentam até dominar o hemisfério, causam a reversão do campo magnético da Terra. A última reversão ocorreu há 780 mil anos. As ejeções coronais de massas são bolhas de gás quente (plasma), de bilhões de toneladas, aquecidas pelos campos magnéticos do Sol. Os campos magnéticos do Sol se enrolam devido ao movimento turbulento de convecção mas também devido à rotação diferencial, que faz com que o equador solar complete uma volta em 25 dias, enquanto que as regiões próximas aos pólos completam uma volta em 36 dias. A desconexão do campo magnético solar pode ocorrer em alguns minutos e tem uma energia equivalente a milhares de bombas atômicas.

A radiação ultravioleta tem comprimentos de onda menores do que a radiação visível e é normalmente dividida em três faixas: UV-A, UV-B and UV-C. O UV-B, com comprimentos de onda entre 2900 e 3200 Å, é a faixa mais perigosa que alcança a superfície da Terra. O ozônio (O_3) atmosférico, além do próprio oxigênio molecular (O_2) e nitrogênio, protegem os seres na superfície das componentes mais danosas (energéticas) da radiação solar. Mas processos químicos na atmosfera podem romper as moléculas de ozônio. Desde o início da década de 1990 tem-se detectado um buraco na camada de ozônio sobre a Antártica. A redução na camada de ozônio pode levar ao aparecimento de câncer de pele e cataratas nos seres vivos.

16.2 A energia do Sol

Tão logo foi conhecida a distância do Sol, em 1673, por Jean Richer (1630-1696) e Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) que determinaram a paralaxe de Marte e com esta estimaram a unidade astronômica como 140 milhões de km, foi possível determinar a sua luminosidade, que é a potência que ele produz. As medidas mostram que cada metro quadrado na Terra recebe do sol uma potência (energia/segundo) de 1400 watts [James Watt (1736-1819)], ou seja, a potência de 14 lâmpadas de 100 watts. O valor mais preciso da constante solar é 1367,5 W/m^2, e varia 0,3% durante o ciclo solar de 11 anos. Por essa potência recebida na Terra, determina-se a luminosidade do Sol em 4×10^{26} watts, ou 4×10^{33} ergs/s.

Essa quantidade de energia é equivalente à queima de 2×10^{20} galões de gasolina por minuto, ou mais de 10 milhões de vezes a produção anual de petróleo da Terra. Já no século XIX os astrônomos sabiam que essa energia não poderia ser gerada por combustão, pois a energia dessa forma poderia manter o Sol brilhando por apenas 10 mil anos. Tampouco o colapso gravitacional, fonte de energia proposta pelo físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) em 1854, resultou eficiente, pois a energia gravitacional poderia suprir a luminosidade do Sol por 20 milhões de anos, e evidências geológicas indicam que o Sol tem uma idade de bilhões de anos.

Em 1937 Hans Albrecht Bethe (1906-2005) propôs a fonte hoje aceita para a energia do Sol: as **reações termo-nucleares**, na qual quatro prótons são fundidos em um núcleo de hélio, com liberação de energia. O Sol tem hidrogênio suficiente para alimentar essas reações por bilhões de anos. Gradualmente, à medida que diminui a quantidade de hidrogênio, aumenta a quantidade de hélio no núcleo. Veja mais sobre este assunto no (Cap.22) na página 241.

Segundo os modelos de evolução estelar, daqui a cerca de 1,1 bilhão de anos o brilho do Sol aumentará em cerca de 10%, que causará a elevação da temperatura aqui na Terra, aumentando o vapor de água na atmosfera. O problema é que o vapor de água causa o efeito estufa. Daqui a 3,5 bilhões de anos, o brilho do Sol já será cerca de 40% maior do que o atual, e o calor será tão forte que os oceanos secarão completamente, exacerbando o efeito estufa. Embora o Sol se torne uma gigante vermelha após terminar o hidrogênio no núcleo, ocorrerá perda de massa gradual do Sol, afastando a Terra do Sol até aproximadamente a órbita de Marte, mas exposta a uma temperatura de cerca de 1600 K (1327 C). Com a perda de massa que levará a transformação do Sol em uma anã branca, a Terra deverá ficar a aproximadamente 1,85 UA.

Capítulo 17

Origem da vida e vida extraterrestre

Somos nós as únicas criaturas no Universo que pensam sobre sua origem e evolução, ou existiriam outras formas de vida inteligente entre as estrelas?

A origem da vida e a existência de vida extraterrestre vêm sendo focalizadas nos noticiários com grande intensidade desde os anos 1950, mas de forma crescente nos últimos anos, com a possível detecção de fósseis microscópicos em Marte, e da existência de água em forma de oceanos, sob uma manta congelada, na lua Europa de Júpiter.

Qual é a origem da vida? O que diferencia seres vivos de simples matéria orgânica? No contexto de evolução cósmica, a vida resulta de uma seqüência natural de evolução química e biológica da matéria pré-existente, regida pelas leis físicas. A regra fundamental é a de que os seres vivos são organismos que se reproduzem, sofrem mutações, e reproduzem as mutações, isto é, passam por seleção cumulativa. Já a vida inteligente requer mais de uma centena de bilhões de células, diferenciadas em um organismo altamente complexo e, portanto, requer um longo tempo de seleção natural cumulativa.

17.1 Vida na Terra

Segundo a paleontologia, fósseis microscópicos de bactéria e algas, datando de 3,8 bilhões de anos, são as evidências de vida mais remota na Terra. Portanto, cerca de 1 bilhão de anos após a formação da Terra, e apenas 200 a 400 milhões de anos após a crosta ter se resfriado, a evolução molecular já havia dado origem à vida. Desde então, as formas de vida sofreram muitas mutações e a evolução darwiniana selecionou as formas de vida mais

adaptadas às condições climáticas da Terra, que mudaram com o tempo. A evolução do *Homo Sapiens*, entretanto, por sua alta complexidade, levou 3,8 bilhões de anos, pois sua existência data de 300 000 anos atrás. O *Homo Sapiens Sapiens* só tem 125 000 anos, e a civilização somente 10 000 anos, com o fim da última idade do gelo.

Embora nenhuma evidência concreta de vida tenha até agora sido encontrada fora da Terra, os elementos básicos para seu desenvolvimento foram detectados no meio extraterrestre. Por exemplo, a lua Europa pode conter vida, pois reúne os elementos fundamentais: calor, água e material orgânico procedente de cometas e meteoritos.

A análise de meteoritos do tipo condrito carbonáceo, e a observação de moléculas orgânicas no meio interestelar corroboram a idéia de que os compostos orgânicos podem ser sintetizados naturalmente, sem a atuação de seres vivos. Os compostos orgânicos são simplesmente moléculas com o átomo de carbono, que têm propriedade elétrica de se combinar em longas cadeias. Vários meteoritos apresentam aminoácidos de origem extraterrestre, que se formaram, possivelmente, por adesão molecular catalisada por grãos de silicato da poeira interestelar.

A Terra não se formou com a mesma composição do Sol, pois nela faltam os elementos leves e voláteis (H e He), incapazes de se condensar na região demasiadamente quente da nebulosa solar onde a Terra se formou. Mais tarde, os elementos leves (H e He) secundários foram perdidos pelo proto-planeta porque sua massa pequena e temperatura elevada não permitiram a *retenção da atmosfera*. A atmosfera primitiva resultou do degasamento do interior quente, sendo alimentada através da intensa atividade vulcânica que perdurou por cerca de 100 milhões de anos após sua formação. Apesar da ejecção de H_2O, CO_2, HS_2, CH_4 e NH_3 na atmosfera, esta não possuía oxigênio livre como hoje, que poderia destruir moléculas orgânicas. A formação de moléculas complexas requeria energia de radiação com comprimentos de onda menores que 2200 Å, providos por relâmpagos e pelo próprio Sol, já que não havia, ainda, na Terra, a *camada de ozônio* que bloqueia a radiação ultravioleta. O experimento bioquímico em laboratório de Miller-Urey, realizado em 1953 por Stanley Lloyd Miller (1930-2007) e Harold C. Urey (1893-1981), demonstrou que, nessa atmosfera redutora, sob a ação de descargas elétricas, é possível transformar 2% do carbono em aminoácidos, a base das proteínas. No experimento de Miller-Urey, um frasco contém o "oceano" de água, que ao ser aquecido força vapor de água a circular pelo aparato. Outro frasco contém a "atmosfera", com metano (CH_4), amônia (NH_3), hidrogênio (H_2) e o vapor de água circulando. Quando uma descarca

elétrica (raio) passa pelos gases, eles interagem, gerando amino ácidos (glicina, alanina, ácidos aspártico e glutâmico, entre outros). 15% do carbono do metano original combinaram-se em compostos orgânicos.

Em 1959, Joan Oró (1923-2004), na Universidade de Houston, conseguiu produzir adenina, uma das quatro bases do ARN (*RNA*) e ADN (*DNA*), a partir de HCN e amônia em uma solução aquosa. Embora a atmosfera da Terra possa não ter sido redutora no início, vários aminoácidos já foram detectados em meteoritos, mostrando que eles podem se formar no espaço.

17.2 Vida no Sistema Solar

A existência de vida inteligente pode ser descartada em todos os demais planetas do Sistema Solar. Em Marte, onde há água em certa abundância, atualmente em forma de vapor ou sólido, e a pressão atmosférica na superfície é 150 vezes menor do que na Terra, a morfologia da superfície indica que houve água líquida no passado. O *meteorito ALH84001*, proveniente de Marte, mostra depósitos minerais que ainda estão em disputa científica se são restos de nanobactérias[1], compostos orgânicos simples, ou contaminação ocorrida na própria Terra.

17.3 Vida na galáxia

A inteligência, interesse sobre o que está acontecendo no Universo, é um desdobramento da vida na Terra, resultado da evolução e seleção natural. Os seres inteligentes produzem manifestações artificiais, como as ondas eletromagnéticas moduladas em amplitude (AM) ou freqüência (FM) produzidas pelos terráqueos para transmitir informação (sinais com estrutura lógica). Acreditando que possíveis seres extraterrestres inteligentes se manifestem de maneira similar, desde 1960 se usam radiotelescópios para tentar captar sinais deles. Essa busca leva a sigla SETI, do inglês *Search for Extra-Terrestrial Intelligence*, ou Busca de Inteligência Extraterrestre. Até hoje,

[1] A bactéria de menor tamanho reconhecida na Terra é a *Mycoplasma genitalium*, com 300 nm. As possíveis nanobactérias, encontradas também dentro de seres humanos, têm diâmetro entre 30 e 150 nm, cerca de um milésimo da largura de um fio de cabelo, e menor que muitos vírus, que não se reproduzem sozinhos, mas somente através de um ser vivo. O tamanho extremamente pequeno das nanobactérias limita muito a investigação cientifica, e ainda não se conseguiu identificar DNA nelas. O microbiólogo Jack Maniloff, da Universidade de Rochester, determinou como 140 nm o tamanho mínimo para seres vivos, para ter DNA e proteínas em funcionamento.

não houve nenhuma detecção, mas essa busca se baseia em emissões moduladas de rádio, que produzimos aqui na Terra somente nos últimos 60 anos. Hoje em dia, a transmissão de dados por ondas eletromagnéticas está sendo superada por transporte de informação por fibras óticas, que não são perceptíveis a distâncias interestelares.

17.4 OVNIs

Devido às grandes distâncias interestelares, e à limitação da velocidade a velocidades menores que a velocidade da luz pela relatividade de Einstein, não é possível viajar até outras estrelas e seus possíveis planetas. O ônibus espacial da NASA viaja a aproximadamente 28 000 km/hr e, portanto, levaria 168 000 anos para chegar à estrela mais próxima, que está a 4,4 anos-luz da Terra. A espaçonave mais veloz que a espécie humana já construiu até agora levaria 80 mil anos para chegar à estrela mais próxima. O Dr. Bernard M. Oliver (1916-1995), diretor de pesquisa e vice-presidente da Hewlett-Packard Corporation e co-diretor do projeto de procura de vida extra-terrestre Cyclops da NASA, calculou que para uma espaçonave viajar até essa estrela mais próxima a 70% da velocidade da luz, mesmo com um motor *perfeito*, que converte 100% do combustível em energia (nenhuma tecnologia futura pode ser melhor que isto), seriam necessários $2,6 \times 10^{16}$ MWatts, equivalente a toda a energia elétrica produzida hoje em todo o mundo, a partir de todas as fontes, inclusive nuclear, durante 100 mil anos, e, ainda assim, levaria 6 anos só para chegar lá. O importante sobre esse cálculo é que ele não depende da tecnologia atual (eficiência de conversão de energia entre 10 e 40%), pois assume um motor perfeito, nem de quem está fazendo a viagem, mas somente das leis de conservação de energia. Essa é a principal razão por que os astrônomos são tão céticos sobre as notícias que os OVNIs (Objetos Voadores Não-identificados), ou UFOs (*Unidentified Flying Objects*) são espaçonaves de civilizações extraterrestres. Devido às distâncias enormes e gastos energéticos envolvidos, é muito improvável que as dezenas de OVNIs noticiados a cada ano pudessem ser visitantes de outras estrelas tão fascinados com a Terra que estariam dispostos a gastar quantidades fantásticas de tempo e energia para chegar aqui. A maioria dos OVNIs, quando estudados, resultam ser fenômenos naturais, como balões, meteoros, planetas brilhantes, ou aviões militares classificados. De fato, nenhum OVNI jamais deixou evidência física que pudesse ser estudada em laboratórios para demonstrar sua origem de fora da Terra.

Quatro espaçonaves da Terra, duas Pioneers e duas Voyagers, depois

de completarem sua exploração do sistema planetário, estão deixando esse sistema planetário. Embora elas já estejam na magnetopausa, elas levarão milhões de anos para atingir os confins do Sistema Solar, onde situa-se a Nuvem de Oort. Essas quatro naves levam placas pictoriais e mensagens de áudio e vídeo sobre a Terra, mas, em sua velocidade atual, levarão muitos milhões de anos para chegar perto de qualquer estrela.

17.5 Planetas fora do Sistema Solar

Desde 1992 até janeiro de 2014 foram detectados 1074 planetas extrassolares, sendo 812 sistemas planetários e 178 sistemas múltiplos, a maioria através da evidências gravitacionais pelo deslocamento Doppler nas linhas espectrais das estrelas; a órbita do planeta em torno da estrela produz o movimento da estrela em torno do centro de massa. Com o lançamento do satélite COROT em 2006 e do satélite Kepler em 2009, ambos já fora de operação na busca de planetas, o método de detecção por trânsito do planeta na frente da estrela, pela pequeníssima redução no brilho da estrela quando o planeta passa na frente da estrela, passou a ser importante. Desde 2004 já foi possível obter imagens de planetas extrassolares diretamente, embora as estrelas em volta das quais os planetas orbitam sejam muito mais brilhantes que os planetas e, portanto, ofusca-os em geral. Em 2009 foi possível obter a primeira imagem de um sistema planetário, com três planetas gigantes, orbitando a estrela HR 8799. Todos os métodos detectam mais facilmente os grandes planetas, tipo Júpiter, que não podem conter vida como a conhecemos, porque têm atmosferas imensas e de altíssima pressão sobre pequenos núcleos rochosos. Detectar planetas pequenos, como a Terra, requerem precisão ainda maior do que a atingível pelas observações atuais. Geoffrey W. Marcy e colaboradores da missão Kepler publicaram em 2014, (Astrophysical Journal Supplement, Volume 210, Issue 2, article id. 20, 70) a medida de seis planetas com densidades acima de 5 g/cm^3 e, portanto, rochosos, com caios inferiores a dois raios terrestres. Como só determinamos a massa do planeta e a distância do planeta à estrela, e em casos raros a temperatura e o raio do planeta, não podemos ainda detectar nenhum sinal de vida.

A estimativa do número N de civilizações na nossa Galáxia pode ser discutida com o auxílio da *equação de Drake*, proposta em 1961 por Frank Donald Drake (1930-), então astrônomo no National Radio Astronomy Observatory, em Green Bank, Estados Unidos, e atual presidente do SETI Institute:

$$\boxed{N = f_p\, f_v\, f_i\, f_c\, \dot{N}\, T_t,}$$

onde f_p é a fração provável de estrelas que têm planetas (menor que 0,4), f_v é a fração provável de planetas que abrigam vida, f_i é a fração provável de planetas que abrigam vida e desenvolveram formas de vida inteligente, f_c é a fração provável de planetas que abriga vida inteligente e que desenvolveram civilizações tecnológicas com comunicação eletromagnética, $\dot{N}$ é a taxa de formação de estrelas na Galáxia, e T_t é o tempo provável de duração de uma civilização tecnológica. A única variável razoavelmente bem conhecida é $\dot{N}$, que é simplesmente o número de estrelas na nossa galáxia dividido pela idade da galáxia. Podemos fazer um cálculo otimista, supondo que a vida como a nossa pulula na Galáxia, assumindo $f_v\, f_i\, f_c = 1$,

$$N = f_p \dot{N} T_t,$$

isto é, que o número de planetas com vida inteligente seria dado pelo número de novas estrelas com planetas vezes a duração de uma civilização tecnológica. Usando $\dot{N}$=3/ano, $f_p = 0,4$, e T_t de um século, chega-se a N=120. Podemos estimar a distância média entre estas "civilizações", assumindo que estão distribuídas pela nossa Galáxia. Como nossa galáxia tem aproximadamente 100 000 anos-luz de diâmetro por 1000 anos-luz de espessura, o volume total da galáxia é da ordem de

$$V_G = \pi \times 50\,000^2 \times 1000\,\text{anos} - \text{luz}^3$$

e a distância média entre estas "civilizações" (d_C)

$$d_C = \left[\frac{V_C}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}$$

onde

$$V_C = \frac{V_G}{N}$$

Se N=120, obtemos $d_C \simeq 1\,700$ anos-luz.

Num cálculo pessimista, o valor de N pode cair por um fator de um milhão. Nesse caso, para haver uma única civilização tecnológica na galáxia além da nossa, ela deveria durar no mínimo 300 mil anos. Não há, no momento, nenhum critério seguro que permita decidir por uma posição otimista ou pessimista. A equação de Drake pode ser usada para estimar a distância de uma estrela com civilização tecnológica, já que nossa galáxia tem, aproximadamente, 100 mil anos-luz de diâmetro e 100 anos-luz de espessura. Conclui-se que, para se estabelecer uma comunicação por rádio de ida e volta, mesmo na hipótese otimista, a duração da civilização tecnológica não

poderá ser menor que 12 mil anos. Caso contrário, a civilização interlocutora terá desaparecido antes de receber a resposta. Naturalmente, existem mais de 100 bilhões de outras galáxias além da nossa, mas para estas o problema de distância é muito maior.

Já que não podemos viajar até as estrelas, qual seria a maneira de detectar sinal de vida em um planeta? Considerando que a água é um solvente ideal para as reações químicas complexas que levam à vida, e que seus dois constituintes, hidrogênio e oxigênio são abundantes em toda a Galáxia, consideramos que água líquida na superfície, e, portanto, calor adequado, é um bom indicador da possibilidade de vida. Outros dois indicadores são a detecção de oxigênio e de dióxido de carbono. Oxigênio é um elemento que rapidamente se combina com outros elementos, de modo que é difícil acumular oxigênio na atmosfera de um planeta, sem um mecanismo de constante geração. Um mecanismo de geração de oxigênio ocorre através de plantas, que consomem água, nitrogênio e dióxido de carbono como nutrientes, e eliminam oxigênio. O dióxido de carbono (CO_2) é um produto de vida animal na Terra. Mas essas evidências não serão indicações de vida inteligente, já que na Terra foram necessários 4,5 bilhões de anos para a vida inteligente evoluir, mas somente 1 bilhão para a vida microscópica iniciar. Entretanto, a vida pode tomar formas inesperadas, evoluir em lugares imprevisíveis, e de formas improváveis, os chamados extremófilos. Por exemplo, aqui na Terra, recentemente se encontrou a bactéria *Polaromonas vacuolata*, que vive quilômetros abaixo da superfície, nos pólos, sob temperaturas dezenas de graus abaixo de zero, bactérias em uma mina de ouro da África do Sul, a 3,5 km de profundidade, microorganismos que vivem dentro de rochas de granito, que se acreditava completamente estéreis pela completa falta de nutrientes, até micróbios super-resistentes, como o *Methanopyrus kandleri*, que vivem no interior de vulcões submarinos, em temperaturas muito elevadas (acima de 100C). Essas bactérias se alimentam de gases, como o metano, e outros elementos químicos, como ferro, enxofre e manganês. O micróbio *Pyrolobus fumarii* era a forma de vida mais resistente às altas temperaturas até 2003. Os cientistas haviam registrado exemplares desses organismos vivendo a 113 Celsius. Derek Lovley e Kazem Kashefi, ambos da Universidade de Massachusetts, Estados Unidos, identificaram uma arqueobactéria (a forma mais primitiva de vida que se conhece) a 121 Celsius. O nome científico do micróbio ainda não foi definido. Segundo Lovley, esses microrganismos usam ferro para produzir energia. E outras como as *Sulfolobus acidocaldarius*, acidófilos, que vivem em fontes de ácido sulfúrico. Portanto, aqui na Terra, formas de vida primitiva muito diferentes existem.

Contaminação: a dificuldade de procurar vida extra-terrestre através de experimentos é a possibilidade de contaminação do experimento por vida aqui da Terra. Quando missão Apolo 12 trouxe de volta uma câmara Surveyor 3 enviada anteriormente, encontrou-se uma colônia da bactéria *Streptococcus mitis*, que tinha contaminado a espuma de isolamento da câmara antes de ser enviada à Lua, e sobrevieu não só a viagem de ida e volta, mas os três anos que esteve lá no solo na Lua. Esta bactéria é comum e inofensiva e vive no nariz, boca e garganta dos humanos.

Capítulo 18

Determinação de distâncias

O método mais comum para se medir distâncias grandes, a pontos inacessíveis, é a triangulação. Na Figura 18.1 está esquematizada, como exemplo, a maneira de medir a distância de uma árvore localizada do outro lado de um rio, sem atravessá-lo.

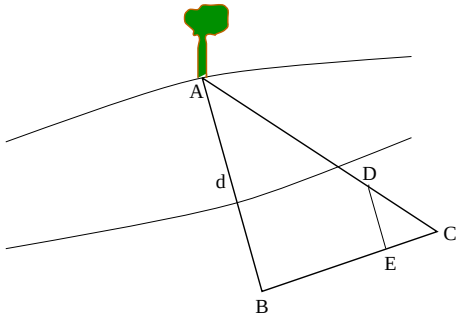


Figura 18.1: Deslocamento aparente dos objetos vistos de ângulos distintos.

Tomando a árvore como um dos vértices, construímos os triângulos semelhantes ABC e DEC. BC é a linha de base do triângulo grande, AB e AC são os lados, que são as direções do objeto (a árvore) vistas de cada extremidade da linha base. Logo:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC}$$

Como se pode medir BC, DE e EC, pode-se calcular o lado AB e, então, conhecer a distância da árvore.

Vemos que a direção da árvore, vista de B, é diferente da direção da árvore vista de C. Esse deslocamento aparente na direção do objeto observado devido à mudança de posição do observador chama-se *paralaxe*. Em astronomia, no entanto, costuma-se definir a paralaxe como a metade do deslocamento angular total medido, como está ilustrado na figura a seguir.

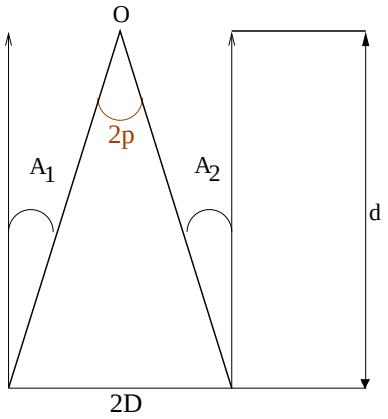


Figura 18.2: Ângulo paralático p quando a base tem valor D à uma distância d.

Suponha que o ponto O seja o objeto cuja distância se quer medir (a árvore da figura anterior). $2D$ é a linha de base do triângulo, e os ângulos A_1 e A_2 são os ângulos entre a direção do objeto visto de cada extremidade da linha de base e a direção de um objeto muito mais distante, tomado como referência (pode ser uma montanha no horizonte, no exemplo anterior).

Pela trigonometria, sabemos que

$$\tan p = \frac{D}{d}$$

Como p é conhecido $\left(p = \frac{A_1+A_2}{2}\right)$, e D também é conhecido, podemos medir a distância d. Para ângulos pequenos, a tangente do ângulo é aproximadamente igual ao próprio ângulo medido em radianos. Então, se $p \leq 4°, \tan p \approx p(\text{rad})$.

Então:

$$d = \frac{D}{p(\text{rad})}$$

Como p é medido em radianos, d terá a mesma unidade de D.

Recapitulando, para um triângulo de base D, altura d, diagonal B e ângulo θ entre D e B, temos

$$B\cos\theta = D \longrightarrow B = D/\cos\theta$$

$$B\,\mathrm{sen}\theta = d \longrightarrow d = D\,\mathrm{sen}\theta/\cos\theta = D\tan\theta$$

Como na paralaxe medimos o ângulo p entre B e d, temos

$$\tan p = D/d \longrightarrow d = D/\tan p \simeq D/p\,(\mathrm{rad})$$

para ângulos menores que 4 graus.

Transformação de graus em radianos: em radianos, o valor de um ângulo é igual ao arco que ele encerra, dividido pelo raio. Na Figura 18.3 , o arco de circunferência a corresponde ao ângulo α. Logo, o valor de α em radianos é

$$\alpha(\mathrm{rad}) = \frac{a}{r}$$

Uma circunferência de raio R tem perímetro de $2\pi r$ e abrange um ângulo

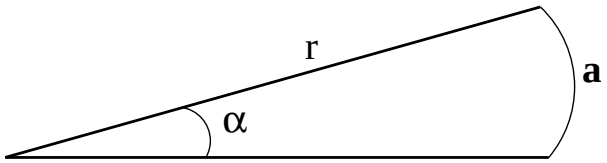


Figura 18.3: Ângulo plano α, correspondente a um arco a à uma distância r.

de 360°. Usando a fórmula anterior, vemos que o valor, em radianos, desses 360° é $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

O valor, em graus, de 1 radiano, será:

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,29^\circ$$

$$\boxed{\alpha(\mathrm{radianos}) = \alpha(\mathrm{graus})\frac{\pi}{180^o}} \longrightarrow \boxed{\alpha(\mathrm{graus}) = \alpha(\mathrm{radianos})\frac{180^o}{\pi}}$$

18.1 Paralaxe geocêntrica e heliocêntrica

O mesmo método de triangulação é usado para medir as distâncias de objetos astronômicos. Mas, como esses objetos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande. Para medir a distância da Lua ou dos planetas mais próximos, por exemplo, pode-se usar o diâmetro da Terra como linha de base. Para se medir a distância de estrelas próximas, usa-se o diâmetro da órbita da Terra como linha de base.

18.1.1 Paralaxe geocêntrica

Atualmente, a determinação de distâncias de planetas é feita por radar e não mais por triangulação, mas, antes da invenção do radar, os astrônomos mediam a distância da Lua e de alguns planetas usando o diâmetro da Terra como linha de base.

A posição da Lua em relação às estrelas distantes é medida duas vezes, em lados opostos da Terra e a paralaxe corresponde à metade da variação total na direção observada dos dois lados opostos da Terra. Essa paralaxe é chamada *paralaxe geocêntrica* e é expressa por:

$$p(\text{rad}) = \frac{R_{\text{Terra}}}{d} \longrightarrow d = \frac{R_{\text{Terra}}}{p(\text{rad})}$$

para p sendo a paralaxe geocêntrica.

18.1.2 Paralaxe heliocêntrica

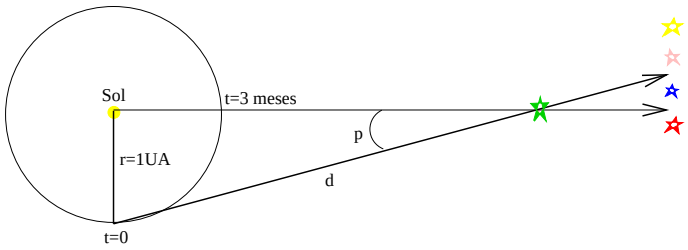


Figura 18.4: Paralaxe heliocêntrica: quando a Terra se move em sua órbita em torno do Sol, uma estrela mais próxima parece se deslocar em relação às estrelas mais distantes.

A paralaxe heliocêntrica é usada para medir a distância das estrelas mais próximas (Figura 18.4). À medida que a Terra gira em torno do Sol, podemos

medir a direção de uma estrela em relação às estrelas de fundo (mais distantes) quando a Terra está de um lado do Sol, e tornamos a fazer a medida seis meses mais tarde, quando a Terra está do outro lado do Sol. A metade do desvio total na posição da estrela corresponde à *paralaxe heliocêntrica*, que é expressa por:

$$p(\text{rad}) = \frac{\text{raio da órbita da Terra}}{d} \longrightarrow d = \frac{1\,\text{UA}}{p(\text{rad})}$$

para p sendo a paralaxe heliocêntrica.

18.2 Unidades de distâncias astronômicas

18.2.1 A unidade astronômica

A unidade mais adequada para medir distâncias dentro do sistema solar é a *unidade astronômica (UA)*, que é a distância média da Terra ao Sol. Em 1 de outubro de 1672 o planeta Marte estava muito próximo da estrela brilhante ϕ Aquarii e próximo do perigeu. Com as observações sumultâneas de Jean Richer (1630-1696) em Cayenne, na Guiana Francesa, Jean Picard (1620-1682) e Olaus Roemer (1644-1710) em Paris, Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) estimou a paralaxe em 18". Considerando que Marte está a 1,52 UA do Sol, conforme determinado por Copérnico, estimou a unidade astronômica como sendo 140 milhões de km. O valor atual é de 149,59787069 milhões de km.

A resolução do olho humano é da ordem de 4'. A fórmula da resolução é

$$\operatorname{sen}\theta = 1,22\lambda/D$$

onde D é o diâmetro da lente (ou olho ou espelho) e o fator 1,22 é a primeira raiz da função de Bessel para uma forma esférica.

Atualmente, a técnica mais acurada para determinar o comprimento da unidade astronômica é medida por radar. No entanto, a determinação não pode ser feita diretamente, pois se um sinal de rádio fosse emitido diretamente ao Sol, seu eco ficaria perdido no meio de todos os sinais de rádio que o Sol emite. Portanto, se usa uma medida indireta.

Por exemplo: suponha que um sinal de radar é enviado a Marte, quando esse planeta está em oposição, sendo encontrado que sua distância à Terra é 77 790 890 km. A distância média de Marte ao Sol é determinada pela terceira lei de Kepler como sendo de 1,52 UA. A distância entre Terra e

Marte, para Marte em oposição, é portanto 0,52 UA. Então:

$$1UA = \frac{77\,790\,890\,\text{km}}{0,52} = 1,496 \times 10^8\,\text{km}$$

A distância de qualquer objeto, calculada em unidades astronômicas, é dada por:

$$\boxed{d(\text{UA}) = \frac{1}{p(\text{rad})}}$$

18.2.2 O ano-luz

O ano-luz (AL) é a distância percorrida pela luz em um ano. Essa distância equivale a:

$$1\,\text{AL} = \text{velocidade da luz} \times 1\,\text{ano} = 2,9979 \times 10^5\,\text{km/s} \times 3,1557 \times 10^7\,\text{s}$$

$$\boxed{1\,\text{AL} = 9,46 \times 10^{12}\,\text{km}}$$

Determinação da velocidade da luz

A determinação da velocidade da luz foi feita pela primeira vez em 1675, pelo astrônomo dinamarquês Olaus Roemer (1644-1710), medindo o intervalo entre sucessivos eclipse da lua Io, de Júpiter (P=1,769138 d), para diferentes pontos da órbita da Terra. O intervalo de tempo entre os sucessivos eclip-

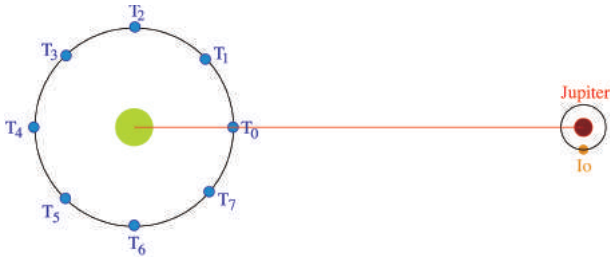


Figura 18.5: Medida da velocidade da luz em 1675, notando que quando a Terra está mais distante da Júpiter, em T_4, na sua órbita em torno do Sol, leva mais tempo para a luz chegar à Terra e, portanto, para ocorrer o eclipse de Io por Júpiter.

ses é o período de revolução do satélite, que pode ser calculado pela 3a. Lei de Kepler. Roemer verificou que os eclipses ficavam *atrasados* quando

Júpiter estava mais distante da Terra e *adiantados* quando Júpiter estava mais próximo da Terra. O *atraso* total quando a Terra ia de T_0 para T_4 era de 1000 segundos. Roemer atribuiu o efeito ao tempo que a luz levava para ir de um ponto da órbita da Terra ao outro, isto é, do tempo que a luz levava para atravessar a diferença da distância entre o satélite e a Terra.

Para ficar mais claro, vamos considerar que t_{T_0} é a hora em que ocorre o eclipse quando a Terra está na posição T_0. Como a luz tem velocidade finita, o eclipse só será visto na Terra num tempo posterior, dado por:

$$t'_{T_0} = t_{T_0} + \frac{d_{(T-J)_{T_0}}}{c}$$

onde c é a velocidade da luz, e $d_{(T-J)_{T_0}}$ é a distância entre a Terra e Júpiter na posição T_0.

Após um tempo $(T_4 - T_0)$, a Terra estará na posição T_4, e vamos chamar de t_{T_4} a hora prevista para acontecer o eclipse. Mas na Terra, o eclipse só será observado a uma hora:

$$t'_{T_4} = t_{T_4} + \frac{d_{(T-J)_{T_4}}}{c}$$

Logo, o intervalo de tempo observado entre os eclipses, $(t'_{T_4} - t'_{T_0})$, é maior do que o intervalo de tempo real entre os eclipses, $(t_{T_4} - t_{T_0})$. A diferença vai ser:

$$(t'_{T_4} - t'_{T_0}) - (t_{T_4} - t_{T_0}) = \frac{d_{(T-J)_{T_4}} - d_{(T-J)_{T_0}}}{c}$$

Se essa diferença é de 1000 s, então:

$$c = \frac{d_{(T-J)_{T_4}} - d_{(T-J)_{T_0}}}{1000\text{s}} = \frac{\text{diâmetro da órbita da Terra}}{1000\text{s}}.$$

Como a melhor estimativa para o eixo maior da órbita da Terra naquela época era 241 500 000 km, Roemer deduziu a velocidade da luz como sendo

$$c \simeq \frac{241\,500\,000\,\text{km}}{1000\,\text{s}} = 241\,500\,\text{km/s}$$

Hoje sabemos que o eixo maior da órbita da Terra é 299 795 786 km, então a velocidade da luz é:

$$c = \frac{299\,795\,786\,\text{km}}{1000\,\text{s}} = 299\,795,796\,\text{km/s} \simeq 300\,000\,\text{km/s}$$

Se um avião pudesse viajar à velocidade da luz, ele daria sete voltas completas em torno do equador da Terra em 1 segundo.

18.2.3 O parsec

Um *parsec* é a distância de um objeto tal, que um observador nesse objeto veria o raio da órbita da Terra com um tamanho angular de $1''$, ou, em outras palavras, é a distância de um objeto que apresenta paralaxe heliocêntrica de $1''$.

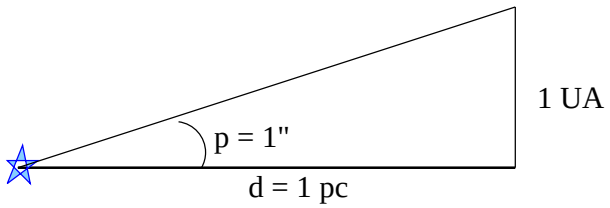


Figura 18.6: Paralaxe p de 1 segundo de arco corresponde a uma separação de 1 unidade astronômica à uma distância de 1 parsec.

A distância de qualquer objeto, em unidades astronômicas, corresponde a:

$$\boxed{d(\text{UA}) = \frac{1}{p(\text{rad})}}$$

Se a distância for 1 parsec, então a paralaxe será $1''$. O ângulo de $1''$, expresso em radianos, vale:

$$1'' = \left(\frac{1^\circ}{3600}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ}\right) = 4,848 \times 10^{-6}\,\text{rad}$$

Logo:

$$1\,pc = \frac{1 \text{ UA}}{4,848 \times 10^{-6}} = 206\,265\,UA$$

A distância de um objeto, expressa em parsecs, é dada por:

$$d(pc) = \frac{1}{p('')}$$

Um parsec, portanto, é igual a 206 265 UA, e é igual a 3,26 AL.

Resumindo as três unidades, para uma estrela com paralaxe heliocêntrica qualquer, sua distância será:

$$\boxed{d(\text{UA}) = \frac{1}{p(\text{rad})} = \frac{206265}{p('')}}$$

$$\boxed{d(\text{pc}) = \frac{1}{p('')}}$$

$$\boxed{d(\text{anos} - \text{luz}) = \frac{3,26}{p('')}}$$

A estrela mais próxima da Terra, Próxima Centauri, está a uma distância de 4,3 AL, que é maior do que 1 pc. Logo, mesmo para a estrela mais próxima, a paralaxe é *menor* do que $1''$ (na verdade é $0{,}76''$).

Até há poucos anos, com os telescópios de solo disponíveis na Terra, a maior distância de estrelas que se podia medir com precisão melhor do que 10% era 20 pc, que corresponde a paralaxes $\geq 0,05''$. O uso de CCDs e telescópios dedicados baixou a incerteza das observações feitas em solo para até 1 milisegundo de arco, similar à incerteza das observações com o satélite Hipparcos (HIgh-Precison PARallax COllecting Satellite), construído para medir com alta precisão a posição e paralaxe de 120 000 estrelas de nossa galáxia. É importante notar que 1 milisegundo de arco é o tamanho angular de uma pessoa na Lua vista da Terra. Para atingir essa precisão, foi necessário fazer a correcção pelo efeito relativístico do desvio da luz pelo Sol, que é de 1,7 segundos de arco na borda do Sol e 4 milisegundos de arco a 90° do Sol.

Capítulo 19

Estrelas binárias

É importante diferenciar estrelas binárias reais das estrelas duplas aparentes, ou binárias aparentes, em que duas estrelas estão próximas no céu, mas a distâncias diferentes da Terra, e parecem duplas somente por efeito de projeção. Entretanto, existem muitos pares de estrelas em que ambas as estrelas estão à mesma distância da Terra e formam um sistema físico. Na verdade, mais de 50% das estrelas no céu pertencem a sistemas com dois ou mais membros.

19.1 Histórico

- 1783 - John Goodricke (1764–1786) viu a estrela Algol (β Persei), que normalmente é de 2^a magnitude, diminuir para 1/3 do seu brilho, por algumas horas. Trata-se de uma binária eclipsante, com um período de 2d20h49m. Geminiano Montanari (1632–1687) já tinha notado alguma variabilidade em 1669.

- 1804 - William Herschel (1738–1822) descobriu uma companheira fraca da estrela Castor (α Geminorum) e mediu o período do sistema como sendo de 342 anos, usando uma medida feita em 1759 por James Bradley (1693–1792), terceiro astrônomo real da Inglaterra. Herschel foi o primeiro a estabelecer que se tratavam de corpos interagindo gravitacionalmente, isto é, de binárias físicas.

- 1827 - Felix Savary (1797–1841) mostrou que ξ Ursae Majoris tinha uma órbita elíptica, com um período de 60 anos.

- 1889 - Edward Charles Pickering (1846–1919), professor de Harvard,

descobriu as binárias espectroscópicas, com a estrela Mizar A (ζ Ursae) apresentando linhas duplas que variavam com um período de 104 dias. Em 1908 Mizar B foi também detectada como uma binária espectroscópica, por Edwin Brant Frost (1866-1935) e Friedrich Wilhelm Hans Ludendorff (1873-1941), com um período de 175,6 dias.

19.2 Tipos de sistemas binários

As estrelas binárias são classificadas de acordo com a maneira pela qual foram descobertas. Existem quatro tipos:

- binárias visuais: é um par de estrelas associadas gravitacionalmente que podem ser observadas ao telescópio como duas estrelas. A separação usual é de dezenas a centenas de unidades astronômicas;
- binárias astrométricas: quando um dos membros do sistema é muito fraco para ser observado, mas é detectado pelas ondulações no movimento da companheira mais brilhante. Exemplo: Sírius era binária astrométrica até 31 de janeiro de 1862, quando Alvan Graham Clark Jr. (1832-1897) detectou sua companheira fraca, uma anã branca, pela primeira vez. A anã branca companheira de Sírius é chamada Sírius B;

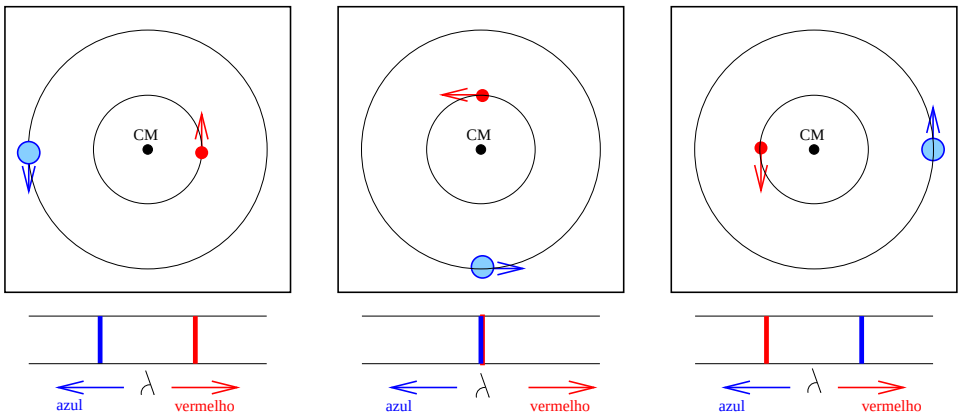


Figura 19.1: Na parte superior da figura, mostramos fases da órbita de duas estrelas em torno do centro de massa. Na parte inferior, como o efeito Doppler modifica a posição das linhas espectrais.

- binárias espectroscópicas: quando a natureza binária da estrela é conhecida pela variação de sua velocidade radial[1], medida através das linhas espectrais da estrela, que variam em comprimento de onda com o tempo. É mais fácil detectá-las se a velocidade orbital for grande e, portanto, o período curto. A separação média é da ordem de 1 UA. Essa, também, é a forma que planetas em torno de estrela têm sido detectados nos últimos anos;

- binárias eclipsantes: quando a órbita do sistema está de perfil para nós, de forma que as estrelas eclipsam uma a outra.

19.3 Massas de sistemas binários visuais

Em um sistema binário, cada estrela descreve um movimento ondular em torno do centro de massa. Em vez de observar o movimento seguido pelas duas estrelas, é mais simples observar apenas uma delas (normalmente a mais fraca) em torno da mais brilhante. O movimento observado mostra a órbita relativa aparente. A órbita relativa tem a mesma forma das órbitas individuais, e o tamanho é igual à soma dos tamanhos das órbitas individuais. Somente para aqueles sistemas com períodos menores que poucas centenas de anos, as observações são suficientes para que as órbitas relativas possam ser determinadas com precisão. Os parâmetros observados são a separação aparente e o período.

A órbita relativa observada em geral não coincide com a órbita relativa verdadeira, uma vez que esta, em geral, não está no plano do céu. A estrela mais massiva fica no foco da órbita relativa verdadeira. Os focos das órbitas aparentes não coincidem com os focos das órbitas verdadeiras e, portanto, a estrela mais brilhante (chamada primária) vai aparecer fora do foco da órbita aparente. Na órbita aparente, a distância da estrela ao foco permite saber a inclinação da órbita verdadeira em relação ao plano do céu e, assim, determinar os parâmetros da órbita verdadeira.

Seja:

- α = tamanho angular do semi-eixo maior da órbita relativa verdadeira.

[1] A velocidade radial é medida através do efeito Doppler. A primeira medida de velocidade radial foi feita visualmente pelo astrônomo americano James Edward Keeler (1857 - 1900) em 1890-1891, utilizando um espectroscópio com rede de dispersão no telescópio de 1m do Observatório Lick, mas as primeiras medidas confiáveis foram obtidas entre 1888 e 1892 pelos alemães Hermann Carl Vogel (1841-1907) e Julius Scheiner (1858-1913), com o 80 cm de Postdam, com o desenvolvimento do espectro fotográfico.

- r = distância do sistema ao Sol.

O semi-eixo maior a será:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{r} \longrightarrow a = r\operatorname{sen}\alpha$$

com a e r na mesma unidade, ou:

$$\boxed{a(UA) = \alpha('') \times r(pc)}$$

já que $\operatorname{sen}\alpha \simeq \alpha$, para ângulos pequenos e α em radianos, e existem 206 265 segundos de arco em um radiano.

A soma das massas das duas estrelas é dada pela 3a. Lei de Kepler:

$$\boxed{(M_1 + M_2) = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(r \times \alpha)^3}{P^2}} \tag{19.1}$$

Para massas em massas solares e períodos em anos,

$$\boxed{(M_1 + M_2) = \frac{(r \times \alpha)^3}{P^2}}$$

Para conhecer a massa de cada estrela, é necessário investigar o movimento individual de cada estrela para saber a distância de cada uma ao centro de massa.

$$\boxed{\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}}$$

Exemplo: Sírius A e Sírius B formam um sistema binário cuja órbita relativa verdadeira tem semi-eixo maior de 7,5". A distância do Sol a Sírius é de 2,67 pc (1 pc = 206 265 UA). O período orbital do sistema é de 50 anos.

a) Qual é a massa do sistema?

$$(M_A + M_B)50^2 = (7,5'' \times 2,67\,pc)^3$$

$$(M_A + M_B) = \frac{8030,03}{2500} = 3,2M_\odot.$$

b) Se a distância de Sírius B ao centro de massa for o dobro da distância de Sírius A ao centro de massa, qual é a massa e cada estrela?

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{r_B}{r_A} = 2$$

$$(M_A + M_B) = 2M_B + M_B = 3,2M_\odot.$$

$$M_B = 1,07M_\odot \longrightarrow M_A = 2,13M_\odot.$$

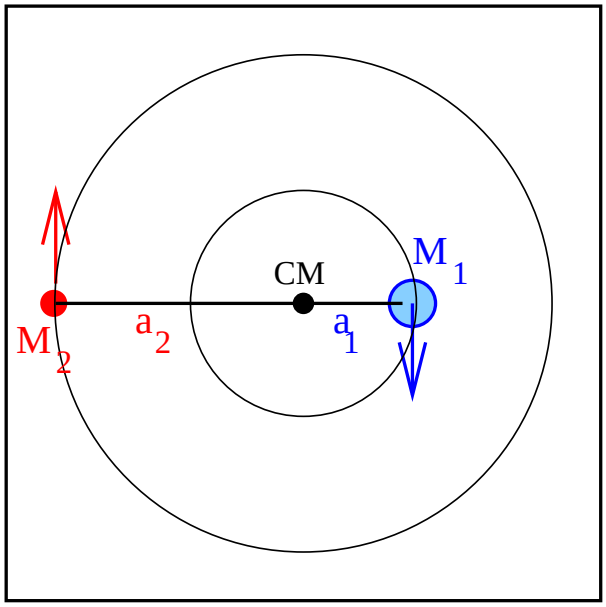


Figura 19.2: Centro de massa, CM, entre dois objetos M_1 e M_2.

19.4 Massas de binárias espectroscópicas

Pelo efeito Doppler, descoberto pelo físico e matemático austríaco Christian Doppler (1803-1853), o comprimento de onda de uma fonte que está se movimentando com velocidade v é deslocado por:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}\cos\theta\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{1/2}}$$

onde θ é o ângulo entre o vetor velocidade e a linha de visada. Se a velocidade for muito menor que a velocidade da luz e considerando v como a componente de velocidade na direção do observador:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Seja a_1 a separação da componente 1 ao centro de massa e seja v_1 sua velocidade orbital. Então, $2\pi a_1 = v_1 P$ e $2\pi a_2 = v_2 P$ e por definição de centro de massa $M_1 a_1 = M_2 a_2$, de modo que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Seja $M_\odot$ a massa do Sol. Pela 3a. lei de Kepler:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_\odot} = \frac{(a/\mathrm{UA})^3}{(P/\mathrm{ano})^2}.$$

Exemplo: seja um sistema binário de período 17,5 dias (=0,048 anos), e tal que $v_1 = 75$ km/s, e $v_2 = 25$ km/s. Qual é a massa de cada estrela?

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{75}{25} = 3 \longrightarrow M_2 = 3M_1.$$

$$v_1 + v_2 = 100\,\mathrm{km/s} \rightarrow (a_1 + a_2) = \frac{(v_1 + v_2)P}{2\pi}$$

$$(a_1 + a_2) = \frac{100\,\mathrm{km/s} \times 17,5\mathrm{dias}}{2\pi} = 24\,000\,000\,\mathrm{km} = 0,16\,\mathrm{UA}.$$

$$(M_1 + M_2) = \frac{a^3}{P^2} = \frac{0,16^3}{0,048^2} = 1,78M_\odot.$$

Mas como:

$$M_2 = 3M_1 \longrightarrow 4M_1 = (M_1 + M_2),$$

$$M_1 = 0,44M_\odot,$$

$$M_2 = 1,33M_\odot.$$

Mas, de fato, o que medimos é o limite inferior das massas, pois $v_1^{med} = v_1 \mathrm{sen}\, i$, $v_2^{med} = v_2 \mathrm{sen}\, i$, $a_1^{med} = a_1 \mathrm{sen}\, i$, $a_2^{med} = a_2 \mathrm{sen}\, i$ e, portanto, temos:

$$\boxed{\frac{(M_1 + M_2)_{real}}{(M_1 + M_2)_{med}} = \frac{(a_1 + a_2)^3}{(a_1 + a_2)^3_{med}} = \frac{1}{\mathrm{sen}^3 i}}$$

Como o seno de qualquer ângulo é sempre menor ou igual a 1, a massa real será maior ou igual à massa medida.

Capítulo 20

Fotometria

Fotometria é a medida da luz proveniente de um objeto. Até o fim da Idade Média, o meio mais importante de observação astronômica era o olho humano, ajudado por vários aparatos mecânicos para medir a posição dos corpos celestes. Depois veio a invenção do telescópio, no começo do século XVII, e as observações astronômicas de Galileo. A fotografia astronômica iniciou no fim do século XIX e, durante as últimas décadas, muitos tipos de detectores eletrônicos são usados para estudar a radiação electromagnética do espaço. Todo o espectro electromagnético, desde a radiação gama até as ondas de rádio (figura 20.1), são atualmente usadas para observações astronômicas.

Apesar de observações com satélites, balões e espaçonaves poderem ser feitas fora da atmosfera, a grande maioria das observações é obtida da superfície da Terra.

Como a maioria das observações utiliza radiação eletromagnética e podemos obter informações sobre a natureza física da fonte estudando a distribuição de energia desta radiação, introduziremos alguns conceitos para a caracterização dessa radiação.

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu}} \qquad \boxed{\nu = \frac{c}{\lambda}} \qquad \boxed{c = \lambda\nu}$$

- $\lambda \equiv$ comprimento de onda
- $\nu \equiv$ freqüência
- $c \simeq 300\,000$ km/s $\equiv$ velocidade da luz

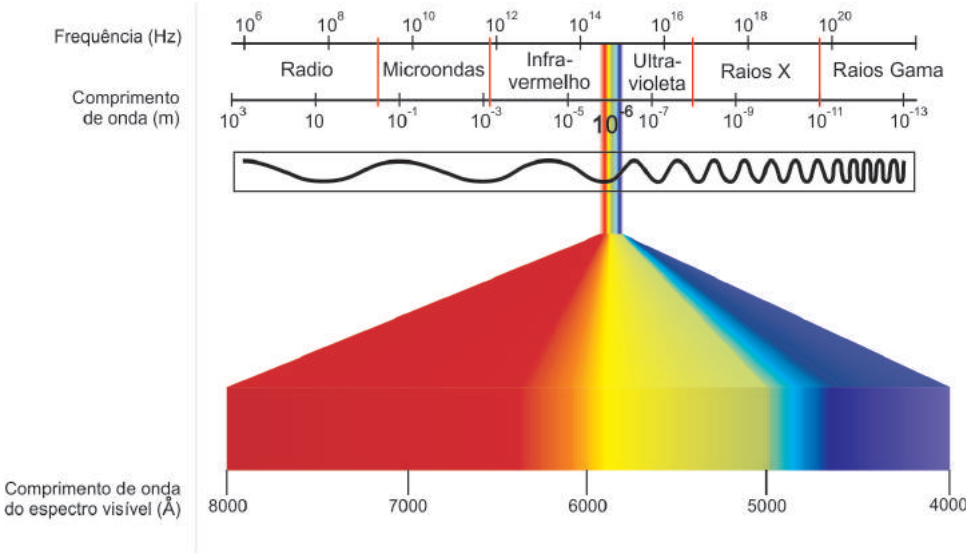


Figura 20.1: Espectro eletromagnético.

20.1 Grandezas típicas do campo de radiação

A grandeza mais característica de um campo de radiação é uma constante chamada *intensidade específica monocromática* Para melhor entende-la, vamos antes revisar o conceito de ângulo sólido.

20.2 Ângulo sólido

Assim como podemos entender um ângulo plano como um setor de um círculo, definido como a razão entre o arco e o raio do círculo, podemos entender um ângulo sólido como um "setor" de uma esfera, definido pela razão entre o elemento de área na superfície da esfera e o seu raio ao quadrado:

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{r}} \qquad \boxed{\omega = \frac{A}{r^2}}$$

A unidade de ângulo sólido ($d\omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$) é o esferorradiano ($sr$).

O maior ângulo plano é aquele que subtende toda circunferência do círculo, e vale 2π radianos; o maior ângulo sólido subtende toda a área superficial da esfera, e vale 4π esferorradianos.

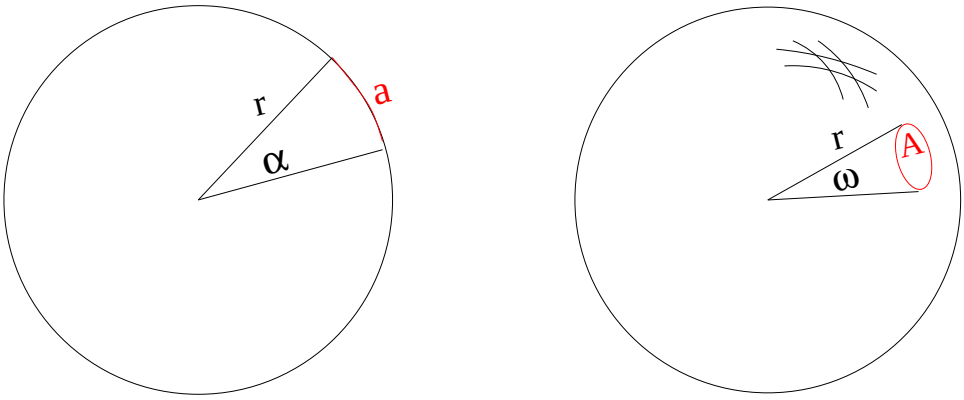


Figura 20.2: Ângulo plano α e ângulo sólido ω

20.3 Intensidade específica

Quando a luz é emitida de uma fonte isotrópica em um meio homogêneo, (que não depende da direção) ela se expande esféricamente, em todas as direções. É como se a fonte estivesse no centro de uma esfera, composta de 4π ângulos sólidos unitários, e cujo raio vai aumentando à medida que a luz se propaga. A energia que atravessa a unidade de área da fonte, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido, é chamada intensidade específica:

$$I_{\perp} = \frac{dE}{dt\, dA\, d\omega}$$

Se consideramos apenas a energia emitida em um intervalo de comprimentos de onda $[\nu, \nu + d\nu]$, chamamos a intensidade específica de intensidade específica monocromática:

$$I_{\nu\perp} = \frac{dE}{dt\, dA\, d\omega\, d\nu}$$

Num caso mais geral a energia não se propaga isotrópicamente. (Por exemplo, se observamos a fonte através de um orifício em uma placa opaca colocada na frente dela). Nesse caso, a energia que atravessa a unidade de área não é a mesma em todas as direções, mas vai depender do ângulo (θ) entre a direção considerada e a normal à área, ou seja:

$$\boxed{I_{\nu} = \frac{dE\, \cos\theta}{dt\, dA\, d\omega\, d\nu}} \tag{20.1}$$

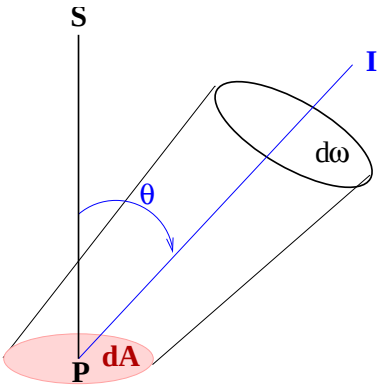


Figura 20.3: Intensidade específica na direção θ, dentro de um ângulo sólido $d\omega$. PS indica a normal à superfície dA.

Geralmente, a intensidade específica é medida em $\mathrm{J\,m^{-2}s^{-1}sr^{-1}Hz^{-1}}$ no sistema MKS, ou $\mathrm{erg\,cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}Hz^{-1}}$ no sistema cgs.

Podemos, também, definir a intensidade específica monocromática por intervalo de comprimento de onda, notando que, por definição:

$$\boxed{I_\nu \, |d\nu| = I_\lambda \, |d\lambda|} \tag{20.2}$$

A intensidade específica integrada em todo o espectro de freqüências é dada por:

$$I = \int_o^\infty I_\nu \, d\nu = \int_o^\infty I_\lambda \, d\lambda \tag{20.3}$$

A intensidade específica não varia com a distância da fonte, pois a quantidade de energia dentro do ângulo sólido permanece sempre a mesma.

Outra grandeza de grande interesse é o fluxo, que é o que se mede realmente.

20.4 Fluxo

O fluxo (F) é a energia por unidade de área e por unidade de tempo que chega ao detector. Formalmente, o fluxo em uma certa freqüência, em um dado ponto e em uma dada direção, é a quantidade líquida de energia radiante cruzando a unidade de área, por unidade de tempo, e por intervalo de freqüência, ou seja,

$$\boxed{dF_\nu = \frac{dE\cos\theta}{dAdtd\nu} = I_{\nu\perp}\cos\theta d\omega} \tag{20.4}$$

que integrando nos dá o fluxo em uma freqüência (ν)

$$\boxed{F_\nu = \int I_\nu d\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\nu\perp}\cos\theta \mathrm{sen}\,\theta d\theta d\phi} \tag{20.5}$$

O fluxo, portanto, significa potência através de uma superfície, e é expresso em $\mathrm{erg\,cm^{-2}s^{-1}}$, ou em $\mathrm{watt\,m^{-2}}$. O fluxo integrado no espectro de freqüências será:

$$F = \int_o^\infty F_\nu\, d\nu = \int_o^\infty F_\lambda\, d\lambda.$$

Ao contrário da intensidade específica, o fluxo de radiação cai com o quadrado da distância (r), de forma que o fluxo que chega na Terra é muito menor do que o fluxo na superfície do astro, estando diluído por um fator de $\frac{1}{r^2}$.

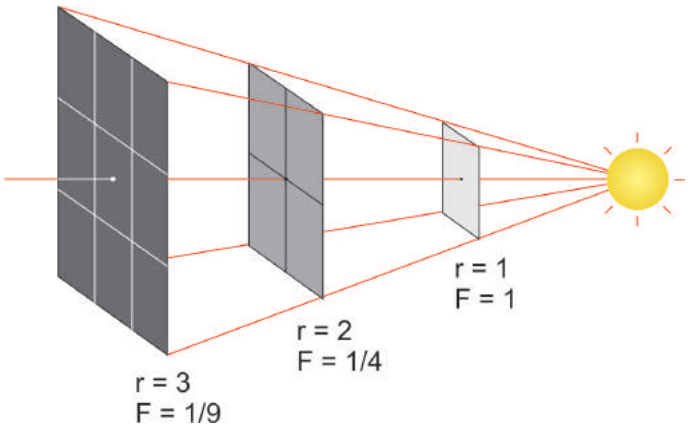


Figura 20.4: O fluxo decai com o quadrado da distância à fonte.

Para uma estrela esférica de raio R, o fluxo na sua superfície será:

$$\boxed{F(R) = \frac{L}{4\pi R^2}} \tag{20.6}$$

onde L é a *luminosidade* intrínseca, que é a energia total emitida por unidade de tempo em todas as direções.

O fluxo a uma distância r da estrela será:

$$\boxed{F(r) = \frac{L}{4\pi r^2}} \tag{20.7}$$

Nesse caso, $F(r)$ é o fluxo integrado sobre toda a superfície da estrela, e a luminosidade da estrela L pode ser obtida diretamente multiplicando o fluxo dela proveniente pela área sobre a qual o fluxo se distribui, integrado sobre todas as freqüências.

Para objetos extensos (os que não têm aparência estelar), podemos definir, ainda, o brilho superficial, que é o fluxo por unidade de área angular do objeto. Assim como a intensidade específica, o brilho superficial não depende da distância, pois tanto o fluxo como a área angular do objeto diminuem com o quadrado da distância entre o objeto e o observador. Por exemplo, o fluxo do Sol, na Terra, é 25 vêzes maior do que o fluxo do Sol em Júpiter, que está 5 vêzes mais distante. Mas o fluxo por unidade de área (brilho superficial) do Sol é o mesmo na Terra e em Júpiter, pois o tamanho angular do Sol em Júpiter é 25 vêzes menor do que na Terra, compensando o decaimento do fluxo.

A Figura 20.5 mostra um objeto extenso com unidade de área A que, a uma distância d, tem tamanho angular Ω. É fácil imaginar que, quando d aumenta, Ω diminui.

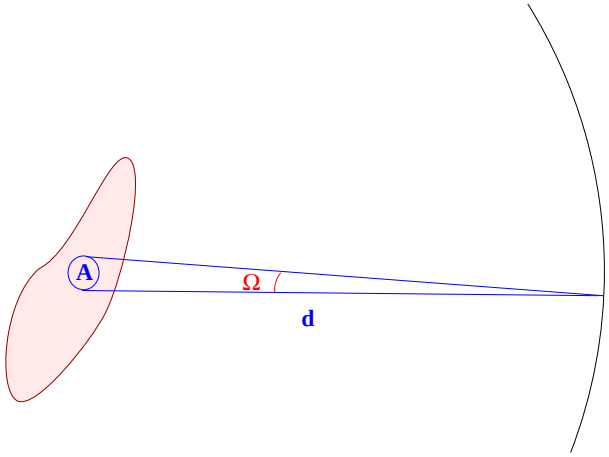


Figura 20.5: Uma área A, subentendendo um ângulo sólido Ω, à uma distância d.

20.5 Magnitudes

O brilho aparente de um astro é o fluxo medido na Terra e, normalmente, é expresso em termos da *magnitude aparente* m, que por definição é dada por:

$$\boxed{m = -2,5 \log F + \text{const}} \tag{20.8}$$

Por que o brilho de um astro é medido em magnitudes? Há 2000 anos atrás, o grego Hiparco (160-125 a.C.) dividiu as estrelas visíveis a olho nu de acordo com seu brilho aparente, atribuindo magnitude 1 à mais brilhante e 6 às mais fracas. Em 1856, Norman Robert Pogson (1829-1891) propos (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 17, p. 12) que o sistema, baseado na percepção de brilho do olho humano, é logarítmico, e o fluxo correspondente a uma estrela de primeira magnitude (m=1) era 100 vezes mais brilhante que uma estrela de magnitude 6, de modo que:

$$m_1 - m_2 = K \log \frac{F_1}{F_2} \longrightarrow 1 - 6 = K \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

$$-5 = K \log(100) \longrightarrow K = -2,5$$

como na definição anterior. Logo:

$$\boxed{m_2 - m_1 = -2,5 \log \frac{F_2}{F_1}} \tag{20.9}$$

Mais precisamente, $2,512^5 = 100$. A constante (*const.*) na definição de magnitude (eq. 20.8) define o ponto zero da escala. Normalmente, utiliza-se a magnitude aparente da estrela Vega como $m \equiv 0$.

Para comparação m(Sírius)=-1,46, m(Lua cheia)=-12,8, m(Sol)=-26,74. As magnitudes dos planetas, no brilho médio, são: m(Mercúrio) = -1,9, m(Vênus) = -4,4, m(Marte)= -2,0 , m(Júpiter) = -2,7, m(Saturno) = 0,6, m(Urano)=5,5, m(Netuno)=7,8 e m(Plutão)=15.

Uma estrela de magnitude visual V = 0 tem um fluxo observado de $F_\lambda = 3.69 \times 10^9$ ergcm^{-2}s^{-1}Å^{-1} que corresponde a cerca de 1000 fótons cm^{-2}s^{-1}Å^{-1}. O número de fótons detectado no filtro V é de cerca de 10^6 fótons cm^{-2}s^{-1}.

A pupila do olho humano, quando adaptada ao escuro, tem aproximadamente 7 mm. Um telescópio com 7 cm de diâmetro, tem uma área (70 mm/7 mm)^2=100 vezes maior e portanto capta 100 vezes mais fótons. Desta maneira este telescópio de 7 cm de abertura permite observar 5 magnitudes mais fracas do que o olho humano, ou seja, até magnitude 6+5=11.

20.5.1 Sistemas de magnitudes

Quando medimos uma estrela, o fluxo obtido depende da sensibilidade espectral do equipamento, ou seja, do conjunto telescópio + filtro + detector. Se chamamos de $\Phi(\lambda)$ a eficiência espectral do equipamento, normalizada, temos:

$$F_{obs} = \int_0^\infty \Phi(\lambda) F(\lambda) d\lambda \simeq F(\lambda_o) \int_0^\infty \Phi(\lambda) d\lambda \tag{20.10}$$

onde $F(\lambda_o)$ é o fluxo no comprimento de onda efetivo do filtro.

Um *sistema de magnitudes* é definido por seu $\Phi(\lambda)$ e por sua constante (*const.*). Um sistema muito usado é o sistema UBV, desenvolvido por Harold Lester Johnson (1921-1980) e William Wilson Morgan (1906-1994) em 1951, que define magnitudes em três bandas espectrais: U de ultravioleta, B de *blue* (azul), e V de visual (amarelo). Essas magnitudes têm seus comprimentos de onda efetivos em 3600 Å, 4200 Å e 5500 Å.

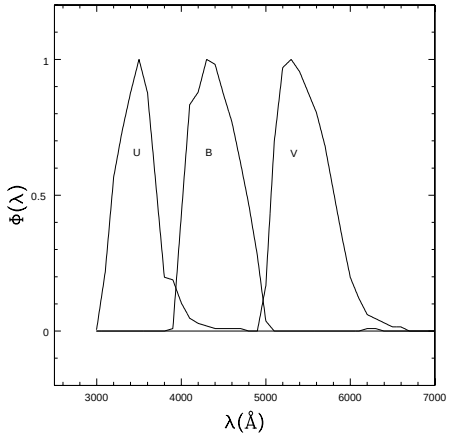


Figura 20.6: Curvas de transmissão dos filtros UBV.

Para determinar a constante (const.) do sistema, usamos estrelas padrões, ou seja, estrelas que têm magnitudes bem determinadas. Assim, a magnitude aparente na banda V, por exemplo, é:

$$\boxed{V = -2,5 \log F_V + \text{const.}} \tag{20.11}$$

Tabela 20.1: Magnitude do céu, por segundo de arco ao quadrado

Cor	**Comprimento de onda**	**Do espaço**	**Lua Nova**	**Lua Cheia**
U	3700Å	23,2	22,0	
B	4400Å	23,4	22,7	19,4
V	5500Å	22,7	21,8	19,7
R	6400Å	22,2	20,9	19,9
I	8000Å	22,2	19,9	19,2
J	1,2μm	20,7	15,0	15,0
H	1,6μm	20,9	13,7	13,7
K	2,2μm	21,3	12,5	12,5

20.5.2 Índices de cor

Em qualquer sistema de magnitudes multicor define-se os índices de cor como a razão entre os fluxos em duas bandas diferentes, ou equivalentemente, como a diferença entre duas magnitudes do sistema. Por exemplo, subtraindo a magnitude V da magnitude B temos o índice de cor $B - V$, subtraindo a magnitude B da magnitude U temos o índice de cor $U-B$, e assim por diante. Como veremos adiante, os índices de cor são importantes para determinar a temperatura das estrelas. Os índice de cor têm valores típicos de décimos ou centésimos de magnitudes.

20.5.3 Magnitude absoluta

A magnitude aparente de uma estrela mede seu brilho aparente, que depende de sua distância. Por exemplo, será Sírius, com m=-1,42, intrinsicamente mais brilhante do que Vega, com m=0? Para podermos comparar os brilhos *intrínsecos* de duas estrelas, precisamos usar uma medida de brilho que independa da distância. Para isso, definimos como *magnitude absoluta* (M) a magnitude teórica que a estrela teria se estivesse a 10 parsecs de nós.

$$\boxed{M = -2,5 \log[F(10 \text{ pc})] + \text{const.}} \tag{20.12}$$

A diferença entre a magnitude aparente e a absoluta é dada por:

$$m - M = -2,5 \log[F(r)] + 2,5 \log[F(10 \text{ pc})] = -2,5 \log \frac{F(r)}{F(10 \text{ pc})} \tag{20.13}$$

Como

$$\frac{F(r)}{F(10\text{ pc})} = \frac{\frac{F(R)4\pi R^2}{4\pi r^2}}{\frac{F(R)4\pi R^2}{4\pi(10\text{ pc})^2}} = \frac{(10\text{ pc})^2}{r^2} = \frac{100\text{ pc}^2}{r^2} \tag{20.14}$$

onde R é o raio da estrela, ou seja,

$$m - M = -2,5 \log \frac{100\text{ pc}^2}{r^2} \tag{20.15}$$

ou

$$\boxed{m - M = 5 \log r - 5} \tag{20.16}$$

o chamado módulo de distância. Nesta fórmula a distância da estrela, r, tem que ser medida em parsecs.

Logo,

$$r(pc) = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$$

20.5.4 Magnitude bolométrica

Se tivéssemos um equipamento que tivesse 100% de sensibilidade em todos os comprimentos de onda, teoricamente poderíamos obter o fluxo em todo o intervalo espectral. A magnitude correspondente ao fluxo em todos os comprimentos de onda é a *magnitude bolométrica* m_{bol}.

$$\boxed{L = 4\pi R^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu = 4\pi R^2 F_{\text{bol}}}$$

pois

$$\int_0^\infty F_\nu d\nu = \int_0^{V_-} F_\nu d\nu + F_V + \int_{V_+}^\infty F_\nu d\nu$$

Na prática, é difícil medir a magnitude bolométrica porque a atmosfera impede a passagem de certos intervalos espectrais, de forma que se determina essa magnitude a partir da magnitude visual ($m_V \equiv V$) como:

$$m_{bol} = m_V - C.B. \tag{20.17}$$

onde *C.B.* é a *correção bolométrica*, que por definição tem valores próximos a zero para estrelas parecidas com o Sol, e valores maiores para estrelas mais quentes ou mais frias do que o Sol.

Como a magnitude bolométrica absoluta do Sol é $M_{bol}^\odot = 4,72$, a magnitude bolométrica absoluta de uma estrela qualquer é dada por

$$\boxed{M_{bol} = 4,72 - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)} \tag{20.18}$$

mas precisamos levar em conta o efeito da atmosfera da Terra e do material interestelar.

20.5.5 Sistema de Strömgren

Um dos sistemas de banda intermediária mais usado é o definido em 1963 pelo dinamarquês Bengt Georg Daniel Strömgren (1908-1987), no Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society, 4, 8, consistindo de filtros com largura entre 180 e 300Å, centrados em 3500, 4110, 4670 e 5470Å, cujas magnitudes são chamadas: u, v, b e y.

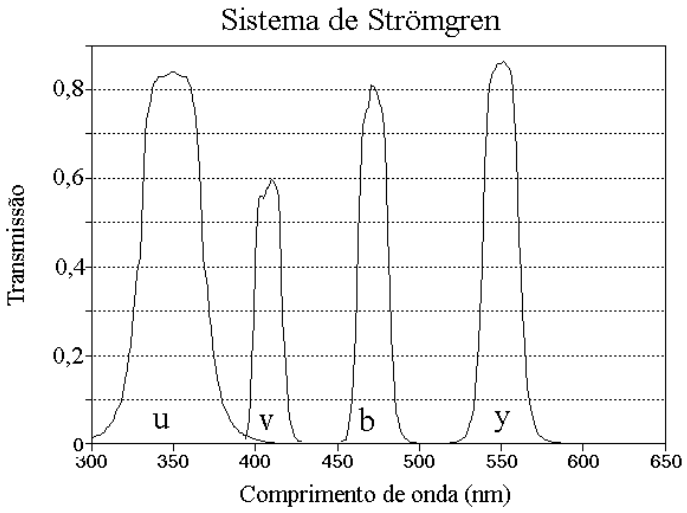


Figura 20.7: Curvas de transmissão dos filtros de Strömgren.

20.5.6 Extinção atmosférica

Embora a atmosfera seja praticamente transparente na faixa visível (3500 Å a 6500 Å), ela absorve fortemente no ultravioleta (1000 Å a 3500 Å) e em várias bandas do infravermelho (1 μm a 1 mm), de modo que não podemos medir ultravioleta do solo, e infravermelho somente acima de 2000 m de altura.

Na atmosfera, existem vários componentes que difundem a luz em todas as direções (moléculas, partículas sólidas de poeira e fumaça), causando uma

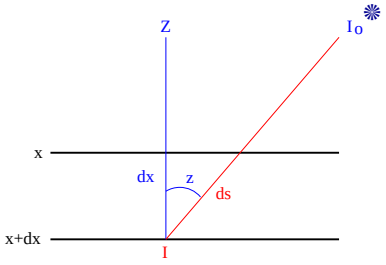


Figura 20.8: Absorção atmosférica.

extinção contínua, em todos os comprimentos de onda. A extinção é tanto maior quanto maior for a quantidade de ar atravessada pela luz. É por esse motivo que podemos olhar diretamente para o Sol quando ele está no horizonte.

A atmosfera da Terra afeta as medidas, de forma que as magnitudes observadas devem ser ajustadas aos valores que teríamos se as observações fossem feitas fora da atmosfera. O efeito da atmosfera é o de absorver e espalhar a radiação em outras direções, processos esses que são descritos por um coeficiente de absorção k, usualmente medido em cm^{-1}.

$$dF = -F \cdot k \cdot ds \Rightarrow \frac{dF}{F} = -k \cdot ds$$

$$F(x + dx) = F(x) - kF(x)ds,$$
$$dF = F(x + dx) - F(x) = -kF(x)ds$$

Para distâncias zenitais pequenas, podemos aproximar a atmosfera por uma camada plana de espessura constante e, então, podemos escrever $dx = ds \cos z \rightarrow ds = \sec z dx$, onde z é a distância zenital,

$$\frac{dF}{F} = -k \sec z \, dx$$

Sendo H a altura da atmosfera, F_o o fluxo no topo da atmosfera e F o que chega ao observador. Então:

$$\int_{F_o}^{F} \frac{dF}{F} = -k \sec z \int_{o}^{H} dx$$

e

$$\ln \frac{F}{F_o} = -k \sec z H \longrightarrow F = F_o e^{-k \sec z \, H}$$

O termo $k \sec z\, H$ é a espessura ótica τ. Temos, assim, a espessura ótica expressa em função da distância zenital z e, supondo que a camada atmosférica é formada por camadas plano-paralelas, ela pode ser expressa por $\tau = \tau_o \sec\, z$, onde $\tau_o = kH$ é a espessura ótica na direção do zênite, e o fluxo será:

$$F = F_o e^{-\tau} = F_o e^{-\tau_o sec\, z} \tag{20.19}$$

Em magnitudes, essa equação fica:

$$m = -2,5 \log F_o + (2,5 \log e)\, \tau_o\, sec\, z = m_o + K \cdot X$$

$$\boxed{m = m_o + 1,086\, \tau_o\, sec\, z = m_o + 1,086\, \tau = m_o + K \cdot X} \tag{20.20}$$

onde $K = 1,086 \tau_o$ é o coeficiente de extinção, e $X = \sec z$ é a massa de ar.

Um exemplo de aplicação deste conceito é considerarmos uma estrela observada a uma distância zenital de 45^o. Como sec $45^o = 1,41$ e usando um coeficiente $kH = 0,46$, típico de observações óticas, obtemos $F = 0,52\, F_o$, ou seja, a atmosfera terrestre absorve 48% da luz da estrela ao observarmos a 45^o do zênite.

A diferença $(m - m_o)$ é a extinção atmosférica em magnitudes e é determinada através de estrelas padrões para as quais m_o é conhecido.

A constante K é característica do meio e depende do comprimento de onda, sendo mais correto escrever

$$m(\lambda) = m_o(\lambda) + K(\lambda) \cdot X$$

Para o sistema UBV, e para locais situados acima de 2000 m de altitude, os valores dos coeficientes médios de extinção são: $K(U) \simeq 0,48$, $K(B) \simeq 0,25$ e $K(V) \simeq 0,14$.

No nosso exemplo de observarmos uma estrela a 45^o do zênite, vemos que a extinção atmosférica neste caso equivale a $0,48 \sec 45^o = 0,68$ mag em U, $0,25 \sec 45^o = 0,35$ mag em B e $0,14 \sec 45^o = 0,20$ mag em V.

Como vemos, os coeficientes de extinção decrescem de U para V, indicando que os comprimentos de onda menores são mais absorvidos e espalhados do que os maiores, e portanto a luz azul é mais extinguida do que a vermelha. Portanto, a extinção torna as estrelas mais avermelhadas.

20.5.7 Extinção interestelar e Excesso de cor

Além da extinção atmosférica, é necessário levar em conta também a *extinção interestelar*, devido à poeira interestelar concentrada principalmente no plano da Galáxia e que também extingue e avermelha a luz das estrelas.

Essa extinção foi descoberta por Robert Julius Trumpler (1886-1956), em 1930.

A extinção interestelar em magnitudes é representada pela letra A com um subscrito indicando a banda espectral a que se refere, por exemplo, a extinção interestelar na banda B é A_B e na banda V é A_V.

$$A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2} = 2,5 \left\{ \log \left[\frac{F_0(\lambda_1)}{F_0(\lambda_2)} \right] - \log \left[\frac{F(\lambda_1)}{F(\lambda_2)} \right] \right\}$$

onde F_0 é o fluxo real e F o fluxo observado. Michael J. Seaton, em seu artigo de 1979 no Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 187, 73, apresenta a variação da extinção com o comprimento de onda.

Se não existisse extinção interestelar, a magnitude visual absoluta M_V de uma estrela de magnitude aparente V_0 (já corrigida por extinção atmosférica), localizada a uma distância d seria:

$$M_V = V_0 - 5 \log d(\text{pc}) + 5$$

Considerando que a magnitude aparente V está afetada por avermelhamento interestelar, $V_0 = V - A_V$, a magnitude visual absoluta será:

$$M_V = V - A_V - 5 \log d(\text{pc}) + 5$$

onde A_V é a extinção interestelar no visual, em magnitudes, e é da ordem de 1 magnitude por kiloparsec.

Similarmente, a magnitude azul absoluta será:

$$M_B = B - A_B - 5 \log d(\text{pc}) + 5$$

e o índice de cor da estrela é:

$$M_B - M_V = (B - V) - (A_B - A_V)$$

ou

$$(B - V)_0 = (B - V) - E_{B-V}$$

onde $(B-V)_0 = M_B - M_V$ é o índice de cor intrínseco e $E_{B-V} = (A_B - A_V)$, é o *excesso de cor*.

Vemos assim que, embora a magnitude aparente uma estrela dependa de sua distância, o índice de cor não depende da distância e, por isso, é muito útil para determinar a temperatura da estrela.

Em princípio, poderíamos obter a temperatura de uma estrela medindo o fluxo em dois comprimentos de onda diferentes, como U e B, ou B e

V. A razão dos fluxos (diferença de magnitudes) é uma função somente de temperatura, já que a distância se anula. Na prática, precisamos de dois índices de cor, (U-B) e (B-V), devido à poeira interestelar na direção da estrela, que reduz U, B e V diferencialmente, já que é maior a redução para comprimentos de onda menores. Conseqüentemente, existe uma distorção nos valores observados dos índices em relação aos valores reais, mas podemos remover as distorções medindo dois índices, isto é, podemos corrigir por avermelhamento interestelar. Na ausência de avermelhamento interestelar, as cores (B-V) e (U-B) das estrelas se encontram em um curva ondulada (Figura 20.9). Se a estrela a é encontrada fora dessa curva, assumimos que

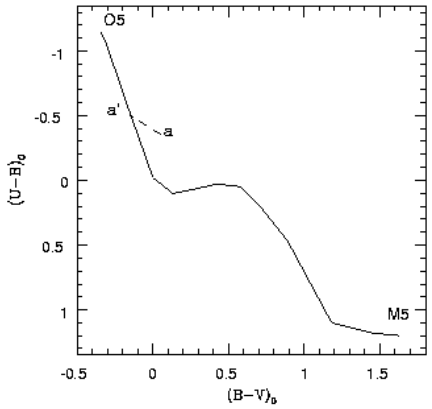


Figura 20.9: Excesso de Cor para estrelas na seqüência principal. Ao se observar uma estrela com (B-V)$_o$ na posição a, sabe-se que existe um excesso na cor causado pelo gás e poeira interestellar, pois a estrela deveria estar em a'.

ela sofreu avermelhamento interestelar e movemos a medida para cima ao longo da diagonal de inclinação conhecida

$$\frac{E_{U-B}}{E_{B-V}} = 0,72$$

até que esteja sobre a curva. O deslocamento de a até a', é o excesso de cor. A correção ao fluxo observado em V, F_V^{obs}, também pode ser obtida do avermelhamento, já que a poeira interestelar produz uma razão constante de fluxos:

$$\boxed{A_V = R \cdot E_{B-V}}$$

ou seja:

$$V = -2,5 \log F_V^{obs} - A_V - C_V$$

onde C_V é a constante do sistema e a magnitude absoluta visual será:

$$M_V = -2,5 \log F_V^{obs} - A_V - 5 \log d(\mathrm{pc}) + 5$$

O valor de R está entre 3,0 e 5,0, dependendo da direção na Galáxia, devido à variação no tamanho e composição química dos grãos de poeira. O valor mais provável, fora das regiões de grande extinção, é de R=(2.99 $\pm$ 0.27), de acordo com Edward L. Fitzpatrick & Derck Massa (2007, Astrophysical Journal, 663, 320).

20.6 Teoria da Radiação

20.6.1 O corpo negro

Em 1859-60, Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), de Heidelberg, definiu um corpo negro como um objeto que absorve toda a luz que incide sobre ele, sem refletir nada da radiação. Um corpo com essa propriedade, em princípio, não pode ser visto e, portanto, é negro. Para tal corpo estar em equilíbrio termodinâmico, ele deve irradiar energia na mesma taxa em que a absorve, do contrário ele esquentaria ou esfriaria, e sua temperatura variaria. Portanto, um corpo negro, além de ser um *absorsor perfeito*, é também um *emissor perfeito*. Em 1886, Samuel Pierpont Langley (1834-1906) usou seu espectro-bolômetro para medir a distribuição de radiação para diversas fontes de calor, de baixas e altas temperaturas. Em 1893, o alemão Wilhelm Wien (1864-1928), do Physikalisch-Technische Reichsanstalt (PTR), instituto de metrologia alemão, descobriu empiricamente a chamada Lei de Wien:

$$h\nu_{max} = 2,821\, k\, T$$

Em 1895, os alemães Wien e Otto Richard Lummer (1860-1925) propuseram que um corpo negro não existe na natureza, mas poderia ser construído, demonstrando que a radiação emergente de um pequeno buraco em um corpo oco, com paredes internas à mesma temperatura, tem a mesma forma da radiação de um corpo negro. Lummer e Ernst Pringsheim (1859-1917) descobriram que corpos não negros também obedecem à lei do deslocamento de Wien, porém com valor distinto da constante; dessa forma, a temperatura dos corpos pode ser medida com a mesma fórmula. Em 1899, Lummer, Pringsheim, Heinrich Leopold Rubens (1865-1922) e Ferdinand Kurlbaum

(1857-1927), também do PTR, mediram a forma do espectro e observaram que a forma derivada classicamente por Wien era válida para altas freqüências, mas simplesmente não funcionava para baixas freqüências.

Em 1900, o físico alemão Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) da Universidade de Berlim [1], postulou que a energia eletromagnética só pode se propagar em quanta discretos, ou fótons, cada um com energia $E = h\nu$. Com essa quantização da energia, ele pode deduzir teoricamente a intensidade de um campo de radiação, como demonstrado a seguir.

A intensidade específica monocromática (energia por unidade de comprimento de onda, por unidade de tempo, por unidade de área, e por unidade de ângulo sólido) de um corpo que tem uma temperatura uniforme T que está em equilíbrio termodinâmico com seu próprio campo de radiação, isto é, é opaco, é chamada $I_\lambda \equiv B_\lambda(T)$ e é dada pela Lei de Planck:

$$B_\lambda(T)d\lambda = -\frac{cE}{4\pi}dn_b(p)$$

onde E é a energia da partícula, c é a velocidade da luz, e $dn_b(p)$ é o número de fótons com momentum p, associado à energia E, e é dado pela distribuição de *momentum* p de Bose-Einstein de um gás de bósons de spin s [veja seção (23.1)]:

$$dn_b(p) = \frac{(2s+1)}{exp[(E-\mu)/kT]-1}\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}$$

sendo μ o potencial químico [seção (23.9.1)], que depende da densidade de partículas (número de partículas por unidade de volume, N) e é obtido integrando-se:

$$N = \int_0^\infty n(p)dp$$

O termo $(2s+1)$ representa o número de partículas (estados independentes) possíveis com mesma energia E, e o termo h^{-3} é necessário devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, proposto em 1927 por Werner Karl Heisenberg (1901-1976), que define o menor tamanho possível da célula para o produto do volume de espaço e de *momentum*.

[1] Max Karl Ernest Ludwig Planck nasceu em 23 de abril de 1858 na cidade de Kiel, no norte da Alemanha. Cursou a Universidade de Munique e depois foi para Berlin estudar com Hermann von Helmoltz (1821-1894) e Gustav Kirchhoff (1824-1887). Obteve seu doutorado em Munique em 1879, com uma tese sobre o segundo princípio da termodinâmica. Em 1885 tornou-se professor na Universidade de Kiel e quatro anos mais tarde na Universidade de Berlin, onde passou a catedrático em 1892. Permanceu no cargo até seus 70 anos, quando aposentou-se e passou a dar palestras sobre ciência e religião. Morreu em 4 de outubro de 1947.

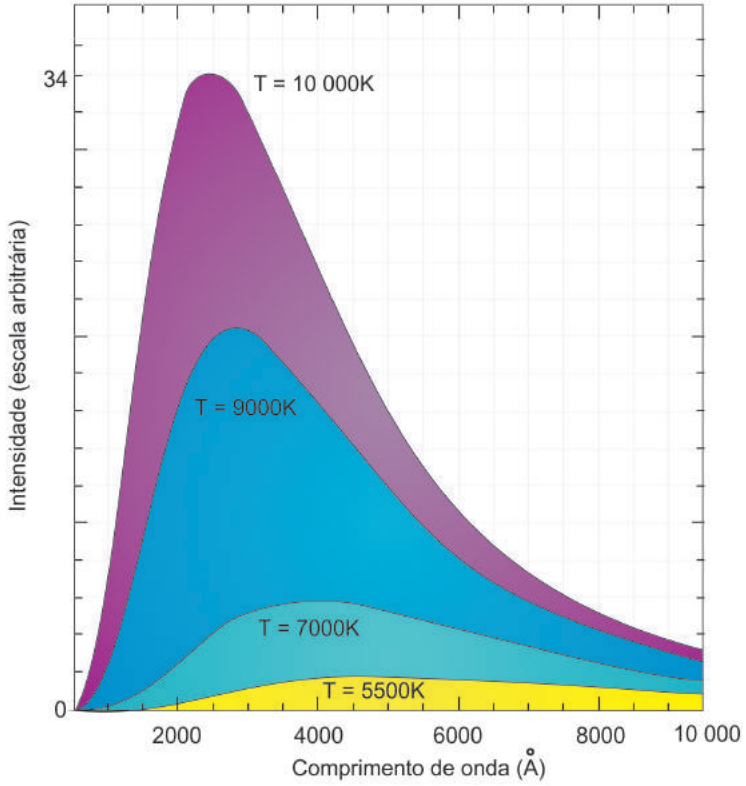


Figura 20.10: Curvas da lei de Planck para corpos com diferentes temperaturas: à medida que aumenta a temperatura, aumenta a intensidade em todos os comprimentos de onda, com o pico de intensidade se deslocando para comprimentos de onda menores.

Para um fóton, que é um bóson de massa zero e spin 1, $E = h\nu$, $p = h\nu/c$, $\lambda = c/\nu$ e $\mu = 0$. Com esses valores se pode obter:

$$\boxed{B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}} \tag{20.21}$$

onde h é a constante de Planck, e $k = 1,38 \times 10^{-16}$ergs/K é a constante de Boltzmann.

Para escrever a lei de Planck em termos de freqüência, precisamos utilizar

a equação (20.2), e

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

obtendo

$$B_\nu = B_\lambda \frac{\lambda^2}{c}$$

ou

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}} \tag{20.22}$$

onde, em unidades do sistema internacional:

$$\begin{aligned} h &= \text{constante de Planck} = 6,63 \times 10^{-34}\,\text{Js}, \\ c &= \text{velocidade da luz} = 3 \times 10^{8}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}, \\ k &= \text{constante de Boltzmann} = 1,38 \times 10^{-23}\,\text{J}\,\text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

Essa intensidade específica não depende de qualquer propriedade do corpo a não ser sua temperatura, e B_ν tem unidades de $\text{W}\,\text{m}^{-2}\,\text{Hz}^{-1}\,\text{sr}^{-1}$. Qualquer corpo em equilíbrio termodinâmico emitirá fótons com uma distribuição de comprimentos de onda dada pela Lei de Planck. Esta radiação, chamada de *radiação de corpo negro*, ou *radiação térmica*, não depende da direção de emissão e não é polarizada.

Para o caso mais geral de radiação, propagando-se em um meio com índice de refração (real) μ_ν, a intensidade específica será dada por:

$$I_\nu = \mu_\nu^2 B_\nu(T)$$

20.6.2 Lei de Wien

Como podemos ver da figura com a Lei de Planck, a freqüência em que a intensidade é máxima varia com a temperatura. O máximo (e o mínimo) de qualquer função é dado para o ponto em que a derivada é nula. Derivando a Lei de Planck $B_\lambda(T)$ e igualando a derivada a zero,

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = -\frac{10hc^2}{\lambda^6\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)} + \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{\frac{hc}{\lambda^2 kT}e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2} = 0$$

logo

$$\frac{hc}{\lambda kT}\frac{e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)} = 5$$

Fazendo-se a substituição de variáveis $x \equiv \frac{hc}{\lambda kT}$, obtém-se uma equação transcendental:

$$e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$$

que pode ser resolvida numericamente, obtendo-se:

$$\boxed{\lambda_{\max} T = 0,0028978\,\mathrm{K\,m} = 28978000\,\mathrm{K\,\AA} \simeq 5383 \times 5383\,\mathrm{K\,\AA}} \qquad (20.23)$$

e o máximo de $B_\nu(T)$ ocorre em

$$\boxed{h\nu_{\max} = 2,821\,k\,T} \qquad (20.24)$$

Note que $\lambda_{\max}$ não é igual a $c/\nu_{\max}$ pois B_λ não é igual a B_ν. Essa relação, encontrada empiricamente por Wilhelm Wien, mostra que, à medida que T aumenta, $\nu_{\max}$ aumenta, ou $\lambda_{\max}$ diminui. Dessa maneira, se explica porque quando se aquece uma barra de ferro, ela torna-se primeiro vermelha e depois esverdeada e azulada.

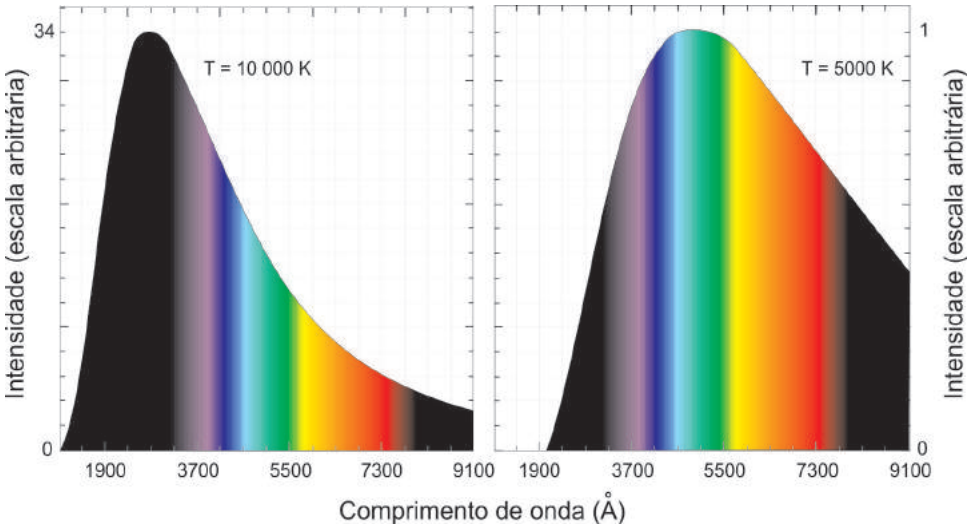


Figura 20.11: Ilustração da Lei de Wien. A figura mostra os gráficos da lei de Planck para dois corpos com temperaturas diferentes. O intervalo de comprimentos de onda é o mesmo nos dois gráficos mas o intervalo de intensidades está muito mais expandido no gráfico da direita, de maneira a salientar a diferença no comprimento de onda em que ocorre o pico de intensidade para os dois corpos.

20.6.3 Lei de Stefan-Boltzmann

Em 1884, o matemático austríaco Josef Stefan (1835-1893) e seu aluno na época, o também austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906), descobriram empiricamente que o fluxo (energia por unidade de área, por unidade de tempo) de um corpo negro de temperatura T é dado por:

$$F = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \,\mathrm{sen}\theta \, d\theta \int_0^{\infty} B_\nu(T) d\nu = \sigma T^4$$

onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-5} \mathrm{ergs\,cm^{-2}\,K^{-4}\,s^{-1}} = 5,67 \times 10^{-8} \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Essa lei pode ser demonstrada considerando que:

$$B(T) \equiv \int_0^{\infty} B_\nu d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

e definindo-se $\alpha \equiv \frac{h\nu}{kT}$,

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha}(1 - e^{-\alpha})} \\ &= \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \left[6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}\right] \\ &= \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \end{aligned}$$

Uma estrela não é um corpo negro, pois suas camadas externas, de onde provém a radiação, não estão exatamente em equilíbrio térmico. [2]

Escrevemos para o fluxo na fotosfera da estrela:

$$\boxed{F \equiv \sigma T_{\mathrm{ef}}^4} \tag{20.25}$$

definindo um parâmetro chamado *temperatura efetiva* T_{ef}. Portanto, para uma estrela esférica de raio R, a luminosidade é obtida multiplicando-se o fluxo pela área da fotosfera $4\pi R^2$:

$$\boxed{L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4} \tag{20.26}$$

[2] Nas estrelas não acontece o equilíbrio termodinâmico propriamente dito, pois as camadas que a compõem não estão todas à mesma temperatura, sendo tanto mais quentes quanto mais próximas estão do núcleo, onde a energia é gerada. Mas o transporte dessa energia para as camadas superiores se dá sem alteração significativa da distribuição de temperatura das camadas intermediárias, de forma que cada camada permanece em equilíbrio termodinâmico com ela mesma. Isso denomina-se *equilíbrio termodinâmico local*.

A temperatura efetiva de uma estrela é, portanto, a temperatura de um corpo negro que emite a mesma quantidade de energia por unidade de área e por unidade de tempo que a estrela.[3]

Exemplo: energia do Sol na Terra: a luminosidade do Sol, isto é, a energia total emitida pelo Sol é $L_\odot = 3,9 \times 10^{33}$ergs/s, sendo que 1 Joule $= 10^7$ ergs. Como o raio do Sol é de $R_\odot = 700\,000$ km, segue da equação (20.26) que a temperatura efetiva do Sol é $T_{\rm ef}^\odot = 5400$ K.

A energia que atinge a Terra por unidade de área e de tempo, por definição de fluxo, é de:

$$F_\oplus = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

onde r é a distância do Sol à Terra, de 1 unidade astronômica (UA) = 150 milhões de km.

Portanto, a potência luminosa interceptada pela Terra, que tem uma secção reta $\pi R_\oplus^2$, onde $R_\oplus$ é o raio da Terra, $R_\oplus = 6400$ km, é dada por:

$$P = \pi R_\oplus^2 F_\oplus = \pi R_\oplus^2 \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

Devido à rotação da Terra, o fluxo médio incidente é obtido dividindo a potência interceptada na Terra pela área total da Terra, $4\pi R_\oplus^2$.

$$\bar{F_\oplus} = \frac{P}{4\pi R_\oplus^2} = \frac{L_\odot}{16\pi r^2} = 3,5 \times 10^5 \mathrm{ergs\,s^{-1}\,cm^{-2}}$$

A Terra absorve 61% da luz incidente, refletindo os outros 39%. A energia absorvida aquece a Terra, que irradia como um corpo negro a uma taxa σT^4 por unidade de área. Logo:

$$\sigma T_\oplus^4 = 0,61 \bar{F}_\oplus$$

o que resulta em uma temperatura para a Terra de $T_\oplus = 249$ K.

De fato, devido ao efeito estufa do gás carbônico (CO_2) e da água, a temperatura da Terra é de 290 K. Portanto, o efeito estufa mantém a água

[3] A definição de temperatura de um objeto astronômico não é única, pois depende do método que estamos usando para medi-la. Assim, a temperatura de uma estrela medida pela lei de Wien (a partir da intensidade em um comprimento de onda), é ligeiramente diferente da sua temperatura medida pela lei de Stefan-Boltzmann (a partir da luminosidade e do raio). Esta última é a *temperatura efetiva*, enquanto a primeira é chamada *temperatura de brilho*. Pode-se ainda definir a *temperatura de cor*, determinada a partir da razão de fluxos em dois comprimentos de onda diferentes. Essas temperaturas não são iguais porque os corpos astronômicos não são corpos negros perfeitos.

na superfície da Terra acima do ponto de congelamento, de 273 K. A escala de temperatura que usamos quotidianamente é a Celsius [Anders Celsius (1701-1744)], comumente chamada de escala centígrada. A relação entre os dois sistema é: T(C)=T(K)-273, ou seja, 0 C=273 K.

Capítulo 21

Espectroscopia

Espectroscopia é o estudo da luz através de suas cores componentes, que aparecem quando a luz passa através de um prisma ou de uma rede de difração. A seqüência de cores formada é chamada *espectro*.

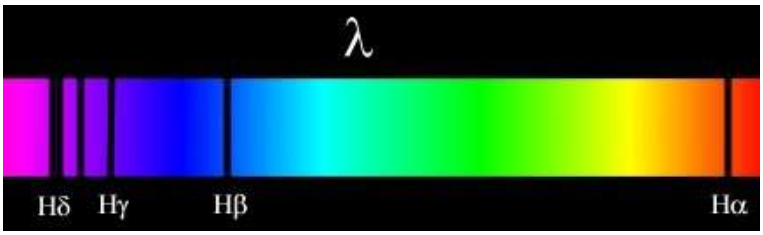


Figura 21.1: Imagem de um espectro com linhas de absorção do hidrogênio.

Quase toda informação sobre as propriedades físicas das estrelas são obtidas direta ou indiretamente de seus espectros, principalmente suas temperaturas, densidades e composições.

21.1 Histórico

Isaac Newton demonstrou, em 1665-66, que a luz branca, como a luz do Sol, ao passar por um prisma se decompõe em luz de diferentes cores, formando um espectro como o arco-íris.

Em 1802, William Hyde Wollaston (1766-1828) observou que, passando a luz solar por uma fenda, e depois por um prisma, apareciam algumas linhas escuras no espectro, que ele interpretou como o limite das cores. Essas

linhas são imagens da fenda do espectrógrafo em diferentes comprimentos de onda. Até 1820, o fabricante de instrumentos de vidro alemão Joseph von Fraunhofer (Fraunhofer) (1787-1826), de Munique, já havia contado 574 linhas escuras no espectro solar, chamadas depois de linhas de Fraunhofer. Para 324 destas linhas, Fraunhofer deu o nome de letras maiúsculas: A, B, C ... para as linhas mais fortes e minúsculas para as mais fracas, começando com A no vermelho. Fraunhofer também observou linhas nos espectros das estrelas Sírius, Castor, Pollux, Capella, Betelgeuse e Procyon. Na verdade Fraunhofer utilizava as linhas do espectro solar para calibrar seus instrumentos (vidros e prismas), que eram os de melhor qualidade fabricados naquela época. Como pequenas variações na quantidade e mistura de quartzo (SiO_2), cal (CaO) e soda (carbonato de sódio, Na_2CO_3) que compõem o vidro (basicamente SiO_4) fazem que os prismas fabricados desloquem o comprimento de onda em diferentes ângulos, Fraunhofer usava as linhas do espectro solar para determinar as propriedades dos vidros.

Em 1856, o químico alemão Robert Wilhelm Bunsen (1811-1899) inventou o bico de gás (bico de Bunsen), cuja vantagem era a de ter chama incolor. Quando um elemento químico era colocado sobre a chama, as cores emitidas eram as da substância, e não da chama. Bunsen tinha um colaborador mais jovem, o físico Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), de Heidelberg. Kirchhoff já havia formulado as leis que governam as voltagens e correntes em circuitos elétricos, que levam seu nome, em 1845. Em 1856, Kirchhoff sugeriu que as cores seriam melhor distinguidas se passadas através de um prisma. Eles colocaram um prisma na frente de um conjunto de lentes e passaram a identificar as linhas com os elementos químicos. Os gases quentes observados por Kirchhoff e Bunsen não emitiam um espectro contínuo. Eles descobriram que cada elemento gerava uma série de linhas diferentes. Por exemplo, o neônio tinha linhas no vermelho (por isso, um cartaz de neon é vermelho), o sódio tinha linhas no amarelo, e o mercúrio tinha linhas no amarelo e no verde.

Essas linhas eram todas brilhantes, enquanto as linhas de Fraunhofer eram escuras. Kirchhoff queria confirmar que as linhas escuras D descobertas por Fraunhofer eram linhas de sódio. Para isso, ele passou a luz do Sol através de uma chama de sódio, esperando que as linhas do sódio preenchessem as linhas escuras do Sol. Para sua surpresa, as linhas D ficavam mais fortes, mais escuras. Ele, então, substituiu o Sol por um sólido quente. A luz do sólido que passava pela chama apresentava as mesmas linhas escuras do Sol, na posição das linhas do sódio. Ele, então, concluiu que o Sol era um gás ou sólido quente, envolto por um gás mais frio. Essas camadas mais

frias produziam as linhas escuras do Sol. Comparando o espectro, descobriu linhas de Mg, Ca, Cr, Co, Zi, Ba, e Ni no Sol.

Linha	λ (Å)	Elemento
A	7594	oxigênio
B	6867	oxigênio
C	6563	hidrogênio, $H\alpha$
D1	5896	sódio
D2	5890	sódio
D3	5876	hélio
E	5270	ferro e cálcio
b1	5184	magnésio
F	4861	hidrogênio, $H\beta$
G	4308	ferro (e cálcio)
H	3968	cálcio
K	3934	cálcio

Tabela 21.1: Linhas de Fraunhofer.

De suas experiências, Kirchhoff formulou as três leis empíricas da espectroscopia, para determinar a composição de uma mistura de elementos.

21.2 Leis de Kirchhoff

1. Espectro contínuo: um corpo opaco quente, sólido, líquido ou gasoso, emite um espectro contínuo. Por exemplo, o filamento de uma lâmpada incandescente (sólido), a lava de um vulcão (líquido), uma estrela (gás denso).
2. Espectro de emissão: um gás transparente (isto é, pouco denso), produz um espectro de linhas brilhantes (de emissão). O número e a cor (posição) dessas linhas depende dos elementos químicos presentes no gás. Por exemplo, uma lâmpada fluorescente.
3. Espectro de absorção: se um espectro contínuo passar por um gás a temperatura mais baixa, o gás frio causa a presença de linhas escuras (absorção). O número e a posição dessas linhas depende dos elementos químicos presentes no gás. Por exemplo, o sol e sua atmosfera.

Embora um átomo isolado só emita em deferminados comprimentos de onda, muitos átomos comprimidos juntos num material emitem radiação em uma banda de linhas, já que têm velocidades diferentes e os comprimentos de onda se deslocam pelo efeito Doppler.

É importante notar que as linhas escuras não significam ausência de luz, somente o contraste de menos luz. O gás mais frio absorve mais radiação do que emite e, portanto, gera linhas escuras. O problema é complexo pois depende de se o gás está em equilíbrio ou não. Se estiver em equilíbrio, isto é, nem aquecendo nem esfriando, um gás absorve a radiação vinda em sua direção e a re-emite em todas as direções, causando um decréscimo de fluxo na direção da fonte. Se não estiver em equilíbrio, o gás aquece.

A observação dos espectros estelares tomou impulso em 1860 com Giovanni Battista Donati (1826-1873) em Florença, e logo depois com Lewis Morris Rutherfurd (1816-1892) em Nova Iorque, George Biddel Airy (1801-1891) em Greenwich, William Huggins (1824-1910) em Londres, e Angelo Secchi (1818-1878), em Roma.

Em 1862, o astrônomo sueco Anders Jonas Ångström (1814-1874), aumentando a precisão de medida do comprimento de onda, identificou as linhas de hidrogênio no Sol. A identificação do elemento hidrogênio já havia sido feita em 1766 pelo físico e químico inglês Henry Cavendish (1731-1810). Em 1868, o astrônomo inglês *Sir* Joseph Norman Lockyer (1836-1920) descobriu uma linha inexplicada no espectro do Sol, que foi identificada com um novo elemento químico, hélio, do grego *helios*, Sol. Independentemente, o astrônomo francês Pierre-Jules-César Jansse (1824-1907) também identificou essa linha no mesmo ano. Somente 27 anos mais tarde o elemento hélio foi descoberto na Terra, pelo químico inglês *Sir* William Ramsay (1852-1916) quando o espectro de um minério de urânio contendo hélio produziu uma linha na posição exata daquela encontrada por Lockyer no espectro do Sol. Hoje em dia, sabemos que o hélio é o segundo elemento mais abundante no Universo. O primeiro é o hidrogênio.

21.2.1 Variação do espectro contínuo com a temperatura

A curva de distribuição de energia de um espectro contínuo tem forma similar à de um *corpo negro*, ou seja, segue aproximadamente a lei de Planck. Portanto, quanto maior a temperatura, maior a intensidade da radiação e menor o comprimento de onda em que ocorre e pico da intensidade. Como vimos, a relação entre o comprimento de onda em que ocorre o pico da intensidade ($\lambda_{\max}$), é dada pela lei de Wien:

$$\boxed{\lambda_{\max} T = 0,0028978\,\mathrm{K\,m}}$$

Como 1 Å=10^{-10} m,

$$\boxed{\lambda_{\max} T = 28\,978\,000\,\mathrm{K\,Å}}$$

ou

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{2897,8\,\mathrm{K}\,\mu\mathrm{m}}{T}}$$

21.3 A origem das linhas espectrais: átomos e luz

No início do século XX, os cientistas começaram a estabelecer as bases para a compreensão da formação dos espectros à medida que eles começaram a aprender mais sobre a estrutura dos átomos e a natureza da luz.

21.3.1 Quantização

Os experimentos de Ernest Rutherford (1871-1937) em 1909, auxiliado por Hans Geiger (1882-1945) e Ernest Marsden (1889-1970), bombardeando folhas de ouro com partículas alfa (íons de hélio), resultando que 1 em cada 20 000 partículas incidentes eram refletidas na mesma direção de incidência, demonstraram que os átomos são compostos de um pequeno núcleo, com carga elétrica positiva, rodeado por uma nuvem de elétrons, com carga elétrica negativa. Esses elétrons não poderiam estar parados, pois eles cairiam em direção ao núcleo devido à atração coulombiana, então Rutherford propôs que os elétrons estariam girando em torno do núcleo em órbitas circulares. No entanto, isso não resolvia o problema da estabilidade do núcleo, pois cargas elétricas aceleradas emitem energia, e a perda de energia faria os elétrons espiralarem rapidamente em direção ao núcleo, emitindo radiação em todos os comprimentos de onda e tornando os átomos instáveis. Esse modelo atômico não era satisfatório, pois os átomos obviamente são estáveis, além do mais era conhecido, através dos estudos dos espectros de emissão, que quando os átomos emitem radiação, eles o fazem somente em certos comprimentos de onda, específicos de cada elemento, e não em todos os comprimentos de onda.

Isso gerou a suspeita de que as leis da mecânica clássica não se aplicavam totalmente a corpos microscópicos como os átomos e propiciou o surgimento da mecânica quântica.

Em 1900, o cientista alemão Max Planck (1858-1947) desenvolveu o modelo da quantização da luz, segundo o qual a matéria emite luz em pacotes de energia, que ele denominou *quanta*.

Albert Einstein, em 1905, estudando o efeito fotoelétrico, usou a idéia da quantização e assumiu que cada quantum de luz, ou fóton, tem uma energia

E dada por:

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},} \tag{21.1}$$

onde h é a constante de Planck,

$$h = 6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s},$$

e c é a velocidade da luz, 300 000 km/s.

Louis Victor, Príncipe de Broglie (1892-1987), em sua tese de doutorado em 1924, mostrou que o *momentum* de cada fóton, ou qualquer partícula, é dado por:

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c}} \tag{21.2}$$

de Broglie também propôs que os elétrons de um átomo só podem ocupar níveis quantizados, o que mais tarde foi melhor entendido com a formulação da mecânica quântica por Erwin Schrödinger (1887-1961).

21.3.2 Níveis de energia do hidrogênio

O físico dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962), em 1913, propôs uma modificação ao modelo atômico de Rutherford, aplicando a idéia da quantização. No modelo antigo, os elétrons podiam orbitar o núcleo a qualquer distância. No modelo de Bohr, os elétrons somente poderiam ocupar órbitas bem definidas em torno do núcleo: aquelas que têm *momentum* angular múltiplo de $h/2\pi$. Considere o átomo de hidrogênio, consistindo apenas de um próton e de um elétron. No modelo de Bohr, o elétron orbita o núcleo em órbitas circulares, com *momentum* angular

$$m_e v r = n\frac{h}{2\pi}$$

onde m_e é a massa do elétron, v_e sua velocidade, r o raio da órbita, h a constante de Planck e n um número inteiro (n=1,2,...).

Como o *momentum* linear do elétron, de acordo com de Broglie, é

$$m_e v = \frac{h}{\lambda_e}$$

o *momentum* angular será:

$$\frac{h}{\lambda_e} r = n\frac{h}{2\pi}$$

ou

$$2\pi r = n\lambda_e \tag{21.3}$$

o que nos diz que o tamanho da órbita do elétron deve conter um número inteiro de comprimentos de onda. Estando nessas órbitas, os elétrons não emitem radiação.

A energia de cada órbita pode ser calculada considerando as forças entre o elétron e o núcleo. Pela lei de Coulomb [Charles Coulomb (1736-1806)], a força elétrica entre o próton nuclear e o elétron é dada por:

$$F_C = \frac{Ke^2}{r^2}.$$

No sistema cgs, a constante K=1 e a carga do elétron é $e = 4,8 \times 10^{-10}$ unidades eletrostáticas. No sistema MKS, $K = 9 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}, e a carga do elétron é $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. A força centrípeta sobre o elétron é dada por:

$$F_c = \frac{m_e v^2}{r},$$

e precisa ser contrabalançada pela força de Coulomb. Portanto:

$$F_c = F_C \longrightarrow \frac{Ke^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \longrightarrow v = \left(\frac{Ke^2}{m_e r}\right)^{1/2}$$

ou seja:

$$p_e = m_e v = \left(\frac{m_e K e^2}{r}\right)^{1/2} \tag{21.4}$$

Pela equação de *de Broglie*, o *momentum* de cada elétron é dado por:

$$p_e = \frac{h}{\lambda_e} \longrightarrow \lambda_e = \frac{h}{p_e} \tag{21.5}$$

Substituindo (21.5) na (21.4), e (21.4) na (21.3), temos:

$$2\pi r = n\lambda_e = \frac{nh}{p_e} = nh\left(\frac{r}{m_e K e^2}\right)^{1/2}$$

$$r = n\left(\frac{h}{2\pi}\right)\left(\frac{r}{m_e K e^2}\right)^{1/2}$$

Elevando-se ao quadrado,

$$r^2 = \frac{n^2 \hbar^2 r}{m_e K e^2}$$

onde:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Dividindo por r, chegamos ao raio de Bohr:

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{m_e K e^2}$$

Como a energia total é dada por:

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ke^2}{r} = -\frac{Ke^2}{2r} = -\frac{Ke^2 m_e K e^2}{2n^2\hbar^2}$$

e como 1 eV=$1,6 \times 10^{-19}$ J:

$$\boxed{E = -\frac{m_e K^2 e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{2,18 \times 10^{-11}\,\text{ergs}}{n^2} = -\frac{13,6\,\text{eV}}{n^2}} \tag{21.6}$$

Um elétron-volt (eV) é a energia adquirida por um elétron ao ser acelerado através de uma diferença de potencial de 1 Volt.

$$\begin{aligned} 1\text{ eV} &= 1,602 \times 10^{-19}\text{ J} \\ 1\text{ eV} &= 1,602 \times 10^{-12}\text{ ergs} \end{aligned}$$

Dessa maneira, deduz-se que os níveis de energia do hidrogênio são quantizados, já que n=1,2,3,... só assume números inteiros, isso é, assumindo-se que as órbitas são quantizadas, obtém-se que os níveis de energia são quantizados. Note que essa teoria só dá resultados corretos para o hidrogênio. Para outros átomos, é preciso usar a mecânica quântica completa.

Por conservação de energia, quando um átomo passa de um nível de energia maior, n_1 para outro de energia menor, n_2, há emissão de um fóton com energia:

$$\boxed{E_{fóton} = E(n_1) - E(n_2)}$$

e

$$E_{fóton} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{21.7}$$

de modo que para satisfazer a quantização dos estados, um átomo de hidrogênio só pode emitir fótons com energia:

$$h\nu = E(n_1) - E(n_2) = 13,6\,\text{eV}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{21.8}$$

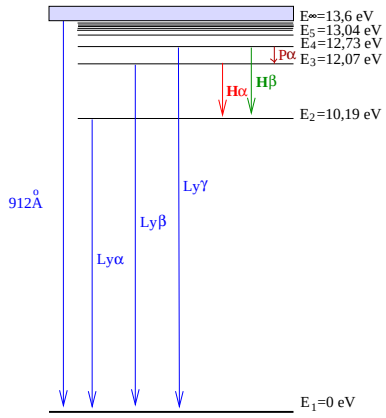


Figura 21.2: Níveis de energia do hidrogênio. Note que o ponto zero da energia é arbitrário e pode ser definido tanto para n=1 quanto para $n = \infty$.

ou, em termos de comprimento de onda:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \frac{13,6\,\text{eV}}{hc}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = \frac{1}{912\ \text{Å}}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)} \tag{21.9}$$

Essa equação foi derivada experimentalmente para $n_1 = 2$ por Johann Jakob Balmer (1825-1898) em 1885, e, por isso, as linhas $E_n \to E_2$, que estão na parte visível do espectro, são chamadas de linhas de Balmer. A série $E_n \to E_1$ é chamada de série de Lyman [Theodore Lyman (1874-1954)], e está no ultravioleta.

Portanto, um átomo de hidrogênio só pode emitir fótons com certas energias para que seus elétrons passem de um nível n_1 para um nível n_2, assim como só podem absorver fótons dessas energias para o processo inverso. Dessa maneira, a detecção de uma linha espectral com esse comprimento de onda, em emissão ou absorção, constitui evidência da presença do hidrogênio.

Além das linhas discretas, um átomo de hidrogênio também é capaz de espalhar radiação e fazer a transição de um nível n para o contínuo ($n = \infty$), e vice-versa (ionização e recombinação), se o fóton tiver comprimento de onda menor que 912 Å.

Para átomos com mais de um elétron, é preciso, ainda, levar em conta o princípio da exclusão de Pauli [Wolfgang Pauli (1900-1958)], pois os elétrons são férmions, partículas com spin meio-inteiro, e não podem ocupar o mesmo estado quântico, com o mesmo spin. Os bósons, partículas com spin inteiro, como os fótons, não obedecem ao princípio da exclusão de Pauli.

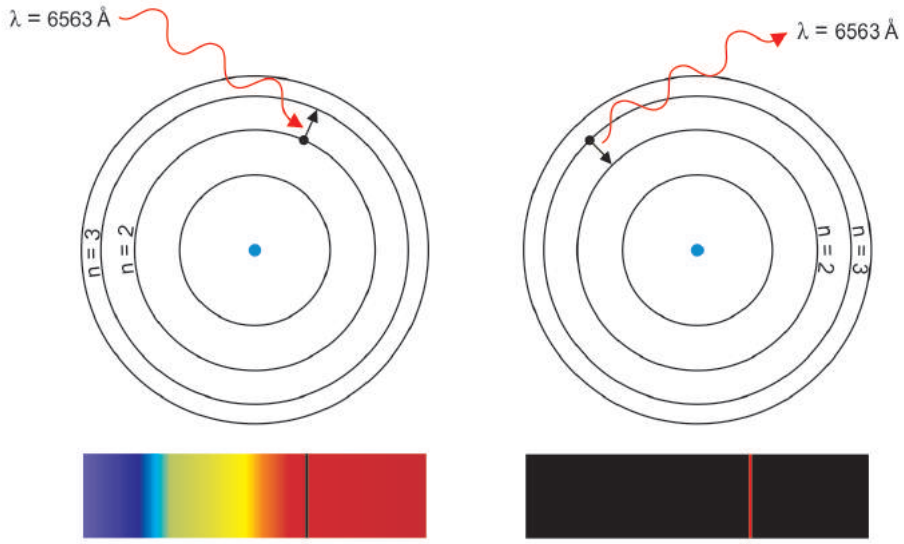


Figura 21.3: Formação de linhas de absorção e de emissão. Quando o átomo absorve um fóton com energia adequada para fazer a transição para um nível superior, forma-se uma linha de absorção com comprimento de onda correspondente ao fóton absorvido; quando o átomo emite um fóton, voltando para o nível inferior (figura da direita), forma-se uma linha de emissão com o mesmo comprimento de onda.

As principais linhas do hidrogênio são:

$Ly\,\alpha$ 1216 Å	$Ly\,\beta$ 1026 Å	$Ly\,\gamma$ 973 Å	$Ly\,\infty$ 912 Å	$H\alpha$ **6563 Å**
$H\beta$ **4861 Å**	$H\gamma$ 4340 Å	$H\delta$ 4102 Å	H7 3970 Å	H8 3889 Å
H9 3835 Å	H10 3798 Å	H11 3771 Å	H12 3750 Å	$H\infty$ 3646 Å

As principais linhas do HeI no ótico são:

3189 Å	3635 Å	3706 Å	3820 Å	3889 Å	3965 Å	4026 Å	4120 Å
4143 Å	4388 Å	**4471 Å**	4713 Å	4922 Å	5016 Å	5048 Å	5876 Å
6678 Å	7065 Å	7281 Å					

As linhas do HeII no ótico são 4686 Å, 5412 Å, e as da série de Pickering [Edward Charles Pickering (1846-1919)] que coincidem em baixa resolução com as do hidrogênio: 6560 Å, 4859 Å e 4541 Å. Duas linhas típicas do CI (carbono neutro) são 4771 Å e 5041 Å. Do CII (carbono uma vez ionizado),

4267 Å. Do CIII (carbono duas vezes ionizado), 4647 Å. Do OI (oxigênio neutro), 4368 Å, e do CaII 3934 Å e 3968 Å.

Existem regras de seleção que prevêem as transições mais esperadas entre dois níveis de energia, levando em conta a existência, ou não, de superposição espacial das funções de onda dos níveis envolvidos nas transições. As transições permitidas representam as transições que conservam o momentum angular total do sistema.

Outras transições são matematicamente possíveis, mas são consideradas proibidas porque, nas condições *terrestres*, antes que um átomo possa irradiar por uma transição proibida, uma colisão com outro átomo ou molécula irá ocorrer e des-excitar o átomo colisionalmente. Como no meio interestelar os átomos estão muito mais distantes entre si do que na Terra, as colisões são muito raras e, portanto, as transições *proibidas* são importantes em nuvens de gás e no meio interestelar. Essas linhas foram explicadas, em 1927, pelo astrofísico e professor de física no Caltech, Ira Sprague Bowen (1898-1973).

Se os átomos emitem em linhas espectrais, de onde vem o espectro contínuo? Quando átomos interagem com outros, as linhas espectrais são alargadas, já que os átomos têm velocidades diferentes e os comprimentos de onda se deslocam pelo efeito Doppler. Quando um agregado de átomos interage fortemente, como em um sólido, líquido, ou gás opaco, todas as linhas são tão alargadas que produzem um contínuo térmico.

21.4 Classificação Espectral

Embora Fraunhofer, em 1823, tivesse observado que as estrelas tinham espectros de linhas escuras como o Sol, investigações mais completas dos espectros das estrelas foram feitas por *Sir* William Huggins (1824-1910) e pelo jesuíta Irmão Angelo Secchi (1818-1878), do observatório do Vaticano, que notaram que os espectros estelares não eram todos iguais; só alguns se pareciam com o do Sol. Em 1864, Huggins obteve o primeiro espectro de uma nebulosa, e depois de observar mais 70 até 1868, concluiu que as nebulosas apresentavam linhas brilhantes (de emissão), uma do hidrogênio e outras duas que só foram identificados muitos anos mais tarde, como linhas proibidas do O II, O III, e N II. Em 1863, Secchi fez a primeira classificação dos espectros das estrelas, de acordo com as linhas escuras.

Note-se que, até esta época, a fotografia ainda não era possível; por isso, os espectros eram obtidos visualmente. A técnica fotográfica só foi lançada em 1839, pela parceria Joseph-Nicéphore Niépce (1765-1833) e

Louis-Jacques-Mandé Daguerre (1787-1851)[1]. Já em 1842, o francês Edmond Becquerel (1820-1891), e poucos meses depois o inglês John William Draper (1811-1882), fotografaram o espectro do Sol. Somente em 1872, Henry Draper (1837-1882), filho de John William Draper, obteve a primeira foto de um espectro, da estrela Vega. A classificação espectral usada atualmente foi desenvolvida no observatório de Harvard, nos Estados Unidos, no início do século XX.

Edward Charles Pickering (1846-1919), diretor do observatório do Colégio de Harvard, reconheceu que eram necessários muitos espectros para desenvolver uma classificação e começou a colectar espectros em fotografias. A classificação dos espectros foi feita, inicialmente, por Williamina Fleming (1857-1911), seguida de Antonia Caetana de Paiva Pereira Maury (1886-1952), sobrinha de Henry Draper, e principalmente por Annie Jump Cannon (1863-1941) que classificou 225 000 estrelas até magnitude 9 entre 1918 e 1924, publicadas no *Henry Draper Catalogue*. Parte do trabalho foi financiado pela esposa de Henry Draper, Anna Palmer Draper (1839-1914), em memória de seu marido, e incluía observações no Hemisfério Sul, obtidas na estação montada no Peru. Annie Cannon notou que as estrelas iam de azuis-esbranquiçadas a avermelhadas e classificou seus espectros de acordo com as linhas de hidrogênio, sendo A a classe com linhas mais fortes, B a seguinte, C e assim por diante.

Atualmente, as estrelas são classificadas em função decrescente da temperatura, como segue:

- O - estrelas azuis, com $T_{\rm ef} \simeq 20\,000$ a $40\,000$ K, apresentam linhas de HeII (hélio uma vez ionizado), e ultravioleta forte, e linhas do HI fracas. Exemplo: Mintaka

- B - estrelas branco-azuladas, com $T_{\rm ef} \simeq 15\,000$ K, com linhas de HeI e as linhas do HI visíveis. Exemplos: Rigel e Spica

- A - estrelas brancas, com $T_{\rm ef} \simeq 9\,000$ K, com linhas de HI muito fortes. Exemplos: Sírius e Vega

- F - estrelas branco-amareladas, com $T_{\rm ef} \simeq 7\,000$ K, com linhas de *metais*. As linhas do HI ficam mais fracas, mas ainda são bem visíveis. As linhas do CaII ficam fortes. Exemplos: Canopus e Procyon

[1] A fotografia não foi inventada por uma só pessoa, pois a câmara obscura já existia há quatro séculos quando, em 1822, o litógrafo Joseph-Nicéphore Niépce conseguiu fixar uma imagem sobre uma placa metálica. Associou-se a Louis-Jacques-Mandé Daguerre em 1829, e, em 1839, lançaram o processo fotográfico (daguerreótipo).

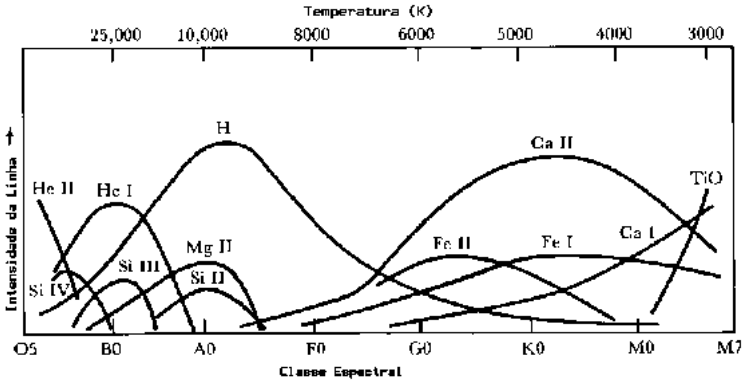


Figura 21.4: Intensidade das linhas espectrais em função da temperatura, ou tipo espectral.

- G - estrelas amarelas, com $T_{\rm ef} \simeq 5\,500$ K, como o Sol, com fortes linhas de metais e HI fraco. CaII (H e K) dominantes. Exemplos: Sol e Capela
- K - estrelas alaranjadas, com $T_{\rm ef} \simeq 4\,000$ K, com linhas metálicas dominantes. A banda G é muito forte. Contínuo azul fraco. Exemplos: Aldebarã e Arcturus
- M - estrelas vermelhas, com $T_{\rm ef} \simeq 3\,000$ K, com bandas moleculares (TiO) muito fortes. A linha dominante é CaI 4226 Å. Exemplos: Betelgeuse e Antares

Uma frase para lembrar a ordem de temperaturas é: *Oh! Be A Fine Girl, Kiss Me!.*

Para estrelas muito frias, como alguns tipos de supergigantes Miras, a classificação se estende para tipos R, com fortes bandas de CN e CO em vez de TiO; N, com bandas Swan do carbono molecular C_2; e S, com bandas de ZrO, YO, LaO e TiO. Essas três classes, RNS, têm basicamente a mesma temperatura que as estrelas da classe M, mas se diferenciam pelas linhas. A frase mnemônica se estende para: *Oh! Be A Fine Girl, Kiss Me Right Now! Smack!.* Esta classificação não se tornou padrão. Nos anos 1990 foram descobertas estrelas mais frias que as M9, e adicionou-se as classes L, com temperaturas entre 2200K e 1400K e T, com temperaturas abaixo de 1400K (quando se forma o metano), e o mneumônico se tornou: *Oh! Be A Fine Girl, Kiss Me Lovingly Tonight.*

Cada tipo espectral se subdivide em 10 classes, sendo 0 a mais quente, dentro da classe, e 9 a mais fria.

21.4.1 A seqüência espectral e a temperatura das estrelas

Cada linha escura no espectro de uma estrela está associada à presença de um elemento químico na atmosfera da estrela. Isso pode nos levar a pensar que as estrelas com linhas espectrais diferentes têm composição química diferente. No entanto, atualmente se sabe que a composição química das estrelas em geral é praticamente a mesma: aproximadamente 90% hidrogênio e aproximadamente 10 % hélio; todos os outros elementos juntos contribuem entre 1% e 2% da composição e são chamados de *metais*. Portanto, o hidrogênio é de longe o elemento químico mais abundante nas estrelas, e ainda assim as linhas do hidrogênio, embora fortes em algumas estrelas, são fracas em outras. Como isso se explica?

Na verdade, mais do que a composição química, é a temperatura que determina o espectro das estrelas. Consideremos uma linha de Balmer do hidrogênio. Essas linhas se originam em transições entre o segundo nível de energia do hidrogênio e qualquer outro nível acima dele: transições de nível para cima ($n_2 > 2$) resultam em absorção, transições de nível para baixo ($n_2 = 2$) resultam em emissão. Então, para uma estrela ter linhas de Balmer intensas, ela precisa ter muitos átomos de hidrogênio excitados ao nível n=2. Isso acontece em estrelas com temperatura em torno de 10 000 K ($kT = 0,86$ eV); para temperaturas muito mais baixas, como a do Sol por exemplo, o hidrogênio está no estado fundamental, e poucas colisões podem acontecer que sejam energéticas o suficiente para excitar o hidrogênio. Já em estrelas com temperaturas muito mais altas, o hidrogênio está quase todo ionizado, devido às freqüentes colisões, e novamente existem muito poucos átomos excitados. Assim, as linhas de Balmer ficam fracas em estrelas muito quentes ou muito frias, apesar de o hidrogênio existir abundantemente em todas.

21.5 Classificação de luminosidade

A classificação espectral de Harvard só leva em conta a temperatura das estrelas. Considerando que a luminosidade de uma estrela é dada por

$$\boxed{L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4}$$

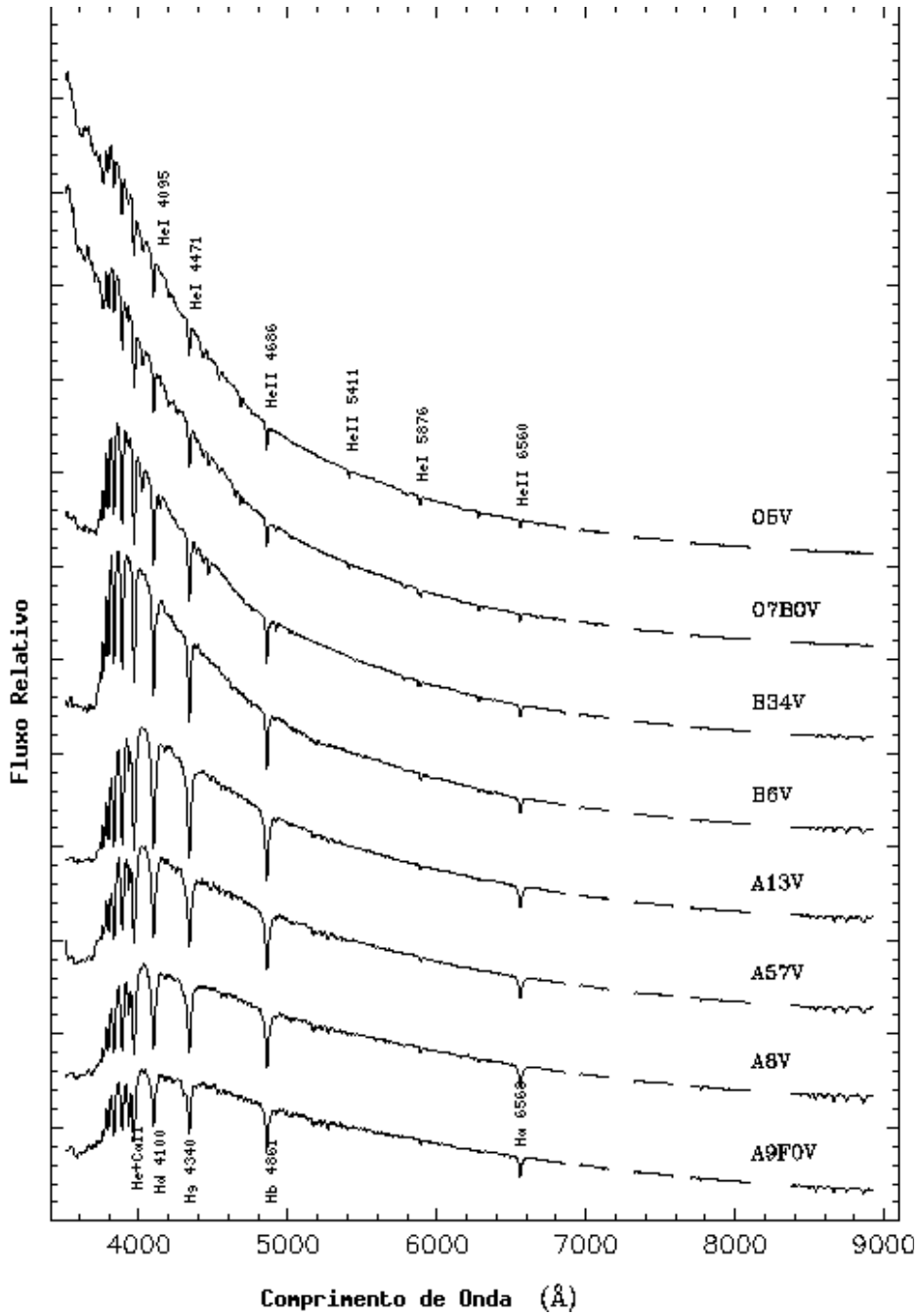


Figura 21.5: Espectros das estrelas por classe espectral, publicados por David Silva no http://zebu.uoregon.edu/spectra.html.

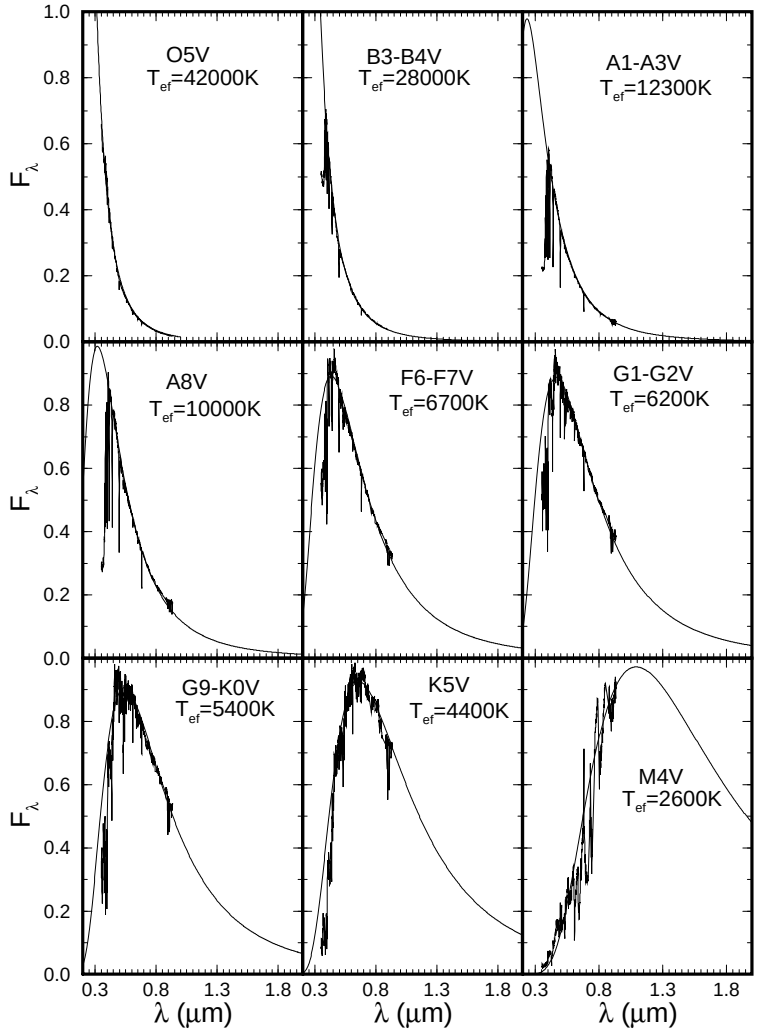


Figura 21.6: Espectros das estrelas por classe espectral, graficados junto com uma função de Planck, com temperatura $T_{\rm ef}$ indicada.

vemos que a luminosidade de uma estrela com maior raio é maior, para a mesma temperatura. Em 1943, William Wilson Morgan (1906-1994), Philip Childs Keenan (1908-2000) e Edith M. Kellman (1911-2007), do Observatório de Yerkes, introduziram as seis diferentes classes de luminosidade, baseados nas larguras de linhas espectrais que são sensíveis à gravidade superficial:

- Ia - supergigantes super-luminosas. Exemplo: Rigel (B8Ia) - $\log g \simeq 0$
- Ib - supergigantes. Exemplo: Betelgeuse (M2Iab)
- II - gigantes luminosas. Exemplo: Antares (MII) - $\log g \simeq 3$
- III - gigantes. Exemplo: Aldebarã (K5III)
- IV - subgigantes. Exemplo: α Crucis (B1IV)
- V - anãs (seqüência principal). Exemplo: Sírius (A1V) - $\log g \simeq 4.4$

A classe de luminosidade de uma estrela também é conhecida pelo seu espectro. Isso é possível porque a largura das linhas espectrais depende fortemente da gravidade superficial, que é diretamente relacionada à luminosidade. As massas das gigantes e anãs da seqüência principal são similares, mas o raio das gigantes é muito maior. Como a aceleração gravitacional é dada por g:

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

ela é muito maior para uma anã do que para uma gigante. Quanto maior a gravidade superficial, maior a pressão e, portanto, maior o número de colisões entre as partículas na atmosfera da estrela. As colisões perturbam os níveis de energia dos átomos, fazendo com que eles fiquem mais próximos ou mais afastados entre si do que o normal. Em conseqüência, os átomos perturbados podem absorver fótons de energia e comprimento de onda levemente maior ou menor do que os que os fótons absorvidos nas transições entre níveis não perturbados. O efeito disso é que a linha de absorção fica alargada. Portanto, para uma mesma temperatura, quanto menor a estrela, mais alargada será a linha, e vice-versa.

Atualmente usamos mais duas classes de luminosidades, para luminosidades menores que as da seqüência principal, as *sd (sub-dwarf)* sub-anãs e as *D* degeneradas, ou anãs brancas.

Andrew J. Pickles (1953-) publicou em 1998 um catálogo de fluxos esperados para os diversos tipos de estrelas, desde 1150Å até 25 000Å, no Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Volume 110, 749, pp. 863-878.

Tabela 21.2: Seqüência Principal

Tipo	$(B-V)_0$	$(U-B)_0$	$T_{\rm ef}$	C.B.	M_{Bol}	Massa ($\mathcal{M}_\odot$)
O5	-0,35	-1,15	40 000	-4,00	-10,0	120
B0	-0,31	-1,06	28 000	-2,80	-6,8	17
B5	-0,16	-0,55	15 500	-1,50	-2,6	6
A0	0,00	-0,02	9900	-0,40	0,1	2,9
A5	0,13	0,10	8500	-0,12	1,7	2,2
F0	0,27	0,07	7400	-0,06	2,6	1,6
F5	0,42	0,03	6580	0,00	3,4	1,25
G0	0,58	0,05	6030	-0,03	4,3	1,1
G5	0,70	0,19	5520	-0,07	5,0	0,9
K0	0,89	0,47	4900	-0,19	5,8	0,8
K5	1,18	1,10	4130	-0,60	6,7	0,65
M0	1,45	1,18	3480	-1,19	7,8	0,5
M5	1,63	1,20	2800	-2,30	9,8	0,15

21.6 Velocidade radial e efeito Doppler

Um outro uso da espectroscopia é a derivação da velocidade radial, isto é, a velocidade do objeto na linha de visada, utilizando o efeito Doppler.

Em 1842, Christian Doppler (1803-1853) deduziu que, para um corpo luminoso se aproximando (ou se afastando) do observador, o comprimento de onda da luz diminui (ou aumenta) em relação àquele observado em laboratório. O comprimento de onda de uma fonte que está se movimentando com velocidade v em relação ao observador é deslocado por:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}\cos\theta\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}$$

onde θ é o ângulo entre o vetor velocidade e a linha de visada. Se a velocidade for muito menor que a velocidade da luz, e considerando v_r como a componente de velocidade na direção do observador:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

Em 1868, *Sir* William Huggins deduziu a velocidade radial de Sírius observando a pequena diferença no comprimento de onda da linha F (Hβ)

do hidrogênio. Mais tarde, foram observadas variações nessa velocidade (veja seção 19.2).

21.7 Perfil da linha

O perfil de uma linha representa a variação da densidade de fluxo (intensidade) com o comprimento de onda, a forma de uma linha espectral é chamada de perfil da linha. A forma verdadeira da linha reflete as propriedades da atmosfera da estrela: temperatura T, pressão P, gravidade superficial g, densidade ρ e velocidade das partículas v. Dependendo dessas propriedades, surgem vários efeitos que contribuem para o alargamento da linha. Um deles é o *alargamento colisional*, gerado pelas colisões entre as partículas, o que perturba os níveis de energia dos átomos, tornando-os menos definidos. Outro é o efeito *Doppler*: como as partículas na atmosfera da estrela estão se movendo em direções aleatórias, algumas estarão se aproximando de nós, e veremos sua linha espectral fique deslocada para o azul, e outras estarão se afastando, e veremos sua linha espectral deslocada para o vermelho. A linha espectral resultante de todas as partículas ficará alargada. Existe também um alargamento *natural* da linha, devido a que, pelo princípio da incerteza, os níveis de energia dos átomos não são exatamente definidos, fazendo com que fótons de energias levemente diferentes contribuam para a formação da mesma linha, que consequentemente não terá um único comprimento de onda, mas sim terá a largura correspondente à incerteza no nível de energia onde ela foi gerada. Finalmente, o perfil observado também é alargado pelo instrumento de observação.

21.8 Lei de Boltzmann - Equação de Excitação

O austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906) derivou a relação entre a densidade de átomos com um grau de excitação $(i+1)$ em relação à densidade de átomos com um grau de excitação i:

$$\boxed{\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{g_{i+1}}{g_i} e^{-E_{i,i+1}/kT}}$$

onde $E_{i,i+1} = E_{i+1} - E_i$ é a diferença de energia entre os estados final e inicial, e g_i é o peso estatístico do nível i, isto é, o número de diferentes estados com a mesma energia E_i. Um nível com *momentum* angular J tem

g_i = 2J+1, e k é a constante de Boltzmann,

$$k = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}.$$

Para o hidrogênio no nível n, $g_n = 2n^2$.

Por exemplo, podemos calcular a fração de átomos de hidrogênio no nível n=2, em relação ao n=1 para temperaturas de T=10 000 K e 20 000 K. Como a diferença de energia entre os níveis n=2 e n=1 é de 10,19 eV, temos $E_{i,i+1} = 10,19$ eV e $g_2 = 8$ e $g_1 = 2$. Pela Lei de Boltzmann, obtemos:

$$\frac{N_2}{N_1} = 4\,e^{-\frac{10,19\ \mathrm{eV}}{kT}}$$

lembrando que 1 eV $= 1,602 \times 10^{-19}$ J e $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K,

$$\frac{N_2}{N_1}(T = 10\,000\ \mathrm{K}) = 0,000029$$

enquanto

$$\frac{N_2}{N_1}(T = 20\,000\ \mathrm{K}) = 0,0108$$

372 vezes maior.

$\frac{N_n}{N_1}$	T=5040 K	10080 K	20160 K
n=2	$2,5 \times 10^{-10}$	$3,2 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{-2}$
n=3	$6,9 \times 10^{-12}$	$8,1 \times 10^{-6}$	$8,3 \times 10^{-3}$
n=4	$2,8 \times 10^{-12}$	$6,8 \times 10^{-6}$	$1,0 \times 10^{-2}$

Podemos calcular o comprimento de onda de um fóton com energia equivalente a 10,19 eV notando que $E = h\nu = hc/\lambda$ e, portanto, o comprimento de onda equivalente é de 1216 Å. Podemos também calcular o comprimento de onda de emissão máxima para T=10 000 K, usando a Lei de Wien, obtendo $\lambda_{\max}(T = 10\,000\mathrm{K}) = 2898,8$ Å enquanto que $\lambda_{\max}(T = 20\,000\mathrm{K}) = 1448,9$ Å. Portanto é óbvio que uma estrela com T_{ef}=20 000 K tem muito mais fótons com energia suficiente para excitar o elétron do átomo de hidrogênio ao nível n=2, explicando a grande diferença obtida.

A intensidade de uma linha depende diretamente do número de átomos no estado de energia a partir do qual a transição ocorre. Precisamos, então, saber que fração de todos os átomos de um elemento estão naquele estado de energia, o que depende da temperatura T.

Em uma situação em que o equilíbrio térmico ocorre, o número de átomos num estado não muda com o tempo. Cada excitação, em média, compensa uma des-excitação.

21.9 Lei de Saha - Equação de Ionização

O indiano Megh Nad Saha (1893-1956) utilizou a mecânica estatística para derivar, em 1921, o número de átomos por unidade de volume em um grau de ionização $i+1$ em relação ao grau i, para um gás em equilíbrio termodinâmico local, isto é, que localmente tenha uma temperatura constante:

$$\boxed{\frac{N_{i+1}}{N_i}N_e = \frac{U_{i+1}}{U_i}\frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3}e^{-\frac{E_{i,i+1}}{kT}}}$$

onde N_e é a densidade de elétrons (número de elétrons por unidade de volume), N é o número de átomos por unidade de volume, U_i é a função partição:

$$U_i = \sum_j g_j e^{-\frac{E_j}{KT}}$$

sendo E_j a energia acima do nível fundamental do estado i, k a constante de Boltzmann,

$$k = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$

e m_e é a massa do elétron,

$$m_e = 9,1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

A dependência na densidade de elétrons, N_e, se dá porque as excitações e des-excitações ocorrem por radiação e por colisão. Quanto maior for a densidade de elétrons, maior será a probabilidade de uma colisão. Ambos os processos dependem da temperatura do meio, já que a energia média das partículas é dada por:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT.$$

Usando a lei dos gases ideais $P_e = N_e kT$, podemos escrever:

$$\log\frac{N_{i+1}}{N_i}P_e = -0,48 + \log 2\frac{U_{i+1}}{U_i} + 2,5\log T - \frac{5040\mathrm{K}}{T}E_{i,i+1}$$

Para o hidrogênio, $U_I = 2$ e $U_{II} = 1$.

	T=5040 K	10080 K	20160 K
$\frac{N_{\mathrm{HII}}}{N_{\mathrm{HI}}}P_e$	$1,5 \times 10^{-5}$	$5,4 \times 10^{2}$	$7,6 \times 10^{6}$

De acordo com Clabon Walter Allen (1904-1987), *Astrophysical Quantities, 3rd Ed.*, p. 165, na fotosfera do Sol ($\tau_{5000\ \mathring{\mathrm{A}}} = 1$), $P_e \simeq 57,5$ dina/cm^2 e $N_e = 6,5 \times 10^{13}$ cm^{-3}. Um valor representativo da fotosfera como um todo é $P_e \simeq 3,4 \times 10^4$ dina/cm^2 e $N_e = 3,8 \times 10^{16}$ cm^{-3}.

Combinando-se as equações de Boltzmann e Saha, podemos calcular o número de átomos de hidrogênio em um nível de excitação n em relação ao número total de H=HI+HII:

$$\frac{N_2}{N_{\rm total}} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{N_I}{N_{\rm total}}$$

ou

$$\frac{N_2}{N_{\rm total}} = \frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \frac{N_I}{N_I + N_{II}} = \frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \frac{1}{1 + N_{II}/N_I}$$

$\frac{N_n}{N_H}$	T=5040 K	10080 K	20160 K
n=2	$2,5 \times 10^{-10}$	$6,0 \times 10^{-8}$	$1,4 \times 10^{-9}$
n=3	$6,9 \times 10^{-12}$	$1,5 \times 10^{-8}$	$1,2 \times 10^{-9}$

Para o hélio, $U_I = U_{III} = 1$ e $U_{II} = 2$, $E_{I,II} = 24,58$ eV e $E_{II,III} = 54.41$ eV. Para temperaturas abaixo de 10000K (log T=4.0) todo o hélio está neutro. Entre 10 000 K$\leq T \leq$14 000 K, o hélio varia de quase todo neutro para quase todo uma vez ionizado, permanecendo uma vez ionizado até 22000K, acima da qual inicia a segunda ionização, que se completa em 30000K.

Como demonstrado por Edward Arthur Milne (1896-1950), a aplicação das leis de Saha e Boltzmann nos permite interpretar os espectros das estrelas. Por exemplo, à $T_{\rm ef} \simeq 5000$ a 7000 K, o cálcio deve estar na forma de CaII (uma vez ionizado). Estrelas com linhas fortes de CaII e fracas de CaI devem, portanto, ter temperaturas efetivas nessa faixa. Naturalmente, isto depende também da densidade de elétrons, pela Lei de Saha.

Se a distância interatômica a

$$a = 7,3 \times 10^{19}{\rm cm} \times \left(\rho \frac{X}{A}\right)^{-1/3}$$

for menor que o raio do átomo, o potencial a uma certa distância é menor por

$$\Delta E = \frac{Z^2 e^2}{2a} = 9,8{\rm eV} Z^2 \left(\rho \frac{X}{A}\right)^{1/3}$$

e pode haver ionização. No cálculo da Lei de Saha, precisamos utilizar o potencial real e não o potencial do átomo isolado. Para o hidrogênio, mesmo densidades de algumas gramas por cm^3 já causam grandes reduções no potencial de ionização, levando à ionização total, independentemente da temperatura. Esta ionização por pressão é a responsável pela ionização total no interior das estrelas. Se não levarmos em consideração a redução no potencial, as altas densidades levariam à recombinação.

Capítulo 22

Estrelas

Estrelas são esferas autogravitantes de gás ionizado, cuja fonte de energia é a transmutação de elementos através de reações nucleares, isto é, da fusão nuclear de hidrogênio em hélio e, posteriormente, em elementos mais pesados.

As estrelas têm massas entre 0,08 e 100 vezes a massa do Sol ($M_\odot = 1,9891 \times 10^{30}$kg) e as estrelas normais, não colapsadas, temperaturas efetivas entre 2500K e 30 000K.

22.1 O Diagrama HR

O Diagrama de Hertzsprung Russell, conhecido como diagrama HR, foi descoberto independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873-1967), em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell (1877-1957), em 1913, como uma relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura superficial. Hertzsprung descobriu que estrelas da mesma cor podiam ser divididas entre luminosas, que ele chamou de gigantes, e estrelas de baixa luminosidade, que ele chamou de anãs. Dessa forma, o Sol e a estrela Capela têm a mesma classe espectral, isto é, a mesma cor, mas Capela, uma gigante, é cerca de 100 vezes mais luminosa que o Sol. Russel estendeu o estudo de Hertzsprung para as estrelas mais quentes, graficando as 300 estrelas para as quais a paralaxe havia sido medida naquela época. Uma representação de um diagrama HR é mostrada na figura 22.1.

Tanto a luminosidade (ou magnitude absoluta) como a temperatura superficial de uma estrela, são características facilmente determináveis para estrelas de distâncias conhecidas: a primeira pode ser encontrada a partir da magnitude aparente, e a segunda a partir de sua cor ou tipo espectral.

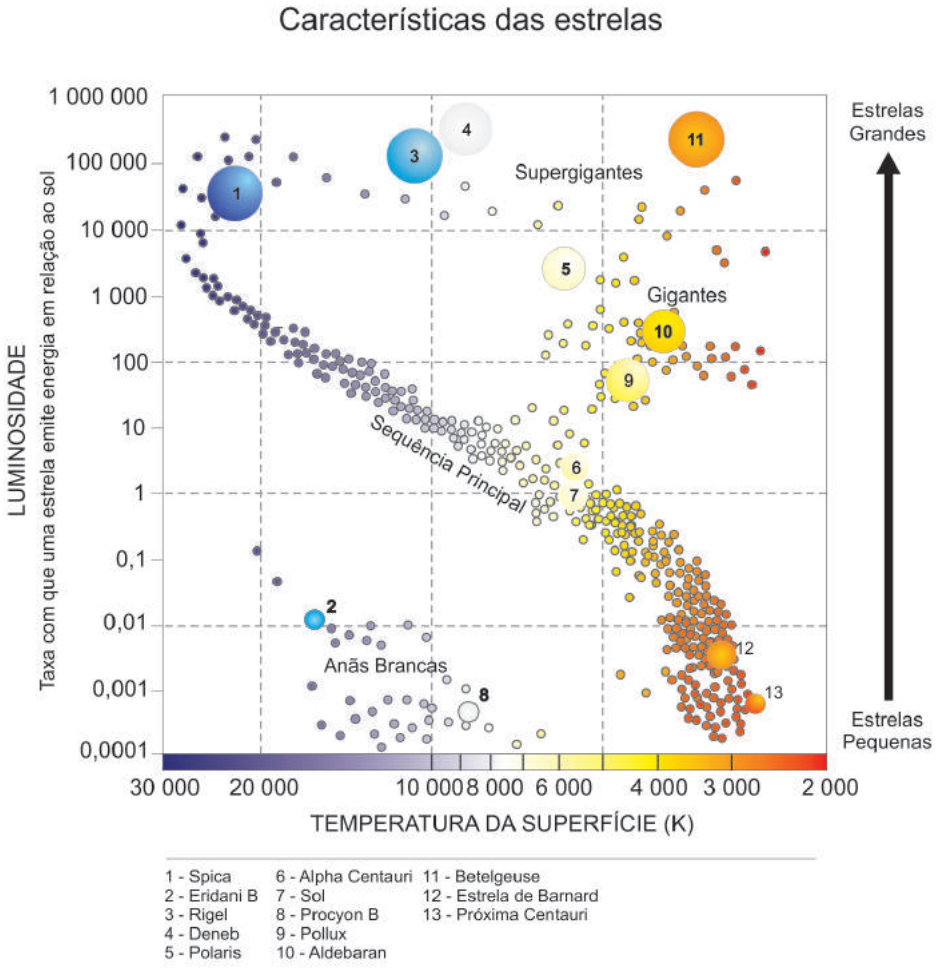


Figura 22.1: Representação de um diagrama HR, mostrando a localização de algumas estrelas conhecidas.

A figura 22.2 mostra um diagrama HR para um conjunto de estrelas nas proximidades do Sol. Nesse diagramas, os astrônomos adotam a convenção de que a temperatura cresce para a esquerda, e a luminosidade para cima.

A primeira coisa que se nota em um diagrama HR é que as estrelas não se distribuem igualmente nele, mas se concentram em alguns partes. A maior parte das estrelas está alinhada ao longo de uma estreita faixa na diagonal que vai do extremo superior esquerdo (estrelas quentes e muito luminosas),

até o extremo inferior direito (estrelas frias e pouco luminosas). Essa faixa é chamada seqüência principal. O fator que determina onde uma estrela se localiza na seqüência principal é a sua *massa*: estrelas mais massivas são mais quentes e mais luminosas. As estrelas da seqüência principal têm, por definição, classe de luminosidade V, e são chamadas de anãs. Um número substancial de estrelas também se concentra acima da seqüência principal, na região superior direita (estrelas frias e luminosas). Essas estrelas são chamadas gigantes, e pertencem à classe de luminosidade II ou III. Bem no topo do diagrama existem algumas estrelas ainda mais luminosas: são chamadas supergigantes, com classe de luminosidade I. Finalmente, algumas estrelas se concentram no canto inferior esquerdo (estrelas quentes e pouco luminosas): são chamadas anãs brancas. Apesar do nome, essas estrelas na verdade cobrem um intervalo de temperatura e cores que abrange desde as mais quentes, que são azuis ou brancas e têm temperatura superficiais de até 170 000 K, até as mais frias, que são vermelhas e têm temperaturas superficiais de apenas 3500 K.

É importante notar que o fato de uma estrela estar "na" ou "fora da" seqüência principal não se refere à sua posição no espaço, mas apenas à posição do ponto no diagrama HR que representa sua luminosidade e temperatura. Estima-se que em torno de 80% das estrelas nas vizinhanças do Sol são estrelas da seqüência principal. Aproximadamente 20% são anãs brancas e menos do que 1% são gigantes, supergigantes ou anãs marrons.

Ao interpretar o diagrama HR, temos de levar em conta os *efeitos de seleção*: as estrelas intrinsecamente mais brilhantes são mais prováveis de aparecer no diagrama, já que podem ser vistas a distâncias maiores. Isso significa que, se fizermos um diagrama HR de uma amostra de estrelas limitada por magnitude aparente, um grande número de estrelas intrinsecamente brilhantes vão aparecer. Se fizermos outro diagrama HR, com uma amostra de estrelas limitada pela distância ao Sol, o diagrama será diferente. A aparência do diagrama HR de estrelas pertencentes a um determinado aglomerado de estrelas depende fortemente da idade do aglomerado e, por isso, esses diagramas são importantes para estudos de evolução estelar.

22.2 Cúmulos e Aglomerados Estelares

As estrelas de um cúmulo ou aglomerado estelar formaram-se da mesma nuvem de gas e portanto têm a mesma idade, a mesma composição química e a mesma distância. Quanto mais próximo o aglomerado está da Terra, maior é o seu diâmetro aparente (angular).

Tabela 22.1: John S. Drilling & Arlo U. Landolt, em Allen's Astrophysical Quantities, 4th Edition, Editor Arthur N. Cox, 2000, AIP Press, Springer, p. 388, e A.T. Tokunaga, p. 151

Tipo	M_V	B-V	U-B	V-R	R-I	V-K	T_{ef}
O5V	-5,7	-0,33	-1,19	-0,15	-0,32		42 000
O9V	-4,5	-0,31	-1,12	-0,15	-0,32	-0,87	34 000
B0V	-4,0	-0,30	-1,08	-0,13	-0,29	-0,83	30 000
B2V	-2,45	-0,24	-0,84	-0,10	-0,22	-0,66	20 900
B2I	-6,4	-0,17	-0,93	-0,05	-0,15		17 600
B5V	-1,2	-0,17	-0,58	-0,06	-0,16	-0,42	15 200
B8V	-0,25	-0,11	-0,34	-0,02	-0,10	-0,24	11 400
A0V	+0,65	-0,02	-0,02	0,02	-0,02	0,00	9 790
A0I	-6,3	-0,01	-0,38	0,03	0,05		9 980
A2V	+1,3	0,05	0,05	0,08	0,01	0,14	9 000
A5V	+1,95	0,15	0,10	0,16	0,06	0,38	8 180
A5I	-6,6	0,09	-0,08	0,12	0,13		8 610
F0V	+2,7	0,30	0,03	0,30	0,17	0,70	7 300
F0I	-6,6	0,17	0,15	0,21	0,20		7 460
F2V	+3,6	0,35	0,00	0,35	0,20	0,82	7 000
F2I	-6,6	0,23	0,18	0,26	0,21		7 030
F5V	+3,5	0,44	-0,02	0,40	0,24	1,10	6 650
F5I	-6,6	0,32	0,27	0,35	0,23		6 370
F8V	+4,0	0,52	0,02	0,47	0,29	1,34	6 250
F8I	-6,5	0,56	0,41	0,45	0,27		5 750
G0V	+4,4	0,58	0,06	0,50	0,31	1,41	5 940
G0I	-6,4	0,76	0,52	0,51	0,33		5 190
G2V	+4,72	0,63	0,12	0,53	0,33	1,46	5 790
G2I	-6,3	0,87	0,63	0,58	0,40		5 190
G5V	+5,1	0,68	0,20	0,54	0,35	1,58	5 560
G5III	+0,9	0,86	0,56	0,69	0,48		5 050
G5I	-6,2	1,02	0,83	0,67	0,44		4 930
G8V	+5,5	0,74	0,30	0,58	0,38	1,80	5 310
G8I	-6,1	1,14	1,07	0,69	0,46		4 700
K0V	+5,9	0,81	0,45	0,64	0,42	1,96	5 150
K0I	-6,0	1,25	1,17	0,76	0,48		4 550
K2V	+6,4	0,91	0,64	0,74	0,48	2,22	4 830
K2I	-5,9	1,36	1,32	0,85	0,55		4 310
K5V	+7,35	1,15	1,08	0,99	0,63	2,85	4 410
K5III	-0,2	1,50	1,81	1,20	0,90		4 050
K5I	-5,8	1,60	1,80	1,20	0,90		3 990
M0V	+8,8	1,40	1,22	1,28	0,91	3,65	3 840
M0I	-5,6	1,67	1,90	1,23	0,94		3 620
M2V	+9,9	1,49	1,18	1,50	1,19	4,11	3 520
M2I	-5,6	1,71	1,95	1,34	1,10		3 370
M5V	+12,3	1,64	1,24	1,80	1,67	6,17	3 170
M5III	-0,3	1,63	1,58	2,18	1,96		3 380
M5I	-5,6	1,80	1,60	2,18	1,96		2 880

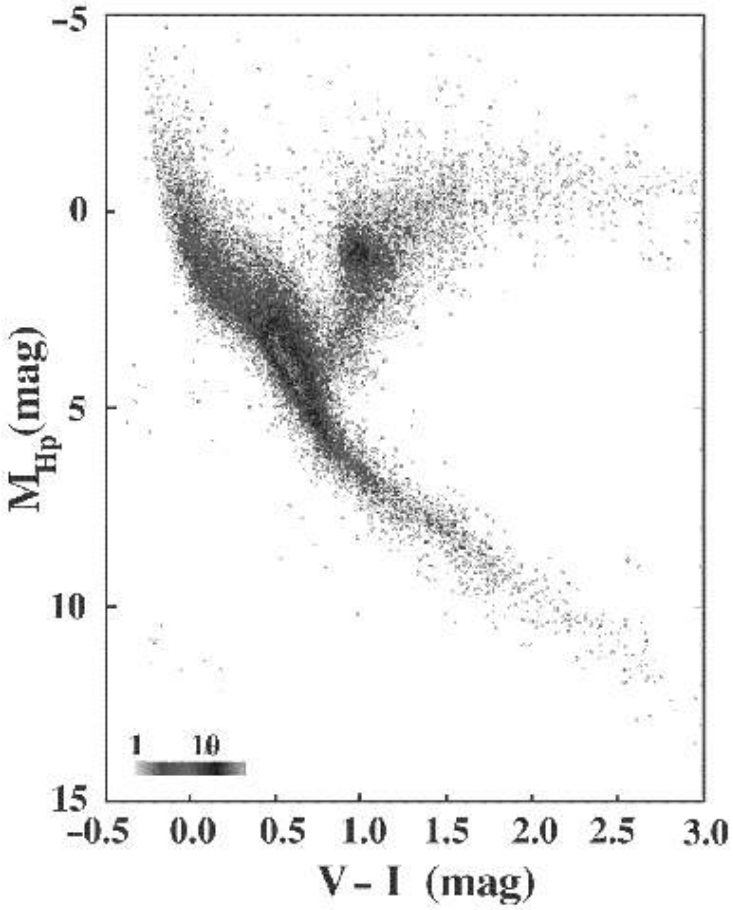


Figura 22.2: Diagrama Hertzsprung-Russell para 41453 estrelas observadas pelo satélite HIPPARCOS, com incertezas nas distâncias menores do que 20%, acessível em http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/TOUR/tour-hrdiagram.html.

Existem aglomerados abertos, com dezenas a centenas de estrelas, como as Plêiades, também chamadas de As Sete Irmãs, pois podemos ver sete estrelas a olho nu. As Plêiades, ou M45 e NGC 1432, na constelação do Touro, têm magnitude aparente total de 1,20, estão a 410 anos-luz da Terra, têm um diâmetro aparente de 110', quase 2^o, e aproximadamente 20 milhões de anos. Naturalmente em um campo (área) tão grande, um grande número de estrelas naquela direção não pertence ao aglomerado.

Existem cerca de 160 cúmulos globulares na nossa Galáxia, com centenas de milhares de estrelas, como Omega Centauri. Este cúmulo, também chamado de NGC 5139, está a 17 000 anos-luz na Terra, na constelação do Centauro, tem magnitude aparente total de 3,70 e diâmetro de 36', equivalente a 170 anos-luz.

Para uma amostra de estrelas limitada por brilho ou por distância, a seqüência principal não é uma linha fina, mas uma banda larga, especialmente no extremo vermelho, frio. A largura da seqüência principal não é devida a erros nas medidas das distâncias às estrelas, mas sim a variações na composição química de estrelas de mesma massa. Para cúmulos e aglomerados de estrelas, que nasceram da mesma nuvem de gás e, portanto, iniciaram suas vidas com a mesma composição química, a seqüência principal no diagrama HR é uma linha fina.

22.3 Distâncias espectroscópicas

Uma das aplicações mais importantes do diagrama HR é a determinação de distâncias estelares. Suponha, por exemplo, que uma determinada estrela tem um espectro que indica que ela está na seqüência principal e tem tipo espectral G2. Sua luminosidade, então, pode ser encontrada a partir do diagrama HR e será em torno de $1L_\odot$ (M = +5). Conhecendo-se sua magnitude aparente, portanto, sua distância pode ser conhecida a partir do seu *módulo de distância*:

$$(m - M) = -5 + 5 \log d \longrightarrow d = 10^{(m-M+5)/5}$$

onde (m-M) é o *módulo de distância*, e

m = magnitude aparente

M = magnitude absoluta

d = distância em parsecs.

Em geral, a classe espectral sozinha não é suficiente para se conhecer a luminosidade da estrela de forma única. É necessário conhecer também sua classe de luminosidade. Por exemplo, um estrela de tipo espectral G2 pode

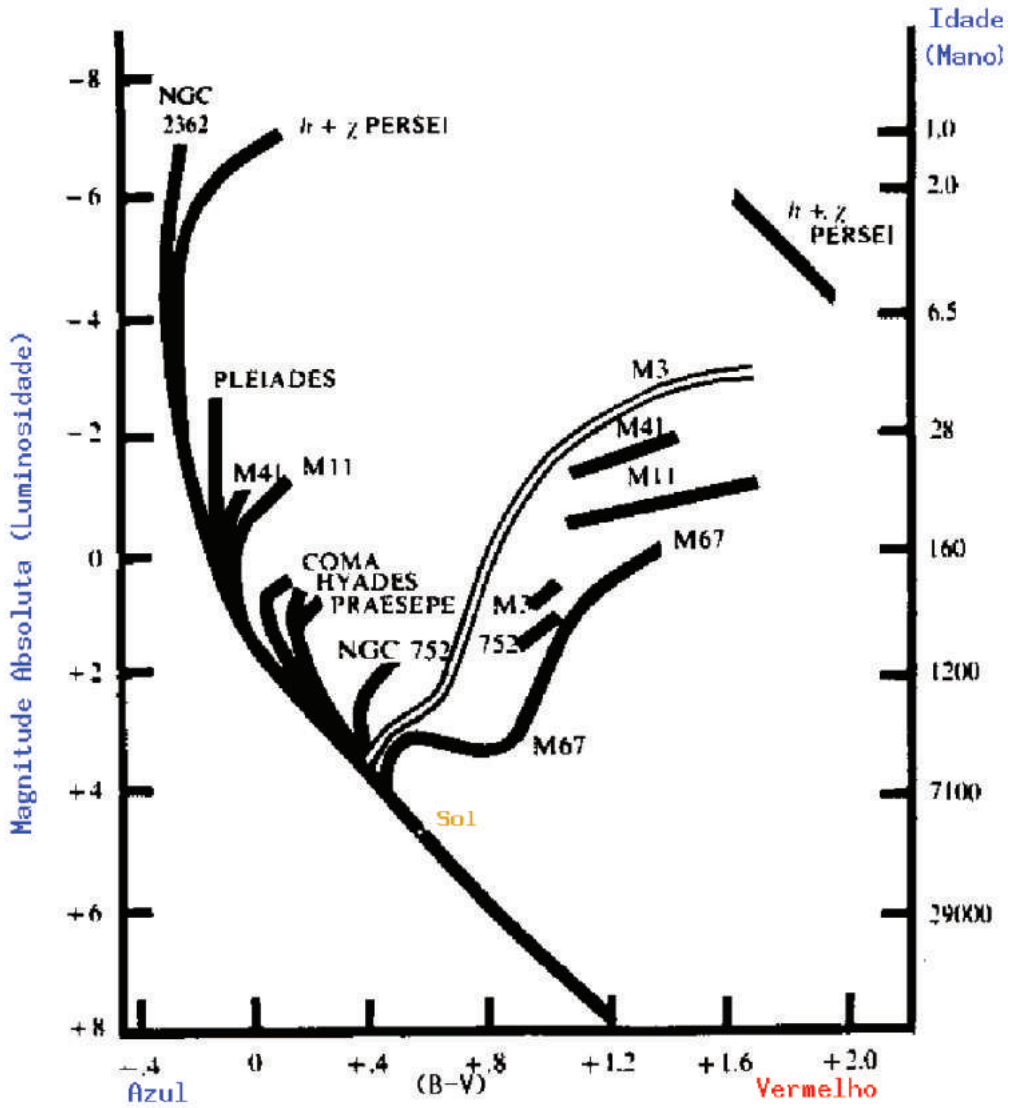


Figura 22.3: Diagrama HR de diversos aglomerados e cúmulos estelares. A idade de cada aglomerado é medida calculando-se a idade da estrela que está saindo da seqüência principal (*Turn-Off Point*) e está indicada no lado direito da figura. Essa figura foi publicada pelo astrônomo americano Allan Rex Sandage (1926-2010) em 1957.

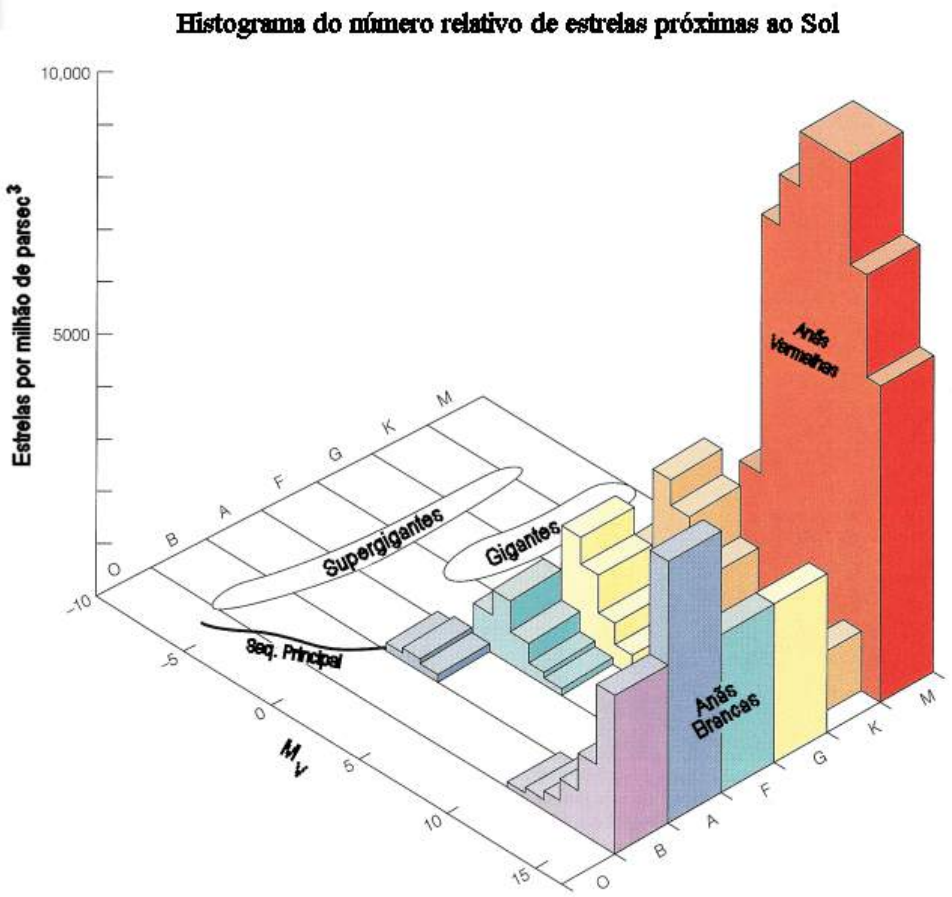


Figura 22.4: Histograma do número de estrelas perto do Sol, por tipo. A distribuição de estrelas por massa na seqüência principal chama-se Função Inicial de Massa, e indica que para cada 300 estrelas de 1 massa solar existe somente uma com 10 massas solares [$FIM \propto (M/M_{\odot}^{-2,35})$, Edwin E. Salpeter (1925-2008). 1955, Astrophysical Journal, 121, 161].

ter uma luminosidade de $1\,L_{\odot}$, se for da seqüência principal, ou de $10\,L_{\odot}$ (M = 0), se for uma gigante, ou ainda de $100\,L_{\odot}$ (M = -5), se for uma supergigante.

Essa maneira de se obter as distâncias das estrelas, a partir do seu tipo espectral e da sua classe de luminosidade, é chamada método das *paralaxes*

espectroscópicas.

22.4 A relação massa-luminosidade

As massas das estrelas podem ser determinadas no caso de estrelas duplas orbitando uma em torno da outra, aplicando-se a Terceira Lei de Kepler. Essas observações têm mostrado que as massas das estrelas aumentam de baixo para cima ao longo da seqüência principal. Pode-se, portanto, estabelecer uma relação massa-luminosidade, que por sua vez permite estimar as massas das estrelas baseadas em seu tipo espectral. Para estrelas com massas ($\mathcal{M}$) grandes, maiores do que 3 massas solares, a luminosidade é proporcional ao cubo da massa; já para massas pequenas, menores do que 0,5 massa solar, a luminosidade é proporcional à potência 2,5 da massa, ou seja:

$$\mathcal{M} \geq 3\mathcal{M}_\odot \longrightarrow L \propto \mathcal{M}^3$$

$$3\mathcal{M}_\odot \geq \mathcal{M} \geq 0,5\mathcal{M}_\odot \longrightarrow L \propto \mathcal{M}^4$$

$$\mathcal{M} \leq 0,5\mathcal{M}_\odot \longrightarrow L \propto \mathcal{M}^{2,5}$$

As massas das estrelas variam entre 0,08 e 100 massas solares, ao passo que as luminosidades das estrelas variam entre 10^{-4} e 10^{+6} vezes a luminosidade do sol.

22.5 Extremos de luminosidade, raios e densidades

A relação entre luminosidade, temperatura e tamanho de uma estrela é dada pela lei de Stefan-Boltzmann, da qual se infere que a luminosidade da estrela é diretamente proporcional ao quadrado de seu raio e à quarta potência de sua temperatura:

$$\boxed{L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm ef}^4}$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann, e vale $\sigma = 5,67051 \times 10^{-5}$ ergs $cm^{-2}\ K^{-4}\ s^{-1}$.

Essa relação torna evidente que tanto o raio quanto a temperatura influenciam na luminosidade da estrela, embora a temperatura seja mais decisiva.

As estrelas normais têm temperaturas variando entre 3 000 e 30 000 K aproximadamente (0,5 $T_\odot$ e 5 $T_\odot$), e luminosidades variando entre $10^{-4}L_\odot$ e $10^{+6}L_\odot$. Como a luminosidade depende de T^4, um fator de apenas 10 em temperatura resulta em um fator de 10 000 em luminosidade, e conseqüentemente a parte substancial das diferenças de luminosidade entre as estrelas

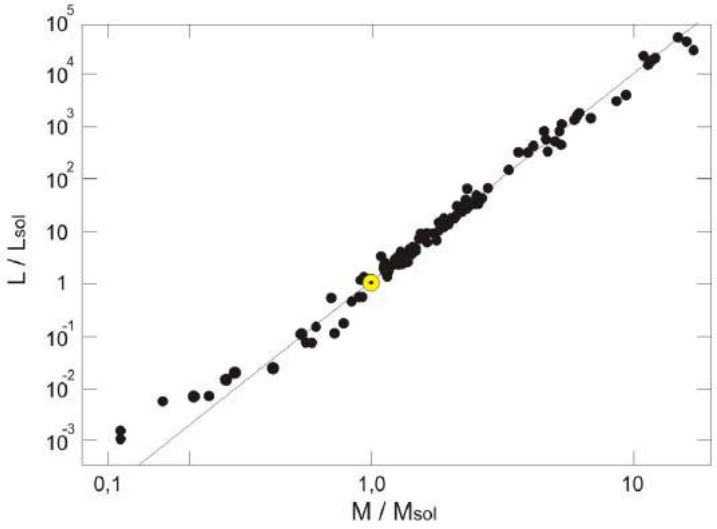


Figura 22.5: Gráfico da relação massa-luminosidade para estrelas da sequência principal. O círculo representa o Sol.

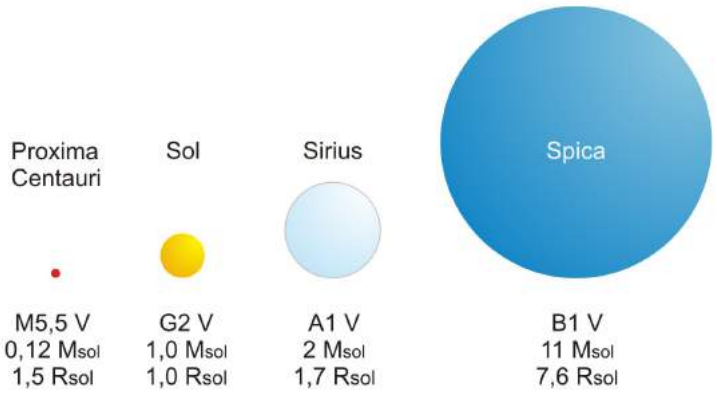


Figura 22.6: Tamanhos relativos de quatro estrelas da sequência principal. Quanto maior a massa da estrela, mais quente, maior e mais luminosa ela se torna.

é devida às diferenças de temperatura entre elas. O fator restante de 10^6 no intervalo de luminosidades deve-se às diferenças em raios estelares. Estima-

se que os raios das estrelas cobrem um intervalo de valores possíveis entre $10^{-2}R_{\odot}$ e $10^{+3}R_{\odot}$, aproximadamente.

No diagrama HR, o raio aumenta do canto inferior esquerdo para o canto superior direito.

22.5.1 As estrelas mais luminosas

As estrelas mais massivas que existem são estrelas azuis com massas de até 100 massas solares. Suas magnitudes absolutas são em torno de -6 a -8, podendo, em alguns casos raros, chegar a -10 $\left(10^{+6}L_{\odot}\right)$. Essas estrelas estão em geral no canto superior esquerdo do diagrama HR e têm tipo espectral O ou B. São as estrelas mais luminosas da seqüência principal. A estrela Rigel é 62 000 vezes mais luminosa que o Sol.

Outra categoria de estrelas muito luminosas são as gigantes e supergigantes, que estão no canto superior direito do diagrama HR; Betelgeuse e Antares são supergigantes, e Aldebaran e Capela são gigantes. Essas estrelas chegam a ser milhares de vezes mais luminosas do que o Sol (no caso das supergigantes) e seus tamanhos são muito maiores do que o do Sol. Por exemplo, uma supergigante vermelha típica, com temperatura de 3000 K, e luminosidade de $10^{4}L_{\odot}$, tem um raio de 400 vezes o raio do Sol. Se o Sol fosse colocado no centro de tal estrela, o raio da estrela alcançaria além da órbita de Marte.

Essas supergigantes vermelhas, tendo luminosidades e tamanhos extremamente grandes, têm densidades extremamente pequenas. Por exemplo, uma estrela supergigante como a descrita acima tem um volume que é 64 milhões de vezes o volume do Sol, e uma massa que é no máximo 50 vezes a massa do Sol. Se assumirmos que sua massa é 10 vezes a massa do Sol, encontramos que sua densidade média é 10^{-7} vezes a densidade média do Sol, ou $1,4 \times 10^{-7}$ a densidade da água.

22.5.2 As estrelas de baixa luminosidade

As estrelas mais comuns são estrelas vermelhas (frias) e de baixa luminosidade, chamadas de anãs vermelhas. No diagrama HR, elas ocupam a extremidade inferior da seqüência principal. Os objetos de massas e luminosidades ainda menores, chamados de anãs marrons, por serem muito fracos, são muito difíceis de serem detectados. O termo anã marrom foi proposto pela astrônoma americana Jill Cornell Tarter (1944-) em 1975. Na verdade, anãs marrons são proto-estrelas de massa menor que 0,08 massas solares, correspondendo a 73 massas de Júpiter, que nunca queimarão o hidrogênio e nunca

atingirão a seqüência principal. Elas têm massa entre aproximadamente 13 e 73 $M_{\text{Júpiter}}$ e existem mais de 20 conhecidas. Por exemplo, a anã marrom Gliese 229B [Wilhem Gliese (1915-1993)] tem massa entre 30 e 40 vezes a massa de Júpiter. As estrelas anãs vermelhas são muito menores e mais compactas do que o Sol. Uma estrela anã vermelha típica, com temperatura de 2700 K e magnitude bolométrica absoluta M = + 13 ($5 \times 10^{-4} L_{\odot}$), tem um raio de apenas 1/10 do raio do Sol. Uma estrela desse tipo tem massa pequena, em torno de 1/10 da massa do sol, mas ainda assim sua densidade deve ser em torno de 100 vezes a densidade do Sol. Mas essas não são as estrelas mais densas que existem. As anãs brancas, na margem inferior esquerda do diagrama HR, as estrelas de nêutrons, e os buracos negros, têm densidades muito mais altas.

22.5.3 As anãs brancas

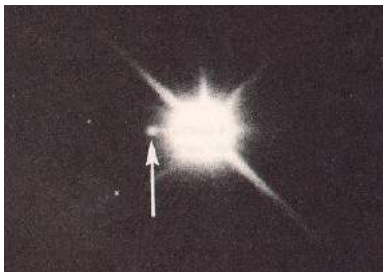
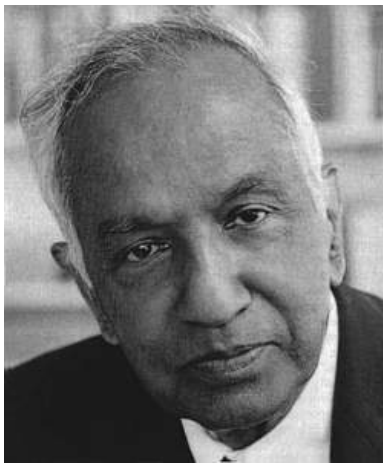


Figura 22.7: Na foto vemos Sírius A e, na ponta da flecha, Sírius B (T_{ef} = 24 800 K), 9 magnitudes mais fraca que Sírius A e sempre mais próxima que 11,5 segundos de arco.

A anã branca mais próxima conhecida é a companheira de Sírius, α do Cão Maior, a estrela mais brilhante do céu. Sírius era binária astrométrica, descoberta por Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) em 1844, até 31 de janeiro de 1862, quando Alvan Graham Clark Jr. (1832-1897) detectou sua companheira fraca, chamada desde então de Sírius B, pela primeira vez. Em 1914, o americano, nascido na Síria, Walter Sydney Adams (1876-1956), estudando o espectro de Sírius B, descobriu que sua baixa luminosidade e sua alta temperatura indicavam um raio de 18 000 km, ou seja, somente 2,5 vezes o raio da Terra, apesar de sua massa ser parecida com a massa do Sol (1915, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 27, 236). 40 Eridani B (40 Eri B) foi descoberta em 1914 por Henry Norris

Russell (Popular Astronomy, 22, 275, 7). Até 1917, três estrelas com estas características eram conhecidas: Sírius B, 40 Eridani B, e van Maanen 2 [Adriaan van Maanen (1884 - 1946)] e foram chamadas de anãs brancas. Sírius B tem uma massa solar, raio de 5800 km (valor atual) e densidade média de 2 milhões de vezes a densidade da água. Algumas anãs brancas têm densidades centrais maiores do que 10^7 vezes a densidade da água. Uma colher de chá do material que as constitui pesaria 50 ton!

Em 1939, Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) construiu modelos rigorosos descrevendo a estrutura dessas estrelas, e qual sua maior massa possível, de 1,44 $M_\odot$.


Subrahmanyan Chandrasekhar

A pressão que suporta essas densidades enormes é chamada de pressão de degenerescência e é oriunda do princípio da incerteza de Heisenberg e do princípio da exclusão de Pauli, que diz que dois elétrons de mesmo spin não podem ocupar o mesmo nível de energia. Portanto, os elétrons têm *momenta*, e energia cinética, tão altos que contrabalançam a atração gravitacional. Hoje em dia, cerca de 25 000 anãs brancas estão catalogadas, e Jasonjot Kalirai, Brad M.S. Hansen, Daniel D. Kelson, David B. Reitzel, R. Michael Rich e Harvey B. Richer, 2008, Astrophysical Journal, 676, 594, encontram

$$M_{\rm final} = (0.109 \pm 0.007) M_{\rm inicial} + (0.394 \pm 0.025) M_\odot$$

Em 1938, Julius *Robert* Oppenheimer (1904-1967), que em 1941 lideraria o Projeto Manhattan para a construção da bomba atômica, e George Michael Volkoff (1914-2000) demonstravam que, teoricamente, as estrelas de nêutrons também tinham um massa máxima. Estrelas acima dessa massa se condensariam a uma singularidade, um buraco negro.

22.6 A fonte de energia das estrelas

A questão de por que as estrelas brilham só foi levantada no século XIX quando a termodinâmica - o estudo de calor e energia - estava se desenvolvendo. Pela primeira vez, as pessoas compreenderam que o calor e a luz emitidos pelo Sol, 400 trilhões de trilhões de watts, precisava ter uma fonte. Somente em 1938 os cientistas finalmente descobriram que a fonte dessa energia aparentemente inesgotável era a fusão nuclear.

A primeira lei da termodinâmica declara que a energia, incluindo o calor, nunca é criada ou destruída, simplesmente é transformada de uma forma em outra. Ainda hoje, os cientistas usam esse princípio para entender o Universo. A primeira invocação dessa lei veio do alemão Robert Julius von Mayer (1814-1878), que, em 1840, completou seu curso de medicina e embarcou como cirurgião em uma viagem para a Índias Orientais holandesas. Como o tratamento médico naquela época envolvia sangramentos, Mayer observou que o sangue dos marinheiros recém-chegados da Europa era mais vermelho do que o daqueles que estavam há longo tempo nos trópicos, indicando que havia mais oxigênio no sangue dos que chegavam. Ele concluiu que menos oxigênio era necessário para manter a temperatura do corpo em clima mais quente, argumentou que a energia química da comida estava se transformando em calor e generalizou para a noção de que todas as formas de energia eram mutáveis entre si. A palavra energia, do grego *energeia*, tem como raízes *en* (em) e *ergon* (trabalho). Energia é basicamente a capacidade de um sistema de realizar trabalho. Em 1843, o físico inglês James Prescott Joule (1818-1889) aprofundou as medidas do americano Benjamin Thompson (1753-1814), Conde de Rumford, da conversão de energia mecânica e elétrica em calor. Em 1847, o físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) deduziu a fórmula da energia potencial gravitacional e demonstrou que, na ausência de fricção, a soma da energia cinética com a energia gravitacional potencial não muda com o tempo. Desse modo, no fim da década de 1840, a conservação de energia tinha sido enunciada claramente por Mayer, Helmholtz e Joule.

No fim do século XIX, os astrônomos começaram a se perguntar que forma de energia estava sendo convertida em calor no Sol. Em 1898, *Sir* Robert Stawell Ball (1840-1913), diretor do observatório de Cambridge, notou que fósseis de peixes tinham olhos bem desenvolvidos, uma indicação de que o Sol brilhava desde muito antes da humanidade. Ele considerou – e descartou – a hipótese de que o Sol ainda estaria esfriando a partir de um aquecimento inicial durante sua formação. Não, o Sol teria, há muito,

esfriado a ponto de não mais emitir luz visível. Poderia o Sol ser movido a combustível tradicional?



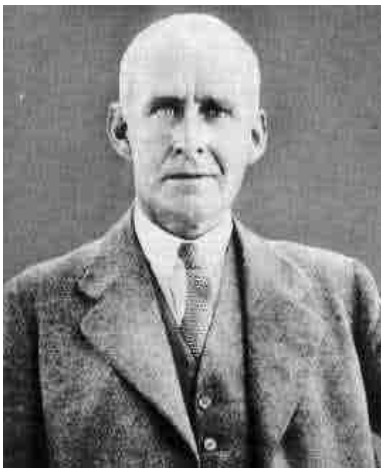
Lord Kelvin

Consideremos um pedaço de carvão mineral, o melhor combustível conhecido naquela época, e assumamos que seja possível misturar todo o oxigênio necessário para conseguir queima completa. Podemos, então, calcular quanto carvão é necessário por segundo para produzir a energia que o Sol emite por segundo, e quanto tempo uma quantidade de carvão tão grande quanto o Sol duraria. A resposta para carvão mineral, ou petróleo, ou mesmo hidrogênio puro, sempre resulta entre 6 000 a 10 000 anos. Um sol movido a combustível normal não poderia durar mais do que a história humana escrita. O que mais poderia gerar a energia do Sol? Por um tempo, a hipótese mais aceita envolvia a gravidade. A melhor hipótese era a da contração; essa teoria sugeria que a fonte de energia gravitacional era devida à lenta contração do Sol. Foram os cálculos dessa teoria que permitiram ao grande físico teórico inglês *Lord* William Thomson, Barão Kelvin (1824-1907), que colocou a termodinâmica em sua forma presente, estimar a idade do Sol e iniciar um dos grandes debates científicos. Uma estrela que está drenando sua energia gravitacional para emitir sua radiação só pode se contrair por um certo tempo. Quando Kelvin calculou os números, ele chegou a uma idade entre 20 e 100 milhões de anos, muito melhor (maior) do que a hipótese do combustível comum, mas não o suficiente para acomodar os dados que geólogos e evolucionistas tinham, de bilhões de anos.

Por volta de 1920, a hipótese da contração já podia ser testada teoricamente nas estrelas. Em seu trabalho monumental *Sobre a Constituição Interna das Estrelas* (http://www.bibliomania.com/2/1/67/114/), o astrônomo inglês *Sir* Arthur Stanley Eddington (1882-1944) assentou a fundação da teoria moderna de estrutura estelar. Ele deu a idéia corrente de que uma

intensa fonte de energia no núcleo da estrela gera a pressão que contrabalança a força para dentro da gravidade, estabilizando a estrela por muitos bilhões de anos.

O teste da teoria de contração se deu através de estrelas variáveis Cefeidas, que alteram períodos de aumento de brilho com períodos de redução de brilho, em escalas de semanas ou meses. A primeira Cefeida foi descoberta, em 1784, pelo astrônomo inglês Edward Pigott (1753-1825). Para essas estrelas, a duração do ciclo depende criticamente do raio da estrela. Baseado na quantidade de radiação que a estrela Delta Cefeida estava emitindo, ela deveria ter uma redução do seu período de pulsação em 17 segundos por ano. Como a estrela foi observada desde 1758, Eddington arguiu que essa mudança de período seria mensurável e, como não existia, a produção de energia não podia ser devida à contração gravitacional.


Arthur Eddington

Eddington já era famoso por ter organizado as expedições de 1919 para testar a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein (1879-1955), confirmando que a luz se desvia perto da borda do Sol, através da observação do desvio durante um eclipse. Descartando a hipótese da gravidade, Eddington tinha de propor uma nova teoria. Em 1920, a equação de Einstein $E = mc^2$, que implica que a massa pode ser convertida em energia, já era conhecida. Um grama de matéria totalmente convertida em energia produz 90 trilhões de Joules (1 watt = 1 Joule/s e 1 caloria = 4,18 Joule). Mas pouco mais de 10 anos tinham se passado desde a descoberta de que o átomo tinha um núcleo, e as únicas partículas conhecidas eram o próton e o elétron. A descoberta do nêutron ocorreria depois de passados muitos anos. Portanto, qualquer discussão do que Eddington chamou de "energia subatômica" envolvia muita

especulação. Eddington considerou o que hoje chamamos de fusão nuclear, a conversão de quatro prótons em um núcleo de hélio, mas ele não gostava da idéia porque isso limitava a vida das estrelas a só alguns bilhões de anos. Eddington favorecia um processo que, hoje em dia, sabemos que não ocorre na natureza, a aniquilação de prótons por elétrons, que produziria energia suficiente para milhares de bilhões de anos. Ele propôs que a astrofísica permite explorar o interior das estrelas, já que as propriedades da superfície eram conseqüências da estrutura interna.


James Chadwick

Durante os anos 1920 e 1930, os astrônomos estavam coletando dados sobre todos os tipos de estrelas, e os físicos nucleares estavam, então, trabalhando na teoria do núcleo atômico. Em 1932, o físico inglês *Sir* James Chadwick (1891-1974) descobriu o nêutron, e a idéia de um núcleo atômico com prótons e nêutrons nascia.

22.7 Fusão termonuclear

Em março de 1938, uma conferência foi organizada pela Carnegie Institution, de Washington, para unir astrônomos e físicos. Um dos participantes foi o imigrante alemão Hans Albrecht Bethe (1906-2005). Logo após a conferência, Bethe desenvolveu a teoria de como a fusão nuclear podia produzir a energia que faz as estrelas brilharem. Essa teoria foi publicada em seu artigo *A Produção de Energia nas Estrelas*, publicado em 1939, e que lhe valeu o prêmio Nobel, instituido por Alfred Nobel (1833-1896), em 1967.


Hans Bethe

Hans Bethe tomou os melhores dados das reações nucleares existentes e mostrou, em detalhe, como quatro prótons poderiam ser unidos e transformados em um núcleo de hélio, liberando a energia que Eddington havia sugerido. O processo que Bethe elaborou em seu artigo, conhecido atualmente como o Ciclo do Carbono, envolve uma cadeia complexa de seis reações nucleares em que átomos de carbono e nitrogênio agem como catalisadores para a fusão nuclear. Naquela época, os astrônomos calculavam que a temperatura no interior do Sol fosse de cerca de 19 milhões de Kelvin, e Bethe demonstrou que, àquela temperatura, o ciclo do carbono seria o modo dominante de produção de energia.

$$\mathrm{C}^{12} + 4\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{C}^{12} + \mathrm{He} + 2e^{+} + 2\nu_e + \gamma$$

Na mesma época, além dos resultados de Hans A. Bethe e Charles L. Critchfield (1910-1994), publicados em 1938 no *Physical Review*, 54, 248, o físico alemão Carl Friedrich Freiherr von Weizäcker (1912-2007) também identificou várias das reações de fusão nuclear que mantêm o brilho das estrelas. Hoje em dia, o valor aceito para a temperatura do núcleo do Sol é de 15 milhões de Kelvin, e a essa temperatura, como explicitado por Bethe no seu artigo, o ciclo próton-próton domina. O ciclo próton-próton, que está detalhado na figura 22.8, necessita de temperatura maior que 8 milhões de graus para ser efetivo.

$$4\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{He}^{4} + 2e^{+} + 2\nu_e + \gamma$$

A liberação de energia pelo ciclo do carbono é proporcional à 20^a potência da temperatura

$$\epsilon_{\mathrm{CNO}} \propto T^{20},$$

para temperaturas da ordem de 10 milhões de K, como no interior do Sol. Já para o ciclo próton-próton, a dependência é muito menor, com a quarta potência da temperatura,

$$\epsilon_{\mathrm{p-p}} \propto T^{4}.$$

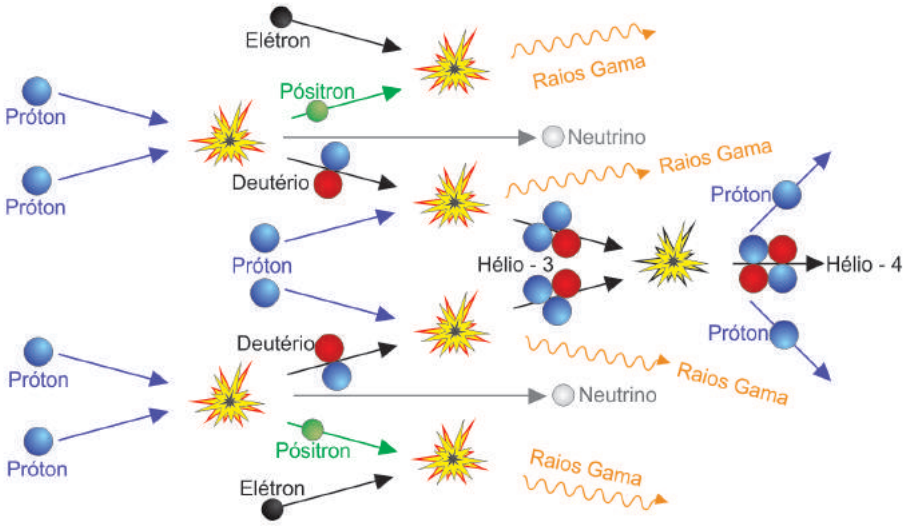


Figura 22.8: Quatro núcleos de hidrogênio (prótons), em pares de dois, colidem, resultando de cada colisão um núcleo de deutério, um pósitron e um neutrino. Os pósitrons se aniquilam ao colidirem com elétrons, emitindo fótons de alta energia (raios gama), enquanto cada núcleo de deutério colide com um próton gerando um núcleo de He-3 e emitindo energia. No último estágio do ciclo os dois núcleos de He-3 se fundem formando um núcleo de He-4 e dois prótons livres, os quais iniciarão novamente o ciclo.

Atualmente, sabe-se que o ciclo do carbono contribui pouco para a geração de energia para estrelas de baixa massa, como o Sol, porque suas temperaturas centrais são baixas, mas domina para estrelas mais massivas. Rigel, por exemplo, tem temperatura central da ordem de 400 milhões de K. Quanto maior for a temperatura central, mais veloz será o próton, e maior sua energia cinética, suficiente para penetrar a repulsão coulombiana de núcleos com maior número de prótons.

A astrofísica demonstrou que as leis físicas que conhecemos em nossa limitada experiência na Terra são suficientes para estudar completamente o interior das estrelas. Desde as descobertas de Bethe, o cálculo de evolução estelar, através da união da estrutura estelar com as taxas de reações nucleares, tornou-se um campo bem desenvolvido, e astrônomos calculam com confiança o fim de uma estrela como nosso Sol daqui a 6,5 bilhões de anos como uma anã branca, após a queima do hélio em carbono pela reação triplo-

α:

$$3\mathrm{He}^4 \rightarrow \mathrm{C}^{12}, \quad \text{com} \quad \epsilon_{3\alpha} \propto T^{40},$$

e a explosão de estrelas massivas como supernovas. Sabemos, com certeza, que o Sol converte aproximadamente 600 milhões de toneladas de hidrogênio em hélio por segundo, mantendo a vida aqui na Terra. Essa energia produzida pelo Sol, de $L = 3,847 \times 10^{33}$ ergs/s, é equivalente a 5 trilhões de bombas de hidrogênio por segundo. Para comparar, a primeira bomba atômica, de urânio, chamada de *Little Boy* e que explodiu sobre a cidade de Hiroshima, tinha uma potência de 20 000 toneladas de T.N.T. (trinitrotolueno, ou nitroglicerina). Uma bomba de hidrogênio tem uma potência de 20 milhões de toneladas de T.N.T.

Como o Sol tem 4,5 bilhões de anos, ele não nasceu do material primordial (hidrogênio e hélio) que preenchia o Universo cerca de 500 000 anos após o Big Bang, mas sim de material já reciclado. Esse material passou alguns bilhões de anos em uma estrela que se tornou uma supergigante e explodiu como supernova, ejetando hidrogênio e hélio no espaço, juntamente com cerca de 3% de elementos mais pesados, como carbono, oxigênio, enxofre, cloro e ferro que tinham sido sintetizados no núcleo da supergigante, antes desta tornar-se uma supernova.

O material ejetado começou a concentrar-se por algum evento externo, como a explosão de outra supernova ou a passagem de uma onda de densidade e, com o aumento de sua densidade, as excitações por colisões atômicas e moleculares provocaram a emissão de radiação. Essa perda de energia por radiação torna a contração irreversível, forçando o colapso gravitacional. A segunda lei da termodinâmica nos ensina que um processo envolvendo fluxo líquido de radiação é irreversível, já que há aumento da entropia, representada pela perda da radiação. O conceito de entropia foi formulado pelo físico matemático alemão Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888) e mede quão próximo do equilíbrio – isto é, perfeita desordem interna, um sistema está. O conceito de entropia está intimamente ligado ao conceito de calor. Quando um sistema recebe entropia (calor), ele recebe energia. A entropia é o transportador da energia em processos térmicos. Ela pode ser criada em processos irreversíveis, como queima, frição, transporte de calor, mas não pode ser destruída.

A entropia de um sistema isolado só pode aumentar e, quando o equilíbrio for alcançado, nenhuma troca de energia interna será possível. Somente quando a temperatura da parte interna dessa nuvem colapsante alcançar cerca de 10 milhões de Kelvin, a contração será interrompida, pois então a energia nuclear será importante fonte de energia.

22.8 Tempo de vida das estrelas

O tempo de vida de uma estrela é a razão entre a energia que ela tem disponível e a taxa com que ela gasta essa energia, ou seja, sua luminosidade. Como a luminosidade da estrela é tanto maior quanto maior é a sua massa ($\mathrm{L} \propto \mathrm{M}^3$), resulta que o tempo de vida é controlado pela massa da estrela: quanto mais massiva a estrela, mais rapidamente ela gasta sua energia, e menos tempo ela dura.

A parte mais longa da vida da estrela é quando ela está na seqüência principal, gerando energia através de fusões termonucleares. Em estrelas como o Sol, as reações mais importantes são as que produzem, como resultado líquido, a transformação de quatro núcleos de hidrogênio (quatro prótons) em um núcleo de hélio (partícula α). Nessa transformação, existe uma diferença de massa entre a massa que entrou na reação (maior) e a massa que saiu (menor). Essa massa "desaparecida" é transformada em energia pela equação de Einstein: $E = mc^2$.

$$4m_p(4,0324\,\mathrm{u}) \longrightarrow 1m_\alpha(4,0039\,\mathrm{u})$$

onde u = unidade de massa atômica $= 1,66 \times 10^{-27}$ kg.

A diferença de massa é:

$$\Delta m = (4,0324 - 4,0039)\,\mathrm{u} = 0,0285\,\mathrm{u}$$

$$\frac{0,0285\,\mathrm{u}}{4,0324\,\mathrm{u}} = 0,007 = 0,7\%$$

Portanto 0,7% da massa que entra na reação é transformada em energia. A massa que entra nessa reação é apenas a massa que se encontra no núcleo da estrela, pois apenas no núcleo a estrela atinge temperaturas suficientemente altas para permitir as reações termonucleares. A massa da estrela contida em seu núcleo é aproximadamente 10% da massa total da estrela. Isso significa que, de toda a massa da estrela, apenas 10% contribui para a geração de energia durante a maior parte de sua vida, a parte em que ela está na seqüência principal.

Portanto, a energia disponível nessa etapa é:

$$E_{SP} = 0,007 \times 0,1 \times \mathcal{M} \times c^2$$

onde E_{SP} significa energia na seqüência principal.

No caso do Sol essa energia vale:

$$\begin{aligned} E_{SP}^{\odot} &= 0,007 \times 0,1 \times \mathcal{M}_{\odot} \times c^2 \\ &= 0,007 \times 0,1 \times 1,99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \times (3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 1,26 \times 10^{44}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

O tempo de vida do Sol na seqüência principal é igual à energia nuclear disponível dividida pela luminosidade do Sol na seqüência principal:

$$t_{SP}^{\odot} = \frac{1,26 \times 10^{44}\,\mathrm{J}}{3,9 \times 10^{26}\,\mathrm{J/s}} = 3,29 \times 10^{17}\,\mathrm{s} = 10^{10}\,\mathrm{anos}$$

Para uma estrela qualquer, o tempo de vida na seqüência principal pode ser calculado em termos do tempo de vida do Sol na mesma fase:

$$t_{SP} = \frac{E_{SP}/E_{SP}^{\odot}}{L/L_{\odot}} \times 10^{10}\,anos$$

$$\boxed{t_{SP} = \frac{1}{\left(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\odot}\right)^2} 10^{10}\mathrm{anos}}$$

22.9 Escalas de tempo evolutivo

22.9.1 Tempo nuclear

Mesmo depois de saírem da seqüência principal as estrelas continuam produzindo energia através de reações termonucleares, transformando o hidrogênio em hélio nas camadas externas ao núcleo e, se tiverem massa suficiente para atingir a temperatura necessária, sucessivamente hélio em carbono, carbono em oxigênio, etc, até a síntese do ferro. Nessas reações sucessivas 0,1% da massa se transforma em energia.

Podemos estimar a energia total produzida pelo sol através de reações termonucleares supondo que 0,8 % de sua massa total se transforma em energia:

$$E_N^{\odot} = 0,008 \times \mathcal{M}_{\odot} \times c^2 = 1,197 \times 10^{45}\,\mathrm{J}$$

O tempo que essa fonte de energia é capaz de sustentar a luminosidade do Sol, supondo que essa luminosidade permaneça constante, é chamado tempo nuclear.

$$t_N = \frac{E_N^{\odot}}{L_{\odot}} = 10^{11}\,anos$$

Entretanto:

- a luminosidade fora da seqüência principal, isto é, quando a estrela torna-se gigante e supergigante é muito maior, até 10^6 vezes, que a luminosidade na seqüência principal.
- o Sol nunca queimará o carbono e, portanto, não chega ao 0,008 da massa inicial.
- no máximo 0,6 $\mathcal{M}_\odot$ serão transformados em C/O.

Estes três fatores levam a $T_{\text{depois da SP}} = 0,1\, T_{\text{SP}}$.

22.9.2 Tempo térmico

Outra fonte de energia que o Sol e as outras estrelas têm, e que é importante na fase de formação, quando estão se contraindo e ainda não produzem energia nuclear, é a energia resultante da contração gravitacional. Por conservação de energia, quando a energia gravitacional diminui (devido à contração), aumenta a energia cinética das partículas dentro da estrela, ou seja, aumenta a energia térmica. Nessa fase a energia total da estrela é:

$$E = E_G + E_T$$

onde E_G é energia gravitacional e E_T é energia térmica.

Pelo teorema do Virial, que se aplica a gases perfeitos, a energia total é igual à metade da energia potencial gravitacional:

$$E_G + E_T = \frac{1}{2} E_G$$

Portanto, quando a estrela se contrai, apenas metade da energia é usada para aumentar sua temperatura, a outra metade é liberada na forma de radiação (luminosidade). Considerando que a energia potencial gravitacional de uma esfera auto-gravitante de massa $\mathcal{M}$ e raio R é da ordem de $-G\mathcal{M}^2/R$, a energia gerada pela contração que é disponível para ser irradiada é:

$$\frac{1}{2} E_G \simeq \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{M}^2}{R}$$

O tempo durante o qual a contração gravitacional poderia sustentar a luminosidade do Sol no seu valor atual é chamado tempo térmico, ou tempo de contração de Kelvin (t_K):

$$t_K = \frac{E_T^\odot}{L_\odot} \simeq \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{M}_\odot^2/R_\odot}{L_\odot}$$

Substituindo os valores de G = 6,67 $\times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$; $\mathcal{M}_\odot = 1,99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$; $R_\odot = 6,95 \times 10^8\,\mathrm{m}$, e $L_\odot = 3,9 \times 10^{26}$ J/s, temos:

$$t_k = 20 \times 10^6 \text{ anos}$$

22.9.3 Tempo dinâmico

É o tempo que dura o colapso da estrela se as forças de pressão que suportam o peso das camadas superiores fossem removidas. É o tempo de queda-livre que, para uma estrela de massa M e raio R vale

$$t_d = \sqrt{\frac{2\,R^3}{G\,\mathcal{M}}}$$

Para o Sol, esse tempo dura em torno de 1/2 hora.

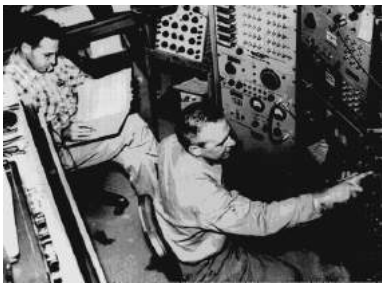
22.10 O Problema do neutrino solar

Desde os anos 1960, alguns experimentos levantaram dúvidas sobre os cálculos de interiores estelares. A idéia principal desses experimentos é que algumas reações na cadeia de fusão produzem partículas chamadas *neutrinos*. Neutrinos (ν_e), teoricamente, têm massa zero, não têm carga elétrica e interagem muito fracamente com a matéria - um neutrino pode atravessar anos-luz de chumbo sólido sem interagir com um só átomo! Sua seção de choque é da ordem de $\Sigma = 10^{-44}\,\mathrm{cm^2}$, de modo que seu livre caminho médio no interior do Sol ($\lambda = 1/n\Sigma$, onde n é a densidade média de matéria no interior do Sol) é equivalente a 10^9 raios solares.

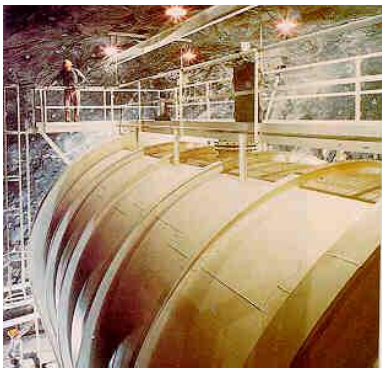

Wolfgang Pauli

Os neutrinos foram previstos teoricamente por Wolfgang Pauli (1900-1958), em 1930, para explicar a variação da energia dos elétrons emitidos em decaimentos β, em que um nêutron se transforma espontaneamente em um

próton, emitindo um elétron. A vida média de um nêutron livre é de aproximadamente 12 minutos. Pauli propôs que a diferença de energia estava sendo carregada por uma partícula neutra de difícil detecção, o neutrino. Ele recebeu o prêmio Nobel em 1945.


Frederick Reines e Clyde Cowan

Em 1956, os neutrinos foram, finalmente, detectados por Frederick Reines (1918-1998) e Clyde L. Cowan Jr (1919-1974), emitidos de um reator nuclear ["The Neutrino", Frederick Reines & Clyde L. Cowan, Jr., Nature 178, 446 (1956); "Detection of the Free Neutrino: A Confirmation", Clyde L. Cowan, Frederick Reines, Francis B. Harrison, Herald W. Kruse, & Austin D. McGuire, Science, 124, 103 (1956)]. Reines recebeu o prêmio Nobel, em 1995, pela descoberta. Neutrinos produzidos no núcleo do Sol saem ao espaço com muito pouca interação, atravessam a distância entre o Sol e a Terra e, na maioria dos casos, passam pela Terra sem qualquer perturbação. Milhões desses neutrinos passam por nosso corpo a todo segundo, mas durante nossa vida inteira somente alguns destes interagirão com nossos átomos. O mais importante é que os neutrinos carregam informação sobre o interior do Sol, onde a energia está sendo gerada.


Raymond Davis e seu experimento

Em 1968, Raymond Davis Jr. (1914-2006) e seus colaboradores, do Brookhaven National Laboratories, decidiram detectar esses neutrinos colocando um tanque com 600 toneladas (378 000 litros) de fluido de limpeza

percloroetileno (C_2Cl_4), do tamanho de um vagão de trem, no fundo de uma mina de ouro a 1500m de profundidade na cidade de Lead, na Dakota do Sul. Como aproximadamente um quarto dos átomos de cloro está no isótopo 37, ele calculou que, dos 100 bilhões de neutrinos solares que atravessam a Terra por segundo, alguns ocasionalmente interagiriam com um átomo de cloro, transformando-o em um átomo de argônio. Como o argônio^{37} produzido é radiativo, com vida média de 35 dias, é possível isolar e detectar esses poucos átomos de argônio dos mais de 10^{30} átomos de cloro no tanque. Periodicamente, o número de átomos de argônio no tanque seria medido, determinando o fluxo de neutrinos.

$$\nu_e + \mathrm{Cl}^{37} \rightarrow e^- + \mathrm{Ar}^{37}$$

Quando o experimento começou a funcionar, quase nenhum neutrino foi detectado. De acordo com a melhor estimativa teórica, deveriam ser detectados alguns eventos por dia, demonstrando que nossa compreensão do Sol, ou dos neutrinos, não era tão completa quanto se acreditava. A diferença entre o experimento e a teoria passou a ser conhecida como o problema do neutrino solar. Davis recebeu o prêmio Nobel em 2002 por estes estudos.

A dificuldade maior do experimento de Davis é que ele só consegue detectar neutrinos com energia maior que 0,81 MeV e, portanto, não consegue detectar o neutrino produzido na cadeia principal do ciclo p-p, dominante no Sol, pois esse neutrino só tem 0,42 MeV de energia. Muitos cientistas trabalharam para melhorar as aproximações nos cálculos do fluxo de neutrinos que deveriam ser detectadas pelo experimento de Davis, como uma melhor taxa de reação nuclear, bem como testar rigorosamente o experimento. Outros experimentos de detecção de neutrino estão ou estiveram em operação ao redor do mundo, Kamiokande I e II, dirigidos por Masatoshi Koshiba (1929-), também ganhador do prêmio Nobel de 2002, e IMB (Irvine-Michigan-Brookhaven), que só detecta neutrinos com energia maior que 7,3 MeVs através da radiação Čerenkov [Pavel Alekseevich Čerenkov (1904-1990)] emitida por elétrons acelerados a velocidades superiores à da luz *na água*, de 225 000 km/s; SAGE (Soviet-American Gallium Experiment) e GALLEX,

$$\nu_e + \mathrm{Ga}^{31} \rightarrow e^- + \mathrm{Ge}^{32}$$

que detectam neutrinos com energia acima de 0,236 MeV e, portanto, podem detectar os neutrinos de baixa energia produzidos pela cadeia principal do ciclo p-p, a chamada PPI. Mas o veredito ainda é o mesmo: estamos detectando um terço dos neutrinos que deveríamos estar detectando.

A explicação para o fenômeno envolve as propriedades dos próprios neutrinos, e não as propriedades do Sol. Acreditamos que, entre o tempo que os neutrinos são gerados e o tempo que eles chegam à Terra, parte dos neutrinos sofre reações que mudam sua identidade, passando de neutrino de eléctron para neutrino de múon ou neutrino de táon, tornando-os inacessíveis aos experimentos, que só medem neutrinos de elétrons. Esse processo de mudança chama-se oscilação de neutrinos. Para que essas mudanças de identidade ocorram, cada tipo de neutrino precisa ter uma massa diferente de zero e diferentes entre si e isso é predito em algumas teorias de Grande Unificação das forças (GUT). Essa massa pode ser detectada em laboratório, e existem diversos experimentos em elaboração para medi-la, mas até recentemente só se conseguia medir limites superiores (de 2,2 eV para o neutrino do elétron, 170 keV para o neutrino do muon e 15,5 MeV para o neutrino do taon), da ordem de centenas de vezes menor que a massa do eléctron.

No Sudbury Neutrino Observatory, em Ontário, Canadá, com 1000 toneladas de água pesada e 9456 fotomultiplicadoras, a 2070 metros de profundidade, operando desde novembro de 1999, foi medido um fluxo de neutrinos provenientes da reação envolvendo o Berílio 8 de $5,44 \pm 0,99 \times 10^6 cm^{-2} s^{-1}$, com evidência de oscilação de neutrinos que indica que a soma das massas dos 3 tipos de neutrinos está entre 0,05 a 8,4 eV. Estas massas levam à contribuição dos neutrinos na massa do Universo entre 0,001 e 0,18 da densidade crítica. Quando o neutrino do elétron colide com o deutério da água pesada, ocorre a reação (mediada pela corrente com carga)

$$D + \nu_e \longrightarrow p + p + e^- + \text{radiação Čerenkov}$$

Deveriam ser observados 30 neutrinos por dia, mas somente 10 são observados.

Øystein Elgarøy et al., no artigo *New Upper Limit on the Total Neutrino Mass from the 2 Degree Field Galaxy Redshift Survey*, publicado no Physical Review Letters, 89, 61301 (2002), obteve 2,2 eV para o limite superior da massa combinada dos tres tipos de neutrinos e uma contribuição máxima de 13% para a massa do Universo.

Portanto, o problema do neutrino solar nos revela mais sobre a física fundamental do que sobre a astrofísica estelar. Mais detalhes sobre neutrinos solares podem ser encontrados nas páginas do astrofísico americano John Norris Bahcall (1934-2005) em http://www.sns.ias.edu/∼jnb/. O anúncio de junho de 1998 da detecção da oscilação de neutrinos pelo experimento Super-Kamiokande, indiretamente indicando que os neutrinos têm massa, pode ser encontrado em http://www.ps.uci.edu/∼superk/. O detector de neutrinos

KamLAND (Kamioka Liquid-scintillator Anti-Neutrino Detector), consiste de uma kilotonelada de líquido de cintilação ultra-puro mantido em um balão atmosférico e circundado por 1 879 fotomultiplicadoras, que detectam as minísculas faíscas de luz produzidas quanto um neutrino interage com o líquido. Os neutrinos detectados têm energia superior a 2,6 MeV, e são produzidos principalmente pelos 69 reatores nucleares do Japão e Coréia.

Shingo Abe e colaboradores publicaram em 2008, no Physical Review Letters, 100, 221803, os resultados dos dados de 2002 a 2007, com um total de 1609 neutrinos detectados, do total de 2179 eventos previstos dos reatores, se não houvesse desaparecimento dos neutrinos. Os pesquisadores concluíram, com um nível de confiança de 99,99%, que a não detecção dos neutrinos faltantes somente é consistente com a oscilaçao de neutrinos, isto é, na transformação dos neutrinos, após produzidos e antes de serem detectados, de neutrinos de elétrons para neutrinos de múons ou de táons, com $\Delta m = 8,71 \pm 0,07$ meV.

22.11 Energia nuclear de ligação

A energia total necessária para separar um núcleo em seus prótons e nêutrons pode ser calculada a partir da energia nuclear de ligação. O gráfico mostra a energia nuclear de ligação total dividida pelo número de prótons e nêutrons (número de núcleons), ou seja, a energia de ligação por núcleon. Essa é a quantidade usada para descrever reações nucleares, já que o número atômico muda de elemento para elemento e, mesmo de isótopo para isótopo, e a energia total depende deste número.

O máximo da curva ocorre para o ferro, cujo número de massa é 56, em unidades de massa atômica.

A queda da energia de ligação por núcleon para números de massas maiores que 56 indicam que esses núcleons são mais compactados formando dois nuclídios de massa intermediária, em vez de um único nuclídio de alta massa. Em outras palavras, energia pode ser liberada pela fissão nuclear do nuclídio de alta massa em dois nuclídios de massa intermediária.

O aumento da energia de ligação para baixos valores de número de massa, ao contrário, nos indica que energia será liberada se dois nuclídios de baixa massa se combinarem, formando um único nuclídio de massa intermediária. Esse processo é chamado de fusão nuclear. Na Terra, uma bomba de hidrogênio funde deutério e trítio, formando hélio e liberando um nêutron e 17,6 MeV de energia. O deutério, isótopo do hidrogênio com um nêutron, foi descoberto em 1931 pelo químico americano Harold Clayton Urey (1893-

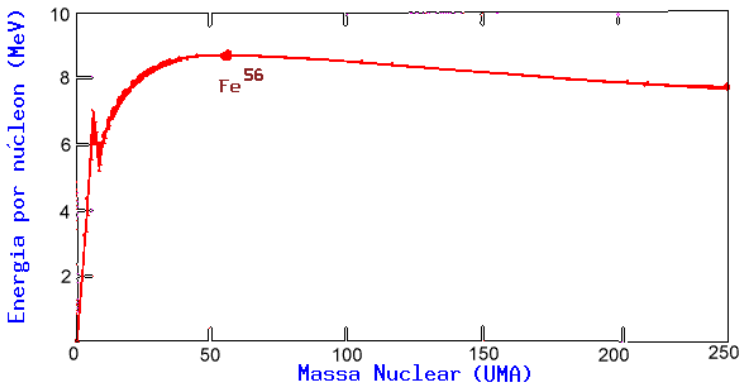


Figura 22.9: Energia de ligação dos átomos

1981). O radioisótopo trítio do hidrogênio, com massa 3,014 u.m.a, foi produzido em aceleradores em 1932 por *Lord* Rutherford [Ernest Rutherford (1871-1937)], *Sir* John Douglas Cockroft (1897-1967) e Ernest Orlando Lawrence (1901-1958), e foi caracterizado por Luis Walter Alvarez (1911-1988). Sua vida média é de 12,35 anos, decaindo por emissão de um elétron em He^3 e liberando 18,6 KeV de energia. Na natureza ele é produzido pela colisão de raios-cósmicos com nêutrons do ar e trazido para a superfície da Terra pela chuva. Willard Frank Libby (1908-1980), o proponente do método de datação por carbono-14[1], usava o decaimento do trítio como método de datação da idade dos vinhos: um vinho de 20 anos deve conter somente um terço da quantidade de trítio observada em água de chuva fresca.

[1] O método de datação por carbono 14 (C^{14}) foi desenvolvido logo após a segunda guerra mundial. O C^{14} é radiativo, é produzido pelo bombardeamento de nitrogênio 14 por raios cósmicos na atmosfera e é absorvido do ar pelas plantas. Animais comem as plantas e absorvem o C^{14}. Humanos absorvem o C^{14} ao comerem plantas e animais. Quando um organismo morre, ele para de absorver C^{14} e a quantidade já existente no organismo começa a decair em N^{14}, com uma vida média de 5730 anos. Para descobrir há quanto tempo um organismo morreu, determina-se a quantidade de elétrons emitidos por grama do material. Atualmente o C^{14} emite cerca de 15 elétrons por minuto por grama do material. Antes da explosão da primeira bomba atômica na biosfera da Terra, ocorriam aproximadamente 13,5 emissões de elétrons por minuto por grama do carbono. Se uma material emite 13,5/2 elétrons por minuto por grama, o organismo deve ter 5730 anos.

22.12 Massas Nucleares

As massas nucleares podem ser alteradas nas reações nucleares, com a diferença de massa convertida em energia pela relação de Einstein [Albert Einstein (1879-1955)],

$$\boxed{E = mc^2} \tag{22.1}$$

Por exemplo, combinando um próton (p) e um nêutron (n) produzirá um deutério (d). Se adicionarmos a massa do próton e do nêutron, obtemos

$$m_p + m_n = 1,00728u + 1,00867u = 2,01595u.$$

Como a massa do deutério é $m_d = 2,01355u$, a diferença de massa é dada por:

$$\Delta m = (m_p + m_n) - m_d = (1,00728u + 1,00867u) - (2,01355u) = 0,00240u.$$

Uma unidade de massa atômica (UMA=u) é, por definição, igual a 1/12 da massa do átomo de C^{12}, correspondendo a $1,66 \times 10^{-27}$ kg. Dessa forma, usando $E = mc^2$, nos dá

$$\text{energia/u} = (1,66 \times 10^{-27}\text{kg})(3,00 \times 10^{8}\text{m/s})^2(1\text{eV}/1,6 \times 10^{-19}\text{J}),$$

correspondendo a 931 MeV/u. Logo, a energia liberada na formação do deutério é

$$E = 0,00240u \times 931\text{MeV/u} = 2,24\text{MeV}.$$

Portanto, 2,24 MeV é a energia total de ligação do deutério.

Vemos, então, que os elementos até o grupo do ferro são formados por fusão de elementos mais leves. Os elementos com massa maior que 56 unidades de massa atômica são formados por captura de nêutrons por elementos mais leves e posterior decaimento β inverso nuclear.

A fissão foi descoberta em 10 de dezembro de 1938 e foi descrita em um artigo submetido ao *Naturwissenchaften* em 22 de dezembro de 1938, pelos alemães Otto Hahn (1879-1968), Fritz Strassmann (1902-1980) e pela austríaca Lise Meitner (1878-1968).

O italiano Enrico Fermi (1901-1954) foi uma das pessoas mais importantes no desenvolvimento teórico e experimental da bomba atômica. Sua esposa, Laura Fermi, era judia. Quando Benito Mussolini (1883-1945) aprovou o *Manifesto della Razza* em 14 de julho de 1938, impondo leis racistas na Itália facista, Enrico decidiu aceitar o emprego oferecido pela Columbia University, nos Estados Unidos. Ele e sua família partiram de Roma para

a cerimômia de entrega do Prêmio Nobel à Fermi em dezembro de 1938 e nunca retornaram à Itália. O Nobel foi lhe dado por seu estudo de radioatividade artificial, com suas experiências de bombardeamento de urânio com nêutrons, criando novos elementos mais pesados, e seu aumento pela redução da velocidade dos nêutrons. Fermi havia descoberto que quando ele colocava uma placa de parafina entre a fonte de nêutrons e o urânio, aumentava a radiotividade, pois aumentava a chance do nêutron ser absorvido pelo núcleo de urânio.

Em 1934 o húngaro Leo Szilard (1898-1964) já havia patenteado a idéia da reação em cadeia e em 2 de dezembro de 1942 Fermi conseguiu construir uma massa crítica de U^{235}/U^{238} não separados (na natureza somente 0,7% são do U^{235} que é ativo), usando grafite para reduzir a velocidade dos nêutrons e acelerar a produção de nêutrons secundários. Na experiência ele utilizou barras de cádmium como absorsores de nêutrons para regular a experiência e produziu um crescimento exponencial do número de nêutrons, isto é, uma reação em cadeia.

Em 1939 os físicos já sabiam que *água pesada* agia como um *moderador*, isto é, redutor de velocidade dos nêutrons, como a parafina. A água normal (leve) consiste de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio (H_2O). Na água pesada, dois isótopos de hidrogênio, deutério, se unem com o oxigênio. Água pesada é ainda hoje utilizada como moderador em reatores nucleares de urânio natural.

Em 1939 Szilar convenceu Albert Einstein (1879-1955), com quem ele tinha trabalhado em 1919 em Berlin, a mandar uma carta para o presidente americano Franklin Delano Roosevelt (1933-1945) sobre o desenvolvimento pelos alemães de armas atômicas e pedindo ao presidente que iniciasse um programa americano, que mais tarde se chamaria Projeto Manhatam, chefiado pelo americano Julius Robert Oppenheimer (1904-1967) e levaria ao desenvolvimento do Los Alamos National Laboratory, ao teste Trinity, em 16 julho 1945, com a explosão da primeira bomba atômica em Alamogordo, New Mexico, e à construção das bombas Little Boy (20 ton T.N.T) e Fat Man, que seriam utilizadas em Hiroshima e Nagasaki em 6 e 9 de agosto de 1945.

O húngaro Edward Teller (1908-2003), sob protestos de Fermi e Szilard, chefiou o desenvolvimento da bomba de fusão de hidrogênio, que utiliza uma bomba de fissão como gatilho para iniciar a colisão do deutério com o trítio. A bomba de hidrogênio, Mike, de 10,4 Mton T.N.T. foi testada em 31 de outubro de 1952, em Eniwetok.

Quando 2 átomos de hidrogênio se transformam em deutério, no primeiro

passo da fusão do hidrogênio

$$2H \rightarrow D + e^{-} + 1,4 \text{ MeV}$$

este 1,4 MeV corresponde a $1,6 \times 10^{10}$ cal/grama igual a 2 milhões de vezes a energia liberada na combustão de uma grama de carvão.

Mais detalhes em

- http://www.atomicarchive.com/
- http://www.time.com/time/time100/scientist/profile/fermi.html
- http://www.dannen.com/szilard.html

22.13 Evolução final das estrelas

O destino final das estrelas, depois de consumir todo o seu combustível nuclear, depende de duas coisas: primeiro, se a estrela é simples ou se faz parte de um sistema binário ou múltiplo, e 60% das estrelas faz; e segundo, de sua massa inicial. Se a estrela faz parte de um sistema binário ou múltiplo, sua evolução depende tanto da massa quanto da separação entre as estrelas, que determinará quando, na evolução, as estrelas interagirão.

Uma nuvem de gás se contrai, formando uma proto-estrela. Quando a temperatura no núcleo fica suficientemente alta para iniciar reações nucleares estáveis, a proto-estrela torna-se uma estrela da seqüência principal, transformando hidrogênio em hélio no núcleo. Se o objeto tiver massa abaixo de 0,08 $M_{\odot}$, ela se tornará uma anã marrom. Se sua massa for entre 0,08 $M_{\odot}$ e 0,45 $M_{\odot}$, ela se tornará uma anã branca com núcleo de hélio. As estrelas com massa até 1,75 $M_{\odot}$ transformam o hidrogênio em hélio pelo ciclo próton-próton e têm uma camada de convecção externa. As estrelas mais massivas queimam o hidrogênio pelo ciclo CNO e têm núcleo convectivo, mas atmosfera radiativa. Quando essas estrelas transformam o hélio nuclear em carbono e oxigênio, elas saem do ramo das gigantes e passam para o ramo horizontal. Quando o hélio nuclear foi todo consumido, as estrelas entram no ramo das supergigantes. Para as estrelas mais massivas, a fase de gigante e supergigante são contíguas, sem nenhum evento que marque o início da queima de hélio, do carbono, do oxigênio, do neônio, do magnésio, do silício, e assim sucessivamente, até transformar o núcleo em ferro. Quando o núcleo chega a ferro, não há mais como extrair energia através de reações de fusão nuclear, e a estrela colapsa, ejetando a maior parte de sua massa

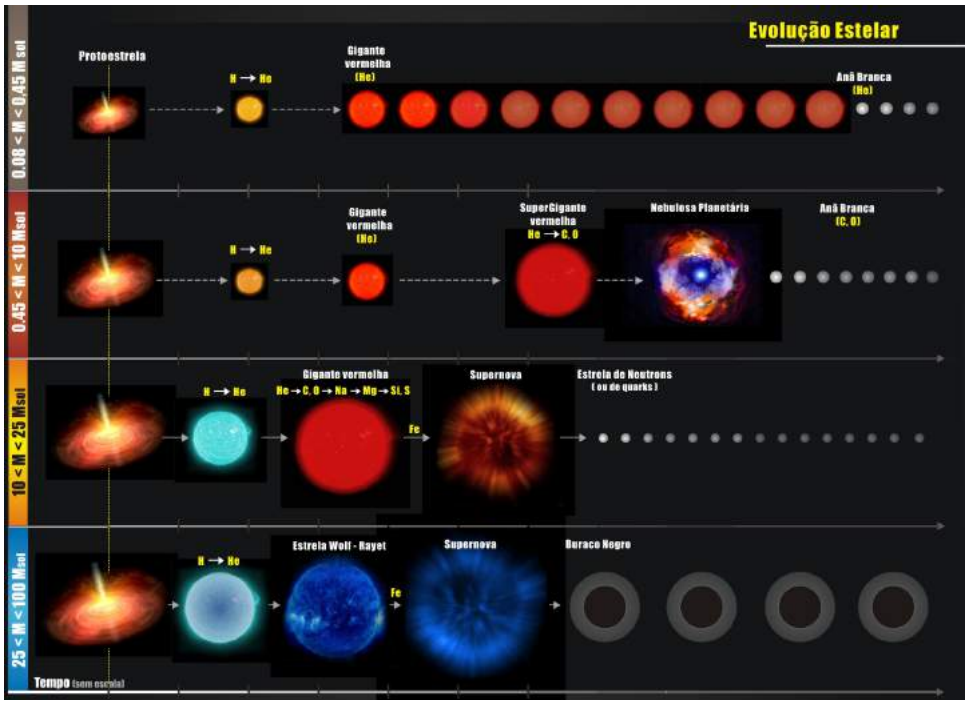


Figura 22.10: Esquema de evolução estelar, não em escala, para massas diferentes.

como supernova. O que resta será uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. As estrelas Wolf-Rayet, uma etapa da evolução de estrelas de alta massa, foram descobertas em 1867 pelos franceses Charles J.F. Wolf (1827-1918) e Georges A.P. Rayet (1839-1906) por apresentarem linhas de emissão no espectro. São variáveis quentes ($T_{\rm ef} \simeq 30$ a 60 000 K) com um envoltório de poeira e gás ejetado da estrela pela forte pressão de radiação ($\dot{M} \simeq 2$ a 10×10^{-5} $M_\odot$/ano).

Se a estrela não faz parte de um sistema binário ou múltiplo, sua evolução depende somente de sua massa inicial. Se a estrela iniciar sua vida com massa menor do que 0,8 $M_\odot$, a idade do Universo ainda não é suficiente para essa estrela ter evoluído além da seqüência principal.

Se a estrela iniciar com massa entre 0,8 e 10 $M_\odot$, após consumir o hidrogênio no centro a estrela passará pela fase de gigante e depois de supergigante, ejetará uma nebulosa planetária e terminará sua vida como uma anã branca, com massa da ordem de 0,6 $M_\odot$, e raio de cerca de 10 000 km.

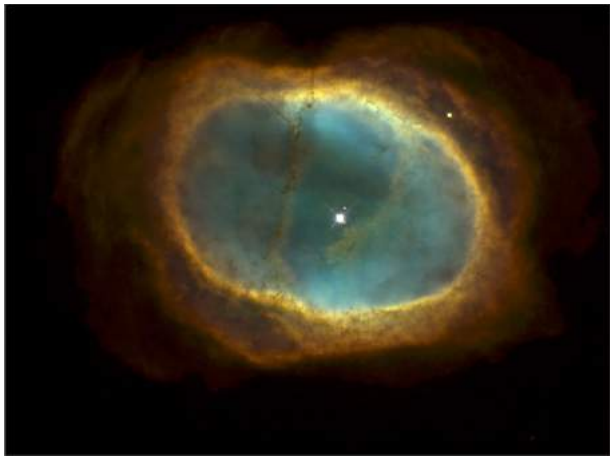


Figura 22.11: Nebulosa Planetária NGC3132, fotografada pelo Telescópio Espacial Hubble. Existem aproximadamente 10 000 nebulosas planetárias em nossa galáxia. A nebulosidade permanece visível por aproximadamente 10 000 anos após sua ejeção pela estrela, no ramo gigante assintótico. O termo *nebulosa planetária* foi dado porque algumas se parecem com o planeta Urano, quando olhadas através de um telescópio pequeno.

Se a estrela iniciar sua vida com massa entre 10 e 25 $M_\odot$, após a fase de supergigante ela ejetará a maior parte de sua massa em uma explosão de supernova e terminará sua vida como uma estrela de nêutrons, com uma temperatura superficial acima de 1 milhão de K, massa de cerca de 1,4 $M_\odot$, e raio de cerca de 20 km. Se essa estrela possuir campo magnético forte, ela emitirá luz direcionada em um cone em volta dos pólos magnéticos, como um farol, e será um pulsar.

Se a estrela iniciar sua vida com massa entre 25 e 100 $M_\odot$, após a fase de supernova restará um buraco negro, com massa da ordem de 6 $M_\odot$, e raio do horizonte de cerca de 18 km. O raio do horizonte, ou raio de Schwarzschild [Karl Schwarzschild (1873-1916)], é a distância ao buraco negro dentro da qual nem a luz escapa: $R_{\rm Sch} = 2GM/c^2$. Para algumas estrelas massivas, os modelos de deflagração da explosão de supernova prevêem dispersão total da matéria.

Um candidato a buraco negro estelar é a estrela Cygnus X1, descoberta pelo satélite de raios-X Uhuru (liberdade em Swahili, a língua do Quênia, onde o satélite foi lançado em 12.12.1970), consiste de uma estrela O, HD226868, com $(19 \pm 2$ massas solares, orbitando uma massa de (15 ± 1)

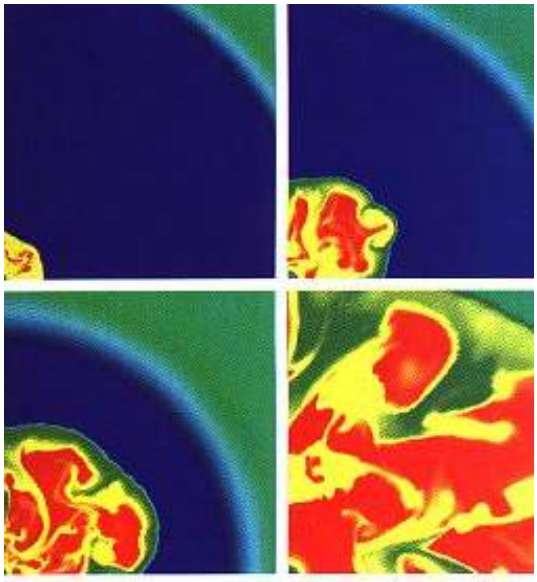


Figura 22.12: Simulação da deflagração do núcleo de uma supernova. O centro está representado pelo canto inferior esquerdo. O evento dura somente 1/10 de segundo, durante o qual quase toda a energia gravitacional é convertida em neutrinos, que se difundem para fora do núcleo em aproximadamente 10 segundos. Nos modelos teóricos, a deflagração ocorre se a queima do carbono se dá quando os elétrons do núcleo estão degenerados, já que um núcleo degenerado não se expande quando a temperatura aumenta. Para estrelas com massas até 7 massas solares, os modelos indicam que o início da queima do carbono se dá com os elétrons degenerados.

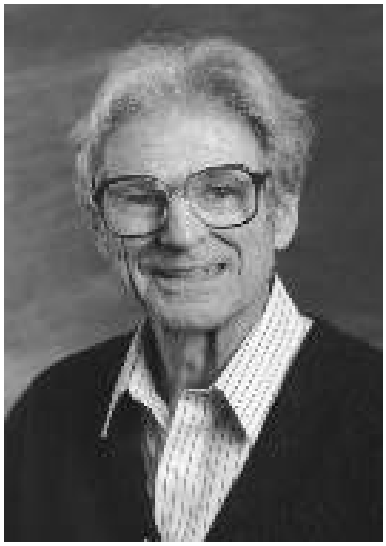
massas solares, invisível, em 5,6 dias a 0,128 UA da estrela O. A distância medida por paralaxe é de (1860 ± 120) pc. Esta companheira compacta é muito mais massiva que o maior limite, de 4,3 massas solares, de uma estrela de nêutrons. Alguns buracos negros estelares são GS2000+25, com massa acima de 5,7 $M_\odot$, A0620.00 com massa entre 3,6 e 13,6 $M_\odot$ e XTE J1859+226, com massa $7,4 \pm 1.1$ $M_\odot$.

Se a estrela iniciar sua vida com massa acima de 100 $M_\odot$, como a estrela da Pistola, descoberta em 1997 com o Telescópio Espacial Hubble, ela ejetará a maior parte de sua massa ainda na seqüência principal, por pressão de radiação, e depois evoluirá como uma estrela de até 100 $M_\odot$.

Os elementos químicos gerados por reações nucleares no interior das es-

trelas e ejetados nas explosões de supernovas produzem a evolução química do Universo e geram o carbono e outros elementos que mais tarde colapsam, formando planetas terrestres e até seres humanos.

A vida do Sol na seqüência principal está estimada em 11 bilhões de anos. Uma estrela de 0,1 massas solares levará 3 trilhões de anos para sair da seqüência principal. Quando as estrelas consomem o hidrogênio no núcleo, que corresponde a aproximadamente 10% da sua massa total, correpondente a cerca de 50 000 km, elas saem da seqüência principal. A geração de energia nuclear passa a se dar em uma camada externa a esse núcleo, com aproximadamente 2 000 km de espessura, onde a temperatura e a densidade são suficientes para manter as reações nucleares. Como nenhuma energia nuclear é gerada no núcleo nessa fase, ele se contrai rapidamente, e a luminosidade da estrela aumenta um pouco. As camadas externas se reajustam ao aumento de luminosidade expandido-se e, como a área superficial aumenta, sua temperatura diminui. Dessa forma, a luminosidade aumenta e a estrela torna-se mais vermelha, aproximando-se do ramo das gigantes no diagrama HR. Quando o Sol atingir essa fase, daqui a 6,5 bilhões de anos, a radiação solar atingindo a Terra será tão intensa que a temperatura na superfície da Terra atingirá 700 C, os oceanos ferverão, deixando a Terra seca. Mesmo a atmosfera se esvairá, pois os átomos e moléculas estarão se movendo a velocidades tão altas que escaparão da Terra. No centro do Sol, a temperatura atingirá 100 milhões de Kelvin, e a reação triplo-α, descoberta pelo americano Edwin Ernest Salpeter (1925-2008), iniciará, combinando três núcleos de hélio (partículas α) em um núcleo de carbono. O Sol será, então, uma gigante vermelha, transformando hélio em carbono no núcleo e hidrogênio em hélio em uma fina camada mais externa. A massa do Sol não é suficiente para que a temperatura do núcleo alcance um bilhão de K, necessária para queimar o carbono. Dessa forma, a estrutura final do Sol será de um pequeno núcleo de carbono, com uma camada externa de hélio, e outra mais externa de hidrogênio. No diagrama HR, o Sol descenderá, então, para a região das anãs brancas. Como a massa do Sol é 340 mil vezes a massa da Terra, quando ele chegar a fase de anã branca, com raio próximo ao raio da Terra, sua densidade será de várias toneladas por centímetro cúbico. Podemos comparar com a densidade dos elementos mais densos na Terra, como a platina, com 21 g/cm^3. O princípio da exclusão de Pauli, juntamente com o princípio da incerteza de Heisenberg agirão como uma força repulsiva que contrabalançará a atração da gravidade, impedindo que a anã branca colapse.


Edwin Salpeter

A Figura 22.13 mostra o diagrama HR teórico mostrando as diversas fases da evolução de uma estrela de 5 massas solares, a partir da seqüência principal (SP). Antes de chegar à seqüência principal, onde transforma hidrogênio em hélio no seu núcleo, a proto-estrela se contraiu por algumas centenas de milhares de anos. A estrela sai da seqüência principal quando 10% de seu hidrogênio total é transformado em hélio. Esse é o limite Schenberg-Chandrasekhar, publicado, em 1942, pelo brasileiro Mário Schenberg(1914-1990) e pelo indiano Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) e corresponde ao ponto da evolução de uma estrela em que o balanço de pressão no núcleo isotérmico não pode ser mais alcançado. Para uma estrela de cinco massas solares de população I, isto é, que contém metais, a queima de H se dá pelo ciclo CNO. Quando a estrela atinge o ramo das gigantes, a zona de convecção superficial atinge a região onde o hidrogênio já foi transformado em hélio, iniciando a primeira dragagem, trazendo material processado (principalmente N^{14}) para a atmosfera da estrela. Uma segunda dragagem ocorre quando a estrela atinge o ramo gigante assintótico, e ainda uma terceira ocorre se a estrela tem massa superior a 3 $M_\odot$. Após passar outras centenas de milhares de anos no ponto superior direito desse diagrama, chamado de ramo gigante assintótico (AGB), a estrela ejetará uma nebulosa planetária, e o núcleo remanescente será uma estrela anã branca.

A Figura 22.14 mostra o diagrama HR teórico com o caminho evolucionário de uma estrela até a fase de anã branca. Não importa se a estrela inicia sua evolução com 1 ou 4 massas solares, a anã branca formada terá menos que 1 $M_\odot$. Na seqüência de esfriamento das anãs brancas, estão

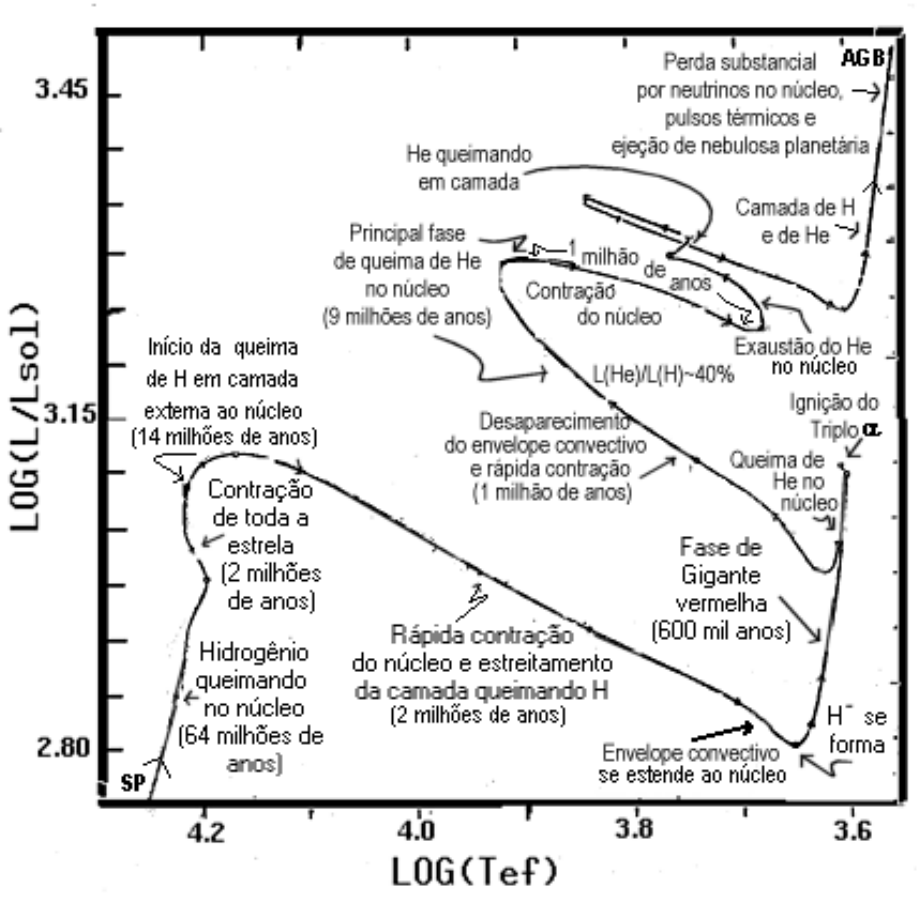


Figura 22.13: Diagrama HR teórico mostrando as diversas fases da evolução de uma estrela de 5 massas solares, a partir da seqüência principal (SP), no extremo esquerdo inferior e, quanto tempo a estrela leva em cada fase, segundo os cálculos de Icko Iben Jr. (1931-).

indicadas as três faixas de temperatura em que encontramos as anãs brancas variáveis (DOV, DBV e DAV). As variações observadas nessas estrelas permitem, pelas técnicas de sismologia, o estudo de seus interiores.

Se uma anã branca com massa superior a 0.8 $M_\odot$ fizer parte de um sistema binário próximo, é possível que, quando a estrela companheira se expandir na fase de gigante ou supergigante, transfira parte de sua massa para a anã branca a tal ponto que a massa da anã branca ultrapasse a massa

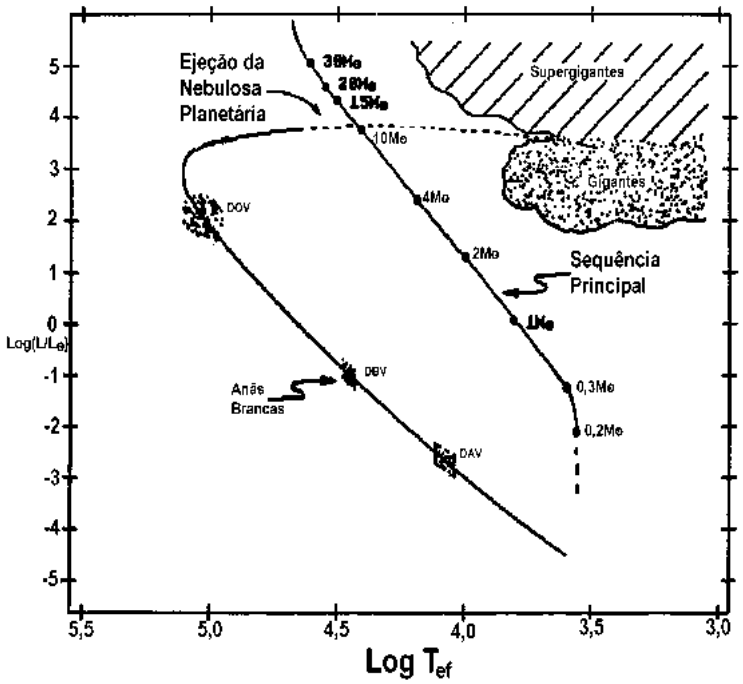


Figura 22.14: Diagrama HR teórico até anã-branca

de Chandrasekhar. Neste caso a anã branca explodirá como supernova tipo Ia, e cerca de 0.6 $M_\odot$ será ejetado ao meio interestelar na forma de Fe, produzido durante a explosão. Esta é a maior fonte de Fe conhecida.

Já estrelas com massas acima de 10 massas solares evoluem muito rapidamente: uma estrela de 30 massas solares sai da seqüência principal em 5 milhões de anos; uma estrela de 5 massas solares em 70 milhões de anos. Depois da fase de gigantes, passam para supergigantes, com temperaturas nucleares de alguns bilhões de Kelvin, permitindo que os processos de acréscimo de partículas α produzam sucessivamente O^{16}, Mg^{24}, Si^{28}, S^{32}, Cl^{35}, Ca^{40}, Sc^{45}, Ti^{48}, ..., Fe^{56}, em poucas centenas de milhões de anos. Esse processo termina em Fe^{56} porque vimos que a energia de ligação do ferro é a mais alta, de modo que quando um Fe^{56} captura um fóton, em vez de liberar energia, ele se rompe, concluindo a evolução estelar com a explosão de uma supernova.

Uma das primeiras ocorrências de colapsos violentos de estrelas massivas

foi registrada em 1054 d.C., pelos chineses, que observaram a explosão da estrela no centro da nebulosa do Caranguejo, sem saber que se tratava de um colapso. Muitos desses colapsos, que chamamos de supernovas, foram observados em outras galáxias. A última observada a olho nu foi a SN1987A, na galáxia anã satélite de nossa galáxia, a Grande Nuvem de Magalhães. A explosão ocorre porque, após a formação do núcleo de ferro, o núcleo colapsa violentamente em alguns segundos, sob o peso de sua própria atração gravitacional, sem ter outro combustível para liberar energia nuclear. As camadas superiores, contendo aproximadamente 90% da massa colapsam, então, sobre este núcleo e, após o comprimirem até o limite das leis físicas, são empurradas para fora com velocidades de milhares de quilômetros por segundo. Tanta energia é liberada em um colapso de supernova que ela brilha com a luminosidade de uma galáxia de 200 bilhões de estrelas. Depois desse espetáculo, a supernova começa a esmaecer, deixando como resíduo, um núcleo extremamente compacto, uma estrela de nêutrons. Mesmo a pressão de degenerescência dos elétrons é muito pequena para parar o colapso no estágio de uma anã branca. Os elétrons livres são forçados para dentro do núcleons pelas imensas forças gravitacionais produzidas pelo colapso das camadas externas. O decaimento β inverso que então transforma os pares de elétrons e prótons em nêutrons, libera uma imensa quantidade de neutrinos, que pode ser observada aqui na Terra. Em fevereiro de 1987, vários detectores aqui na Terra registraram os neutrinos associados à explosão da supernova SN1987A, que está a 160 mil anos-luz de distância. Os nêutrons, tendo o mesmo spin dos elétrons, obedecem também ao princípio da exclusão de Pauli, mas sendo 2000 vezes mais massivos, podem ser comprimidos a distâncias 2000 vezes menores do que os elétrons em uma anã branca. Os nêutrons formam, então, um gás de nêutrons degenerados, que pode parar o colapso da supernova se a massa inicial da estrela na seqüência principal for menor do que cerca de 25 massas solares. O diâmetro desse núcleo é de cerca de 10 km e forma uma estrela de nêutrons, como a encontrada no centro da nebulosa do Caranguejo. A existência das estrelas de nêutrons foi proposta em 1932 pelo físico russo Lev Davidovich Landau (1908-1968). A primeira estrela de nêutrons foi detectada em 1967, quando a doutoranda da Universidade de Cambridge, Jocelyn Bell Burnell (1943-), trabalhando em um experimento proposto por Antony Hewish (1924-), descobriu que certos sinais pulsados de rádio chegavam com enorme precisão a cada 1,33728 segundos, vindos da constelação de Vulpécula. A maioria dos astrônomos da época acreditava que esses pulsos eram devidos a pulsações radiais de estrelas, mas Thomas Gold (1920-2004) calculou que pulsações desse tipo decairiam muito rapidamente e sugeriu que

os pulsares eram estrelas de nêutrons em rotação. Hewish recebeu o prêmio Nobel em 1974 pela descoberta dos pulsares. Mas a maioria das estrelas de nêutrons não são pulsares, pois sua emissão de rádio já terminou há muito tempo, pois sua vida média é de so 10 milhões de anos, a não ser que esteja em uma binária.

22.14 Estrelas Variáveis

Estrelas variáveis são aquelas em que a variação não representa apenas as flutuações normais de grandes conjuntos de partículas em movimentos turbulentos, mas apresentam amplitudes mensuráveis com um certo grau de regularidade [Paul Ledoux (1914-1988) & Théodore Walraven (1916-2008), 1958].

Excluindo-se a supernova 1504 na constelação do Touro, ainda visível como a Nebulosa do Caranguejo, que foi registrada pelos astrônomos chineses e japoneses mas não pelos ocidentais, e a supernova 1572, na constelação da Cassiopéia, primeiro observada por Wolfgang Schuler mas estudada por Tycho Brahe (1546-1601), que alcançou magnitude -4, o primeiro registro de variabilidade estelar ocorreu em 1596. O teólogo e astrônomo holandês David Fabricius (1564-1617) notou que a estrela na constelação da Baleia (Cetus), de segunda magnitude, declinou em brilho regularmente até que, em outubro de 1596, desapareceu. Ele deu-lhe o nome de "a maravilhosa" (Mira Ceti). Em 1638 o astrônomo holandês John Phocylides Holwarda (1618-1651) a viu aumentar de brilho novamente, afirmando que era um evento periódico, e em 1667 Ismael Boulliau (1605-1694) mediu o período como 333 dias.

Em 1784, o astrônomo amador inglês John Goodricke (1764-1786) descobriu a variabilidade de brilho da estrela δ Cephei, que passou a ser o protótipo da classe de variáveis Cefeidas. No Philosophical Transactions, 76, 48-61 (1786), ele publicou suas observações, que tinham se iniciado em 19 de outubro de 1784: "A estrela marcada como δ por Bayer, próxima da cabeça de Cefeu, mostra variações em sua luminosidade."O período de variação encontrado por Goodricke foi de 5d8h, e o valor atual é de 5d8h53m27.46s. No mesmo ano, o inglês Edward Pigott (1753-1825) descobriu η Aql, também uma variável Cefeida. Em 1894 o astrônomo russo Aristarkh Apollonovich Belopolskii (1854-1934) notou deslocamentos nas linhas espectrais de δ Cephei, e deduziu que a atmosfera da estrela estava aumentando de tamanho e depois reduzindo.

O astrônomo americano Seth Carlo Chandler, Jr. (1846-1913) publicou o primeiro catálogo de estrelas variáveis em 1888, com 225 variáveis. Destas, 160 eram periódicas. O segundo catálogo continha 260 estrelas e o terceiro 393 estrelas. No Terceiro Catálogo de Estrelas Variáveis, publicado em 1896 no Astronomical Journal, 16, 144, encontrou que o período havia decrescido um segundo em 20 anos, enquanto o dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873-1967) publicou em 1919, no Astronomische Nachrichten, 210, 17, que o decréscimo era de 1 s em 14 anos.

Em 1912, a astrônoma americana Henrietta Swan Leavitt (1868-1921), aplicando o método fotográfico às Cefeidas nas Nuvens de Magalhães, derivou a relação período-luminosidade, publicada no *Harvard Circular, 173*, já que as Cefeidas na Pequena Nuvem de Magalhães mostravam uma definida relação entre o período e a luminosidade. Esta relação foi usada por Hertzprung em 1913 (Astronomische Nachrichten, 196, 201) para a primeira determinação da distância da Pequena Nuvem, e por Hubble em 1923 para a determinação da distância de Andrômeda.

O tipo de movimento das camadas mais simples é o puramente radial, em que a estrela mantém a forma esférica em todos os tempos, mas muda de volume.

Uma estimativa simples do período de pulsação pode ser obtida da terceira lei de Kepler aplicada às camadas mais externas de uma estrela:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

lembrando que a densidade é dada por

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

de modo que

$$P^2 = \frac{\pi}{\frac{1}{3}G\rho}$$

$$P = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Em 1879 o físico alemão Georg Dietrich *August Ritter* (1826-1908) publicou no *Wiedemanns Annalen*, 8, 172, a sugestão que pulsações não radiais, acompanhadas de variações na temperatura superficial, poderiam ser responsáveis pelas variações periódicas da luminosidade. Ritter desenvolveu os primeiros elementos da teoria de pulsação, ao mostrar que uma estrela homogênea passando por uma pulsação radial adiabática, terá uma freqüência $\sigma^2\pi$ da vibração com

$$\sigma^2 = (3\gamma - 4)\frac{g}{R} = (3\gamma - 4)\frac{4\pi}{3}G\rho$$

onde γ é a razão dos calores específicos, g a gravidade superficial, R o raio estelar, ρ a densidade e G a constante de gravitação. Ele também demonstrou que se γ excede o valor de 4/3 dentro de um grande corpo astronômico, sua estrutura permanece em equilíbrio dinâmico. Se γ é maior que 4/3 e

a densidade do corpo aumenta por uma rápida compressão do material, a pressão aumenta mais rapidamente que a gravidade, resistindo-a. Ainda com γ maior que 4/3, se o corpo se expande rapidamente, a pressão diminui mas a gravidade ainda é capaz de trazer o corpo de volta ao seu estado de equilíbrio.

Em 1890 *Lord* Rayleigh [John William Strutt (1842-1919), *On Vibrations of an Atmosphere*, Philosophical Magazine, 4, Vol. XXIX, p. 173] estudou as vibrações na atmosfera assumida isotérmica. Mais tarde, William Thomson (1824-1907), *Lord* Kelvin, (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 153, 583, 1863), o físico suiço Robert Emden (1863-1940) [em seu livro *Gaskugeln* (Bolas de Gás) de 1907] e astrônomo americano Forest Ray Moulton (1872-1952) [Astrophysical Journal, 29, 257 (1909)], consideraram oscilações em que a estrela mantém o volume constante mas mudam de forma, de um esferóide prolato para um oblato.

O meteorologista inglês *Sir* David Brunt (1886-1965) publicou em 1913, no *The Observatory*, 36, 59, uma discussão sobre as estrelas Cefeidas.

Em 1917 *Sir* Arthur Stanley Eddington (1882-1944) desenvolveu a teoria de oscilações radiais. Os artigos de Eddington de 1917 no *The Observatory*, 40, 290 e de 1918 no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 79, 177, desenvolveram a teoria de pulsações adiabáticas em uma estrela gasosa com uma dada distribuição de densidades, obtendo uma dependência com a densidade similar àquela obtida por Richer para uma estrela homogênea. Em seus artigos de 1932, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,92, 471* e de 1942, *The Observatory*, 64, 231, Eddington propos que os períodos de pulsação das Cefeidas requerem que elas sejam muito mais homogêneas do que as estrelas na seqüência principal. No segundo artigo, Eddington mostrou que a forma da curva de luz das Cefeidas, com o rápido aumento e decaimento mais vagaroso está em concordância com o esperado pelos termos de segunda ordem nas equações. Ele propôs que a mudança de transparência na atmosfera causa as pulsações: a atmosfera opaca retém o calor e causa a expansão, que por sua vez causa a redução da opacidade permitindo que a luz escape, esfriando a atmosfera e causando o colapso. Em 1941, Eddington estudou o efeito da zona de convecção na mudança de fase entre o máximo da luminosidade e da velocidade (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 101, 177).

Mais tarde identificou-se dois tipos de Cefeidas, com relações período-luminosidade diferentes, as ricas em metal (tipo I) δ Cepheids, e as pobres em metal (tipo II) W Virginis. Elas são supergigantes de tipo espectral F, G ou K, que pulsam com períodos de alguns até 100 dias, e têm amplitudes

de 0,1 a 2 magnitudes.

Em 1960 o astronômo americano John Paul Cox (1926-1984) descobriu que a ionização parcial do hélio era a fonte de opacidade que fazia as Cefeidas pulsarem (Astrophysical Journal, 1960, 132, 594).

O número total de estrelas intrinsicamente variáveis catalogadas no *Combined General Catalogue of Variable Stars, 4.1 Edition*, é de 42897 estrelas, das quais 31918 são da nossa Galáxia (Kholopov et al. 1998). Mais recentemente, com as medidas realizadas com o satélite Hipparcos, foram descobertas mais 3157 variáveis e, com as medidas dos projetos de microlentes gravitacionais, mais de 100 000 novas variáveis, sendo mais de 10 000 destas pulsantes.

As estrelas variáveis estão dividas nas seguintes classes: eruptivas, pulsantes, rotantes, cataclísmicas (explosivas e novas), sistemas eclipsantes e fontes de raio-X variáveis.

As variáveis pulsantes populam extensas regiões do diagrama HR. As pulsações são encontradas em grandes faixas de massa e etapas evolucionárias, e fornecem oportunidades para derivar propriedades inacessíveis de outra forma. O tempo dinâmico, ou tempo de queda livre, pode ser estimado calculando a desobediência ao equilíbrio hidrostático, Vamos assumir que, em algum lugar da estrela, a aceleração gravitacional não é estritamente balançada pela força de pressão, deixando uma fração f não-balançada. O material, então, será acelerado por uma quantia:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f\frac{GM_r}{r^2}$$

Podemos resolver essa equação para o valor de dt em que a aceleração não-balançada causa um deslocamento $dr = fR$, onde R é o raio da estrela. Assumindo um movimento retilíneo uniformemente acelerado,

$$dr = \frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2}dt^2 \equiv fR$$

Logo, para o ponto no meio da estrela de massa M:

$$\tau_{\rm din} \equiv dt = \left(\frac{2fR}{d^2r/dt^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(G\frac{M}{R^3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\tau_{\rm din} \equiv \frac{1}{(G\bar{\rho})^{\frac{1}{2}}}}$$

Isto é, qualquer desequilíbrio da condição de equilíbrio hidrostático causa deslocamentos grandes e rápidos. Portanto, uma falta de equilíbrio leva a mudanças significativas no raio da estrela. Para o Sol,

$$\tau_{\rm din}^{\odot} \approx= 10^3\,{\rm s} = \frac{1}{4}\,{\rm hr}$$

As pulsações estelares podem ser consideradas como ondas sonoras com comprimentos de onda da ordem do raio da estrela. O período de pulsação de uma estrela, Π, é igual ao tempo dinâmico, a menos de alguns fatores numéricos da ordem de 1, já que as pulsações radiais ou não radiais de baixa ordem e os processos dinâmicos são determinados pela energia gravitacional da estrela.

A expressão correta para o período de pulsação é

$$\Pi = \frac{2\pi}{\left[(3\Gamma_1 - 4)\,\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}\right]^{1/2}}$$

Considerando-se anãs brancas com $\bar{\rho} \simeq 10^6$ g/cm^3 e supergigantes com $\bar{\rho} \simeq 10^{-9}$ g/cm^3, os períodos variam de 3 s a 1000 dias.

A nomenclatura de modos p (pressão), g (gravidade) e r (toroidais) é utilizada para os modos não radiais de pulsação, dependendo se a força restauradora dominante é a pressão, a gravidade ou a força de Coriolis. O astrônomo inglês Thomas George Cowling (1906-1990), no seu artigo de 1941, no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 101, 367, introduziu também a nomenclatura de um modo f (fundamental), com período entre os modos p e g. Os modos radiais de pulsação correspondem aos modes p com $\ell = 0$. Os modos s, (*shear*, cisalhamento, ocorrem nas estrelas de nêutrons, que têm crostas e cisalhamento. Mais explicitamente, Patrick N. McDermott, Hugh M. van Horn, & Carl J. Hansen, no seu artigo de 1988, no Astrophysical Journal, 325, 725, propoem a existência de modos s (cisalhamento esferoidais), t (cisalhamento toroidais) e i (interfaciais) nas estrelas de nêutrons. Os modos de cisalhamento têm períodos da ordem de 2 ms, se a crosta tiver cerca de 2 km e a velocidade de cisalhamento for da ordem de 1000 km/s. Os modos interfaciais estão concentrados na interface fluido/sólido da estrelas de nêutrons.

A fotometria fotoelétrica foi iniciada na astronomia em 1910, nos Estados Unidos por Joel Stebbins (1878-1966) e Charles M. Huffer (1894-1981) (1930, Washburn Observatory Publications, 25, part 3, 143) e na Alemanha por Paul Guthnick (1891-1947) e Richard Prager (1884-1945) (1915, Astronomische Nachrichten, 201, 443) para medidas diretamente no céu, e por

Hans Rosenberg (1879-1940) (1906, Nova Acta Leopoldina 85, Sterne I, 2, 224) para medidas de placas fotográficas. Os CCDs (Charge-Coupled Devices) foram inventados por George Smith e Willard Boyle, do Bell Labs, em 1969, e foram utilizados pela primeira vez em astronomia em 1983. Os CCDs normalmente não são sensíveis abaixo de 4000 Å porque o silício absorve estes fótons. Por isto é necessário reduzir a expessura dos CCDs e iluminá-los por trás. Outro problema é o ruído de leitura, que é maior quanto mais rápido for a leitura (2-10 elétrons/pixel para 1 Mpixel por segundo).

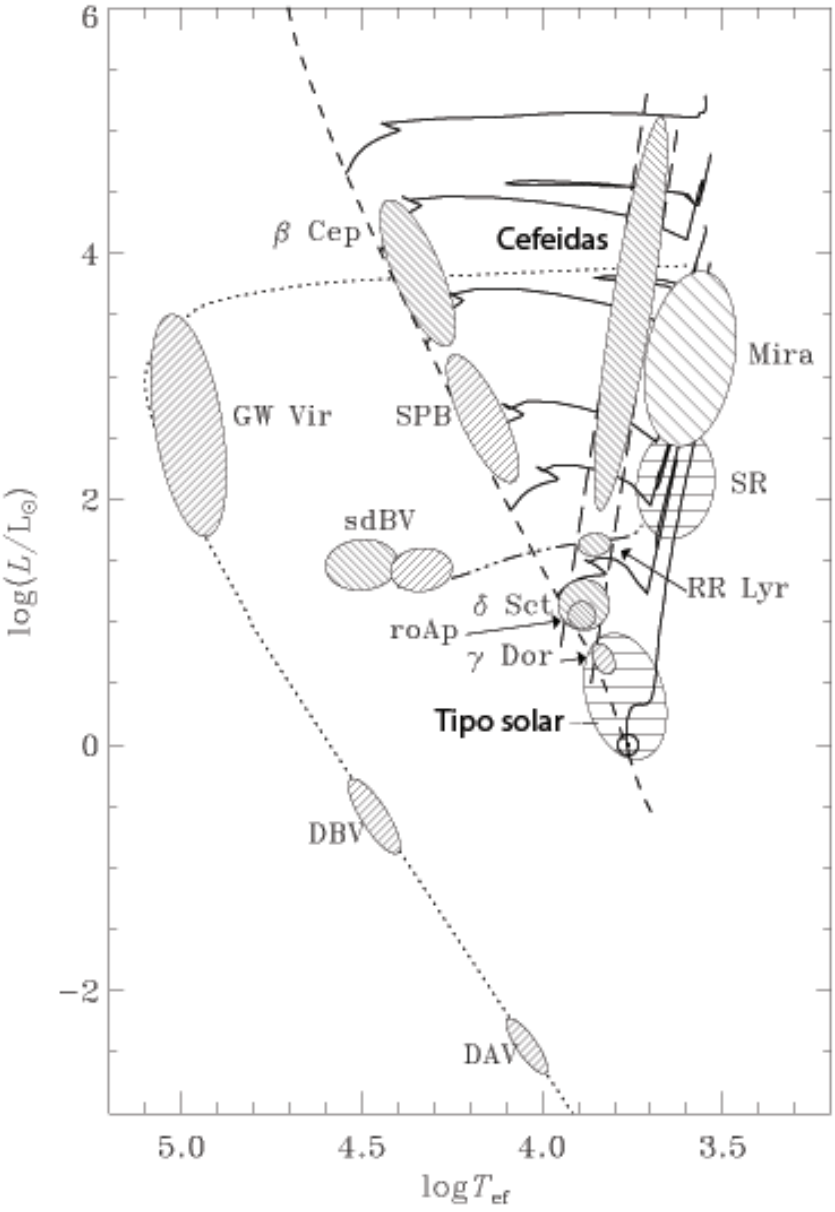


Figura 22.15: Localização dos diferentes tipos de estrelas pulsantes no diagrama HR, produzido por Jørgen Christensen-Dalsgaard, do *Danish Astero-Seismology Centre*.

Capítulo 23

Interiores estelares

Nosso objetivo, neste capítulo, é o de introduzir estrutura estelar, sem os detalhes dos cálculos numéricos. Os avanços consideráveis em astrofísica estelar nos últimos 50 anos só foram possíveis através de extensas modelagens computacionais, usando as equações básicas de mecânica de fluidos, termodiâmica, mecânica estatística, física de plasmas, nuclear e de partículas, além de uma breve passagem por mecânica relativística que iremos descrever.

23.1 Temperatura

O conceito físico de temperatura está associado ao conceito de equilíbrio térmico. Um sistema mecânico tem muitas configurações possíveis, dependendo da distribuição de energia de seus subsistemas. Dentre essas configurações, existe aquela mais provável, em que todos os subsistemas estão em equilíbrio térmico e que pode ser calculada com as técnicas da mecânica estatística. Como o assunto envolve resultados de tratamento detalhados de muitos campos da física, aqui simplesmente citaremos os resultados e justificaremos com argumentos qualitativos, deixando a demonstração para textos especializados.

Em um sistema clássico, as partículas se movem em trajetórias definidas, de modo que podemos, em princípio, distinguir entre as partículas, mesmo idênticas, isto é, podemos colocar rótulos de partícula 1, partícula 2, ... Em uma descrição quântica isso não pode ser feito, porque o Princípio da Incerteza de Heisenberg, que rendeu o prêmio Nobel em física de 1932 ao alemão Werner Karl Heisenberg (1901-1976), não permite a contínua observação do movimento das partículas, sem mudar o comportamento do sistema. Isso é equivalente a dizer que, em mecânica quântica, que descreve as partículas

como ondas tridimensionais, em que a função de onda associada a cada partícula não é pontual e dá a probabilidade de se encontrar a partícula em uma posição, a superposição dessa função de onda torna impossível a distinção entre as partículas. Portanto, em uma descrição quântica, as partículas idênticas são indistinguíveis.

Partículas descritas por auto-funções assimétricas têm spin semi-inteiro, e são chamadas de férmions, em honra ao físico ítalo-americano Enrico Fermi (1901-1954), e estão sujeitas ao Princípio da Exclusão, elaborado pelo físico austríaco Wolfgang Pauli (1900-1958), e que lhe rendeu o prêmio Nobel em 1945: duas partículas de mesmo spin não podem ocupar o mesmo estado quântico.

As partículas de Bose, ou bósons, em honra ao físico indiano Satyendra Nath Bose (1894-1974), têm spin inteiro e, embora indistinguíveis, não estão sujeitas ao Princípio da Exclusão, porque têm auto-funções simétricas (spin inteiros), que não se anula se todos os números quânticos de duas ou mais partículas forem idênticos.

Para um gás em equilíbrio, a configuração mais provável depende da natureza das partículas do gás, que para partículas elementares caem em três classes: 1) partículas idênticas mas distinguíveis, que são as partículas clássicas; 2) partículas idênticas e indistinguíveis de spin semi-inteiro, por exemplo, elétrons, pósitrons, neutrinos, prótons, nêutrons e mésons μ; e 3) partículas idênticas e indistinguíveis de spin inteiro, por exemplo fótons, mésons π e partículas α (He^4).

Se o número de partículas com *momentum* p é definido como $n(p)$, e o número de estados possíveis de *momentum* p por $g(p)$, a configuração mais provável correspondendo a esses três casos pode ser derivada pela mecânica estatística como:

$$\boxed{n(p)dp = \frac{g(p)}{e^{(E-\mu)/kT} + 0}dp} \quad \text{estatística de Maxwell-Boltzmann} \tag{23.1}$$

$$\boxed{n(p)dp = \frac{g(p)}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}dp} \quad \text{estatística de Fermi-Dirac} \tag{23.2}$$

$$\boxed{n(p)dp = \frac{g(p)}{e^{(E-\mu)/kT} - 1}dp} \quad \text{estatística de Bose-Einstein} \tag{23.3}$$

A energia E nas equações acima é a energia de cada partícula. O

parâmetro μ, o potencial químico[1], definido como [seção (23.9.1)]

$$\mu = \left(\frac{\partial E_{\text{gás}}}{\partial N} \right)_{s,v}$$

é um multiplicador Lagrangiano dependente da densidade de partículas, e é obtido através da normalização

$$\boxed{N = \int_0^\infty n(p)dp} \tag{23.4}$$

onde N é a densidade (número de partículas por unidade de volume) total e $E_{\text{gás}}$ é a densidade de energia total do gás. Essas fórmulas são derivadas considerando-se as várias maneiras de se arranjar um número fixo de partículas em estados individuais de energia, de modo que a energia total do gás seja conservada.

Na estatística de Fermi-Dirac, derivada por Enrico Fermi e pelo inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984),

$$\mu \equiv E_F(T)$$

para T=0, onde E_F é chamada de energia de Fermi e depende fracamente da temperatura.

Para um gás de fótons, que são bósons de massa zero, $\mu = 0$, porque o número de fótons não é conservado, isto é, quanto maior é a temperatura (energia), maior é o número de fótons.

A densidade de estados livres, ou fator de degenerescência, g(p) pode ser derivada usando-se o princípio da incerteza de Heisenberg

$$\Delta p_i \Delta x_i \geq h$$

e o fato de que, para elétrons e para fótons[2] podem existir dois estados de polarização (spin) e que o volume do espaço de *momentum*, para o qual o vetor $\vec{p}$ tem magnitude constante p, é simplesmente o volume da casca esférica, $4\pi p^2 dp$:

$$g(p)dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

[1] O conceito de potencial químico foi introduzido pelo físico-químico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

[2] Os fótons têm spin 1, mas o spin tem que ser paralelo à direção de movimento. Um fóton pode ser polarizado no sentido horário (regra da mão direita) ou anti-horário (regra da mão esquerda). Como tanto elétrons quanto fótons têm soluções de ondas planas no espaço livre e dois estados de spin ou polarização, existe uma correspondência unívoca entre o número de estados dos fótons e dos elétrons.

para *fótons e elétrons.*[3]

Para temperatura zero,

$$\boxed{E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{2/3}} \tag{23.5}$$

onde h é a constante de Planck, com valor $h = 6,63 \times 10^{-27}$ ergs s, e m é a massa da partícula; todos os estados com $E \leq E_F$ estão ocupados, e todos os estados com $E > E_F$ estão desocupados. Esta relação pode ser derivada da equação (23.2), já que, para $T = 0$,

$$N = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$$

logo

$$p_F = \frac{h}{2}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e considerando que para temperatura zero podemos usar a relação entre *momentum* e velocidade não relativística

$$E_F = \frac{1}{2} m \frac{p_F^2}{m^2} = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{2/3}$$

A relação entre a velocidade v e o *momentum* p, $v(p) = \partial E/\partial p$, depende de se o gás é relativístico ou não. Para um gás não-relativístico ($v \ll c$, onde c é a velocidade da luz), $v = p/m$. Para um gás relativístico,

$$\boxed{v \equiv \frac{\partial E_{\text{part}}}{\partial p} = \frac{p/m_0}{[1 + (p/m_0 c)^2]^{\frac{1}{2}}}}$$

onde E_{part} é a energia da partícula e m_0 é sua massa de repouso.

A densidade de energia do gás, isto é, energia por unidade de volume, será, então, dada por:

$$\boxed{E_{\text{gás}} = \int_0^\infty n(p) E(p) dp} \tag{23.6}$$

onde $E(p)$ é a energia de cada partícula, como função do *momentum.*

[3] O princípio da incerteza normalmente é escrito como $\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$, pois representa o movimento *na direção x*, e nossa derivação é para uma dimensão do volume, em todas as direções e, portanto, integrado sobre o ângulo sólido. Em termos de volume, o princípio da incerteza é dado por $d^3x\, d^3p = 4\pi p^2 dp\, 4\pi r^2 dr \geq h^3$.

23.2 Pressão mecânica

Um gás perfeito (ideal) é definido como aquele em que não há interação entre as partículas do gás. Embora esse critério nunca seja satisfeito, a aproximação é válida quando a energia de interação entre as partículas é muito menor que sua energia térmica.

A fonte microscópica de pressão em um gás perfeito é o bombardeamento de partículas. A reflexão, ou absorção, dessas partículas em uma superfície real ou imaginária resulta em transferência de *momentum* para essa superfície. Pela Segunda Lei de Newton (F=dp/dt), o *momentum* transferido exerce uma força na superfície. A força média por unidade de área é chamada de pressão. É a mesma quantidade na expressão: trabalho = $P \cdot dV$, em uma expansão infinitesimal.

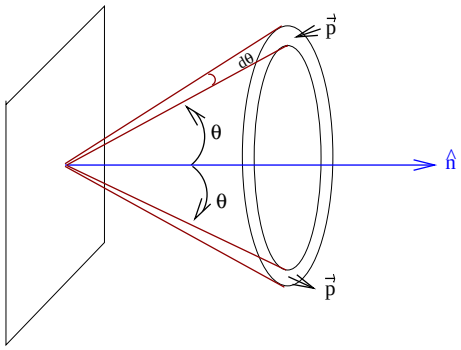


Figura 23.1: Pressão: Seção cônica na direção θ à normal.

Para um gás em equilíbrio térmico, a distribuição de *momentum* é isotrópica, isto é, as partículas se movem com a mesma probabilidade em todas as direções. Quando refletidas em uma superfície, as partículas transferem *momentum* a essa superfície. Quando uma partícula de *momentum* p, incidindo com um ângulo θ à normal, é refletida na superfície, o *momentum* transferido é

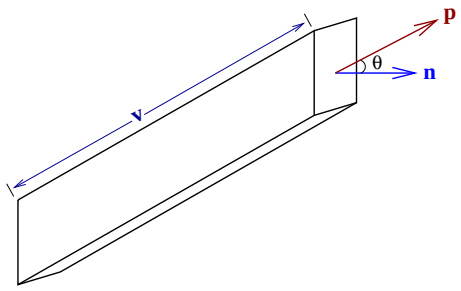
$$\Delta p = 2p\cos\theta$$

Seja $F(\theta, p)d\theta dp$ é o número de partículas com *momentum* p no intervalo dp colidindo com a parede, por unidade de área, por unidade de tempo, de todas as direções inclinadas com um ângulo θ à normal, no intervalo $d\theta$. A contribuição à pressão total (dP) é dada por:

$$dP = 2p\cos\theta\, F(\theta, p)d\theta dp,$$

de modo que a pressão total P é:

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{p=0}^{\infty} 2p \cos\theta \, F(\theta, p) d\theta dp \tag{23.7}$$



O fluxo de partículas $F(\theta, p)d\theta dp$ com velocidade v pode ser calculado como o produto da densidade de partículas com *momentum* p movendo-se no cone com ângulo θ, vezes o volume das partículas que passarão pela unidade de área, na unidade de tempo.

Esse volume é dado por:

$$V = v \, \cos\theta \, dt \, dA$$

mas para dt e dA unitários, já que estamos calculando o fluxo por unidade de área e por unidade de tempo. Logo,

$$F(\theta, p)d\theta dp = v \, \cos\theta \, n(\theta, p) \, d\theta \, dp$$

onde $n(\theta, p)$ é a densidade (número de partículas por unidade de volume) no cone referido.

Para um gás isotrópico:

$$\frac{n(\theta, p)d\theta dp}{n(p)dp} = \frac{2\pi \, \mathrm{sen}\, \theta \, d\theta}{4\pi}$$

que é a fração do ângulo esférico total definido pelo cone.

Ou seja, a pressão é dada por:

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{p=0}^{\infty} 2p \cos\theta \, v \cos\theta \, n(p) dp \, \frac{1}{2} \mathrm{sen}\, \theta d\theta$$

Como

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{sen}\, \theta \, d\theta = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

a pressão de um gás isotrópico é dada por:

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p \cdot v \cdot n(p)\, dp} \tag{23.8}$$

Essa integral precisa ser calculada para diferentes circunstâncias, já que a relação entre o *momentum* p e a velocidade v depende de considerações relativísticas, enquanto a forma da distribuição $n(p)$ depende do tipo de partículas e da estatística quântica.

23.2.1 Gás não-degenerado

Para um gás monoatômico perfeito e não-degenerado, nem relativístico, a distribuição de *momentum* em equilíbrio térmico é dada pela Lei de Maxwell [James Clerk Maxwell (1831-1879)].

$$n(p)dp = \frac{N\, 4\pi p^2 dp}{(2\pi mkT)^{3/2}}\, \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \tag{23.9}$$

onde m é a massa da partícula, k é a constante de Boltzmann, e T a temperatura do gás.

Note que a normalização é escolhida de forma que

$$N = \int_0^\infty n(p)dp \tag{23.10}$$

para um gás não-relativístico, com $E = mv^2/2$, já que

$$\int_0^\infty p^2 e^{-ap^2} dp = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{23.11}$$

Integrando-se a equação (23.8), usando a Lei de Maxwell (23.9), a normalização (23.10), e $v = p/m$, obtém-se:

$$\boxed{P = NkT,}$$

a equação de um gás ideal.

A densidade de energia $E_{\rm NR}$, de acordo com a equação (23.6), para um gás ideal é dada por:

$$E_{\rm NR} = \frac{N4\pi}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp \tag{23.12}$$

Como

$$\int_0^\infty p^4 e^{-ap^2} dp = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{23.13}$$

obtemos

$$\boxed{E_{\text{gás}}^{\text{NR}} = \frac{3}{2}NkT} \tag{23.14}$$

Para o gás de Boltzmann, o potencial químico, excluindo a energia de repouso, é dado por:

$$\mu = kT \ln\left[\frac{N}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{23.15}$$

onde $g = 2J + 1$ é o fator estatístico para partículas de spin J.

Para um gás relativístico, $pc \gg mc^2$, a energia da partícula é dada por $E \simeq pc$, e usando a equação (23.10) para obter a constante normalização C:

$$N = C\int_0^\infty e^{-\frac{pc}{kT}} p^2 dp \tag{23.16}$$

Como

$$\int_0^\infty p^2 e^{-ap} dp = -\frac{2}{a^3} \tag{23.17}$$

obtemos

$$N = -C\frac{2(kT)^3}{c^3} \longrightarrow C = -\frac{Nc^3}{2(kT)^3} \tag{23.18}$$

e, portanto, a energia do gás é dada por

$$E_{\text{gás}}^{\text{ER}} = C\int_0^\infty pc\, e^{-\frac{pc}{kT}} p^2 dp \tag{23.19}$$

Como

$$\int_0^\infty p^3 e^{-ap} dp = -\frac{6}{a^4} \tag{23.20}$$

a equação (23.19) se reduz a

$$\boxed{E_{\text{gás}}^{ER} = 3NkT} \tag{23.21}$$

23.2.2 Gás de fótons

Para um gás de fótons, como cada fóton tem um *momentum* associado

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

eles também exercem uma pressão, chamada pressão de radiação $P_{\rm rad}$:

$$P_{\rm rad} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{h\nu}{c}\cdot c\cdot n(p)dp = \frac{1}{3}\int_0^\infty h\nu\, n(p)dp = \frac{1}{3}\int_0^\infty E\, n(p)dp \equiv \frac{1}{3}\,u$$

onde u é a densidade de energia (energia por unidade de volume) da radiação:

$$\boxed{P_{\rm rad} = \frac{1}{3}\,u = \frac{1}{3}\,aT^4}$$

onde a é a constante de Stefan-Boltzmann:

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3} = \frac{4\sigma}{c} = 7,565\times 10^{-15}\mathrm{erg\,cm^{-3}\,K^{-4}}.$$

O valor da densidade de energia u vem do fato que a energia de cada fóton é dada por $E = h\nu$, e o *momentum* $p = h\nu/c$, de modo que, usando a distribuição de *momentum* de Bose-Einstein com $\mu = 0$, e $n(E)dE = n(p)dp$,

$$n(p)dp = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3}\frac{1}{e^{E/kT}-1} \tag{23.22}$$

obtém-se que a densidade de energia de fótons com uma freqüência ν no intervalo $d\nu$, em equilíbrio térmico é dada por:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{23.23}$$

e

$$\boxed{u = \int_o^\infty u(\nu)d\nu = aT^4} \tag{23.24}$$

Existem casos, como em estrelas quentes, em que a pressão de radiação é comparável com a pressão do gás, que sustenta a estrela. De fato, para estrelas com massa maior que $100M_\odot$, a pressão de radiação é maior do que a força gravitacional por unidade de área, e a pressão de radiação causa a ejeção das camadas externas da estrela.

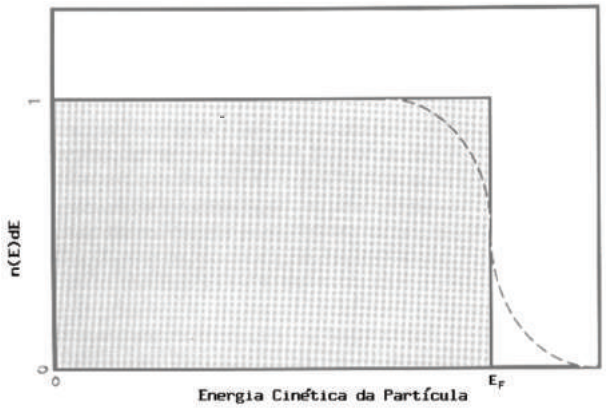


Figura 23.2: Distribuição de energia de Fermi-Dirac para uma temperatura finita (linha pontilhada), e para temperatura zero (linha contínua). Para temperatura zero, equivalente a um gás totalmente degenerado, nenhuma partícula tem energia superior à energia de Fermi (E_F).

23.2.3 Degenerescência dos elétrons

Como os elétrons são partículas de spin meio-inteiro, um gás de elétrons obedece à estatística de Fermi-Dirac. A densidade de elétrons com *momentum* $|\vec{p}| = p$ no intervalo p e $p + dp$ é dada pela equação (23.2):

$$n_e(p)dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp P(p)$$

onde definimos o índice de ocupação para um gás de Fermi como:

$$P(p) = \left[\exp\left(\frac{E - E_F}{kT} \right) + 1 \right]^{-1}$$

O fato de $P(p)$ ter valor máximo de um é uma expressão do princípio de exclusão de Pauli. Quando $P(p)$ é unitário, todos os níveis de energia do gás estão ocupados. Portanto, a máxima densidade de elétrons, no espaço de fase, é

$$[n_e(p)]_{\max} dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp \tag{23.25}$$

É essa restrição na densidade de elétrons no espaço de *momentum* que cria a pressão de degenerescência. Se aumentamos continuamente a densidade de elétrons, os elétrons são forçados a um estado de maior *momentum* e,

portanto, maior pressão, simplesmente porque todos estados de *momentum* mais baixo já estão ocupados.

Para qualquer temperatura e densidade de elétrons n_e, o valor da Energia de Fermi (E_F) é determinado pela integral

$$n_e = \int_0^\infty n_e(p)dp = n_e\left(E_F, T\right)$$

Se E_F for um número grande e negativo, $P(p)$ será menor do que um para todas as energias, e a distribuição de Fermi-Dirac se reduz a uma distribuição Maxwelliana. Conforme a densidade for aumentando, para uma temperatura constante, a energia de Fermi se torna primeiro pequena, cruzando zero e chegando a grandes valores positivos, em altas densidades. Se a energia de Fermi for muito maior do que kT, a distribuição será uma função degrau, e chamamos esse limite de degenerescência total.

Degenerescência total

Para altíssimas densidades ($\rho \gg 10^7$ g/cm^3 nos interiores estelares), todos os níveis de energia até um valor máximo estarão ocupados. Como a densidade total é finita, os estados de densidade estarão ocupados até um certo valor do *momentum* p_0:

$$n_e(p) = \begin{cases} \frac{2}{h^3}4\pi p^2, & \text{se } p \leq p_0 \\ 0, & \text{se } p > p_0 \end{cases} \tag{23.26}$$

Naturalmente, esse é o estado de mínima energia cinética para um gás de elétrons, pois todos os estados de energia mais baixa estão ocupados, o que não ocorre com nenhum de mais alta energia. A densidade de partículas total é relacionada com o *momentum* máximo por

$$n_e = \int_0^\infty n_e(p)dp = \frac{8\pi}{3h^3}p_0^3 \tag{23.27}$$

ou escrevendo o *momentum* máximo em função da densidade de elétrons:

$$\boxed{p_0 = \left(\frac{3h^3}{8\pi}n_e\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{23.28}$$

A energia associada ao *momentum* máximo é a energia de Fermi. Para expressar a velocidade da partícula em relação ao seu *momentum*, precisamos distinguir entre um elétron relativístico ou não-relativístico.

Degenerescência total não-relativística

Se a energia associada ao *momentum* p_0 for muito menor do que a energia de repouso do elétron, $m_e c^2 = 0,51$ MeV, então $v_e = p/m_e$ para todos os momenta na distribuição, e a integral da pressão (23.8) é diretamente:

$$P_{\rm e,nr} = \frac{8\pi}{15 m_e h^3} p_0^5 \tag{23.29}$$

onde nr significa elétrons não-relativísticos. Usando a relação entre o *momentum* total e a densidade de elétrons (23.28), demonstramos que a pressão de elétrons é determinada pela densidade de elétrons:

$$\boxed{P_{\rm e,nr} = \frac{h^2}{20 m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} n_e^{\frac{5}{3}}} \tag{23.30}$$

Podemos expressar a densidade de elétrons em termos da densidade de massa [veja equação (23.181)]

$$P_{\rm e,nr} = \frac{h^2}{20 m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} N_A^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\boxed{P_{\rm e,nr} = 1,004 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{3}} \text{dinas/cm}^2} \tag{23.31}$$

onde μ_e aqui é o peso molecular médio por elétron, ou seja, o número médio de massas atômicas (A) por elétron:

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum \frac{X_Z Z}{A_Z}$$

e a densidade de elétrons é dada por:

$$n_e = \frac{\rho N_A}{\mu_e} \tag{23.32}$$

onde N_A é o número de Avogadro [Amedeo Avogadro (1776-1856)]. Normalmente $\mu_e \simeq 2$, a não ser que o gás contenha uma fração substancial de hidrogênio, o que não é geralmente o caso, pois o estado degenerado é atingido no núcleo de estrelas que já queimaram o hidrogênio, e os núcleos de anãs brancas são predominantemente compostos de He, C, O, ou Ne, todos com A/Z=2. Mas para os núcleos de planetas gigantes e anãs marrons, o

hidrogênio é dominante. Note que a pressão dada pela equação (23.31) *não depende da temperatura* e, portanto, um aumento da temperatura não causa um aumento da pressão e subseqüente expansão, que reduziria a temperatura. Esse fato tem implicações na história evolutiva das estrelas, desde a queima explosiva do hélio até a explosão de supernova, como veremos no decorrer deste capítulo. Vemos pela equação (23.31) que a pressão de um gás de elétrons degenerado aumenta como uma potência 5/3 da densidade. Como para um gás não-degenerado a pressão aumenta linearmente com a densidade, é claro que, com o aumento de densidade, existe um ponto em que a pressão degenerada será maior do que o valor dado pela fórmula não degenerada. Podemos definir uma linha no plano ρT dividindo a região degenerada da não-degenerada, calculando-se os valores para os quais as duas fórmulas são iguais:

$$\frac{N_A k}{\mu_e}\rho T = \frac{h^2}{20 m_e}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} N_A^{\frac{5}{3}}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{3}}$$

ou seja, a pressão completamente degenerada supera a pressão não-degenerada para densidades maiores do que

$$\frac{\rho}{\mu_e} > 2,4 \times 10^{-8} T^{\frac{3}{2}} \text{ g/cm}^3$$

Naturalmente, a transição de não-degenerado para degenerado não ocorre abruptamente, mas suavemente. Na região de transição, precisamos utilizar a equação que discutiremos em uma próxima seção. Para o interior do Sol, onde $\rho/\mu_e \simeq 10^2$ g/cm^3 e $T \simeq 10^7$ K, a inequalidade mostra que o gás está completamente não-degenerado. Para o interior de uma anã branca, onde $\rho/\mu_e \simeq 10^6$ g/cm^3 e $T \simeq 10^6$ K, a inequalidade se satisfaz, e a pressão degenerada domina.

Degenerescência total relativística

Conforme a densidade de elétrons aumenta, o *momentum* máximo de um gás de elétrons completamente degenerado aumenta. Em uma densidade, os elétrons mais energéticos se tornarão relativísticos. Nessas condições, a substituição de $v_p = p/m$ utilizada para derivar a equação (23.29) é incorreta e precisamos utilizar a expressão da relatividade

$$p = \frac{m_0 v}{[1-(v/c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

ou seja,

$$v = \frac{p/m_0}{[1-(p/m_0c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Podemos estimar a densidade para a qual os elétrons tornam-se relativísticos, calculando-se $p_0c \simeq 2m_0c^2$. Usando-se o *momentum* máximo derivado na equação (23.28), obtemos

$$\frac{\rho}{\mu_e} = 7,3 \times 10^6 \text{ g/cm}^3 \qquad \text{relativístico}$$

Ou seja, para densidades aproximando-se desse valor, precisamos usar a cinemática relativística.

Inserindo-se a velocidade relativística na integral da pressão (23.8), obtemos

$$P_{e,r} = \frac{8\pi}{3mh^3}\int_0^{p_0} \frac{p^4dp}{[1+(p/m_0c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Para calcular essa integral, podemos definir um novo parâmetro

$$\operatorname{senh}\theta \equiv \frac{p}{mc}$$

de modo que

$$dp = mc\cosh\theta d\theta$$

e a integral pode ser escrita como

$$P_{e,r} = \frac{8\pi m_0^4c^5}{3h^3}\int_0^{\theta_0} \operatorname{senh}\theta\, d\theta$$

que pode ser integrada, resultando em

$$P_{e,r} = \frac{8\pi m_0^4c^5}{3h^3}\left(\frac{\operatorname{senh}^3\theta_0\cosh\theta_0}{4} - \frac{3\operatorname{senh}2\theta_0}{16} + \frac{3\theta_0}{8}\right) \tag{23.33}$$

e, em termos do *momentum* de Fermi,

$$P_{e,r} \equiv \frac{\pi m_0^4c^5}{3h^3}f(x) = 6,002 \times 10^{22} f(x) \text{ dinas/cm}^2 \tag{23.34}$$

onde

$$x = \frac{p_0}{m_0c} = \frac{h}{m_0c}\left(\frac{3}{8\pi}n_e\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x(2x^2-3)(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + 3\operatorname{senh}^{-1}x$$

No limite ultra-relativístico, $x \gg 1$,

$$f(x) \to 2x^4 - 2x^2 + \cdots \tag{23.35}$$

e usando-se somente o primeiro termo da expansão:

$$P_{e,ur} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{4} N_A^{4/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{23.36}$$

$$\boxed{P_{e,ur} = 1,243 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{4}{3}} \text{ dina/cm}^2} \tag{23.37}$$

Degenerescência total ultra-relativística

Uma derivação mais simples do limite ultra-relativístico pode ser obtido da definição de pressão (23.8), utilizando (23.26), assumindo $pc \gg m_0c^2$ e portanto $E \simeq pc$; como $v = \partial E/\partial p$, $v \simeq c$:

$$P_{e,ur} = \frac{1}{3} c \frac{2}{h^3} 4\pi \int_0^{p_0} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4 \tag{23.38}$$

Utilizando a relação entre o *momentum* de Fermi p_0 e a densidade dada pela equação (23.28):

$$P_{e,ur} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{4} n_e^{4/3} \tag{23.39}$$

ou, termos da densidade de massa, recuperamos a equação (23.36):

$$P_{e,ur} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{4} N_A^{4/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{23.40}$$

23.2.4 Degenerescência parcial

Para a região de transição, ou para o caso geral, precisamos utilizar a distribuição de Fermi-Dirac na equação da pressão (23.8):

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p^3 v_p dp}{\exp\left[\left(E - E_F\right)/kT\right] + 1} \tag{23.41}$$

e obter a energia de Fermi E_F integrando-se a densidade total:

$$n_e = \frac{2}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\exp\left[\left(E - E_F\right)/kT\right] + 1} \tag{23.42}$$

Para temperaturas menores que 10^9 K, a degenerescência total inicia-se antes de os elétrons tornarem-se relativísticos, de modo que podemos nos restringir a velocidades não-relativísticas para a degenerescência parcial, isto é, podemos utilizar $v_p = p/m_e$, de modo que

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\exp\left[\left(\frac{p^2}{2m_e} - E_F\right)/kT\right] + 1} \tag{23.43}$$

e

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left[\left(\frac{p^2}{2m_e} - E_F\right)/kT\right] + 1} \tag{23.44}$$

Podemos definir dois parâmetros adimensionais

$$\alpha \equiv -\frac{E_F}{kT}$$

$$u \equiv \frac{p^2}{2m_e kT}$$

e escrever

$$P_e = \frac{8\pi kT}{3h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{3}{2}} du}{\exp(u+\alpha)+1}$$

e

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}} du}{\exp(u+\alpha)+1}$$

constituindo duas equações paramétricas para a equação de estado.

Definindo-se duas funções:

$$F_{\frac{1}{2}}(\alpha) \equiv \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}} du}{\exp(u+\alpha)+1}$$

$$F_{\frac{3}{2}}(\alpha) \equiv \int_0^\infty \frac{u^{\frac{3}{2}} du}{\exp(u+\alpha)+1}$$

podemos escrever

$$P_e = \frac{8\pi kT}{3h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}}(\alpha)$$

e

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

e, finalmente,

$$\boxed{P_e = n_e kT \left[\frac{2F_{\frac{3}{2}}(\alpha)}{3F_{\frac{1}{2}}(\alpha)}\right]} \tag{23.45}$$

O fator $2F_{\frac{3}{2}}/3F_{\frac{1}{2}}$ mede o desvio da pressão eletrônica em relação ao gás não-degenerado, e varia de 8 para $\alpha = -20$, a 1 para $\alpha > 1$. Alguns valores das funções de Fermi-Dirac estão listados na tabela 23.1.

Tabela 23.1: Valores para as funções de Fermi-Dirac

$-\alpha = \frac{E_F}{kT}$	$\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\alpha)$	$F_{\frac{1}{2}}(\alpha)$	
-4	0,016179	0,016128	regime não-degenerado
-2	0,117200	0,114588	
-1	0,307232	0,290501	
0	0,768536	0,678094	
1	1,774455	1,396375	
2	3,691502	2,502458	
4	11,751801	5,770726	
8	52,90173	15,38048	
12	125,70797	27,95178	
16	279,63888	42,87300	
20	484,37885	59,81279	completamente degenerado

Note que os íons normalmente são não-degenerados, pois seu espaço de fase é muito maior que o dos elétrons, já que sua massa é cerca de 2000 vezes maior para a mesma energia térmica

$$E_t = \frac{3}{2}kT$$

que corresponde à energia cinética,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

já que os íons são não-relativísticos — a velocidade dos íons é muito menor do que a velocidade dos elétrons. Portanto:

$$P_{\text{gás}} = P_e + \frac{N_A k}{\mu_i}\rho T$$

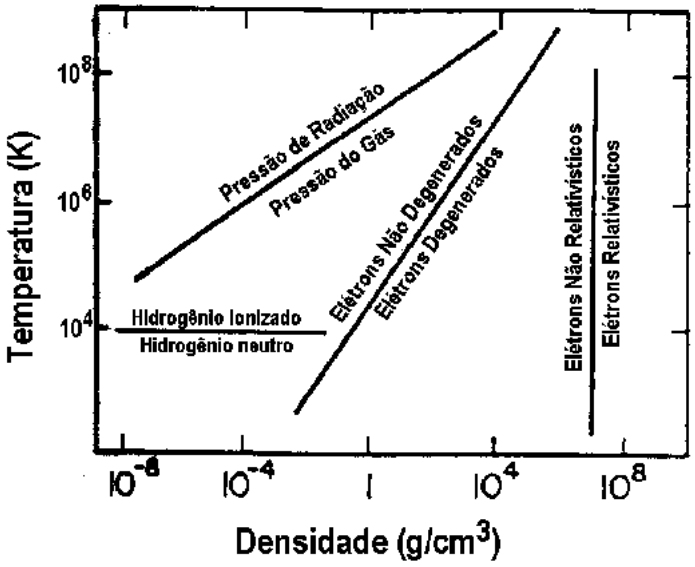


Figura 23.3: Diagrama mostrando qual o estado do gás para as combinações de densidade e temperatura ($\rho - T$).

onde μ_i é o peso molecular médio dos íons

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum \frac{X_Z n_Z}{A_Z}$$

Precisamos, ainda, levar em conta a contribuição da pressão de radiação à pressão total. Para comparação, essa contribuição passa de 2,1% para uma estrela de 5 $M_\odot$ para 11% para uma estrela de 15 $M_\odot$.

$$\boxed{P_{\rm total} = P_e + \frac{N_A k}{\mu_i}\rho T + P_{\rm rad}} \tag{23.46}$$

23.3 Energia de Fermi

Em nosso tratamento dos férmions, estamos escrevendo $E_F \equiv \mu$ isto é, estamos identificando o potencial químico com a energia de Fermi. Estamos também escrevendo a densidade como n_e, isto é, a densidade dos elétrons, pois os íons não estão degenerados, exceto em estrelas de nêutrons. Em uma

estrela de nêutrons, n_e deve ser substituído por n_n nas equações, pois neste caso são os nêutrons que estão degenerados. O valor da energia de Fermi precisa ser encontrado através da integração da distribuição de *momentum*, mas como vimos, no caso geral essa integração não é analítica. Podemos estimar o valor da energia de Fermi em várias aproximações:

23.3.1 T=0

$$\boxed{E_F(T=0) = \left(\frac{h^2}{8m}\right)\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

23.3.2 Gás não-degenerado, ionizado

$$\boxed{E_F = -kT\ln\left(\frac{T^{3/2}}{n_e}\right) - \frac{3}{2}kT\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right) - kT\ln 2}$$

23.3.3 Degenerescência fraca

O número de ocupação

$$P(p) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}\left[1+e^{-(E-E_F)/kT}\right]}$$

$$P(p) \simeq e^{-(E-E_F)/kT}\left[1-e^{-(E-E_F)/kT}\right]$$

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}e^{E_F/kT}\left(1-\frac{e^{E_F/kT}}{2^{3/2}}\right) \\ &\simeq \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}e^{E_F/kT}\left[1-\frac{e^{E_F(T=0)/kT}}{2^{3/2}}\right] \end{aligned}$$

o que leva a

$$\boxed{E_F = -kT\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{3/2} - kT\ln\left(2T^{3/2}/n_e\right) - \frac{n_e}{2^{1/2}}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}}$$

23.3.4 Altamente degenerado, ultra-relativístico

Para $E_F \gg mc^2$:

$$\boxed{\frac{1}{E_F} = \frac{1}{E_F(T=0)}\left[1+\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}}$$

O nosso objetivo é obter expressões para a Energia de Fermi para os seguintes casos:

1. um gás a temperatura zero

$$E_F = \left(\frac{h^2}{8m}\right)\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{23.47}$$

2. um gás não-degenerado e ionizado

$$E_F = -kT\ln\left(\frac{T^{3/2}}{n_e}\right) - \frac{3}{2}kT\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right) - kT\ln 2 \tag{23.48}$$

3. um gás fracamente degenerado;

$$E_F = -kT\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{3/2} - kT\ln\left(\frac{2T^{3/2}}{n_e}\right) - \frac{n_e}{2^{1/2}}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \tag{23.49}$$

4. um gás altamente degenerado e ultra-relativístico.

$$\frac{1}{E_F} = \frac{1}{E_F(T=0)}\left[1+\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]^{1/3} \tag{23.50}$$

Recapitulando

$\boxed{n(p)dp = \dfrac{g(p)}{e^{(E-\mu)/kT}+0}dp}$	estatística de Maxwell-Boltzmann
$\boxed{n(p)dp = \dfrac{g(p)}{e^{(E-\mu)/kT}+1}dp}$	estatística de Fermi-Dirac
$\boxed{n(p)dp = \dfrac{g(p)}{e^{(E-\mu)/kT}-1}dp}$	estatística de Bose-Einstein

e da termodinâmica sabemos que $\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{s,v}$, onde N é a densidade total (número de partículas por unidade de volume), sendo normalizado da seguinte forma:

$$N = \int_0^\infty n(p)dp \tag{23.51}$$

Na estatística de Fermi-Dirac, $\mu = E_F(T)$ onde E_F é chamada de energia de Fermi, dependendo fracamente da temperatura.

23.4 Gás, T=0

O fator de degenerescência pode ser obtido usando-se o princípio da incerteza Heisenberg e o fato de que para elétrons e para fótons podem existir dois estados de polarização (spin), e que o volume do espaço de momentum, para o qual o vetor $\vec{p}$ tem magnitude constante p, é simplesmente o volume da casca esférica, $4\pi p^2 dp$:

$$g(p)dp = \frac{2}{h^3}4\pi p^2 dp \tag{23.52}$$

A expressão (23.52) vale tanto para fótons como para elétrons. Todas as partículas possuem energia $E < E_F$, estando os estados cuja energia $E > E_F$ desocupados. Portanto, a partícula mais energética tem momentum p_F e a integral da equação (23.51) fica:

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3}4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3}p_F^3 \tag{23.53}$$

Assim,

$$p_F = \frac{h}{2}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{1/3} \tag{23.54}$$

A esta temperatura podemos considerar a velocidade não relativística ($p = mv$)

$$E_F = \frac{1}{2}m\frac{p_F^2}{m^2} = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3} \tag{23.55}$$

23.5 Gás não-degenerado, ionizado

Para um gás não degenerado e monoatômico com baixa densidade, as expressões para $n(P)$ clássicas e quânticas devem ser iguais. A expressão clássica para $n(p)$ é

$$n(p) = \frac{4\pi n p^2}{(2\pi mkT)^{3/2}}e^{\frac{-p^2}{2mkT}} \tag{23.56}$$

Já a equação correspondente da mecânica quântica (com μ grande e negativo) para $n(p)$ é

$$n(p) = e^{\mu/kT} \frac{8\pi p^2}{h^3} e^{\frac{-p^2}{2mkT}} \tag{23.57}$$

Igualando as duas expressões acima, temos

$$e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{8\pi}{h^3} = \frac{4\pi n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \tag{23.58}$$

Simplificando a expressão (23.58), podemos obter uma expressão para μ

$$\mu = -kT \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n} \right) - \frac{3}{2} kT \ln \left(\frac{2\pi mk}{h^2} \right) - kT \ln 2 \tag{23.59}$$

Como $E_F \equiv \mu$, então

$$E_F = -kT \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n} \right) - \frac{3}{2} kT \ln \left(\frac{2\pi mk}{h^2} \right) - kT \ln 2 \tag{23.60}$$

23.6 Gás fracamente degenerado

Um gás de elétrons é descrito pela estatística de Fermi-Dirac. Assim, a densidade de elétrons com momentum p entre p e $p + dp$ é dada por

$$n_e(p)dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 P(p) \tag{23.61}$$

onde $P(p)$ é definido como índice de ocupação para um de gás de Fermi.

$$P(p) = \left[e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1 \right]^{-1} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} [1 + e^{-\frac{E-\mu}{kT}}]} \tag{23.62}$$

$$P(p) \simeq e^{-\frac{E-\mu}{kT}} [1 - e^{-\frac{E-\mu}{kT}}] \tag{23.63}$$

Por conseqüência, temos

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int \frac{p^2 dp}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$$

Utilizando a equações (23.63) na equação (23.61) e definindo $x = p/\sqrt{2mkT}$, com $E \ll mc^2$, obtemos

$$\begin{aligned} n_e(p) &= \frac{8\pi(2mkT)^{3/2}}{h^3}\left[e^{\mu/kT}\int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx - e^{2\mu/kT}\int_0^\infty e^{-2x^2}x^2dx\right] \\ &= \frac{8\pi(2mkT)^{3/2}}{h^3}\left[e^{\mu/kT}\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{2\mu/kT}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}}\right] \\ &= \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}e^{\mu/kT}\left(1 - \frac{e^{\mu/kT}}{2^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

ou, aproximando μ por μ_0 dentro do parêntesis,

$$n_e(p) \simeq \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}e^{\mu/kT}\left(1 - \frac{e^{\mu_0/kT}}{2^{3/2}}\right) \tag{23.64}$$

onde μ_0 é o potencial químico de um gás não-degenerado, dado pela eq. (23.55). Podemos então escrever

$$e^{\mu/kT} = \frac{n_e h^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}}\left(1 - \frac{e^{\mu_0/kT}}{2^{3/2}}\right) \tag{23.65}$$

$$\mu = kT\ln\left[\frac{n_e h^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}}\left(1 - \frac{e^{\mu_0/kT}}{2^{3/2}}\right)\right] \tag{23.66}$$

$$\mu = -kT\ln\left[\frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{n_e h^3}\left(1 - \frac{e^{\mu_0/kT}}{2^{3/2}}\right)^{-1}\right] \tag{23.67}$$

Mas $\ln(1+x) \simeq x$, se $x \ll 1$, então fazendo $x = -\frac{e^{\mu_0/kT}}{2^{3/2}}$

$$\mu = -kT\ln\left[\frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{n_e h^3}\left(1 - \frac{e^{\mu_0/kT}}{2^{3/2}}\right)^{-1}\right] \tag{23.68}$$

utilizando a equação (23.58) para o termo em μ_0, obtemos:

$$\mu = -kT\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{3/2} - kT\ln\left(\frac{2T^{3/2}}{n_e}\right) - \frac{n_e h^3}{2^{5/2}(2\pi m)^{3/2}(kT)^{1/2}} \tag{23.69}$$

Como $E_F \equiv \mu$:

$$E_F = -kT\ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{3/2} - kT\ln\left(\frac{2T^{3/2}}{n_e}\right) + \frac{n_e}{2^{5/2}}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}kT \tag{23.70}$$

23.7 Gás altamente degenerado, ultra-relativístico

Neste regime, $\mu \gg kT$ Temos que

$$I = \int_{mc^2}^{\infty} f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon \tag{23.71}$$

onde $f(\epsilon)$ é a probabilidade que um particular estado de momentum esteja ocupado.

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} \tag{23.72}$$

Para uma degenerescência alta $df/d\epsilon = f'(\epsilon)$ tem um máximo em $\epsilon = \mu$ e é pequeno para valores de ϵ que são ou muito menores ou muito maiores do que $\epsilon = \mu$. As funções $g(\epsilon)$variam muito menos que $f(\epsilon)$. Integrando a eq. (23.73) por partes, temos

$$I = f(\infty) \int_{mc^2}^{\infty} g(\epsilon') d\epsilon' - f(mc^2) \int_{mc^2}^{mc^2} g(\epsilon') d\epsilon' - \int_{mc^2}^{\infty} f'(\epsilon) \int_{mc^2}^{\epsilon} g(\epsilon') d\epsilon' \tag{23.73}$$

Podemos definir

$$G(\epsilon) = \int_{mc^2}^{\epsilon} g(\epsilon') d\epsilon' \tag{23.74}$$

A eq. (23.73) transforma-se em

$$I = f(\infty) G(\infty) - f(mc^2) G(mc^2) - \int_{mc^2}^{\infty} f'(\epsilon) \int_{mc^2}^{\epsilon} g(\epsilon') d\epsilon' \tag{23.75}$$

mas $f(\infty)$ e $G(mc^2)$ são zero. Logo, podemos escrever a eq. (23.73) como

$$I = -\int_{mc^2}^{\infty} f'(\epsilon) G(\epsilon) d\epsilon \tag{23.76}$$

Podemos, agora, definir $x = (\epsilon - \mu)/kT$ e expandir $G(x)$ em série de Taylor para $x = 0$. Obtemos

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} G^n(0) \tag{23.77}$$

com

$$G^0(0) \equiv \int_{mc^2}^{\mu} g(\epsilon) d\epsilon \tag{23.78}$$

Por outro lado,

$$G^n(0) = (kT)^n \left(\frac{d^{n-1} g(\epsilon)}{d\epsilon^{n-1}} \right)_{\epsilon=\mu} \equiv (kT)^n g^{n-1}(\mu), \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{23.79}$$

Utilizando as equações (23.77-23.79) na eqção (23.76), obtemos

$$I = -G(0)\int_{mc^2}^{\infty} f'(\epsilon)d\epsilon - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kT)^n}{n}g^{n-1}(\mu)\int_{x=-(\mu-mc^2)/kT}^{\infty} x^n f'(x)dx \tag{23.80}$$

Entretanto,

$$\int_{mc^2}^{\infty} f'(\epsilon)d\epsilon \simeq 1, \tag{23.81}$$

pois $f'(\epsilon)$ tem o comportamento semelhante ao da função Delta de Dirac (em um gás fortemente degenerado), onde

$$f'(x) = -\frac{e^x}{kT\left[e^x+1\right]^2} = -\frac{1}{kT(e^x+1)(e^{-x}+1)} \tag{23.82}$$

Podemos notar que $f'(x)$ é uma função par. Como $\mu - mc^{\gg}kT$, podemos analisar a integral do segundo termo da eq. (41) como tendo os limites ∞ e $-\infty$. Desta forma, apenas valores pares de n terão importância na integral mencionada e, por conseqüência, apenas as derivadas ímpares da função $g(\epsilon)$ aparecerão na expressão final para I.

Como $x = \mu/kT$ é positivo, então podemos escrever $\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$ como a expansão binomial

$$\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m e^{-mx} \tag{23.83}$$

Assim, a integral do segundo termo da eq. (23.80) se torna

$$\left(\frac{2}{kT}\right)\sum_{m=1}(-1)^m m\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{2n!}{kT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^n} \quad n = par \tag{23.84}$$

Podemos, agora, escrever a eq. (23.73) como

$$I = \int_{mc^2}^{\mu} g(\epsilon)d\epsilon - 2\sum_{n=1}^{\infty}(kT)^{2n}\left(\frac{d^{2n-1}g(\epsilon)}{d\epsilon^{2n-1}}\right)_{\epsilon=\mu} \quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^{2n}} \tag{23.85}$$

ou então

$$\begin{aligned} I &= \int_{mc^2}^{\infty}\frac{g(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1} \qquad (23.86)\\ &= \int_{mc^2}^{\mu} g(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\left(\frac{dg}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\mu} + \frac{7\pi^4}{360}(kT)^4\left(\frac{d^3g}{d\epsilon^3}\right)_{\epsilon=\mu} + \ldots \end{aligned}$$

Escrevendo uma expressão para a densidade de elétrons dada na eq. (23.61) como função de ϵ com $\epsilon^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$, obtemos

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3c^3}\int_{mc^2}^{\infty}\frac{\epsilon\sqrt{\epsilon^2-(mc^2)^2}d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1} \tag{23.87}$$

A equação (23.87) implica que

$$g(\epsilon) = \frac{8\pi}{h^3c^3}\epsilon\sqrt{\epsilon^2-(mc^2)^2} \tag{23.88}$$

E sua derivada

$$\left(\frac{dg(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\mu} = \frac{8\pi}{h^3c^3}\frac{2\mu^2-(mc^2)^2}{\sqrt{\mu^2-(mc^2)^2}} \tag{23.89}$$

Deste modo, usando as eq. (23.86-23.89) e considerando apenas os dois primeiros termos do lado direito da eq. (23.86), obtemos

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{8\pi}{h^3c^3}\left[\int_{mc^2}^{\mu}\epsilon\sqrt{\epsilon^2-(mc^2)^2}d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\left(\frac{2\mu^2-(mc^2)^2}{\sqrt{\mu^2-(mc^2)^2}}\right)\right] \\ &= \frac{8\pi}{h^3c^3}\left[\frac{(\epsilon^2-(mc^2)^2)^{3/2}}{3}\right| + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\left(\frac{2\mu^2-(mc^2)^2}{\sqrt{\mu^2-(mc^2)^2}}\right)\Bigg] \\ &= \frac{8\pi}{h^3c^3}\left[\frac{(\mu^2-(mc^2)^2)^{3/2}}{3} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\left(\frac{2\mu^2-(mc^2)^2}{\sqrt{\mu^2-(mc^2)^2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{23.90}$$

Para um gás não relativístico de elétrons podemos definir o potencial químico μ como

$$\mu_1 = \mu - mc^2 \qquad (\mu_1 \ll 1) \tag{23.91}$$

de modo que

$$\mu^2 \simeq (mc^2)^2 + 2\mu_1 mc^2 \tag{23.92}$$

Substituindo a expressão para μ^2 da eq. (23.92) na eq. (23.90) nos dá

$$n_e = \frac{32\pi(m\mu_1)^{3/2}}{3\sqrt{2}h^3}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^2\right] \tag{23.93}$$

Como $\mu_1/mc^2 \ll 1$, a eq. (23.94) transforma-se em

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} &= \frac{1}{\mu_0}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^2\right]^{2/3} \\ &\simeq \frac{1}{\mu_0}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]^{2/3} \end{aligned} \tag{23.94}$$

onde

$$\mu_0 = \left(\frac{h^2}{8m}\right)\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3} \tag{23.95}$$

Como μ_0 é equivalente à E_F da expressão (23.55). Como $\mu_0 \gg kT$, então

$$\mu_1 = \mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right] \tag{23.96}$$

Para um gás ultra-relativístico, $\mu \gg mc^2$ e a eq. (23.90) se torna

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu^3} &= \frac{1}{\mu_0^3}\left[1 + \pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] \\ &\simeq \frac{1}{\mu_0^3}\left[1 + \pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{23.97}$$

com $\mu_0^3 \equiv \mu_{T=0}^3 = 3n_e h^3 c^2/8\pi$.

23.8 Equilíbrio hidrostático

Mesmo para a estrela mais bem estudada só podemos obter 4 parâmetros: massa, luminosidade, raio e composição química das camadas externas. Podemos determinar a estrutura da estrela com esses parâmetros, porque dispomos de mais uma condição: a constância das estrelas por longos períodos de tempo. Mesmo as estrelas variáveis apresentam estabilidade da estrutura média por longos tempos. A existência de algas fósseis na Terra com mais de 1 bilhão de anos, e fósseis de até 3,5 bilhões de anos, são evidência de que a temperatura da Terra não pode ter mudado mais que aproximadamente 20° C. Portanto, o interior das estrelas precisa estar em perfeito equilíbrio.

Construiremos um conjunto de condições que precisam ser cumpridas em todas as camadas das estrelas. Ignoraremos perturbações como rotação, pulsação, distorção por forças de maré, e campos magnéticos de larga escala. Conseqüentemente, podemos assumir simetria esférica.

A primeira condição que precisa ser cumprida pelo interior estelar é a condição de equilíbrio hidrostático (mecânico): todas as forças atuando em qualquer elemento de volume dentro da estrela têm de ser compensadas exatamente, já que uma força resultante não-nula implicaria movimentos e, portanto, mudanças na estrutura. As únicas forças que precisamos considerar são a força gravitacional, para dentro, e a força de pressão, para fora.

Vamos considerar um elemento de volume cilíndrico, a uma distância r do centro da estrela, com seu eixo na direção do centro, com uma seção transversal ds e um comprimento dr. A força de pressão atuando sobre esse elemento, isto é, a diferença entre a força de pressão na parede interna e a força de pressão na parede externa é dada por:

$$-\frac{dP}{dr}dsdr$$

onde P é a pressão, que será uma função, monotonicamente decrescente, da distância r ao centro. A força gravitacional atuando sobre o mesmo volume será dada pela massa do volume vezes a aceleração gravitacional, isto é:

$$\rho\, dsdr\frac{GM_r}{r^2}$$

onde ρ é a densidade e G é a constante gravitacional. Expressamos a aceleração gravitacional em termos de M_r, que significa a massa em uma esfera de raio r, e pode ser expressa em termos da densidade como:

$$\boxed{M_r = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr} \tag{23.98}$$

Essa equação é chamada de *equação da massa*, ou *equação da continuidade*. Igualando as duas forças opostas, obtemos a condição de equilíbrio hidrostático:

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2}.} \tag{23.99}$$

Ou caso não haja simetria esférica

$$\vec{\nabla}P + \rho\vec{\nabla}\phi = 0$$

onde ϕ é o potencial gravitacional.

Se a pressão de radiação for importante, esta equação precisa incluir o momentum transferido pelo campo de radiação à matéria

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2} + \frac{1}{c}\int_0^\infty \kappa(\lambda)F(\lambda)d\lambda} \tag{23.100}$$

onde κ é o coeficiente de absorção, que descreve a probabilidade de que um fóton será ou absorvido ou espalhado, e F é o fluxo de energia transportado

por radiação por unidade de área. Mas este termo pode ser simplesmente incluído na pressão total.

As equações (23.98) e (23.99) são as duas primeiras das equações que governam a estrutura estelar. Sozinhas, elas são claramente insuficientes para determinar com unicidade como a pressão, densidade e massa variam com a distância ao centro da estrela. Mas elas permitem obter uma estimativa da ordem de grandeza da pressão e temperatura que vamos encontrar. Vamos aplicar a equação de equilíbrio hidrostático (23.99) para um ponto no meio do Sol. Podemos usar, para uma primeira estimativa, a densidade média do Sol

$$\overline{\rho_\odot} = \frac{3M_\odot}{4\pi {R_\odot}^3} = 1,39\,\mathrm{g\,cm^{-3}},$$

para $M_r = (1/2)M_\odot$, a metade da massa do Sol, $M_\odot = 1,989 \times 10^{33}\,\mathrm{g}$, e para $r = (1/2)R_\odot$ a metade do raio do Sol, $R_\odot = 696\,000\,\mathrm{km}$. Além disso, para o lado esquerdo da equação (23.99), podemos usar $dr = R_\odot$, para $dP = P_{\mathrm{centro}} - P_{\mathrm{superf}}$, e assumirmos $P_{\mathrm{superf}} \ll P_{\mathrm{centro}}$. Usando $G = 6,67 \times 10^{-8}\,\mathrm{dina\,cm^2\,g^{-2}}$, obtemos:

$$\frac{P_{\mathrm{centro}}}{R_\odot} = \frac{GM_\odot/2}{R_\odot^2/4}\overline{\rho_\odot}$$

$$P^\odot_{\mathrm{centro}} \approx 2\overline{\rho_\odot}\frac{GM_\odot}{R_\odot} = 5,3 \times 10^{15}\,\mathrm{dina\,cm^{-2}}$$

usando unidades c.g.s.

No sistema c.g.s., a gravidade de uma estrela de massa M em um ponto r é dada por:

$$g(r) = \frac{GM_r}{r^2} = 2,74 \times 10^4 \left(\frac{M_r}{M_\odot}\right)\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-2}\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$$

Dessa estimativa de pressão, podemos imediatamente estimar a temperatura, se usarmos a equação de estado de um gás ideal, que, como demonstraremos depois, é válida para a maioria das estrelas. A equação do gás ideal pode ser escrita como

$$\boxed{P = NkT = \frac{k}{m}\rho T} \tag{23.101}$$

onde T é a temperatura, k a constante de Boltzmann, e m o peso molecular médio, já que $N = \rho/m$. Para m, podemos usar a metade da massa do próton, já que o hidrogênio é o elemento mais abundante, e para hidrogênio

ionizado, um próton e um elétron atuam como duas partículas com massa média de meia massa do próton já que $m_e \ll m_p$.

Para o caso geral,

$$P = P_{\text{gás}} + P_{\text{rad}},$$

isto é, precisamos levar em conta a pressão do gás e a pressão de radiação, mas no interior de estrelas de baixa massa, como o Sol,

$$P_{\text{rad}} \ll P_{\text{gás}},$$

e podemos desprezá-la. Aplicando para a pressão central do Sol, ainda usando a densidade média do Sol, obtemos:

$$T^{\odot}_{\text{centro}} \approx 10^7\,\text{K}.$$

Isto é, encontramos uma temperatura típica no interior do Sol de 10 milhões de Kelvin.

Com essas estimativas podemos ver o cenário em que temos de trabalhar; a esta temperatura, o máximo da função de Planck está em 2,9 Å. Os gases estão muito quentes para conter qualquer composto químico, e quentes o suficiente para estarem altamente ionizados. Não precisamos, portanto, considerar a física complexa de sólidos e líquidos. O hidrogênio e o hélio, principais constituintes, estão completamente ionizados e aparecerão como prótons, elétrons, e partículas α.

Antes de assumir estrita obediência ao equilíbrio hidrostático, vamos estimar qual é o custo da desobediência. Vamos assumir que, em algum lugar da estrela, a aceleração gravitacional não é estritamente balançada pela força de pressão, deixando uma fração f não-balançada. O material, então, será acelerado por uma quantia:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f\frac{GM_r}{r^2}$$

Podemos resolver essa equação para o valor de dt em que a aceleração não-balançada causa um deslocamento $dr = fR_{\odot}$. Assumindo um movimento retilíneo uniformemente acelerado,

$$dr = \frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2}dt^2 \equiv fR_{\odot}$$

Logo, para o ponto no meio do Sol:

$$\tau_{\text{din}} \equiv dt = \left(\frac{2fR_{\odot}}{d^2r/dt^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(G\frac{M_{\odot}}{R^3_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\tau_{\rm din} \equiv \frac{1}{(G\bar{\rho})^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\tau_{\rm din}^{\odot} \approx= 10^3\,{\rm s} = \frac{1}{4}\,{\rm hr}$$

Isto é, qualquer desequilíbrio da condição de equilíbrio hidrostático causa deslocamentos grandes e rápidos. Esse tempo é chamado de tempo de queda livre, ou tempo dinâmico. Portanto, uma falta de equilíbrio leva a mudanças significativas no raio da estrela. Como a temperatura na Terra não variou, o raio do Sol não mudou significativamente durante bilhões de anos, tendo sido satisfeita, com alta precisão, a equação de equilíbrio hidrostático.

23.9 Reserva de energia de uma estrela

Assegurar equilíbrio hidrostático não é suficiente para assegurar a estabilidade de uma estrela. O equilíbrio térmico também precisa ser considerado. Um equilíbrio térmico perfeito só é atingido por um sistema se todas as partes têm a mesma temperatura e não existe qualquer fluxo de energia entre suas partes. Esse equilíbrio perfeito certamente não ocorre no interior de uma estrela. Vimos que a temperatura no interior do Sol é da ordem de 10 milhões de Kelvin, enquanto a temperatura nas camadas superficiais é da ordem de 5400 K. Além disso, medimos um fluxo de energia saindo das camadas superficiais, a luminosidade do Sol. A existência desse fluxo significa desvio do equilíbrio térmico perfeito.

Que tipo de equilíbrio térmico atua no interior de uma estrela? Para responder a essa pergunta, precisamos primeiro encontrar as fontes de energia que mantêm o fluxo através da superfície (fotosfera). Precisamos considerar três tipos de energia: energia térmica, E_T, energia potencial gravitacional, E_G, e energia nuclear, E_N. As duas primeiras podem ser representadas por uma simples integral sobre a estrela:

$$E_T = \int_0^R \left(+\frac{3}{2}\frac{k}{m}T\right)\rho 4\pi r^2 dr = +\overline{\frac{3k}{2m}T} \times M_\odot \approx +5\times 10^{48}\,{\rm ergs} \quad (23.102)$$

$$E_G = \int_0^R \left(-\frac{GM_r}{r}\right)\rho 4\pi r^2 dr = -\overline{\frac{GM_r}{r}} \times M_\odot \approx -4\times 10^{48}\,{\rm ergs} \quad (23.103)$$

O termo entre parêntesis na equação (23.102) representa a energia térmica de um gás ideal, monoatômico, por grama de matéria, enquanto o termo

entre parêntesis na equação (23.103) representa a energia necessária para mover um grama de matéria de sua posição na estrela até o infinito, depois que todas as outras camadas externas da estrela já foram removidas. O valor numérico cotado nas equações é uma estimativa da ordem de grandeza das duas energias, usando os valores anteriores para o Sol.

Não é por acidente que as estimativas das duas energias são tão parecidas. A igualdade segue diretamente da equação de equilíbrio hidrostático; multiplicando a equação (23.99) por $4\pi r^3$ e integrando sobre a estrela, obtemos:

$$\int_0^R dP \times 4\pi r^3 = -\int_0^R \rho G M_r 4\pi r dr$$

Integrando por partes o termo da esquerda, isto é:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

e usando $u = 4\pi r^3$ e $dv = dP$, obtemos:

$$\int_0^R 4\pi r^3 dP = P4\pi r^3 \Big|_0^R - \int_0^R 3P4\pi r^2 dr$$

O primeiro termo à direita pode ser desprezado porque, no interior, o raio é nulo e, na superfície, a pressão é insignificante. Logo:

$$\boxed{\int_0^R 3P4\pi r^2 dr = \int_0^R \rho \frac{GM_r}{r} 4\pi r^2 dr} \tag{23.104}$$

que é o Teorema do Virial da dinâmica clássica, ou virial de Clausius, em honra ao seu proponente, o alemão Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888). Identificando o termo da direita com o negativo da energia gravitacional, $-E_G$ e usando a equação de estado de um gás ideal (23.101) $P = \frac{\rho}{m} kT$:

$$\int_0^R 3P4\pi r^2 dr = 2\int_0^R \frac{3}{2}\frac{kT}{m}\rho 4\pi r^2 dr = 2E_T$$

obtemos:

$$\boxed{2E_T = -E_G} \tag{23.105}$$

Naturalmente, os valores obtidos nas equações (23.102) e (23.103) não são exatamente múltiplos, pois são apenas estimativas de grandeza.

Embora tenhamos derivado a relação entre as energias, essa relação também é valida para a variação das energias, como pode ser visto diferenciando-se a equação (23.105). Para uma estrela em contração, a energia

gravitacional decresce continuamente. Exatamente metade desse decréscimo de energia será compensado por um aumento na energia térmica, de acordo com a relação (23.105). A outra metade será perdida por radiação pela superfície. Dessa forma, a quantidade de energia passível de perda por radiação é somente igual à energia térmica. Por quanto tempo essa reserva de energia pode suprir a energia irradiada pela superfície? Nossas estimativas numéricas para o Sol podem ser usadas para calcular esse tempo, chamado de *tempo de contração de Kelvin*,

$$t_K = \frac{E_T^{\odot}}{L_{\odot}} \approx 10^{15}\,\mathrm{s} = 3 \times 10^7\,\mathrm{anos}$$

já que $L_{\odot} = 3,847 \times 10^{33}$ ergs/s. Esse tempo, também chamado de tempo de Kelvin-Helmholtz, em honra ao irlandês *Lord* William Thomson, Barão Kelvin (1824-1907), e ao alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894), é muito curto, mesmo se comparado com o intervalo de tempo desde o aparecimento de algas na Terra. Portanto, concluímos que a energia térmica e gravitacional de uma estrela não são suficientes para suprir a perdas pela superfície durante a vida de uma estrela, embora possam ser importantes em fases curtas e críticas da evolução estelar.

Nessa derivação, a energia térmica, E_T, foi definida como a energia cinética translacional e não inclui a energia dos graus de liberdade internos, como rotação, vibração ou excitação. Do virial, obtemos:

$$E_{\mathrm{total}} = E_T + E_G = \frac{1}{2}E_G$$

Essa relação, e (23.105), *só são estritamente válidas para um gás em que o coeficiente adiabático* $\gamma = \frac{5}{3}$, onde

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}}$$

e c_p e c_v são os calores específicos a pressão constante e a volume constante, como a equação do gás ideal. O conceito de calor específico foi desenvolvido por Joseph Black (1728-1799). Para uma equação de estado adiabática geral, definida como:

$$d\ln P \equiv \gamma d\ln \rho$$

e como derivaremos na equação (23.138) na página 330:

$$P = (\gamma - 1)\rho E_T^{\mathrm{part.}} \tag{23.106}$$

podemos calcular a energia cinética total do gás K, já que:

$$K \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \vec{p_i} \cdot \vec{v_i}$$

Para um gás isotrópico,

$$P = \frac{1}{3} \int_p n(p) \vec{p_i} \cdot \vec{v_i} d^3 p$$

Portanto, se integramos sobre o volume, para incluir todas as partículas,

$$2K = 3 \int_V P dV \tag{23.107}$$

Como

$$dM_r = \rho d \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$2K = 3 \int_M \frac{P}{\rho} dM_r \tag{23.108}$$

e o teorema de virial, equação (23.104), pode ser escrito como:

$$2K = -E_G$$

Como, substituindo-se (23.106) em (23.107):

$$2K = 3(\gamma - 1) \int_V \rho E_T^{\text{part}} dV = 3(\gamma - 1) E_T$$

ou

$$K = \frac{3}{2}(\gamma - 1) E_T,$$

onde K é a energia cinética total. Dessa forma, vemos que $E_T = K$ somente se $\gamma = \frac{5}{3}$. A energia total pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_T + E_G \\ &= \frac{2K}{3(\gamma - 1)} + E_G \\ &= -\frac{E_G}{3(\gamma - 1)} + E_G \end{aligned}$$

e, finalmente:

$$\boxed{E_{\text{total}} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_G.} \tag{23.109}$$

Para um gás de Fermi completamente relativístico, $\gamma = \frac{4}{3}$ e, nesse caso, toda a variação de energia gravitacional transforma-se em energia interna, sem que a estrela precise irradiar. Como a energia total é dada por (23.109), se $\gamma = \frac{4}{3}$ a energia total é nula, e massa é perdida pela estrela (camadas externas ejetadas). Como $\gamma = \frac{4}{3}$ também para fótons, uma estrela dominada pela pressão de radiação efetivamente ejeta suas camadas externas. Esse fato é o que limita a massa superior das estrelas, próximo de 100 $M_\odot$. A ionização também pode fazer γ decrescer abaixo de 4/3 nas regiões de ionização, causando instabilidades.

23.9.1 Algumas relações termodinâmicas

Seja uma variação infinitesimal de calor dQ. A primeira lei da termodinâmica é normalmente escrita como:

$$dQ = TdS = dE_T + PdV \tag{23.110}$$

S é a entropia, definida por Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888), em 1865, como uma medida da desordem do sistema. Um sistema em equilíbrio termodinâmico, isto é, em equilíbrio mecânico e com todas as partículas representadas pela mesma temperatura, está em balanço detalhado, isto é, todos os processos são balançados exatamente por processos inversos. Esse sistema, em equilíbrio termodinâmico real não irradia, e tem a entropia máxima. A função $E = E_T$ é chamada de *energia interna do sistema.* Podemos escrever a equação (23.110) também como

$$dQ = TdS = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + PdV \tag{23.111}$$

ou seja

$$dQ = TdS = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right] dV + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT \tag{23.112}$$

A unidade de calor é chamada Carnot (Ct), em honra ao físico francês Sadi Nicolas Lionard Carnot (1796-1832). 1 Ct = 1 Joule/Kelvin é a quantidade de calor necessário para derreter um centímetro cúbico de gelo.

O conceito de entropia está intimamente ligado ao conceito de calor. Quando um sistema recebe entropia (calor), ele recebe energia. Se um corpo a uma temperatura T recebe entropia (S), ele absorve energia (E) equivalente ao produto da temperatura pela entropia.

$$\Delta E = T\Delta S$$

A entropia (calor) pode ser transportada, armazenada e criada. A entropia (calor) pode ser produzida mas não pode ser destruída; ela se redistribui para lugares mais frios. A entropia é o transportador da energia em processos térmicos. Ela pode ser criada em processos irreversíveis, como queima, fricção, transporte de calor. A quantidade de energia usada na criação de entropia é dita dissipada.

Um corpo conduzindo calor (entropia) produz mais entropia ao mesmo tempo.

A relação entre a entropia macroscópica de Rudolf Clausius e os estados microscópicos de um sistema foi feita pelo físico austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906), com sua teoria estatística de não equilíbrio, irreversível e não simétrica no tempo. Cada estado microscópico de um sistema macroscópico tem uma entropia definida por

$$S = k \log W$$

onde

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$$

e W é o volume do espaço de fases associado ao estado macroscópico, isto é, o número de possíveis estados microscópicos associados a um estado macroscópico (número de estados com mesma energia e portanto igualmente acessíveis). A entropia aumenta quando o espaço de fases aumenta[4].

A entropia em um ponto pode ser calculada usando-se

$$S = (E + PV - VN\mu)/T \tag{23.113}$$

usando-se μ como o potencial químico sem a massa de repouso ($\mu = \mu_{\text{total}} - mc^2$) e $V \equiv 1/\rho$.

Para um gás de partículas extremamente relativísticas, como fótons e neutrinos, em expansão adiabática, se assumirmos que seu potencial químico é nulo, temos que a energia por unidade de volume é dada por $u = aT^4$ e

$$S = \frac{4aT^3}{3\rho}$$

[4]O estado inicial do Universo tinha menor entropia e, portanto, o físico americano Richard Philips Feynman (1918-1988) propôs que "é preciso adicionar às leis físicas a hipótese de que o Universo era mais ordenado, em um sentido técnico, no passado do que é atualmente ... para dar sentido à irreversibilidade". O físico brasileiro Constantino Tsallis propõe uma mecânica estatística mais abrangente, que leva em conta a impossibilidade de se separar completamente (isolar) sistemas interagentes por forças de longa alcance, como gravitacionais ou eletromagnéticas. Nesta teoria, a entropia não é simplesmente aditiva.

onde ρ é a densidade de matéria. A entropia de fótons por núcleon é dada por

$$\frac{S_\gamma}{N_A k} = \frac{1,213 \times 10^{-22} T^3}{\rho}$$

para temperaturas em K e densidades em g/cm^3. No núcleo de uma estrela de 25 $M_\odot$, esta razão $\frac{S_\gamma}{N_A k}$ varia de 1 quando está queimando o hidrogênio e o hélio, para 0,4 durante a queima do carbono, chegando a 0,01 durante a queima do oxigênio e silício.

Para um gás de Fermi-Dirac não relativístico e não degenerado,

$$\rho T S = N \left(\frac{5}{2} kT - \mu \right) \tag{23.114}$$

Para um gás de elétrons degenerado

$$S_e \simeq N_A k \frac{X_e}{A} \pi^2 \frac{kT}{E_F} \tag{23.115}$$

Em um núcleo de ^{56}Ni próximo do colapso, $\rho \simeq 5 \times 10^9$ g cm^{-3}, $T \simeq 7,5 \times 10^9$ K, $X_e/A \simeq 0,42$, $E_F \simeq 5$ MeV, $S_\gamma \simeq 0,022 N_A k$, $S_e \simeq 0,525 N_A k$ e $S_i \simeq 0,347 N_A k$, de modo que $S \simeq 0,93 N_A k$. A entropia não se altera muito durante o colapso.

Exatidão

A equação (23.110) foi escrita da forma

$$dQ = X(x,y)dx + Y(x,y)dy \tag{23.116}$$

Se dQ é exato, isto é, pode ser escrita da forma geral

$$dQ = d\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy \tag{23.117}$$

então, comparando com a equação (23.116), podemos identificar

$$X(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad Y(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tag{23.118}$$

e se

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x} \longrightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{23.119}$$

a diferencial $\sigma(x,y)$ é *exata* e sua integral independe do caminho de integração. A energia interna de um sistema E e a entropia são funções somente das variáveis do sistema, isto é, são exatas, mas a integral de dQ depende da maneira em que o processo é executado.

Relação de reciprocidade

Se um sistema está em equilíbrio termodinâmico, sua entropia é máxima e, portanto, uma mudança infinitesimal no sistema tem de ser quase-estática, ou *reversível* e, portanto, com $dS = 0$.

Da equação (23.112) vemos que

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right] dV + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT \tag{23.120}$$

Como dS é exata, usando a relação (23.119) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V\right] \tag{23.121}$$

que, após a diferenciação, se reduz a:

$$\boxed{\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P} \tag{23.122}$$

que nos dá a dependência da energia interna E com o volume, para temperatura constante.

Caso geral

Mas, no caso geral, em que existe alteração nos constituintes do gás:

$$\boxed{dE_T = \left(\frac{\partial E_T}{\partial S}\right)_{v,N} dS + \left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_{s,N} dV + \sum_i \left(\frac{\partial E_T}{\partial N_i}\right)_{s,v} dN_i}$$

já que a energia total E_T inclui todos os tipos relevantes de energia, inclusive a energia latente das reações *químicas* que, no nosso caso, inclui reações nucleares. Como

$$\boxed{\left(\frac{\partial E_T}{\partial S}\right)_{v,N} = T} \quad \boxed{\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_{s,N} = -P} \quad \boxed{\left(\frac{\partial E_T}{\partial N_i}\right)_{s,v} = \mu_i}$$

onde μ é o potencial químico e a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$\boxed{TdS = dE_T + PdV - \sum_i \mu_i dN_i}$$

A condição de equilíbrio químico (e a de equilíbrio termodinâmico) requer

$$\boxed{\sum_i \mu_i dN_i = 0}$$

Os calores específicos a volume constante c_v, e a pressão constante, c_p, por unidade de massa, são definidos como:

$$\boxed{c_v \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v} \quad \text{e} \quad \boxed{c_p \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p}$$

Se o peso molecular médio é representado por μ,

$$P = \frac{\Re}{\mu}\rho T \longrightarrow E_T = c_v T$$

e

$$dQ = \left(c_v + \frac{\Re}{\mu}\right) dT - V dP \longrightarrow c_p \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = c_v + \frac{\Re}{\mu}$$

$\Re \equiv N_A k = 8,314511 \times 10^7 \,\mathrm{ergs\,K^{-1}\,mol^{-1}} = 8,314511\,\mathrm{J,K^{-1}\,mol^{-1}}$ é a constante universal do gás por mol, $N_A = 6,0221367 \times 10^{23}\,\mathrm{mole^{-1}}$ é o número de Avogadro e a lei do gás ideal é expressa como $PV = \Re T = \frac{\Re}{\mu}\rho T$.

Se as partículas são consideradas como pontuais, só possuem três graus de liberdade e, para os casos não-relativístico (N.R.) e extremamente relativístico (E.R.), e a energia térmica, por partícula, é dada por (eq. 23.14 e 23.19):

$$E_T^{\text{part.}} = \frac{3}{2}kT \quad \text{(N.R.)} \quad \text{ou} \quad E_T^{\text{part.}} = 3kT \quad \text{(E.R.)}$$

e por unidade de massa:

$$E_T = \frac{N_A}{\mu} E_T^{\text{part.}}$$

$$E_T = \frac{3}{2}\frac{\Re}{\mu}T \quad \text{(N.R.)} \quad \text{ou} \quad E_T = 3\frac{\Re}{\mu}T \quad \text{(E.R.)}$$

onde μ é o peso molecular médio. Como, assumindo equilíbrio químico, a primeira lei da termodinâmica (23.110), com $dV = 0$ resulta em

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \longrightarrow c_v = \left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_v$$

obtemos

$$c_v = \frac{3}{2}\frac{\Re}{\mu} \quad \text{(N.R.)} \quad \text{ou} \quad c_v = 3\frac{\Re}{\mu} \quad \text{(E.R.)}$$

e como $c_p = c_v + \Re/\mu$,

$$c_p = \frac{5}{2}\frac{\Re}{\mu} \quad \text{(N.R.)} \quad \text{ou} \quad c_p = 4\frac{\Re}{\mu} \quad \text{(E.R.)}$$

e

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \text{(N.R.)} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{4}{3} \quad \text{(E.R.)}$$

Uma relação adiabática é definida como:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const.} \longrightarrow \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{const.}$$

Definindo-se também:

$$\boxed{\Gamma_1 \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S} \qquad \boxed{(\Gamma_3 - 1) \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S} \tag{23.123}$$

$$\boxed{\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1}} \tag{23.124}$$

e o *expoentes na equação de estado*:

$$\chi_\rho \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_{T,\mu} \qquad \chi_T \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_{\rho,\mu} \qquad \chi_\mu \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \mu}\right)_{T,\rho} \tag{23.125}$$

onde μ é o peso molecular.

Pelas definições dos expoentes, e assumindo-se equilíbrio químico, isto é, peso molecular constante, ($d\mu = 0$):

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = -\frac{\rho}{T}\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \tag{23.126}$$

Como, usando a regra da derivação em cadeia:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho dT\right] + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P dT \tag{23.127}$$

ou seja, se ρ é constante:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P \tag{23.128}$$

de onde obtemos:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\rho - \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho \tag{23.129}$$

Sabemos que, em equilíbrio químico, a *primeira lei* pode ser escrita

$$dQ = dE + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = dE - \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{23.130}$$

podemos obter

$$c_p \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P - \frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \tag{23.131}$$

podemos usar a equação (23.126) para escrever a equação (23.131) como:

$$c_p = c_v - \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho + \frac{P}{\rho^2}\frac{\rho}{T}\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \tag{23.132}$$

que também pode ser escrito como

$$\begin{aligned} c_p &= c_v - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho + \frac{P}{\rho^2}\frac{\rho}{T}\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \\ &= c_v - \frac{E}{T}\left(\frac{\partial \ln E}{\partial \ln \rho}\right)_T \frac{\chi_T}{\chi_\rho} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\rho}{T}\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \end{aligned} \tag{23.133}$$

Podemos, finalmente, utilizar a relação de reciprocidade (equação 23.122) para escrever

$$\left(\frac{\partial \ln E}{\partial \ln \rho}\right)_T = -\frac{P}{\rho E}\left(\chi_T - 1\right) \tag{23.134}$$

e obter a relação geral entre os calores específicos:

$$\boxed{c_p - c_v = \frac{P}{\rho T}\frac{\chi_T^2}{\chi_\rho}} \tag{23.135}$$

Como *para um gás ideal*

$$P = \frac{\Re}{\mu}\rho T$$

obtemos que $\chi_T = \chi_\rho = 1$ e

$$c_p - c_v = \frac{\Re}{\mu} \tag{23.136}$$

$$\gamma - 1 = \frac{\Re}{\mu}\frac{1}{c_v} \tag{23.137}$$

e como

$$c_v = \left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_v$$

obtemos que para composição química constante:

$$E_T = c_v T = \frac{(\Re/\mu)T}{\gamma - 1}$$

e usando

$$\frac{\Re}{\mu}T = (\gamma - 1)E_T$$

obtemos

$$\boxed{P = (\gamma - 1)\rho E_T} \tag{23.138}$$

No caso geral

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{\chi_T}{\chi_\rho}(\Gamma_3 - 1) = \frac{\Gamma_1}{\chi_\rho} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\chi_\rho}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \tag{23.139}$$

e como

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{d\ln P}{d\ln \rho}\right)_{\rm ad}$$

uma expansão adiabática terá:

$$\boxed{d\ln P = \Gamma_1 d\ln\rho} \tag{23.140}$$

Para um gás de fótons ocupando um volume V, $E = aT^4V$ e $P_R = \frac{1}{3}aT^4$. Deste modo

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 4aT^3V$$

$$\chi_\rho = -\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln V}\right)_T = 0$$

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_V = 4$$

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{PV\chi_T}{c_V T} = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_1 = \chi_\rho + \chi_T(\Gamma_3 - 1) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} = 4$$

de modo que

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{4}{3}$$

mas

$$\gamma = \frac{c_P}{c_v} = \frac{\Gamma_1}{\chi_\rho} = \infty$$

Lembrando que para um gás de férmions temos:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p^3 v_p dp}{\exp\left[\left(E - E_F\right)/kT\right] + 1}$$

$$n = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left[\left(E - E_F\right)/kT\right] + 1}$$

$$E = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{E_{\text{part}} p^2 dp}{\exp\left[\left(E - E_F\right)/kT\right] + 1}$$

e que para um gás não relativístico $E_{\text{part}} = \frac{p^2}{2m}$. Definimos

$$\alpha \equiv -\frac{E_F}{kT}$$

e obtivemos para o caso da degenerescência parcial:

$$P_e = \frac{8\pi kT}{3h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}}(\alpha)$$

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

$$E_e = \frac{4\pi kT}{h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}}(\alpha)$$

logo

$$E_e = \frac{3}{2} P_e$$

Como a pressão do gás de elétrons degenerados mas não relativísticos é dada por

$$P_e = \frac{2}{5} n_e E_F^0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]$$

e a densidade de elétrons dada por

$$n_e = \frac{32\pi \left(mE_F\right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}h^3}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]$$

com a energia de Fermi (sem a massa de repouso) dada por

$$\frac{1}{E_F} = \frac{1}{E_F^0}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \simeq \frac{1}{E_F^0}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

onde

$$E_F^0 = \left(\frac{h^2}{8m}\right)\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

é a energia de Fermi à temperatura zero. Se o gás está degenerado, a energia de Fermi é muito maior do que kT e

$$E_F = E_F^0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]$$

Desta maneira

$$\frac{E_e}{n_e} = \frac{3}{5}E_F\frac{\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]}$$

Expandindo os termos dependentes em temperatura em termos de $\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2 \ll 1$ obtemos

$$E_e = \frac{3}{5}n_eE_F\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right] \simeq \frac{3}{5}n_eE_F^0\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right]$$

e obtemos a capacidade térmica dos elétrons a volume constante

$$c_v = \left(\frac{dE_e}{dT}\right)_V = \frac{\pi^2}{2}\frac{n_ek^2T}{E_F}$$

para um gás degenerado mas não relativístico e, portanto, o calor específico por elétron:

$$c_v^e = \frac{1}{n_e}\left(\frac{dE_e}{dT}\right)_V = \frac{\pi^2k}{2}\frac{kT}{E_F}$$

$$c_V = \frac{8\pi^3 m^4 c^5}{3h^3 T \left(\frac{mc^2}{kT}\right)^2} \frac{p_F}{mc} \left[\left(\frac{p_F}{mc}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $p_F^2 = 2mE_F$. Para um gás degenerado e ultra-relativístico.

$$c_v = \left(\frac{dE_e}{dT}\right)_V = 3\pi^2 \frac{n_e k^2 T}{E_F}$$

23.9.2 Energia nuclear

O último tipo de reserva de energia é a nuclear. A temperatura no interior das estrelas é alta o suficiente para manter fusão nuclear de elementos leves. Reações nucleares liberam energia proveniente do equivalente de massa dos núcleos envolvidos. Poder-se-ia supor que a energia nuclear total de uma estrela fosse Mc^2, mas essa é uma super-estimativa, pois essa energia somente seria irradiada se a estrela fosse totalmente aniquilada. Essa aniquilação não ocorre às temperaturas encontradas nas estrelas. Portanto, somente precisamos considerar reações nucleares que transmutam um elemento químico em outro. A energia liberada nesses processos é equivalente à diferença de massa, que é muito menor do que a massa total dos núcleons. A máxima diferença de massa ocorre na transmutação de hidrogênio em ferro e corresponde a oito milésimos da massa dos núcleons envolvidos no processo.

Será que a reserva de energia nuclear em uma estrela se aproxima deste máximo teórico? Sim. Evidências espectroscópicas indicam que a maioria das estrelas é composta principalmente de hidrogênio, o combustível mais vantajoso para as estrelas. E, como produto final, pouca diferença faz se o hidrogênio é transformado em ferro, já que a transmutação em hélio libera uma diferença de massa de sete milésimos. Desse modo, o limite teórico dá uma boa aproximação da reserva de energia nuclear de uma estrela. Para o Sol, obtemos:

$$E_N^\odot = 0,008 c^2 M_\odot \approx 10^{52}\,\text{ergs}$$

que é mais de mil vezes superior às energias térmica e gravitacional. Para o Sol, essa reserva de energia pode suprir a perda por radiação por um intervalo de tempo de:

$$t_N = \frac{E_N^\odot}{L_\odot} \approx 3 \times 10^{18}\,\text{s} = 10^{11}\,\text{anos}$$

suficientemente longo. Eventualmente, a transmutação gradual dos elementos por fusão causa mudanças significativas na estrutura da estrela.

23.9.3 Ciclo próton-próton

Para temperaturas da ordem de $T \simeq 8 \times 10^6$ K, a transformação de hidrogênio em hélio se dá principalmente pelo ciclo p-p, com $\epsilon_{\mathrm{p-p}} \propto T^4$. O resultado total desse ciclo transforma

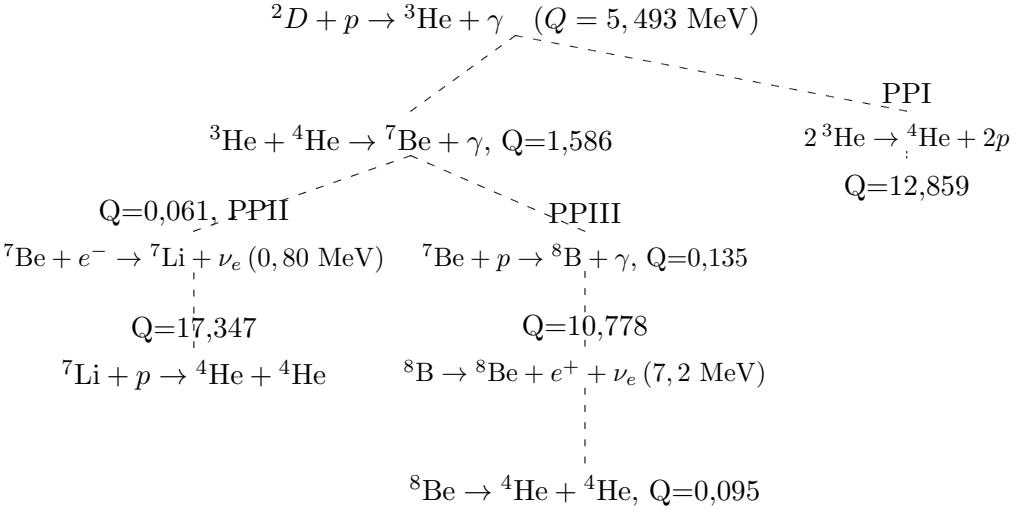
$$4\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$$

A diferença de energia de ligação é de $\Delta m\, c^2 = 26,731$ MeV, correspondendo a um *defeito* de massa de 0,71%.

As reações se dão por:

$$p + p \rightarrow {}^2\mathrm{D} + e^+ + \nu_e\,(0,263\ \mathrm{MeV}) \quad \big(Q \equiv \Delta m c^2 - E_\nu = 1,179\ \mathrm{MeV}\big)$$

$$(\text{ou } p + e^- + p^+ \rightarrow {}^2\mathrm{D} + \nu_e(1,44\ \mathrm{MeV}) \quad \text{Q=1,046 com pouca probabilidade})$$



O ciclo PPI tem $\sum Q = 26,20$ MeV, com dois neutrinos de energia média de 0,263 MeV cada (0,42 MeV máxima), enquanto o PPII tem $\sum Q = 25,67$ MeV, correspondendo a uma perda por neutrinos de 4%, com neutrinos de 0,80 MeV, além dos dois de 0,263 MeV. O ciclo PPIII, com $\sum Q = 19,2$ MeV, corresponde a uma perda por neutrinos de 28%, com neutrinos carregando 7,2 MeV, além dos dois de 0,263 MeV. No Sol, o PPI contribui com 85% da luminosidade, PPII com 15% e PPIII com 0,015%. A reação mais lenta é ${}^1\mathrm{H}(p, e^+\nu_e){}^2\mathrm{D}$, e a energia média liberada por próton é de 6,541 MeV.

Com uma média de energia por reação de 25 MeV $\simeq 4 \times 10^{-5}$ ergs/ciclo, uma luminosidade solar de $L \simeq 4 \times 10^{33}$ ergs/s, obtemos um total de neutrinos de:

$$\frac{L_\odot}{25 \text{ MeV}} = \frac{N_\nu}{2} \longrightarrow N_\nu = 2 \times 10^{38} \text{ neutrinos/segundo}$$

por queima de hidrogênio, que corresponde a um fluxo aqui na Terra de

$$F_T = \frac{N_\nu}{4\pi(1\text{UA})^2} = 6,8 \times 10^{10} \text{ neutrinos cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

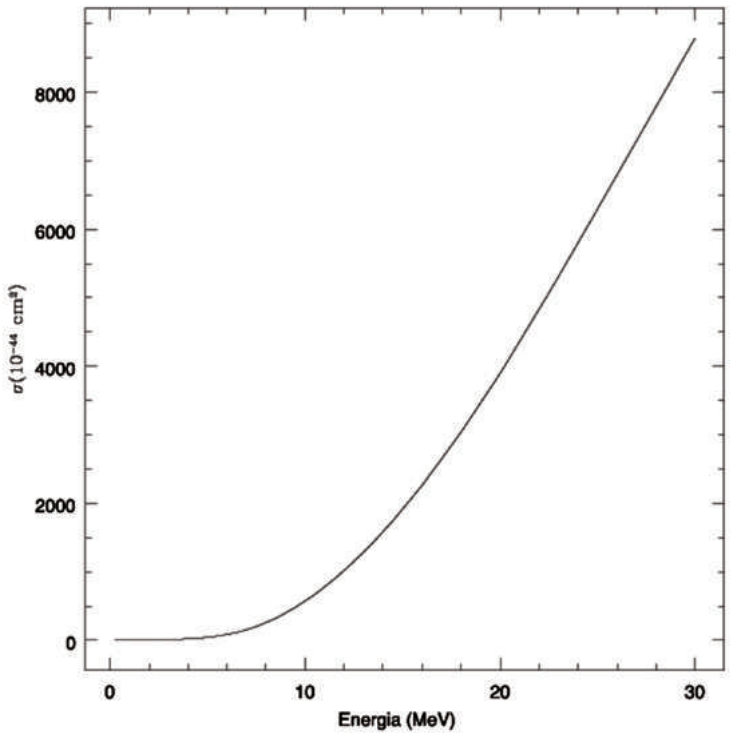


Figura 23.4: Secção de choque dos neutrinos sobre um alvo de gálio, de acordo com John Norris Bahcall (1934 - 2005), publicado em 1997 no *Physical Review C*, 56, 3391. Existem ressonâncias, como a do neutrino de 15,11 MeV sobre um alvo de ^{12}C, que leva a uma secção de choque medida de $(9,3 \pm 0,6) \times 10^{-42}$ cm^2.

Entretanto, como a seção de choque do neutrino é da ordem de:

$$\sigma_\nu \simeq \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2}\right)^2 2 \times 10^{-44} \mathrm{cm}^2$$

os neutrinos raramente interagem com a matéria. Por exemplo, considerando-se o número de partículas médias no Sol, $\langle n \rangle$, o livre caminho médio dos neutrinos

$$\ell = \frac{1}{\sigma \langle n \rangle} \simeq 10^9 \ R_\odot$$

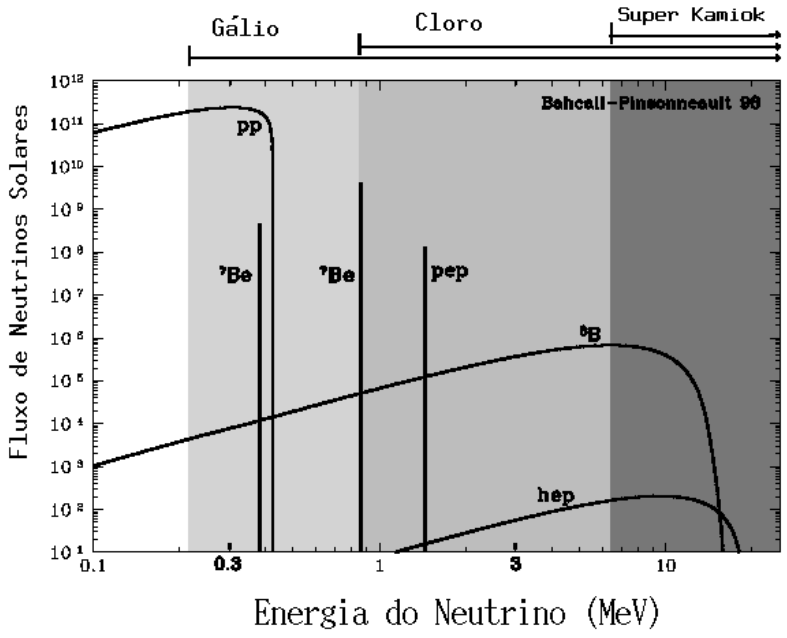


Figura 23.5: O espectro de energia dos neutrinos produzidos no Sol, de acordo com o modelo padrão de John Norris Bahcall e Marc H. Pinsonneault 1998, Review of Modern Physics. O fluxo está dado em contagens por cm^2. O ciclo p-p é responsável por 98% da taxa de geração de energia no modelo padrão do Sol. As flechas no topo do gráfico indicam a energia detectável nos experimentos em andamento.

Tabela 23.2: O problema do neutrino solar. SNU = 10^{-36} capturas/alvo/s.

Experimento	**Medida**	**Medida/ Teórico**	$E_{\min}$
Davis (Cloro)	$2,56 \pm 0,16$ SNU	$0,33 \pm 0,03$	0,814 MeV
Kamiokande (Čerenkov)	$(2,80 \pm 0,19) \times 10^{10}$ m^{-2}s^{-1}	$0,54 \pm 0,08$	7,5 MeV
SAGE (Gálio)	67 ± 7 SNU	$0,52 \pm 0,06$	0,233 MeV
Gallex	78 ± 6 SNU	$0,60 \pm 0,06$	0,233 MeV
Super-Kamiokande	$(2,42 \pm 0,04) \times 10^{10}$ m^{-2}s^{-1}	$0,470 \pm 0,008$	5,5 MeV

As observações indicam que a teoria eletrofraca de Glashow, Weinberg e Salam, que preve que os neutrinos não têm massa, está errada, pois indicam que há oscilação de neutrinos, isto é, durante sua trajetória do núcleo do Sol até a Terra, parte dos neutrinos de elétrinos ν_e emitidos nas reações, se transforma em neutrinos dos múons ν_μ e neutrinos de táons μ_τ, o que só é possível se, além de terem massas, as massas de diferentes tipos de neutrinos sejam diferentes.

23.9.4 Ciclo CNO

O ciclo CNO domina a queima de hidrogênio para $T_c \geq 18 \times 10^6$ K, isto é, para estrelas com massa maior do 1,2 $M_\odot$, usando o C e N como catalisadores, com $\epsilon_{\text{CNO}} \propto T^{20}$.

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\text{C} + p &\rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma \qquad (Q = 1,944 \text{ MeV}) \\
{}^{13}\text{N} &\rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e \, (0,710 \text{ MeV}) \qquad (Q = 1,511 \text{ MeV}) \\
{}^{13}\text{C} + p &\rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma \qquad (Q = 7,550 \text{ MeV})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{14}\text{N} + p &\rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma \qquad (Q = 7,290 \text{ MeV}) \\
{}^{15}\text{O} &\rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e \, (1,000 \text{ MeV}) \qquad (Q = 1,761 \text{ MeV}) \\
{}^{15}\text{N} + p &\rightarrow {}^{12}\text{C} + {}^{4}\text{He} \qquad (Q = 4,965 \text{ MeV})
\end{aligned}
$$

$$\sum Q = 25,02 \text{ MeV}$$

ou, com menor probabilidade:

$$^{15}\mathrm{N} + p \rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma \qquad (Q = 12,126 \text{ MeV})$$
$$^{16}\mathrm{O} + p \rightarrow {}^{17}\mathrm{F} + \gamma \qquad (Q = 0,601 \text{ MeV})$$
$$^{17}\mathrm{F} \rightarrow {}^{17}\mathrm{O} + e^{+} + \nu_e\,(0,94 \text{ MeV}) \qquad (Q = 2,762 \text{ MeV})$$
$$^{17}\mathrm{O} + p \rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + {}^{4}\mathrm{He} \qquad (Q = 1,193 \text{ MeV})$$

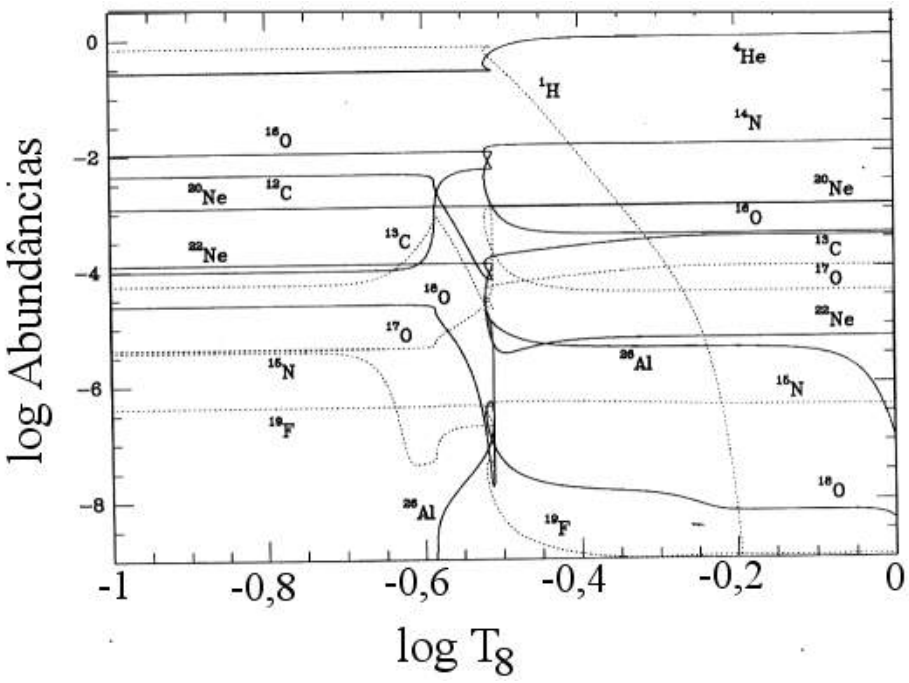


Figura 23.6: Evolução das abundâncias com a temperatura do núcleo para uma estrela com massa inicial de aproximadamente 25 $M_\odot$. $T_8 = T/10^8$ K.

23.9.5 Triplo–α

A reação triplo-α, foi proposta pelo americano Edwin Ernest Salpeter (1925 - 2008), fundindo três núcleos de hélio (partículas α) em um núcleo de carbono. Existe uma ressonância no núcleo composto do carbono, 7,65 MeV acima do estado fundamental, que permite que esta reação ocorra com taxas

significativas, conforme predito por *Sir* Fred Hoyle (1915 - 2001) e posteriormente observada. Para temperaturas acima de $T_c \simeq 10^8$ K, ocorre a queima do hélio, pelo processo chamado triplo-α, com $\epsilon_{3\alpha} \propto T^{40}$:

$$\begin{aligned} {}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} &\rightleftharpoons {}^8\mathrm{Be} + \gamma \quad Q = \ \ 92 \text{ KeV} \\ {}^8\mathrm{Be} + {}^4\mathrm{He} &\rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma \quad Q = -278 \text{ KeV} \\ {}^{12}\mathrm{C} + {}^4\mathrm{He} &\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma \quad Q = 7,1613 \text{ MeV} \end{aligned}$$

O ^{8}Be decai em 2 ^{4}He em um tempo de vida médio de $\tau = 0,067$ fentosegundos. A produção do oxigênio, por acréscimo de partícula α ao ^{12}C, $^{12}\mathrm{C}\,(\alpha,\gamma)\,^{16}\mathrm{O}$, só ocorre porque o princípio da incerteza permite que uma ressonância com energia um pouco abaixo do limite ocorra, quando classicamente seria proibida. A taxa desta reação tem sido muito difícil de determinar teoricamente. A próxima reação, $^{16}\mathrm{O}\,(\alpha,\gamma)\,^{20}\mathrm{Ne}$ é lenta para estas temperaturas, mas $^{14}\mathrm{N}\,(\alpha,\gamma)\,^{18}\mathrm{F}$ ocorre, seguida do decaimento de ^{18}F para ^{18}O. Acima de 6×10^8 K temos $^{18}\mathrm{O}\,(\alpha,\gamma)\,^{22}\mathrm{Ne}$, $^{22}\mathrm{Ne}\,(\alpha,\gamma)\,^{26}\mathrm{Mg}$ e, com menor probabilidade, $^{22}\mathrm{Ne}\,(\alpha,n)\,^{25}\mathrm{Mg}$. Durante a queima de hélio o processo s (*slow*) de lenta captura de nêutrons, produzidos na última reação citada, ocorre em estrelas massivas, produzindo os núcleons até o chumbo. Para as estrelas de massa entre 1 e 8 $M_\odot$ um forte processo s ocorre por interação entre as camadas que queimam hidrogênio e hélio.

23.9.6 Queima do carbono

Para estrelas acima de 8 massas solares, quando a temperatura central atinge $T \simeq 5 - 10 \times 10^8$ K:

$$\begin{aligned} {}^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} &\rightarrow \alpha + {}^{20}\mathrm{Ne} \quad (Q = 4,6168 \text{ MeV}) \\ {}^{16}\mathrm{O} + \alpha &\rightarrow \gamma + {}^{20}\mathrm{Ne} \\ {}^{20}\mathrm{Ne} + \alpha &\rightarrow \gamma + {}^{24}\mathrm{Mg} \\ {}^{24}\mathrm{Mg} + \alpha &\rightarrow \gamma + {}^{28}\mathrm{Si} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} &\rightarrow p + {}^{23}\mathrm{Na} \quad (Q = 2,2398 \text{ MeV}) \\ {}^{23}\mathrm{Na} + p &\rightarrow \alpha + {}^{20}\mathrm{Ne} \\ {}^{23}\mathrm{Na} + p &\rightarrow \gamma + {}^{24}\mathrm{Mg} \end{aligned}$$

$$^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} \rightarrow n + {}^{23}\mathrm{Mg} \quad (Q = -2,5993 \text{ MeV})$$

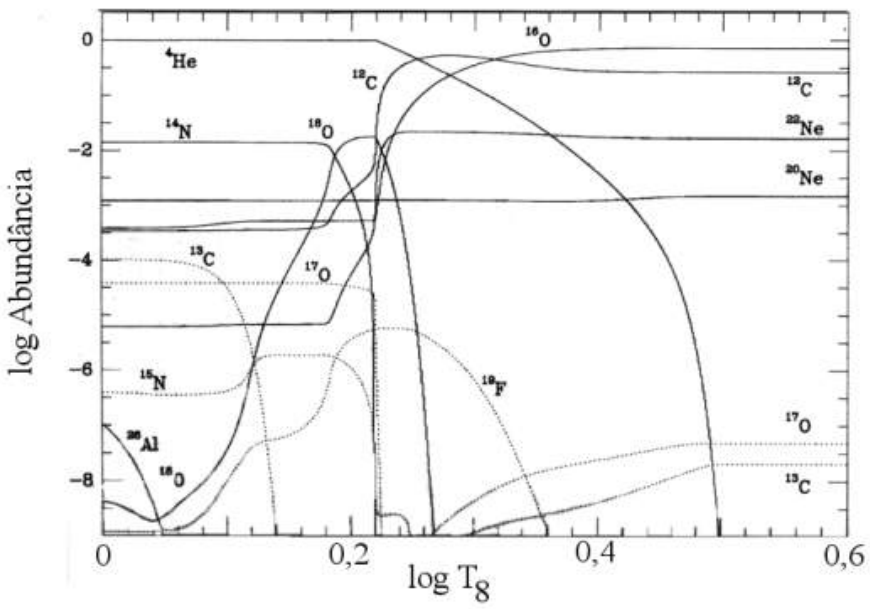


Figura 23.7: Evolução das abundâncias com a temperatura do núcleo para uma estrela com massa inicial de aproximadamente 25 $M_\odot$. $T_8 = T/10^8$ K.

e, com menor probabilidade:

$$\begin{aligned} {}^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} &\rightarrow {}^{24}\mathrm{Mg} + \gamma \quad (Q = 13,9313 \text{ MeV}) \\ &\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + 2\alpha \quad (Q = -0,1132 \text{ MeV}) \\ &\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + {}^{8}\mathrm{Be} \quad (Q = -0,2080 \text{ MeV}) \end{aligned}$$

Para $0,8 \leq T_9 \leq 1,0$, a queima do carbono se dá em equilíbrio hidrostático. Para $T_9 \simeq 2$ a queima ocorre em escala hidrodinâmica. Na explosão, o choque esquenta a matéria ainda não queimada, iniciando a queima e acelerando-a. O material queimado expande e esfria, interrompendo as reações termonucleares.

Para T=1–2 $\times 10^9$ K:

$$
\begin{aligned}
^{16}\mathrm{O} + {}^{16}\mathrm{O} \rightarrow {}^{32*}\mathrm{S} &\rightarrow \gamma + {}^{32}\mathrm{S} \quad (Q = 16,5410 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow \alpha + {}^{28}\mathrm{Si} \quad (Q = 9,5928 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow p + {}^{31}\mathrm{P} \quad (Q = 7,6770 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow n + {}^{31}\mathrm{S} \rightarrow {}^{31}\mathrm{P} + e^+ + \nu_e \quad (Q = 1,4531 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow 2p + {}^{30}\mathrm{Si} \quad (Q = 0,3795 \text{ MeV})
\end{aligned}
$$

Para T=3,4–3,7 $\times 10^9$ K:

$$
\begin{aligned}
^{12}\mathrm{C} + {}^{16}\mathrm{O} &\rightarrow \gamma + {}^{28}\mathrm{S} \quad (Q = 16,7544 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow p + {}^{27}\mathrm{Al} \quad (Q = 5,1691 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow \alpha + {}^{24}\mathrm{Mg} \quad (Q = 6,7697 \text{ MeV}) \\
&\rightarrow n + {}^{27}\mathrm{Mg} \quad (Q = -0,4230 \text{ MeV})
\end{aligned}
$$

Para $T \geq 5 \times 10^9$ K:

$$^{28}\mathrm{Si}(\alpha,\gamma)^{32}\mathrm{S}(\alpha,\gamma)^{36}\mathrm{A}(\alpha,\gamma)^{40}\mathrm{Ca}(\alpha,\gamma)^{44}\mathrm{Ti}(\alpha,\gamma)^{48}\mathrm{Cr}(\alpha,\gamma)^{52}\mathrm{Fe}(\alpha,\gamma)^{56}\mathrm{Ni}$$

$$
\begin{aligned}
^{56}\mathrm{Ni} + e^- \rightarrow \nu_e + {}^{56*}\mathrm{Co} \quad &\text{e} \quad {}^{56}\mathrm{Ni} \rightarrow e^+ + \nu_e + {}^{56*}\mathrm{Co} \\
{}^{56*}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Co} + \gamma & \\
^{56*}\mathrm{Co} + e^- \rightarrow {}^{56*}\mathrm{Fe} + \nu_e \quad &\text{e} \quad {}^{56*}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{56*}\mathrm{Fe} + e^+\nu_e \\
{}^{56*}\mathrm{Fe} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Fe} + \gamma &
\end{aligned}
$$

Tabela 23.3: Energia Liberada nas Reações Nucleares.

Processo	QN_A/A**(MeV/nucleon)**
4 $H \rightarrow {}^4$He	5 a 7
$3\alpha \rightarrow {}^{12}$C	0,606
$4\alpha \rightarrow {}^{16}$O	0,902
2 ^{12}C $\rightarrow {}^{24}$Mg	0,52
2 ^{20}Ne $\rightarrow {}^{16}$O + ^{24}Mg	0,11
2 ^{16}O $\rightarrow {}^{32}$S	0,52
2 ^{28}Si $\rightarrow {}^{56}$Ni	0 a 0,31

William Alfred Fowler (1911-1995) e *Sir* Fred Hoyle (1915-2001) propuseram em 1964, no *Astrophysical Journal Supplements*, 9, 201, que o processo de queima do silício preferencialmente sintetiza o ^{56}Ni porque a rápida

queima não permite decaimentos β suficientes para produzir o ^{56}Fe. Decaimentos β posteriores, enquanto a matéria ainda está quente, formam o ^{56}Fe. A solução da cadeia de reações simultâneas por James Wellington Truran, David Arnett (1940-) e Alastair Graham Walker Cameron (1925-2005), 1967, Canadian Journal of Physics, 45, 2315, demonstra que o ^{56}Ni é realmente dominante para matéria pouco abundante em nêutrons. Se os nêutrons são abundantes, o núcleo dominante passa para o ^{54}Fe, ^{56}Fe e finalmente ^{58}Fe, com o aumento do número de nêutrons. O fluxo de nêutrons depende da metalicidade do material.

23.10 Condição de equilíbrio térmico

Concluímos, na seção anterior, que a perda de energia na superfície por radiação é compensada pela liberação de energia por processos nucleares no interior da estrela.

Essa condição pode ser expressa como:

$$\boxed{L = \int_0^R \varepsilon \rho 4\pi r^2 dr} \tag{23.141}$$

onde ε é a energia liberada por processos nucleares, por unidade de massa e por unidade de tempo. A produção de energia nuclear ε depende da temperatura, densidade e composição.

Nosso tratamento da radiação pode ser macroscópico, isto é, não é necessário levar em conta os efeitos quânticos da radiação. A radiação é tratada como um fluido. Entretanto, quando tratarmos da interação da radiação com a matéria, precisaremos adotar uma descrição quântica. Será que a condição de equilíbrio térmico precisa ser satisfeita minuto a minuto, como a condição de equilíbrio hidrostático? Não. Se desligássemos a produção de energia nuclear do Sol, ele continuaria a brilhar, alimentando-se de sua energia gravitacional. Se tornássemos a ligar a geração de energia nuclear em um tempo menor do que o tempo de contração de Kelvin, o Sol não teria sido afetado seriamente pela interferência. Por esses períodos, as energias gravitacional e térmica agem como um reservatório. Entretanto, para tempos maiores do que o tempo de contração de Kelvin, a condição (23.141) precisa ser satisfeita.

A equação (23.141) garante o balanço de energia para a estrela como um todo. Mas o mesmo tipo de balanço tem de ser satisfeito em cada camada da estrela. Um ganho de energia por uma camada e uma perda de energia em

outra camada levaria à mudança na estrutura de temperatura no interior da estrela e, portanto, tornaria a estrela instável. Consideremos uma camada esférica de raio r e espessura unitária. O balanço de energia nessa camada pode ser escrito como:

$$\boxed{\frac{dL_r}{dr} = \varepsilon\rho 4\pi r^2} \tag{23.142}$$

onde L_r é o fluxo de energia através da esfera de raio r. O termo da esquerda dessa equação representa a perda líquida de energia da camada causada pelo excesso de fluxo deixando a superfície externa, em relação ao fluxo de energia entrando pela superfície interna. O termo da direita representa a energia produzida na camada por processos nucleares.

Uma derivação mais formal usa a definição de fluxo, $\vec{F}$, que é o vetor do fluxo de energia total (energia por unidade de área por unidade de tempo), e ε a energia total gerada perto do ponto r, por todas as fontes, por unidade de massa e por unidade de tempo. O estado estacionário (invariância) requer que:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho\varepsilon dV$$

onde $d\vec{s}$ é o elemento de área, e dV o elemento de volume. Pelo teorema da divergência,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho\varepsilon$$

Assumindo simetria esférica, $\vec{F}$ é somente radial, de modo que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 F\right) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(4\pi r^2 F\right) = \rho\varepsilon$$

Como $L_r \equiv 4\pi r^2 F$, temos:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon$$

reproduzindo a equação (23.142), que representa a terceira das condições básicas que devem ser obedecidas no interior da estrela.

A equação (23.142) precisa ser modificada para as fases curtas, mas críticas, da evolução estelar em que as mudanças da estrutura interna são tão rápidas que as variações nos dois reservatórios menores de energia estelar – térmica e gravitacional – são importantes. Nessas fases, não podemos esperar que o fluxo carregue para fora do volume exatamente a energia gerada por segundo por reações nucleares dentro do volume, como expresso pela relação (23.142). Espera-se que a energia perdida pelo fluxo, a energia gerada pelas

reações nucleares e o trabalho exercido pela pressão, juntos, determinem a taxa de mudança da energia interna do volume. A energia interna por unidade de massa de um gás ideal é dada por $\frac{3k}{2m}T$. O trabalho exercido pela pressão é dado por $-PdV$, onde o volume específico pode ser substituído pelo seu recíproco, a densidade. A energia nuclear liberada por unidade de massa, por unidade de tempo, é, por definição, ε. A perda líquida de energia, por uma camada esférica de espessura unitária, é dL_r/dr, que precisa ser dividida pela massa da camada, $4\pi r^2\rho$ para dar a perda por unidade de massa. Portanto:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}T\right) = -P\frac{dV}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL_r}{dr}$$

Como o volume específico V é dado por:

$$V \equiv \frac{1}{\rho} \longrightarrow dV = -\frac{1}{\rho^2}d\rho \longrightarrow -PdV = +\frac{P}{\rho^2}d\rho$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}T\right) = +\frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL_r}{dr}$$

Usando a equação de estado de um gás ideal (23.101), podemos escrever:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \longrightarrow \frac{k}{m}T = \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{\rho}\right) - \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL_r}{dr}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\rho^{\frac{2}{3}}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}}\right) &= \frac{3}{2}\rho^{\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \frac{P}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\rho^{-\frac{1}{3}}P\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\rho^{\frac{5}{3}}}\frac{d\rho}{dt} \\
&= \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}
\end{aligned}$$

é igual ao termo da esquerda, podemos escrever:

$$\frac{3}{2}\rho^{\frac{2}{3}}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}}\right) = \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL_r}{dr}$$

ou

$$\boxed{\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left[\varepsilon - \frac{3}{2} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} \right) \right]} \tag{23.143}$$

Essa equação deve ser usada em lugar da equação (23.142) durante as fases em que as mudanças evolucionárias são rápidas. Ela é idêntica à (23.142) nas fases normais, em que as mudanças são tão lentas que o termo com a derivada temporal na equação (23.143) pode ser ignorado.

Até agora, somente consideramos a condição que o fluxo de energia deve obedecer para balançar a produção de energia. Fisicamente, entretanto, o fluxo é determinando pelos mecanismos de transporte de energia, que podem ser condução (transporte de energia através dos corpos), convecção (transporte de energia pelo movimento dos corpos), ou radiação (transporte de energia pelo campo eletromagnético). Para qualquer desses três mecanismos é o gradiente de temperatura que essencialmente determina o fluxo de energia. Portanto, precisamos considerar estes mecanismos em detalhe para determinar o gradiente de temperatura que irá produzir um fluxo que obedeça à condição (23.142) ou (23.143).

A condução normalmente é muito lenta e, portanto, não contribui seriamente para o transporte de energia no interior estelar. Como o livre caminho médio dos íons e elétrons é tão pequeno, comparados com o raio estelar, a condução pode ser desprezada nas estrelas normais. Existem condições especiais, como o caso de gás degenerado, no interior de estrelas anãs brancas e estrelas de nêutrons, e mesmo no núcleo de gigantes vermelhas, em que o livre caminho médio dos elétrons é muito grande, e a condução por elétrons, muito efetiva.

Nas próximas seções, consideraremos, em detalhe, os dois mecanismos de transporte de energia que dominam no interior da maioria das estrelas, radiação e convecção.

23.11 O Transporte de energia radiativo

Se o interior estelar fosse isotérmico, a intensidade de radiação seria isotrópica, e não existiria um fluxo de radiação líquida em qualquer direção. De fato, entretanto, existe um gradiente radial de temperatura. Conseqüentemente, se olharmos, de qualquer ponto do interior da estrela, na direção do centro, veremos um fluxo de radiação vindo da região abaixo, um pouco mais quente. Se olharmos para fora, veremos radiação vinda de uma região um pouco mais fria. O fluxo resultante de radiação é direcionado para fora.

Qual o valor desse fluxo? Isso depende da opacidade dos gases. Se a opacidade for baixa, veremos, de um dado ponto, até regiões bem mais quentes para dentro e até regiões bem mais frias para fora; a anisotropia da radiação será grande, e o fluxo líquido para fora será grande. Vamos representar a opacidade por seu coeficiente de absorção por unidade de massa, K, definido de forma que:

$$K\rho d\ell$$

nos dá a fração da energia do feixe absorvida atravessando a distância $d\ell$. O coeficiente de absorção no interior estelar é da ordem de 1 $g^{-1}cm^2$ e nunca muito menor. Se usarmos, novamente, a densidade média do Sol como representativa, vemos que $K\rho$ é da ordem de um cm^{-1} e, portanto, no interior das estrelas, uma distância da ordem de 1 cm é suficiente para absorver uma alta fração da intensidade do feixe. De fato, uma espessura de vários centímetros é completamente opaca. Não veremos, portanto, muito longe, para dentro ou para fora, a partir de qualquer ponto do interior da estrela. A diferença de temperatura nessa pequena distância será da ordem de um milésimo de um grau, já que a queda de temperatura por todo o raio do Sol, $R_\odot = 7 \times 10^{10}$ cm, é de $T_c^\odot = 15 \times 10^6$ K. O campo de radiação, portanto, é muito aproximadamente isotrópico e poderíamos negligenciar essa pequena anisotropia, se o fluxo não fosse a única forma de conectar os processos nucleares no interior, com as perdas radiativas na superfície.

23.12 A Equação de transporte radiativo

Vamos derivar a relação entre o fluxo de radiação e o gradiente de temperatura. Descrevendo o campo de radiação por sua intensidade $I(r, \theta)$, energia por unidade de área, por unidade de tempo, e por unidade de ângulo sólido (esferorradiano), a uma distância r do centro da estrela e em uma direção inclinada de um ângulo θ do raio vetor.

Considere os ganhos e perdas que a radiação sofre, dentro de um ângulo sólido dw, por unidade de tempo, em um cilindro com seção de choque ds e comprimento $d\ell$, equivalente ao raio vetor r, e $r + dr$. A intensidade de radiação entrando pela base será:

$$+I(r, \theta)\, dw\, ds$$

enquanto a perda correspondente na superfície superior será:

$$-I(r + dr, \theta + d\theta)\, dw\, ds$$

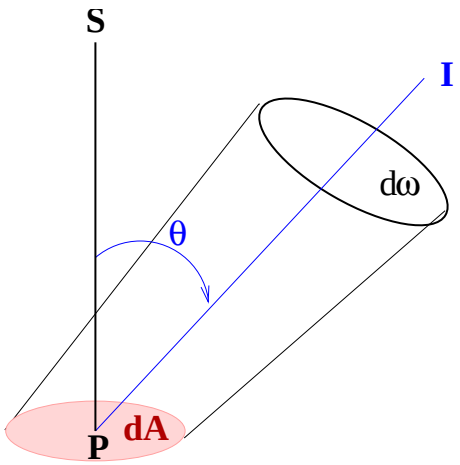
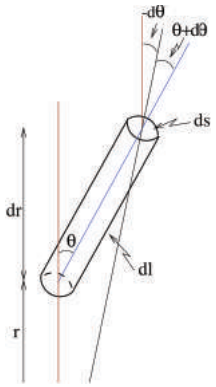


Figura 23.8: Intensidade e ângulo sólido



Na última expressão, o incremento em r ocorre porque o topo do cilindro está mais longe do centro do que a base, e o incremento em θ ocorre porque a curvatura introduzida pela simetria esférica leva o topo vertical do cilindro a estar inclinado em relação à base.

A perda de energia por unidade de tempo por absorção sobre o comprimento do cilindro será de:

$$-I\,dw\,ds \times K\rho d\ell$$

Finalmente, precisamos incluir a emissão dos gases no cilindro. Seja j a energia total emitida, por unidade de massa, por unidade de tempo, isotropicamente em todas as direções. A emissão de toda a matéria no cilindro,

na direção contida pelo ângulo sólido dw será, então:

$$+j\,\rho\,ds\,d\ell\frac{dw}{4\pi}$$

Se aplicarmos a condição de equilíbrio térmico especificamente para o campo de radiação, exigimos que os ganhos da radiação balancem exatamente as perdas, isto é, que a soma dos termos seja nula:

$$I(r,\theta)dwds - I(r+dr,\theta+d\theta)dwds - I(r,\theta)dwdsK\rho d\ell + j\rho ds d\ell\frac{dw}{4\pi} = 0$$

Como, para um elemento infinitesimal:

$$I(r+dr,\theta+d\theta) - I(r,\theta) = \frac{\partial I}{\partial r}dr + \frac{\partial I}{\partial \theta}d\theta$$

assumindo $\partial I/\partial\phi = 0$, e simplificando $dw\,ds$ em todos os termos, obtemos

$$\boxed{-\frac{\partial I}{\partial r}dr - \frac{\partial I}{\partial \theta}d\theta - IK\rho d\ell + \frac{j\rho}{4\pi}d\ell = 0}$$

Usando as relações geométricas:

$$d\ell = \frac{dr}{\cos\theta} \qquad \text{e} \qquad d\theta = -\frac{d\ell\,\mathrm{sen}\,\theta}{r}$$

obtemos

$$d\theta = -\frac{dr\,\mathrm{sen}\,\theta}{r\cos\theta}$$

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial I}{\partial\theta}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} + IK\rho - \frac{1}{4\pi}j\rho = 0} \tag{23.144}$$

Essa é a equação básica de transporte radiativo, que precisa ser obedecida a cada ponto da estrela.

23.13 Equilíbrio radiativo no interior estelar

A solução da equação (23.144) para o campo de radiação representa um dos principais problemas na teoria de atmosferas estelares. Para o interior estelar, o problema é simplificado pelo fato do campo ser quase isotrópico. Em vez de trabalharmos com a intensidade I, que representa a distribuição de radiação para cada direção, vamos considerar os três primeiros momentos

da distribuição, a densidade de energia $u(r) \equiv E(r)$, o fluxo da radiação $F(r) \equiv H(r)$, e a pressão de radiação $P_R(r)$.

Por definição, a intensidade é a energia que atravessa a superfície, na direção θ, por unidade de área, por unidade de tempo, por unidade de ângulo sólido. O fluxo é a energia, por unidade de área, por unidade de tempo, em todas as direções:

$$\boxed{F(r) \equiv H(r) = \int I \cos\theta dw} \tag{23.145}$$

A densidade de energia, ou energia por unidade de volume, pode ser derivada notando-se que, se F for a quantidade de energia cruzando a área dA, em uma direção θ, por unidade de tempo, em um segundo, a radiação F ocupará um volume $c\,\mathrm{cm}^3$. Então, a energia por unidade de volume, será dada por:

$$u(r) \equiv E(r) = \frac{F dA d\ell}{c\cos\theta dA d\ell} = \frac{1}{c}\int I dw \tag{23.146}$$

Sabemos que a energia cruzando a área dA é $I\cos\theta dA dw\,dt$. O número de fótons é dado pela energia total dividida pela energia de cada fóton, $h\nu$. Como o momentum de cada fóton é dado por $p = h\nu/c$, a pressão transferida para a área normal a direção $\cos\theta dA$, será dada por

$$P_R(r) = \frac{I\cos\theta dA' dw\,dt}{h\nu}\frac{h\nu}{c}\frac{\cos\theta dA}{dA} = \frac{1}{c}\int I\cos^2\theta dw. \tag{23.147}$$

para dA' e dt unitários. Integrando (23.144) sobre o elemento de ângulo sólido dw, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\int I\cos\theta dw - \frac{1}{r}\int \frac{\partial I}{\partial\theta}\mathrm{sen}\,\theta\, dw + K\rho\int I dw - \frac{j\rho}{4\pi}\int dw = 0$$

Usando-se a definição (23.145) e (23.146) e notando que o segundo termo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\int dw\frac{\partial I}{\partial\theta}\mathrm{sen}\,\theta &= \int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\,\frac{\partial I}{\partial\theta}\mathrm{sen}\,\theta \\
&= 2\pi\left(I\mathrm{sen}^2\theta\,\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} I\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta d\theta\right) \\
&= -2\int_0^{\pi} I\cos\theta(2\pi\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta) \\
&= -2\int I\cos\theta dw \\
&= -2H
\end{aligned}$$

obtemos:

$$\frac{dH}{dr} + \frac{2}{r}H + cK\rho E - j\rho = 0 \tag{23.148}$$

Outra relação é obtida multiplicando-se (23.144) por $\cos\theta$ e integrando sobre dw, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\int I\cos^2\theta dw - \frac{1}{r}\int \frac{\partial I}{\partial \theta}\text{sen}\,\theta\,\cos\theta dw + K\rho\int I\cos\theta dw - \frac{j\rho}{4\pi}\int\cos\theta dw = 0$$

A integral no primeiro termo é igual a $cP_R(r)$, e a do terceiro termo é igual a $H(r)$. O último termo é nulo, pois $dw = 2\pi\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$, e:

$$\int\cos\theta dw = 2\pi\int_0^\pi \cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \pi\text{sen}^2\theta\,\Big|_0^\pi = 0$$

No segundo termo, fazendo-se uma integração por partes, com $dv = \frac{\partial I}{\partial\theta}d\theta$ e $u = \text{sen}^2\theta\,\cos\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial I}{\partial\theta}\text{sen}\,\theta\,\cos\theta\,2\pi\,\text{sen}\,\theta\,d\theta &= 2\pi\int\frac{\partial I}{\partial\theta}\text{sen}^2\theta\,\cos\theta d\theta \\
&= 2\pi I\text{sen}^2\theta\,\cos\theta\,\Big|_0^\pi - \int_0^\pi I(2\cos^2\theta\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta)\,2\pi\,d\theta \\
&= -\int_0^\pi I(2\,\text{sen}\,\theta - 3\,\text{sen}^3\theta)\,2\pi\,d\theta \\
&= -c\,2E(r) + 3\int_o^\pi I\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,2\pi\,d\theta \\
&= -c\,2E(r) + 3\int_o^\pi I(1 - cos^2\theta)dw \\
&= -c\,2E(r) + 3cE(r) - 3\int_o^\pi Icos^2\theta dw \\
&= c\,E(r) - 3cP_R(r)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{dP_R}{dr} + \frac{1}{r}\,(3P_R - E) + \frac{K\rho}{c}H = 0 \tag{23.149}$$

Obtivemos somente duas equações com três funções, E, H e P_R. Essa insuficiência quase sempre é encontrada quando se substitui uma equação diferencial parcial, como a equação (23.144), por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, com as equações (23.148) e (23.149). Para resolver o sistema, encontraremos uma relação adicional entre os momentos, usando a quase-isotropia do campo de radiação no interior estelar.

Representemos o campo de radiação em qualquer ponto da estrela por uma série:

$$I = I_0 + I_1 \cos\theta + I_2 \cos^2\theta + \ldots = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos^n\theta \tag{23.150}$$

e determinemos a taxa de convergência dessa série introduzindo-a na equação de equilíbrio radiativo (23.144):

$$\frac{\partial I}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial I}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + K\rho I - \frac{1}{4\pi} j\rho = 0$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial r}\ \left(I_0 + \sum I_n \cos^n\theta\right)\cos\theta + \left[\sum \frac{I_n}{r} n \cos^{n-1}\theta \operatorname{sen}^2\theta\right] + \\ &+ \quad K\rho I_0 + K\rho \sum I_n \cos^n\theta - \frac{1}{4\pi} j\rho = 0 \end{aligned} \tag{23.151}$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial r}\ \left(I_0 + \sum I_n \cos^n\theta\right)\cos\theta + \left[\sum \frac{I_n}{r} n \cos^{n-1}\theta (1 - cos^2\theta)\right] + \\ &+ \quad K\rho I_0 + K\rho \sum I_n \cos^n\theta - \frac{1}{4\pi} j\rho = 0 \end{aligned} \tag{23.152}$$

Como nossa expansão vale para qualquer θ, a igualdade precisa ser exata para cada potência de $\cos\theta$:

$$K\rho I_0 - \frac{1}{4\pi} j\rho = 0 \tag{23.153}$$

$$\cos^n\theta \left[\frac{\partial I_n}{\partial r} + \frac{n I_n}{r} - \frac{(n+1) I_{n+1}}{r} + \kappa\rho I_{n+1}\right] = 0$$

e obtemos a fórmula de recorrência, para $n > 0$:

$$\cos^n\theta \left[\frac{dI_{n-1}}{dr} + \frac{(n-1) I_{n-1}}{r} - \frac{n I_n}{r} + K\rho I_n\right] = 0$$

Como $\kappa\rho \simeq 1$

$$\frac{dI_n}{dr} + \frac{n I_n}{r} = \frac{(n+1) I_{n+1}}{r} + \kappa\rho I_{n+1}$$

Aproximando

$$\frac{dI_{n-1}}{dr} \simeq \frac{I_{n-1}}{R}$$

obtemos

$$\left|\frac{I_n}{I_{n-1}}\right| \simeq \frac{n}{R}\frac{1}{K\rho + \frac{n}{R}} \simeq 10^{-10}$$

já que $K\rho \simeq 1$ cm^{-1}, e o raio do Sol é $R_\odot = 7 \times 10^{10}$ cm. Portanto, a série (23.150) converge rapidamente no interior estelar. Podemos, portanto, nos restringir aos dois primeiros termos da série (23.150); não podemos usar somente o primeiro termo porque teríamos caído novamente na condição de isotropia do campo de radiação, sem qualquer fluxo resultante. Essa condição é chamada de equilíbrio termodinâmico local, já que a diferença do equilíbrio termodinâmico é tão pequena. Isto é, *localmente*, as condições no interior das estrelas podem ser consideradas em equilíbrio termodinâmico. Nesse caso, não precisamos levar em consideração as transições dos elementos, porque todas as populações dos níveis dependem de só um parâmetro, a temperatura cinética dos elétrons. Introduzindo os dois primeiros termos da série (23.150) nas equações (23.145) a (23.147) para os três momentos, obtemos:

$$I = I_0 + I_1 \cos\theta$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{c}\int I dw \\ &= \frac{1}{c} I_0 \int dw + \frac{2\pi}{c} I_1 \int_0^\pi \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{c} I_0 + \frac{2\pi}{c} I_1 \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^\pi \\ &= \frac{4\pi}{c} I_0 \end{aligned}$$

já que

$$\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^\pi = 0$$

$$\begin{aligned} H &= \int I \cos\theta dw \\ &= 2\pi I_0 \int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta \, \cos\theta d\theta + 2\pi I_1 \int_0^\pi \cos^2\theta \mathrm{sen}\,\theta \, d\theta \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta \, \cos\theta d\theta = 0$$

e

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{23.154}$$

obtemos:

$$H = \frac{4\pi}{3} I_1$$

Para a pressão de radiação (23.147):

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{c}\int I \cos^2\theta dw \\ &= \frac{2\pi}{c} I_0 \int \cos^2\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta + \frac{2\pi}{c} I_1 \int \cos^3\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta \end{aligned}$$

Usando (23.154) e

$$\int_0^\pi \cos^3\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta = -\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^\pi = 0$$

obtemos:

$$E = \frac{4\pi}{c} I_0, \quad H = \frac{4\pi}{3} I_1, \quad P_R = \frac{4\pi}{3c} I_0$$

de onde segue que:

$$P_R = \frac{1}{3} E \tag{23.155}$$

onde E é a energia do campo de radiação por unidade de volume. O erro relativo nessa relação será da ordem de I_2/I_0, da ordem de 10^{-20}, portanto, com precisão suficiente. A equação (23.155) é a relação adicional que, junto com as relações (23.148) e (23.149), completam o conjunto de três equações para os três momentos.

Com a ajuda da equação (23.155), podemos, agora, simplificar as duas equações diferenciais (23.148) e (23.149). Primeiro, vamos substituir o fluxo por unidade de área, H, pelo fluxo por toda a esfera, a luminosidade L_r, usando a relação geométrica:

$$\boxed{L_r = 4\pi r^2 H} \tag{23.156}$$

Agora, precisamos introduzir uma expressão para a emissividade j. A emissão consiste de duas partes; a primeira contribuição vem da emissão térmica normal, que, de acordo com a lei de Kirchhoff, é proporcional ao coeficiente de absorção K, à constante de Stefan-Boltzmann a, à velocidade

da luz c, e à quarta potência da temperatura T do gás emitente. Isso porque, em equilíbrio térmico, podemos usar a relação (23.153):

$$K\rho I_0 = \frac{j\rho}{4\pi} \longrightarrow j = 4\pi K I_0$$

e

$$I_0 = \int_0^\infty B_\nu^{\text{Planck}} d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

Como

$$\sigma = \frac{c \cdot a}{4} \longrightarrow I_0 = \frac{acT^4}{4\pi} \longrightarrow j = KacT^4$$

A segunda contribuição vem dos processos nucleares e é igual à produção de energia nuclear por unidade de massa, ε. A expressão completa para a emissividade, então, é dada por:

$$j = KacT^4 + \varepsilon \tag{23.157}$$

Finalmente, podemos eliminar ε com a ajuda da condição de equilíbrio radiativo (23.142) na equação (23.148):

$$\frac{dH}{dr} + \frac{2}{r} H + cK\rho E - j\rho = 0$$

$$H = \frac{L}{4\pi r^2} \longrightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{L}{4\pi r^2}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{L}{4\pi r^2}\right) + cK\rho E - j\rho = 0$$

Como

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{L}{4\pi r^2}\right) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dL}{dr} - \frac{2L}{4\pi r^3}$$

$$\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dL}{dr} - \frac{2L}{4\pi r^3} + \left(\frac{2L}{4\pi r^3}\right) + cK\rho E - j\rho = 0$$

Como, pela equação (23.142):

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon$$

Obtemos:

$$\rho\varepsilon + cK\rho E - j\rho = 0$$

eliminando ρ:

$$E = \frac{j - \varepsilon}{cK}$$

e usando a relação para a emissividade (23.157), obtemos:

$$E = \frac{KacT^4}{cK} = aT^4 \tag{23.158}$$

Substituindo-se (23.158) na relação entre a pressão de radiação e a densidade de energia (23.155):

$$P_R = \frac{1}{3}E$$

obtemos uma forma simples para a pressão de radiação:

$$\boxed{P_R = \frac{a}{3}T^4} \tag{23.159}$$

Introduzindo-se (23.155)

$$P_R = \frac{1}{3}E$$

na equação (23.149), que anula o segundo termo, obtemos:

$$\frac{1}{3}\frac{dE}{dr} = -\frac{K\rho}{c}H$$

Como, da equação (23.158):

$$\frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr}\left(aT^4\right) = 4aT^3\frac{dT}{dr}$$

obtemos:

$$\boxed{H_r = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{K\rho}\frac{dT}{dr}} \tag{23.160}$$

Substituindo-se a relação (23.156), obtemos finalmente:

$$\boxed{L_r = -4\pi r^2\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{K\rho}\frac{dT}{dr}} \tag{23.161}$$

Essa é a nossa quarta equação básica de equilíbrio. Ela fixa o valor do fluxo líquido de radiação como uma função do gradiente de temperatura e da opacidade dos gases atravessados pela radiação.

23.14 Ordem de grandeza da luminosidade

Podemos usar a condição de equilíbrio radiativo (23.161) para uma estimativa da ordem de grandeza da luminosidade, da mesma maneira que usamos a condição de equilíbrio hidrostático, aplicando a condição (23.161) para um ponto no meio do Sol. Usaremos $r = (1/2)R_\odot$, $T = 10^7$ K, conforme nossa estimativa anterior, para o recíproco de $K\rho$ um centímetro e, para as derivadas, as diferenças correspondentes. Com essa estimativa grosseira, obtemos:

$$L \approx 6 \times 10^{35} \text{ergs/s}$$

Nossa estimativa supera a luminosidade do Sol por um fator de 100, principalmente porque nossa estimativa da temperatura no meio do Sol está muito alta. Na verdade, essa temperatura é da ordem de 3 milhões de Kelvin. Mas é interessante que, sem levar em consideração qualquer detalhe das equações básicas, e as reações nucleares, já obtivemos uma luminosidade da ordem da luminosidade das estrelas.

23.15 A relação massa-luminosidade

No mesmo espírito, podemos usar a condição de equilíbrio radiativo para estimar como a luminosidade de uma estrela depende da sua massa. Usemos:

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}$$

Substituindo na equação de equilíbrio hidrostático (23.99) e, aproximando as derivadas pelas diferenças, encontramos:

$$\frac{P}{R} \propto \frac{GM}{R^2}\frac{M}{R^3} \longrightarrow P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

Introduzindo essas duas proporcionalidades na equação de estado de um gás ideal (23.101), obtemos, para a temperatura:

$$P = \frac{\rho}{m}kT \propto \frac{M}{R^3}T \longrightarrow T \propto \frac{M}{R}$$

Podemos, agora, substituir a dependência de ρ e T em função de M e R na condição de equilíbrio radiativo (23.161) e assumir que o coeficiente de absorção seja uma constante, encontrando:

$$L \propto R^2 \frac{M^3}{R^3}\frac{R^3}{M}\frac{M/R}{R}$$

$$\boxed{L \propto M^3}$$

A dependência sobre o raio se cancela e obtemos a relação massa-luminosidade teórica, da maneira mais simples, indicando que a luminosidade cresce com a terceira potência da massa. Essa relação é aproximada, e o expoente depende da massa da estrela.

23.16 Estabilidade do equilíbrio térmico

Nossa última estimativa mostra que a luminosidade de uma estrela não é determinada por sua taxa de geração de energia por processos nucleares - nenhuma estimativa dessas foi usada nas derivações até agora - mas somente pela condição de equilíbrio radiativo (23.161). As razões físicas podem ser sumarizadas como segue. A pressão do gás precisa contrabalançar a gravidade, de acordo com a condição de equilíbrio hidrostático (23.99). Se a pressão interna precisa ser alta o suficiente para esse equilíbrio, a temperatura precisa ser alta, de acordo com a equação de estado (23.101). O gradiente de temperatura, da temperatura alta no interior para a temperatura baixa na fotosfera, causará um fluxo resultante de radiação, de acordo com a condição de equilíbrio radiativo (23.161). Esse fluxo está fixado pela condição de equilíbrio radiativo (23.161), seja a perda de energia, causada pelo fluxo de radiação, compensada – ou não – pela produção de energia nuclear no interior. Se a energia nuclear gerada é menor do que a perda por radiação na fotosfera, a estrela sofre uma perda de energia total. A única maneira de compensar essa perda de energia é pela liberação de energia gravitacional por contração. De acordo com o teorema do virial (23.105), somente metade da energia gravitacional perdida pode ser liberada como radiação na fotosfera. A outra metade automaticamente aumenta a energia térmica. Durante a contração, portanto, a temperatura interna se elevará e, conseqüentemente, a taxa de reações nucleares aumentará. A contração parará quando a energia liberada pelas reações nucleares for igual à perda por radiação na fotosfera, isto é, à luminosidade da estrela. Dessa forma, a estrela tem como balançar o ganho de energia por reações nucleares e a perda por radiação. Esse balanço não é atingido alterando a luminosidade, mas a taxa de reações nucleares, através da contração ou expansão.

Existem circunstâncias especiais em que a estrela não consegue balançar a produção de energia nuclear com a perda por radiação através de uma contração ou expansão moderada. Isso ocorre quando a densidade interna é tão alta que a equação de estado do gás ideal (23.101) não é válida, como no

núcleo de algumas gigantes e supergigantes vermelhas, em que os elétrons estão degenerados.

23.17 Transporte de energia por convecção

Assumamos que, em uma certa camada de uma certa estrela, a condição de equilíbrio radiativo esteja satisfeita, como discutido na seção anterior. Se esse equilíbrio é estável contra perturbações, então, nenhum movimento de massa por convecção persiste, e o transporte de energia por convecção não ocorre. Se, entretanto, o equilíbrio radiativo é instável a perturbações, ocorrem movimentos de massa, e o transporte de energia por convecção é uma conseqüência. Precisamos, portanto, determinar as condições sob as quais o equilíbrio radiativo é instável.

23.17.1 Condição de estabilidade do equilíbrio radiativo

Consideremos a seguinte perturbação: tomemos um pequeno elemento de volume no interior da estrela. Desloquemos esse elemento de matéria para cima, por uma distância dr.

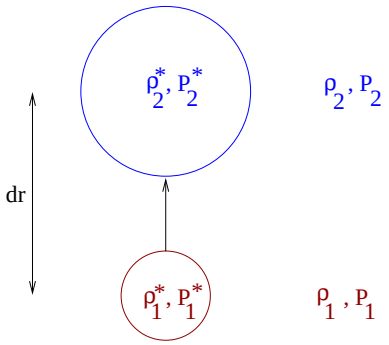


Figura 23.9: Deslocamento por convecção.

Deixemos que o elemento se expanda adiabaticamente (sem perda de calor) até que a pressão dentro do elemento de volume seja igual à pressão do meio que o circunda. Soltemos esse elemento para verificar se ele volta para baixo, até sua posição inicial, ou se ele continua a se mover para cima. Se ele retorna à posição inicial, a camada está em equilíbrio radiativo estável. Se ele continua a se mover para cima, o equilíbrio radiativo é instável, e movimentos de convecção persistem.

Em maior detalhe, usemos a nomenclatura da figura anterior: as quantidades do interior do elemento são designadas por asterisco, enquanto as quantidades do meio não-perturbado não têm asterisco. O subscrito 1 se refere à posição original, enquanto o subscrito 2 se refere à posição mais alta para a qual o elemento foi elevado. Antes de começarmos a perturbação, o elemento em consideração tem as mesmas propriedades do meio que o cerca, de modo que:

$$\rho_1^* = \rho_1 \quad \text{e} \quad P_1^* = P_1$$

Depois do deslocamento, a pressão está novamente em equilíbrio com o meio circundante, mas a densidade interna estará determinada pela expansão adiabática do elemento. Dessa forma, temos:

$$P_2^* = P_2 \quad \text{e} \quad \rho_2^* = \rho_1 \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

onde γ é o coeficiente de expansão adiabática (deveríamos usar Γ_1 no caso geral)

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

igual à razão dos calores específicos à pressão constante e ao volume constante, e tem valor de 5/3 para um gás altamente ionizado.

A força de pressão exercida sobre o volume após seu deslocamento não será alterada pela perturbação. A força gravitacional sobre o mesmo elemento, entretanto, foi alterada se a densidade dentro do elemento for diferente da densidade do meio. Especificamente, se a densidade interna for maior do que a do meio, a força gravitacional será maior, e o elemento sofrerá uma força resultante para baixo, voltando à sua posição inicial. Portanto, sob a condição:

$$\rho_2^* > \rho_2 \longrightarrow \rho_1 \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_2$$

qualquer perturbação será imediatamente contrabalançada, e a camada será completamente estável.

Essa condição de estabilidade pode ser transformada em uma forma mais conveniente. As quantidades na posição mais alta (subscrito 2) podem ser expressas em termos das quantidades e suas derivadas na posição inicial (subscrito 1). Como:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} < \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

No limite de variações infinitesimais:

$$d\ln\rho < \frac{1}{\gamma} d\ln P$$

Logo:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} < \frac{1}{\gamma}\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}$$

ou

$$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} > -\frac{1}{\gamma}\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}} \tag{23.162}$$

Essa desigualdade é uma forma exata e geral da condição de equilíbrio contra movimentos convectivos em qualquer camada da estrela.

Para o caso de uma equação de estado de gás ideal (23.101), essa condição pode ser escrita, para o caso em que o peso molecular μ é constante, como:

$$P = \frac{k}{\mu}\rho T \longrightarrow d\ln P = d\ln(\frac{k}{\mu}\rho T) = \frac{k/\mu}{k\rho T/\mu} d(\rho T) = \frac{\rho dT + T d\rho}{\rho T}$$

ou

$$\frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho}$$

de modo que a relação (23.162) fica:

$$\boxed{-\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} > -\frac{dT}{dr}} \tag{23.163}$$

Como o gradiente de pressão e o gradiente de temperatura são sempre negativos, os dois lados da equação contêm quantidades positivas. O lado direito da equação contém o verdadeiro gradiente de temperatura na camada. O lado esquerdo é normalmente chamado de gradiente de temperatura adiabático, já que ele representa o gradiente de temperatura se a pressão e a temperatura seguissem uma relação adiabática. A condição (23.163) significa dizer que *a camada será estável se o gradiente de temperatura real, em valor absoluto, for menor do que o gradiente de temperatura adiabático.*

As condições de estabilidade (23.162) e (23.163) não podem ser aplicadas, sem considerações especiais, para camadas com composição química diferentes.

A condição (23.163) é chamada de condição de estabilidade de Schwarzschild, ou critério de Schwarzschild, desenvolvida por Karl Schwarzschild

(1873-1916) em 1906. Note que essa condição não leva em conta a possibilidade de mudança de composição entre as duas camadas. Um critério semelhante, levando-se em conta essa possibilidade, e definindo:

$$d\ln P = \chi_\rho d\ln\rho + \chi_T d\ln T + \chi_\mu d\ln\mu$$

onde os expoentes da equação de estado são dados por

$$\chi_\rho \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_{T,\mu} \qquad \chi_T \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_{\rho,\mu} \qquad \chi_\mu \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \mu}\right)_{T,\rho}$$

chama-se critério de Ledoux,

$$\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right) < \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{ad} - \frac{\chi_\mu}{\chi_T}\frac{d\ln\mu}{d\ln P} \tag{23.164}$$

proposto pelo belga Paul Ledoux (1914-1988). Nesse caso, um peso molecular μ que aumenta para dentro, como normalmente ocorre em estrelas evoluídas, tende a estabilizar a região contra a convecção, pois, nesse caso, $\frac{d\ln\mu}{d\ln P} > 0$.

Usando a nomenclatura dos deltas,

$$\boxed{\nabla \equiv \frac{d\ln T}{d\ln P}} \qquad \boxed{\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_S} \qquad \boxed{\nabla_\mu \equiv \frac{d\ln\mu}{d\ln P}}$$

o critério de Schwarzschild para que haja convecção (23.163) pode ser escrito como:

$$\boxed{\nabla - \nabla_{\rm ad} > 0} \tag{23.165}$$

e o critério de Ledoux (23.164), levando-se em conta a pressão de radiação,

$$P = P_{\rm total} = P_{\rm gás} + P_R$$

e definindo

$$\beta = \frac{P_{\rm gás}}{P_{\rm total}}$$

pode ser escrito como:

$$\nabla - \nabla_{ad} - \frac{\beta}{4-3\beta}\nabla_\mu > 0$$

Como

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S \qquad (\Gamma_3 - 1) \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S$$

$$\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S = \nabla_{ad} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1}$$

Para um gás ideal $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \gamma = \frac{5}{3}$ e $\nabla_{\rm ad} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Se assumirmos uma equação de gás ideal para o gás, e definirmos γ_g como o coeficiente para o gás, e a pressão total como a soma da pressão de radiação mais pressão do gás, o coeficiente γ da combinação pode ser escrito em termos da razão da pressão do gás para a pressão total, $\beta \equiv P_g/P$:

$$\gamma = \frac{\Gamma_1}{\beta} \tag{23.166}$$

$$c_v = \frac{3N_A k}{2\mu}\left(\frac{8-7\beta}{\beta}\right) \tag{23.167}$$

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4-3\beta}{8-7\beta}\right) \tag{23.168}$$

$$\Gamma_1 = \beta + (4-3\beta)(\Gamma_3 - 1) \tag{23.169}$$

e, finalmente

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{2(4-3\beta)} \tag{23.170}$$

Ao se construir um modelo de estrela, a condição de estabilidade (23.163) precisa ser verificada em cada camada do modelo, isto é, o gradiente de pressão precisa ser computado usando-se a condição de equilíbrio hidrostático (23.99), o gradiente de temperatura precisa ser calculado usando-se a equação do equilíbrio radiativo (23.161), e seus valores inseridos na condição (23.163). Se essa condição é satisfeita, a camada é estável, e o equilíbrio radiativo se aplica. Mas, e se a condição (23.163) não for satisfeita? Essa é a questão que precisamos agora considerar em detalhe. Esse problema tem conseqüências significativas nos modelos estelares. Nos núcleos de estrelas, os fluxos de radiação são consideráveis e altas opacidades muitas vezes ocorrem. De acordo com a condição de equilíbrio radiativo (23.161), estas duas circunstâncias levam a altos – e, portanto, instáveis – gradientes de temperatura.

Usando-se a equação de equilíbrio radiativo (23.161), e a equação do equilíbrio hidrostático (23.99), obtemos:

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right) = \frac{3}{16\pi acG}\frac{KP}{T^4}\frac{L_r}{M_r} \tag{23.171}$$

Como normalmente, embora não sempre, P/T^4 é uma função que varia suavemente com a posição na estrela, o início da convecção no núcleo da estrela é determinado pelos valores da opacidade K, e da razão L_r/M_r. Um valor alto da opacidade implica um valor alto do gradiente de temperatura, para que um dado valor do fluxo seja transportado pela radiação. No núcleo das estrelas, a opacidade geralmente decresce em direção ao centro e esse efeito dificulta o início da convecção. A luminosidade L_r se mantém basicamente constante, enquanto que a massa aumenta com o raio. Dessa forma, em direção ao centro, L_r/M_r aumenta o suficiente em estrelas com fontes de energia concentradas (estrelas mais massivas), e essas estrelas terão núcleo convectivo.

Nas camadas externas, $L_r \simeq L$ e $M_r \simeq M$, e o fator L_r/M_r não mais determina o início da convecção. Entretanto, o gradiente *adiabático* não é constante, pois é muito sensível ao estado de ionização dos constituintes dominantes, hidrogênio e hélio. Em uma região de ionização parcial, o gradiente adiabático torna-se muito pequeno, e uma zona de convecção se inicia. Portanto, todas as estrelas que não são quentes o suficiente para que o hidrogênio esteja completamente ionizado na fotosfera, têm zonas de convecção próximas à superfície.

23.17.2 Equilíbrio convectivo

Consideremos uma camada em que a condição de estabilidade (23.162) ou (23.163) não é satisfeita. Um elemento perturbado que se desloque para cima terá densidade interna menor do que a do meio circundante. Ele estará submetido a uma força resultante para cima e, em conseqüência, continuará a se mover para cima, pelo princípio de Arquimedes [Arquimedes de Siracusa (∼287-212 a.C.)]. Similarmente, um elemento que se desloque para baixo será mais pesado do que o meio circundante e continuará a se mover para baixo. Portanto, à menor perturbação, iniciam-se movimentos convectivos em uma camada instável. Que conseqüências térmicas resultarão desses movimentos? Um elemento que se move para cima, terá, como vimos, uma densidade menor do que a do meio. Como sua pressão interna foi ajustada pela expansão para igualar-se com a do meio, sua temperatura precisa ser maior do que a do meio, de acordo com a equação de estado (23.101), o elemento carrega um excesso de energia térmica para cima. Similarmente, um elemento em movimento descendente, com uma densidade maior e, portanto, uma temperatura menor, carrega uma deficiência de energia térmica para baixo. Os dois elementos, ascendente e descendente, contribuem para o transporte de energia convectivo para cima.

Esse fluxo de energia adicional tem o seguinte efeito na estrutura de uma camada instável. Assumamos, pelo momento, que a camada estava em equilíbrio radiativo precário, com o fluxo radiativo carregando a energia produzida pelos processos nucleares. Agora, devido à instabilidade, movimentos convectivos iniciam-se na camada. O fluxo convectivo transportará energia térmica das camadas mais baixas para as mais altas: a temperatura das camadas mais baixas, maior, decrescerá, enquanto a temperatura das camadas mais altas, menor, aumentará. Dessa forma, o gradiente de temperatura diminui por causa da convecção. A redução no gradiente levará a uma imediata redução no fluxo de radiação, de acordo com a equação de equilíbrio radiativo (23.161). A redução no gradiente também diminuirá o fluxo convectivo, pois uma redução no excesso do gradiente verdadeiro sobre o gradiente adiabático causa uma redução no excessos e deficiências de temperatura dos elementos em movimento, reduzindo, portanto, o transporte de energia convectivo. A redução no gradiente de temperatura por convecção continuará até que o fluxo radiativo, adicionado ao fluxo convectivo, alcance o valor que satisfaça exatamente a condição de equilíbrio térmico (23.102). Nesse estágio, radiação e convecção produzem um fluxo de energia que carrega para fora exatamente a quantidade de energia produzida pelas reações nucleares e não haverá mais mudança de temperaturas, em qualquer camada. Dessa forma, a instabilidade do equilíbrio radiativo leva a uma outra condição de equilíbrio, o equilíbrio convectivo, em que movimentos convectivos ocorrem pelas camadas.

23.17.3 Transporte de energia por convecção

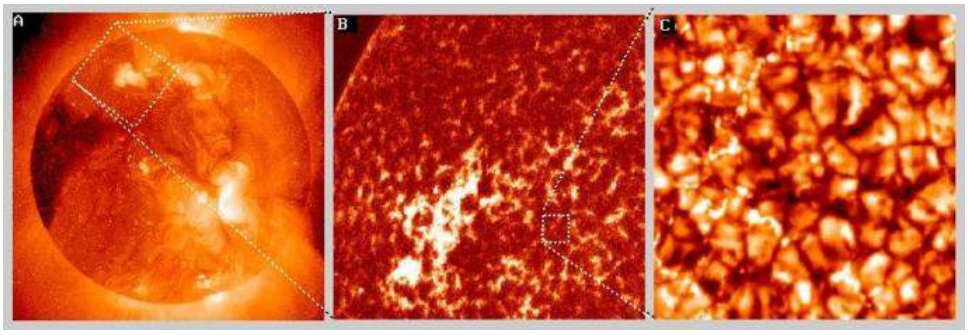


Figura 23.10: Detalhe da fotosfera do Sol mostrando as células de convecção, que têm entre 2 000 e 5 000 km de extensão e duram entre 5 e 10 min.

Precisamos, agora, derivar uma relação entre o gradiente de temperatura e o fluxo total de energia no estado de equilíbrio convectivo. Para isso, precisamos considerar em detalhe o transporte de energia dos elementos em movimento, de acordo com a teoria do comprimento de mistura (*mixing length theory*), desenvolvida pelos alemães Ludwig Franz Benedikt Biermann (1907-1986) em 1951, e Erika Böhm-Vitense (1923-) em 1958, baseados no trabalho do alemão Ludwig Prandtl (1875-1953) de 1925. O excesso de temperatura de um elemento ascendente sobre o meio circundante é dado pela diferença entre a mudança de temperatura adiabática, dentro do elemento, e a mudança de temperatura real no meio, desde o ponto de início do movimento até seu ponto final. Se o elemento se deslocou uma distância dr, seu excesso de temperatura será:

$$dT = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \times dr - \frac{dT}{dr} \times dr \equiv \Delta\nabla T \times dr \tag{23.172}$$

onde o símbolo:

$$\boxed{\Delta\nabla T \equiv \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{dT}{dr}} \tag{23.173}$$

representa o excesso do gradiente de temperatura real – em valor absoluto – sobre o gradiente de temperatura adiabático. Se multiplicarmos esse excesso de temperatura por $c_p\rho$, obtemos o excesso de energia térmica por unidade de volume. Se, ainda, multiplicarmos pela velocidade do elemento v, obteremos o fluxo de energia por unidade de área, por unidade de tempo:

$$H = \Delta\nabla T \, dr \, c_p \rho \, v \tag{23.174}$$

Exatamente a mesma equação vale para o elemento descendente, já que uma mudança de sinal em dr compensa uma mudança em sinal em v. De fato, a equação (23.174) representa o fluxo médio produzido por movimentos convectivos se dr é tomado como o deslocamento médio (isto é, a distância vertical a partir da camada em que o elemento tinha a mesma temperatura interna do meio), e v é tomada como a velocidade média do deslocamento vertical de todos os elementos de uma camada.

A equação (23.174) já representa a relação necessária entre o transporte de energia convectivo e o gradiente de temperatura. Não está, ainda, em uma forma conveniente, já que a velocidade v precisa ser determinada, primeiro, pelas seguintes considerações dinâmicas. A deficiência de densidade do elemento ascendente sobre o meio circundante pode ser calculada, similarmente

ao excesso de temperatura, pela seguinte fórmula, usando-se a desigualdade (23.162):

$$d\rho = -\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}\frac{dP}{dr} \times dr + \frac{d\rho}{dr} \times dr = \frac{\rho}{T}\Delta\nabla T \times dr$$

Se a deficiência de densidade é multiplicada pela aceleração gravitacional, obtemos a deficiência em força gravitacional, ou excesso de força para cima. Como essa força atua somente ao final do deslocamento, a força média é obtida multiplicando-se por 1/2. Multiplicando-se esse excesso de força média pela distância dr, obtemos o trabalho realizado pelo excesso de força sobre o elemento. É esse trabalho que produz a energia cinética do elemento. Portanto:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{\rho}{T}\Delta\nabla T \times dr\frac{GM_r}{r^2}\frac{1}{2}dr. \tag{23.175}$$

Como os dois lados da equação (23.175) são quadráticos em v e r, ela vale para elementos ascendentes e descendentes. Portanto, podemos tomar a equação (23.175) como representativa de todos os elementos de uma camada, se, novamente, tomarmos v e dr como representando médias apropriadas. A equação (23.175) nos dá a velocidade de convecção em termos do gradiente de temperatura. Ela pode ser utilizada para eliminar a velocidade de convecção da equação (23.174) do fluxo. Introduzimos, aqui, um comprimento de mistura (*mixing length*) ℓ para representar a distância vertical média, ou livre caminho médio, que o elemento se move antes de se dissolver no meio circundante. Ao mesmo tempo, elementos (bolhas) frios da camada superior afundam uma distância ℓ e se dissolvem. Esse mesmo efeito ocorre quando fervemos água em uma panela; próximo à fervura, inicia-se um fluxo de matéria quente do fundo para a superfície e vice-versa. Em termos do comprimento de mistura, podemos representar a distância média que um elemento se move em um momento arbitrário como:

$$\overline{dr} = \frac{1}{2}\ell$$

Dessa forma obtemos das equações (23.174) e (23.175):

$$\boxed{H = c_p\rho\left(\frac{GM_r}{Tr^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\Delta\nabla T)^{\frac{3}{2}}\frac{\ell^2}{4}} \tag{23.176}$$

A equação (23.176) representa nossa relação final entre o fluxo de energia convectivo e o gradiente de temperatura. Ela envolve uma grande incerteza, o valor do comprimento de mistura. Deve ficar claro que a teoria do comprimento de mistura representa uma extrema simplificação ao processo físico

real de convecção. Experimentos em laboratório indicam que o comprimento de mistura é geralmente comparável ao tamanho linear do volume em que observamos convecção. Correspondentemente, poderíamos igualar o comprimento de mistura à profundidade da camada instável. Entretanto, isso seria uma grande super-estimativa do comprimento de mistura, para as camadas instáveis em que a densidade decresce de um grande fator, da base até a camada superior, como no caso em que a região convectiva ocorre perto da superfície. Um valor mais próximo da realidade é assumir que o comprimento de mistura ℓ seja uma ou duas vezes a escala de variação de pressão, isto é, a distância em que a pressão varia por um fator e, λ_p, definida como:

$$\lambda_p \equiv -\left(\frac{d\ln P}{dr}\right)^{-1} = \frac{P}{g\rho}$$

usando-se a equação do equilíbrio hidrostático (23.99), e definindo g como a aceleração gravitacional. Definimos $\ell = \alpha\lambda_p$, onde α é chamado do parâmetro do comprimento da mistura. Para $\alpha = 1$, denominamos a teoria de ML1. Uma variação é usar esta relação somente se $\alpha\lambda_p$ for menor ou igual à distância da posição em questão até o limite superior da zona de convecção. Se maior, usamos esta última distância. As observações recentes indicam, também, que o comprimento de mistura não é o mesmo para tipos de estrelas diferentes, nem mesmo para profundidades diferentes da mesma estrela, isto é, próximo ao núcleo ou próximo à superfície. Para as estimativas abaixo, usaremos

$$\ell \approx \frac{1}{10}R$$

Veremos que a incerteza nesse valor é de pouca conseqüência para zonas de convecção no núcleo de uma estrela. A incerteza em ℓ introduz, entretanto, incertezas significativas nos modelos, quando a instabilidade convectiva ocorre logo abaixo da fotosfera de uma estrela – como muitas vezes é o caso – e, portanto, introduz incertezas significativas na estrutura e extensão das camadas externas de um modelo estelar. De fato, a falta de uma boa teoria hidrodinâmica de convecção é um dos mais sérios problemas na compreensão de modelos de interiores estelares. Isso se dá porque as equações hidrodinâmicas, incluindo turbulência, são altamente não-locais e não-lineares. Já existem algumas aproximações calculadas. Para que a idade, tamanho e luminosidade do Sol calculados pelos modelos sejam iguais às observadas, $\alpha = 1$.

23.17.4 Aproximação adiabática para o gradiente de temperatura

Para obtermos uma relação completa entre o fluxo total de energia e o gradiente de temperatura, podemos escrever:

$$\boxed{H = H_{\text{radiativo}} + H_{\text{convectivo}}} \tag{23.177}$$

Se introduzirmos na equação (23.177) o fluxo radiativo dado pela equação (23.161) e para o fluxo convectivo o valor dado pela equação (23.176), podemos resolver a equação para o gradiente de temperatura. A solução é simplificada pela seguinte estimativa de ordem de grandeza. Vamos, novamente, estimar os valores para um ponto médio no Sol. Vamos, também, usar para o fluxo convectivo, seu limite superior, que é o fluxo total. Se introduzirmos esses valores na equação (23.176), obteremos para o excesso do gradiente de temperatura:

$$\Delta\nabla T \approx 2 \times 10^{-10}\,\text{K/cm}$$

Esse valor deve ser comparado com o valor do gradiente, que pode ser estimado como:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right| \approx \frac{T_c}{R} \approx 3 \times 10^{-4}\,\text{K/cm}$$

Vemos, portanto, que o excesso do gradiente verdadeiro sobre o gradiente adiabático é somente um milionésimo do gradiente de temperatura verdadeiro. Dentro de nossa precisão, é, portanto, totalmente permissível ignorar o excesso do gradiente de temperatura e, em uma zona convectiva, igualar o gradiente de temperatura ao gradiente adiabático. Dessa forma, de acordo com a equação (23.173):

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}} \tag{23.178}$$

Somente próximo à fotosfera, onde a densidade e o comprimento de mistura são pequenos, a equação (23.178) não é uma boa aproximação. Nesse caso, precisamos utilizar a equação (23.176) explicitamente, com sua incerteza em ℓ desconfortável.

23.17.5 Características da convecção no interior estelar

Com a ajuda de nossas estimativas numéricas anteriores, podemos estimar o movimentos que ocorrem em uma zona convectiva no interior estelar. Para

o excesso médio de temperatura, ou deficiência de temperatura dentro de um elemento em movimento em relação ao meio circundante, encontramos:

$$\overline{dT} = \Delta\nabla T\overline{dr} \approx 1^{\circ}\mathrm{K}$$

Essa é realmente uma flutuação pequena em comparação com a temperatura média de vários milhões de graus. A velocidade média do elemento em movimento pode ser calculada da equação de energia cinética (23.175):

$$v \approx 3 \times 10^3\,\mathrm{cm/s} = 0,03\,\mathrm{km/s}$$

Novamente, as velocidades são muito baixas comparadas com as velocidades térmicas, que são de centenas de km por segundo no interior estelar. Como as velocidades convectivas são muito menores que as velocidades térmicas, por cerca de quatro ordens de magnitude, os efeitos hidrodinâmicos dos movimentos convectivos são cerca de oito ordens de magnitude menores do que a pressão do gás. A convecção é, portanto, subsônica, e a pressão turbulenta menor do que a pressão total. Se as velocidades convectivas se tornarem supersônicas, as hipóteses básicas da teoria de mistura, a aproximação considerada, do francês Joseph Boussinesq (1842-1929), estão violadas. A aproximação Boussinesq em geral funciona bem em laboratório, onde a escala de profundidade é comparável com a escala do experimento, o que não é o caso nas estrelas. Essa conclusão é muito importante, porque justifica nossa hipótese intrínseca de que os movimentos convectivos não perturbam o equilíbrio hidrostático.

Podemos, então, calcular o tempo de vida médio de um elemento de turbulência:

$$t \approx \frac{\ell}{v} \approx 2 \times 10^6\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{dias}$$

Esse tempo é longo do ponto de vista de turbulência, mas é extremamente curto comparado a escala de tempo de evolução estelar. Dessa maneira, a zona de convecção deve ser muito bem misturada; quando as reações nucleares mudam a composição química nas partes mais quentes de uma zona de convecção, essas mudanças são aparentes, por mistura turbulenta, em todas as partes da zona de convecção, em um tempo muito curto.

Para a convecção nas camadas externas do Sol, pode-se obter $\Delta\nabla T \leq 9 \times 10^{-5}$ K/cm e $\ell \simeq 200$ km, de modo que $dT \simeq \ell\Delta\nabla T \simeq 1800$ K.

Um exemplo da existência da zona de convecção interior pode ser obtido examinando-se uma estrela de população I, isto é, do disco da nossa galáxia, com X=0,7 e Z=0,03, e 30 $M_\odot$. Essa estrela terá uma temperatura central de $T_c = 3,6 \times 10^7$ K, uma densidade central de $\rho_c = 3$ g/cm^3, luminosidade

total de $L = 5,51 \times 10^{38}$ ergs/s e raio $R = 4,6 \times 10^{11}$ cm. Para manter essa luminosidade, a estrela terá uma taxa de produção de energia central de $\varepsilon_c \simeq 2 \times 10^5$ ergs g^{-1} s^{-1}, e a opacidade será dominada por espalhamento de elétrons, como veremos na próxima seção, com $K \simeq 0,34$ cm^2/g. A pressão total pode ser calculada como $P_c \simeq 1,88 \times 10^{16}$ dina/cm^2, incluindo-se a pressão de radiação, sendo que a pressão do gás contribui com 77,5% da pressão total. Para essas condições $\Gamma_2 = 1,41$, logo $\nabla_{\rm ad} = 0,29$, e $\nabla_{\rm rad} = 3,0$. Portanto $\nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad}$, comprovando que existe uma zona de convecção central. Podemos calcular, para essas condições,

$$\frac{4acT^3}{3K\rho^2 c_p} \simeq 5 \times 10^9 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Se assumirmos, para simplificar, $\ell \simeq R$, e para a gravidade $g(M_r = 0,1M) \simeq 1,4 \times 10^4$ cm/s^2, obteremos $\Delta\nabla T \simeq 5 \times 10^{-7}$, e $L_{\rm rad}/L_{\rm total} \simeq 0,1$, isto é, a convecção transporta 90% do fluxo total. Na seqüência principal, as estrelas com $T_{\rm ef} \leq 8000\ K$ têm zona de convecção superficial eficiente.

Sumarizando, os movimentos em uma zona de convecção são turbulentos, mas tão lentos que não têm qualquer efeito hidrodinâmico. Os movimentos convectivos são altamente eficientes no transporte de energia devido ao alto conteúdo em energia térmica dos gases no interior estelar. A mistura turbulenta é tão rápida que as zonas convectivas são praticamente homogêneas a todo tempo.

Do ponto de vista da construção de modelos estelares, podemos extrair a seguinte receita. Em cada camada do modelo, calcule o gradiente de pressão da condição de equilíbrio hidrostático (23.99), e o gradiente de temperatura da equação de equilíbrio radiativo (23.161). Introduza esses valores na condição de estabilidade (23.163). Se a condição é satisfeita, a convecção não ocorre e o gradiente de temperatura calculado pela equação de equilíbrio radiativo (23.161) é o correto. Se a condição de estabilidade (23.163) não é satisfeita, convecção ocorre e o gradiente calculado na equação de equilíbrio radiativo (23.161) não pode ser usado. Use o gradiente dado pela equação (23.178), que tem precisão suficiente.

Derivamos, portanto, as condições de equilíbrio necessárias para calcular modelos de interiores estelares. As equações contêm relações entre pressão, densidade e temperatura. Precisamos de uma equação de estado para relacionar as três variáveis. A opacidade é um fator decisivo na equação de equilíbrio radiativo; precisamos conhecer a opacidade em função da temperatura e da densidade. A equação básica de equilíbrio térmico requer o conhecimento das taxas de produção de energia por reações nucleares para as várias condições de temperatura e densidade.

23.17.6 Overshooting e semiconvecção

Na nossa derivação de transporte de energia por convecção, supusemos que o elemento convectivo se desloca com uma velocidade v por uma distância ℓ e então se dissolve no meio, liberando o calor. No topo da zona de convecção, onde o gradiente de temperatura real se torna menor do que o gradiente de temperatura adiabático, todos os elementos convectivos supostamente param, não penetrando nas camadas superiores, que são estáveis. Essa hipótese não é real, pois alguns elementos do fluido excederão a borda, *overshooting* na região estável. Os efeitos desse *overshooting* são: misturar a matéria de composição química diferente depois da interface convectiva e transportar algum calor. Na zona de convecção no núcleo de estrelas massivas, o *overshooting* afeta o tempo de vida, pois mistura combustível nuclear e pode levar restos de queima nuclear até a superfície das estrelas, onde se tornam visíveis, como no caso das estrelas Wolf-Rayet. O grande problema é estimar a desaceleração do elemento e, portanto, quantificar o *overshooting*.

Semiconvecção é a mistura de elementos na interface da zona de convecção, devido à existência de descontinuidades na composição química. Por exemplo, para uma estrela de 10 $M_\odot$, a zona de convecção se expande com o tempo, causando uma descontinuidade na abundância do hidrogênio, X. Como a opacidade é dominada por espalhamento de elétrons e, como veremos na secção (23.19.4), $K = 0,2(1 + X)$ cm^2/g é descontínuo e, portanto, $\nabla_{\rm rad}$ também, pois a equação de equilíbrio radiativo (equação 23.161) nos dá:

$$\nabla_{\rm rad} = \frac{3}{16\pi acG}\frac{PK}{T^4}\frac{L_r}{M_r} \tag{23.179}$$

Como

$$\nabla_{\rm ad} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \tag{23.180}$$

e Γ_2 quase não depende da composição química, pois $\Gamma_2 = 5/3$ para um gás ideal, $\nabla_{\rm ad}$ é contínuo. Devido à descontinuidade de $\nabla_{\rm rad}$, existe uma pequena região fora da zona de convecção que não é radiativa, mas também não é convectiva. Nessa região, deve ocorrer uma mistura até que os gradientes de composição química não sejam descontínuos. Essa mistura chama-se de semiconvecção. Vittorio M. Canuto, em seu artigo de 2000 no Astrophysical Journal, Volume 534, p. L113-L115, "Semiconvection and Overshooting: Schwarzschild and Ledoux Criteria Revisited", discute a necessidade de se incluir estes efeitos.

Uma teoria de convecção que leva em conta os diversos tamanhos dos elementos de mistura turbulenta, sem parâmetros ajustáveis, e que calcula

o transporte de energia levando em conta tanto a diferença de temperatura das camadas externas quanto a própria turbulência, foi desenvolvida por Vittorio M. Canuto, Itzchak Goldman e Italo Mazzitelli em 1996, no Astrophysical Journal, 473, 550. Vittorio M. Canuto, em seu artigo de 2002, "Critical Richardson numbers and gravity waves", publicado no Astronomy & Astrophysics, 384, p. 1119-1123, conclui que a convecção turbulenta gera ondas de gravidade que se propagam na região radiativa, agindo como uma fonte adicional de energia.

Seguindo o desenvolvimento de François Roddier, no Progress in Optics XIX (1981, ed. E. Wolf, North-Holland, p. 281), o movimento de um fluido passa de laminar para turbulento quando seu número de Reynolds, $\mathrm{Re} = v\ell/\nu$, excede um valor crítico que depende da geometria do fluxo. Na definição do número de Reynolds, v é a velocidade, ℓ é o comprimento característico do fluxo e ν é a viscosidade cinemática. No interior estelar, assim como na atmosfera da Terra, os movimentos excedem este valor crítico amplamente, de modo que o movimento convectivo é extremamente turbulento. [5]

Em 1941, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) (Doklady Akademii Nauk S.S.S.R, 30, 229) propôs que em um meio turbulento, a energia cinética dos movimentos de larga escala é transferida para movimentos com escalas cada vez menores, até que este processo pare quando a energia cinética for dissipada por fricção viscosa. Num estado estacionário, a dissipação de energia ε_0 deve ser igual à taxa de produção de energia turbulenta. Seguindo este raciocínio, Kolmogorov assumiu que a velocidade v do movimento é proporcional à escala ℓ e à taxa de produção e dissipação de energia ε_0. Como nas escalas maiores $\varepsilon_0 \propto v^2/\tau$, onde τ é o tempo característico $\tau \equiv \ell/v$,

$$v \propto \varepsilon_0^{\frac{1}{3}} \ell^{\frac{1}{3}}$$

Em uma análise espectral (de Fourier) da energia cinética em função de um número de onda $k = \pi/\ell$, a energia $E(k)dk$ entre k e $k+dk$ é proporcional a $v^2(k)$, logo

$$E(k)dk \propto k^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$$

conhecida como a lei de Kolmogorov, que só é valida longe das bordas $L_0^{-1} \ll k \ll \ell_0^{-1}$, onde L_0 é a escala externa, geralmente a escala da região que dá origem à turbulência, e ℓ_0 a escala na qual a dissipação por viscosidade

[5] No ar, a viscosidade cinemática é da ordem de $\nu \simeq 15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, $L_0 \simeq 15$ cm e $v \simeq 1$ m/s, resultando um número de Reynolds crítico da ordem de $\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}} \simeq 10^4$ e qualquer escala maior terá movimento turbulento.

ocorre. A distribuição espectral de energia $E(k)$ é definida de modo que a energia cinética de turbulência por unidade de massa seja:

$$\frac{1}{2}v^2 = \int_0^\infty E(k)dk$$

23.18 Abundância dos elementos

Dada a massa e a idade de uma estrela, sua estrutura interna completa é determinada por somente uma outra propriedade básica, sua composição química inicial.

Normalmente, a composição é especificada por três parâmetros: X, Y, Z. X é a abundância de hidrogênio, Y a de hélio, e Z a de todos os outros elementos mais pesados. As abundâncias são definidas em termos de fração de massa: X representa a massa em hidrogênio em uma grama de massa estelar, de modo que

$$\boxed{X + Y + Z = 1}$$

O inverso do peso molecular médio é dado por:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{X_i}{A_i}$$

onde X_i é a abundância por massa do elemento i, e A_i seu peso atômico.

Como um exemplo, um gás de carbono puro tem $1/\mu = 1/12$, ou seja $\mu = 12$, enquanto um gás de hidrogênio puro tem $1/\mu = 1/1$, ou seja $\mu = 1$.

Se uma fração y_i do elemento i, com Z_i prótons, está ionizada, o peso molecular médio dos elétrons, μ_e será:

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{Z_i X_i y_i}{A_i} \right)^{-1} \tag{23.181}$$

e

$$\boxed{\mu = \left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} \right)^{-1}}$$

Se o gás tiver 75% de H, X=0,75 e 25% de He, Y=0,25:

$$\frac{1}{\mu_i} = \frac{0,75}{1} + \frac{0,25}{4} = \frac{1}{1,23}$$

e se o gás estiver completamente ionizado

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{0,75}{1} + \frac{2 \times 0,25}{4} = \frac{1}{1,143}$$

Embora a composição química do Sol possa ser obtida do estudo de seu espectro, as linhas de hélio no espectro do Sol, que deram origem ao nome do elemento, são linhas cromosféricas e, portanto, em condições físicas em que a determinação da abundância é imprecisa. A abundância dos outros gases nobres, principalmente do Ne, também são imprecisas. Um valor comumente usando para a abundância de hélio é Y=0,245, determinado por Nicolas Grevesse & Arlette Noels, 1993, em *Origin and Evolution of the Elements*, eds. Nikos Prantzos, Elisabeth Vangioni-Flam & Michel Cassé, Cambridge University Press, 15. Nicolas Grevesse, Martin Asplund & A. Jacques Sauval publicaram novas determinações da composição solar em 2005, *European Astronomical Society Publications Series*, Volume 17, 2005, p.21, usando modelos tridimensionais e fora de equilíbrio termodinâmico local e encontraram Y=0,165, o que leva a modelos completamente diferentes e até agora inconsistentes com as observações heliosismológicas (Sarbani Basu & H. M. Antia, no artigo *Helioseismology and solar abundances, 2008, Physics Reports, 457, 217*). Aldo M. Serenelli e Sarbani Basu, no Astrophysical Journal de 2010 (719, 865), utilizam a abundância superficial do Sol obtida pela sismologia, de $Y^{\odot}_{\text{superficial}} = 0,2485 \pm 0,0035$, com uma incerteza na taxa de difusão de 20%, e os modelos de convecção, para encontrar a abundância primordial de $Y^{\odot}_{\text{inicial}} = 0,278 \pm 0,006$. A mais recente determinação das abundâncias solares é Nicolas Grevesse, Martin Asplund, A. Jacques Sauval & Pat Scott, 2010, Astrophysics & Space Science, 328, 179, obtendo X=0,7380, Y=0,2485 e Z=0,0134, consistente com a heliosismologia.

23.18.1 Variação da composição com o tempo

Nas regiões radiativas, não há troca de matéria entre as camadas da estrela se desprezarmos a difusão. Portanto, as frações dos elementos químicos X_i só podem mudar se as reações nucleares criarem ou destruírem os elementos de tipo i, no elemento de massa em consideração.

A freqüência das reações nucleares é descrita por taxas de reação r_{lm}, representando o número de reações por unidade de volume e tempo que transformam elementos do tipo l em elementos do tipo m. Em geral, um elemento do tipo i pode ser afetado simultaneamente por muitas reações, algumas que criam o elemento (r_{ji}), e outras que o destroem (r_{ik}). Essas

taxas de reações nos dão diretamente a variação de n_i por segundo. Como

$$X_i \equiv \frac{m_i n_i}{\rho} \tag{23.182}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho}\left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik}\right] \quad \text{i=1,...,I} \tag{23.183}$$

para qualquer elemento 1...I envolvido nas reações.

A reação $p \rightarrow q$ em que um elemento do tipo p é transformado em um elemento do tipo q está associada a uma liberação de energia e_{pq}. Na equação de conservação de energia, nós usamos a taxa de geração de energia por unidade de massa ε, que normalmente contém contribuições de muitas reações diferentes:

$$\varepsilon = \sum_{p,q} \varepsilon_{pq} = \frac{1}{\rho}\sum_{p,q} r_{pq} e_{pq} \tag{23.184}$$

Vamos definir a energia gerada quando uma unidade de massa do elemento de tipo p é transformada em um elemento do tipo q:

$$q_{pq} \equiv \frac{e_{pq}}{m_p} \tag{23.185}$$

Podemos, então, reescrever a variação da composição química (23.182) em termos de ε:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \left[\sum_j \frac{\varepsilon_{ji}}{q_{ji}} - \sum_k \frac{\varepsilon_{ik}}{q_{ik}}\right] \tag{23.186}$$

Se representarmos a queima de hidrogênio por uma taxa geral ε_H, por exemplo, podemos escrever:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_H}{q_H}$$

e como

$$\sum_i X_i = 1$$

obtemos $\partial Y/\partial t = -\partial X/\partial t$, onde q_H é a energia liberada por unidade de massa quando o hidrogênio é convertido em hélio.

23.18.2 Difusão

Efeitos microscópicos também podem mudar a composição química de uma camada no interior da estrela. Se existem gradientes nas abundâncias dos elementos, a difusão tende a reduzir as diferenças. A difusão se dá por movimentos randômicos das partículas. A teoria macroscópica da difusão foi proposta em 1855 pelo fisiologista alemão Adolf Eugen Fick (1829-1901), que mais tarde inventaria as lentes de contato, propondo duas leis, relacionado o fluxo de partículas J com o gradiente da concentração c por um coeficiente de difusão D, em analogia ao transporte de calor por um gradiente de temperatura:

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}c$$

e a segunda lei de Fick, que, na verdade, é uma equação de continuidade:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot D\vec{\nabla}c \tag{23.187}$$

Em 1905, Albert Einstein demonstrou que as leis de Fick eram válidas, e que o coeficiente de difusão D era relacionado com o coeficiente de fricção f por:

$$D = \frac{\Re T}{f}$$

onde T é a temperatura, $\Re$ a constante do gás, para um fluxo dado em mol cm^{-2} s^{-1}. Em 1952, o inglês Sydney Chapman (1888-1970) e Thomas George Cowling (1906-1990) detalharam o estudo estatístico da difusão, comprovando as duas leis de Fick.

Escrevendo o fluxo $\vec{J} = c\vec{v}_D$, onde v_D é a velocidade de difusão, obtemos

$$\vec{v}_D = -\frac{D}{c}\vec{\nabla}c \tag{23.188}$$

e no caso de um coeficiente de difusão D constante:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c \tag{23.189}$$

Uma estimativa grosseira do tempo característico de difusão é:

$$\tau_D = \frac{S^2}{D} \tag{23.190}$$

onde S é um comprimento característico da variação da abundância n_i correspondente à concentração c.

Uma generalização da velocidade de difusão (equação 23.188) é:

$$\vec{v}_D = \frac{D}{c}\left(\vec{\nabla}c + k_T\vec{\nabla}\ln T + k_P\vec{\nabla}\ln P\right) \tag{23.191}$$

com os coeficientes k_T e k_P definidos apropriadamente.

Vamos, primeiro, considerar o efeito de difusão por concentração e por temperatura. Assumamos que o gradiente de temperatura é perpendicular ao plano $x-y$ em um sistema cartesiano; nesse caso, o fluxo de partículas de um certo tipo na direção $+z$, devido ao movimento estatístico (randômico) das partículas, será determinado pela densidade n_i e pela velocidade média $\bar{v}$, ambos medidos em $z=-\ell$, onde ℓ é o livre caminho médio das partículas deste tipo:

$$J^+ = \frac{1}{6}c(-\ell)\,\bar{v}(-\ell) \tag{23.192}$$

onde o fator de $1/6$ origina da média sobre $\cos^2\theta$, pois queremos o fluxo perpendicular ao plano $x-y$.

Se expandirmos n_i e $\bar{v}$ em $z=0$ na equação (23.192), e em uma equação correspondente para o fluxo J^- na direção $-z$:

$$J^{\pm} = \frac{1}{6}\left[c(0) \mp \frac{\partial c}{\partial z}\ell\right]\left[\bar{v}(0) \mp \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\ell\right] \tag{23.193}$$

e, portanto, existe um fluxo líquido

$$J = J^+ - J^- = -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\ell\bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\ell c\right) \tag{23.194}$$

que, em geral, não é nulo.

Consideremos a velocidade de difusão relativa $v_{D_1} - v_{D_2}$ devido ao movimento de dois tipos diferentes de partículas (1,2), com fluxos J_1 e J_2, e concentrações c_1 e c_2:

$$v_{D_1} - v_{D_2} = \frac{J_1}{c_1} - \frac{J_2}{c_2} \tag{23.195}$$

Com a equação (23.194), podemos substituir os fluxos J_i, e com:

$$E_i = \frac{1}{2}\mu_i\bar{v}^2 = \frac{3}{2}\Re T \tag{23.196}$$

onde μ_i é o peso molecular médio, podemos obter

$$v_{D_1} - v_{D_2} = -\frac{D}{c_1c_2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial z} + k_T\frac{\partial \ln T}{\partial z}\right) \tag{23.197}$$

onde

$$D = \frac{1}{3}\left(c_2\ell_1\bar{v}_1 + c_1\ell_2\bar{v}_2\right) = \left(\frac{\Re T}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_2\ell_1{\mu_1}^{-\frac{1}{2}} + c_1\ell_2{\mu_2}^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{23.198}$$

$$k_T = \frac{1}{2}\frac{\ell_1\sqrt{\mu_2} - \ell_2\sqrt{\mu_1}}{\ell_1 c_2\sqrt{\mu_2} + \ell_2 c_1\sqrt{\mu_1}}c_1c_2(c_2 - c_1) \tag{23.199}$$

onde ℓ_1 e ℓ_2 são os livres caminhos médios das duas espécies.

Da equação (23.198) podemos ver que o coeficiente de difusão é da ordem de

$$D \simeq \left(\frac{\Re T}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\ell \simeq \frac{1}{3}v^*\ell \tag{23.200}$$

onde v^* e ℓ são representativos das velocidades estatísticas e livre caminho médio dos componentes.

Se considerarmos uma mistura de hidrogênio e hélio, $v_D = v_H - v_{\rm He}$ é a velocidade de difusão. Se $v_D > 0$, o hidrogênio se difunde na direção de menor temperatura, isto é, para cima na estrela. Para a região central do Sol ($T \simeq 10^7$ K, $\rho \simeq 100$ g cm$^-3$), $\ell \simeq 10^{-8}$ cm e $D \simeq 6$ cm^2 s^{-1} e para um comprimento característico de difusão de $S \simeq R_\odot \simeq 10^{11}$ cm, o tempo característico de difusão (equação 23.190) será $\tau_D \simeq 10^{13}$ anos. Apesar desse tempo de difusão ser muito maior do que a idade do Universo e, portanto, difusão ser irrelevante no Sol, no caso de estrelas anãs brancas, a difusão se dá em escalas de tempo de milhões de anos.

Vamos, agora, considerar a difusão por pressão, que normalmente é chamada de sedimentação ou deposição gravitacional. Uma consideração estatística como no caso da difusão por temperatura mostra que existe difusão mesmo nas camadas isotérmicas, com um gradiente de pressão não-nulo. Chapman e Cowling (1952), em seu livro *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, detalham como obter k_P.

Assumindo que um material consiste de dois componentes (1,2), gases ideais com pesos moleculares μ_i e pressões P_i, podemos definir a escala de altura de pressão

$$\lambda_{P_i} \equiv -\frac{dr}{d\ln P_i} \tag{23.201}$$

que com a ajuda da equação de equilíbrio hidrostático ($dP_i/dr = -g\rho$) e da equação de estado de um gás ideal ($P_i = \Re\rho_i T/\mu_i$) pode ser escrita como

$$\lambda_{P_i} = \frac{P_i}{g\rho_i} = \frac{\Re T}{g\mu_i} \tag{23.202}$$

As densidades das partículas são proporcionais a P_i, que são aproximadamente proporcionais a

$$P_i \propto \exp\left(-\frac{r}{\lambda_{P_i}}\right) \tag{23.203}$$

Portanto, a componente com maior peso molecular médio cai mais rapidamente na direção r do que a componente com menor peso molecular, de modo que o elemento mais pesado se move para baixo do elemento mais leve. Essa difusão ocorre mesmo que os elementos inicialmente estivessem totalmente misturados. Para as estrelas da seqüência principal, tanto $|k_T|$ quando $|k_P|$ são da ordem de um e, portanto, a separação dos elementos não ocorre, mas para as estrelas anãs brancas a difusão leva à separação total dos elementos.

Paula Jofré e Achim Weiss mostram no seu artigo no Astronomy & Astrophysics de 2011, 533, 15, que se não levam em conta a difusão nas estrelas do halo na nossa Galáxia, a idade obtida é de 14 a 16 Ganos, incoerente com a idade do Universo. Quando levam em conta a difusão, como o hidrogênio difunde para cima, saindo do núcleo, existe menos combustível nuclear e a saída da sequência principal é mais rápida. Neste caso a idade é de 10 a 12 Ganos, comprovando então que é necessário levar em conta a difusão na evolução estelar, especialmente para as estrelas de baixa metalicidade, que têm envelope convectivo razo e há difusão por um longo tempo. A difusão, levando os elementos mais pesados para baixo, também faz com que a metalicidade observada hoje em dia não seja a metalicidade primordial. Existe ainda a levitação radiativa, que faz que elementos com bandas de absorção em comprimentos de onda de alto fluxo sejam carregados para as camadas externas, como o ferro, e terras raras nas estrelas Ap.

23.18.3 Regiões convectivas

As regiões convectivas têm um alto poder de mistura por movimentos turbulentos, em uma escala de tempo muito maior do que as mudanças causadas pelas reações nucleares e, portanto, podemos assumir que as regiões convectivas permanecem homogêneas:

$$\frac{\partial X_i}{\partial r} = 0 \tag{23.204}$$

Se uma zona convectiva se estende de r_1 a r_2, dentro desse intervalo todos $\bar{X}_i$ são constantes. Mas, como as bordas da zona de convecção podem mudar

com o tempo, as abundâncias no interior da zona de convecção mudam

$$\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial t} = \frac{1}{M_{r_1} - M_{r_2}} \left[\int_{M_{r_1}}^{M_{r_2}} \frac{\partial X_i}{\partial t} dM_r + \frac{\partial M_{r_2}}{\partial t} \left(X_{i2} - \bar{X}_i \right) - \frac{\partial M_{r_1}}{\partial t} \left(X_{i1} - \bar{X}_i \right) \right] \tag{23.205}$$

Os valores de X_{i1} e X_{i2} devem ser tomados do lado de fora da borda que está se movendo. A integral descreve a mudança devido às reações nucleares, mas também devido ao movimento das bordas para regiões de composição distinta. Essas mudanças podem causar o transporte de cinzas de reações nucleares para a superfície da estrela, como ocorre no ramo das gigantes e supergigantes, em que a zona de convecção se estende por quase toda a estrela, bem como pode levar novo combustível nuclear para a região de reações nucleares.

23.19 Opacidades

Para tratar corretamente o transporte de energia por radiação, precisamos dispor de valores da opacidade para todas as condições de temperatura e densidade no interior estelar e mesmo na sua atmosfera. A maior parte da massa de uma estrela está a temperaturas da ordem de $(1 - 30) \times 10^6$ K. A essas temperaturas, o pico da distribuição de Planck varia entre 29 Å e 0,9 Å, de acordo com a Lei de Wien

$$\lambda_{\max} T = 0,29 \times 10^8 \text{ Å K}$$

Esses comprimentos de onda correspondem a raio-X, mole e duro. A essas temperaturas todos os elementos estão ionizados a tal ponto que no máximo alguns elétrons permanecem nas camadas mais internas. O hidrogênio e o hélio estão essencialmente ionizados e, portanto, estão na forma de elétrons, prótons e partículas α, livres.

Na nossa definição de opacidade, a absorção da radiação quando atravessa uma unidade de massa em uma coluna de área perpendicular unitária e altura ds é dada por:

$$dI_\nu = -K_\nu \rho I_\nu ds \tag{23.206}$$

logo

$$K_\nu = \frac{dI_\nu}{I_\nu \rho ds} \tag{23.207}$$

isto é, a opacidade é a fração absorvida da radiação atravessando uma coluna de altura ds.

A profundidade ótica, definida como

$$\tau_\nu \equiv \int_{s_0}^{s} K_\nu \rho ds \tag{23.208}$$

representa a distância para a qual a intensidade decai de um fator e, e

$$\ell \equiv \frac{1}{K_\nu \rho} \tag{23.209}$$

pode ser interpretado como o livre caminho médio dos fótons.

No núcleo das estrelas, três mecanismos geram a opacidade: absorção, espalhamento e reflexão. Vamos listar os vários mecanismos:

1. absorção verdadeira
   (a) transições ligado-ligado (absorção em linhas, excitação)
   (b) transições ligado-livre (ionização)
   (c) transições livre-livre (*bremstrahlung*: um elétron livre no campo de um íon pode absorver uma quantidade arbitrária de energia, e aumentar sua energia cinética).

2. espalhamento Thomson [*Sir* Joseph John Thomson (1856-1940)] de fótons por elétrons livres — se o elétron não adquirir velocidade relativística, chama-se efeito Compton coerente [Arthur Holly Compton (1892-1962)]. O termo coerente implica que a reemissão é na mesma freqüência da radiação incidente. Se os elétrons forem relativísticos, a reemissão é incoerente. Esse processo, embora não seja uma absorção real, atenua o feixe de radiação, porque o elétron re-irradia, ou espalha, a luz em outra direção.

3. atenuação com absorção insignificante, devido à dispersão. Por exemplo, reflexão. Essa atenuação é normalmente desprezível, e assumimos o índice de refração $\mu = 1$. Essa aproximação não é válida se o plasma for não-transmissivo ou na presença de campo magnético. No caso geral

$$K_\nu^{\rm real} \equiv \frac{K_\nu}{\mu_\nu} \tag{23.210}$$

   Na região de baixa temperatura ($T \leq 10^4$ K), outros processos físicos são importantes:

4. absorção por íons negativos;

5. absorção molecular;

6. espalhamento Rayleigh [*Lord* Rayleigh, John William Strutt (1842-1919)] (absorção da radiação por uma molécula, indo para um estado excitado e subseqüente reemissão em qualquer direção);

7. espalhamento Raman [Chandrasekhara Venkata Raman (1888-1970)] (absorção da radiação por uma molécula, indo para um estado excitado e subseqüente emissão de radiação em outra freqüência, pois a molécula passa para um outro estado vibracional ou rotacional). A energia de uma molécula, além do valor quântico principal E_0, tem números quânticos rotacionais k e vibracionais v:

$$E_{k,v} = E_0 + \frac{\hbar^2}{2I}k(k+1) + \hbar w\left(v + \frac{1}{2}\right)$$

onde I é o momento de inércia e w a freqüência angular fundamental de vibração.

8. foto-excitação para estados auto-ionizantes [se dois elétrons, após absorverem radiação, estão excitados a níveis i_1 e i_2 com energia de excitação $E_t = E_{i_1} + E_{i_2}$ maior do que a energia de ionização, eles podem fazer uma transição sem emissão de radiação, para um estado de mesma energia total, mas com um elétron removido (ionizado)];

9. absorção por grãos de poeira.

Para altíssimas temperaturas ($T \geq 10^9$ K):

10. produção de pares;

11. espalhamento Compton incoerente (freqüência diferente) por elétrons relativísticos;

12. absorção nuclear;

13. espalhamento fóton-fóton;

14. processos fóton-neutrinos.

Como os processos de absorção dependem da freqüência, e a estrutura da estrela não, normalmente se substitui a opacidade na equação do equilíbrio radiativo (23.161) pela sua média ponderada definida como a opacidade média de Rosseland, pelo norueguês Svein Rosseland (1894-1985) em 1924,

de modo que a equação do equilíbrio radiativo seja válida para quantidade integradas sobre a freqüência:

$$\boxed{\frac{1}{K_{\rm Ross}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{K_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu} = \frac{\pi}{4\sigma T^3}\int_0^\infty \frac{1}{K_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu} \tag{23.211}$$

23.19.1 Transições ligado-livre

As transições ligado-livres somente ocorrem se a radiação tiver freqüência superior àquela necessária para remover o elétron da camada em que ele se encontra, para um átomo de um elemento presente no meio. Se designarmos $E_{n,i}$ como a energia do átomo ou íon de tipo i, a partir do nível de energia de número quântico n, então a absorção ocorrerá para os fótons com freqüência superior a

$$\nu_{i,n} = \frac{E_{i,n}}{h}$$

onde h é a constante de Planck. O excesso de energia do fóton, $h(\nu - \nu_{i,n})$, aparecerá como energia cinética do elétron emitido. Em 1923, o físico holandês Hendrik Anthony Kramers (1894-1952) derivou a fórmula para o coeficiente de absorção ligado-livre e livre-livre para transições por raio-X, por elétron na camada n. Para freqüências acima da freqüência de corte, o coeficiente de absorção por partícula será dado por:

$$\begin{aligned} a_0(\nu,i,n) &= \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}}\frac{Z_i^4 m_e e^{10}}{ch^6}\frac{1}{n^5}\frac{1}{\nu^3}S_{n,i}^4 g_i(\nu,n) \\ &= 2,815\times 10^{29}\frac{Z_i^4 S_{n,i}^4 g_i(\nu,n)}{n^5\nu^3}\ {\rm cm}^2 \end{aligned} \tag{23.212}$$

para ν em Hertz. $g_i(\nu,n)$ é o fator de Gaunt, que precisa ser calculado usando-se a mecânica quântica, e representa a correção quântica à derivação semi-clássica de Kramers. O fator de Gaunt foi publicado por John Arthur Gaunt (1904-1944), que fora aluno de Ralph Howard Fowler (1889-1944), em 1930, no *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 229, 163, para várias situações. Essa correção é próxima de um e varia lentamente com a freqüência. O fator correção $S_{n,i}$, chamado de *screening factor*, leva em conta que a carga real vista pelas partículas é $Z_i S_{n,i}$, menor do que Z_i, pois os elétrons livres formam uma nuvem entre os íons, reduzindo sua carga efetiva. $S_{n,i}$ também corrige pela redução da carga nuclear efetiva devido à existência, se for o caso, de elétrons em camadas mais internas do que a em consideração, e mesmo de outros elétrons na mesma camada.

Para o ionização do hidrogênio a partir do estado fundamental

$$g_{1f} = 8\pi\sqrt{3}\frac{\nu_1}{\nu}\frac{e^{-4z\cot^{-1}z}}{1-e^{-2\pi z}}$$

onde ν_1 é a freqüência de referência (limite de Lyman),

$$z^2 = \frac{\nu_1}{\nu - \nu_1}$$

e o fator de Gaunt varia de 0,797 para 912Å, a 0,515 para 9,12Å.

Como um exemplo, $a_0^H(912\mathring{A}, 1) = 6,3 \times 10^{-18}$ cm^2, já que a freqüência correspondente a $\lambda = 912$ Å é $\nu = 3,29 \times 10^{-15}$ Hz. Entre as bordas de absorção, isto é, para n=constante, a_0 varia aproximadamente como $1/\nu^3$.

Se o gás estiver parcialmente degenerado, um fator adicional $q_{\mathrm{bf},i}$ precisa ser introduzido para levar em conta que a célula do espaço de fase correspondente ao estado final (livre) do elétron pode já estar ocupada por outro elétron.

$$q_{\mathrm{bf},i} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_F}{kT} - \frac{h\nu - E_{i,n}}{kT} + 1\right)}$$

ou seja, podemos substituir o fator de Gaunt acima por

$$g_{\mathrm{bf},i} \equiv g_i(\nu, n) q_{\mathrm{bf},i}$$

Como $q_{\mathrm{bf},i} \leq 1$, o efeito da degenerescência é reduzir o coeficiente de absorção.

23.19.2 Transições livre-livre

Um elétron livre não pode absorver um fóton porque a conservação de energia e *momentum* não podem ser satisfeitas simultaneamente durante o processo, mas se um íon estiver na vizinhança, o acoplamento eletromagnético entre o íon e o elétron transfere *momentum* e energia entre eles, tornando o processo possível. Portanto, embora trate-se de absorção por um elétron livre, a carga dos íons no meio entra no cálculo da absorção.

Se um elétron de carga e, movendo-se não-relativisticamente, passa por um íon de carga Ze, ele é acelerado e irradia de acordo com o resultado de Larmor [*Sir* Joseph Larmor (1857-1942)]. Se uma carga e está em repouso, o campo elétrico produzido será radial, E_r. Se a carga for acelerada para uma pequena velocidade δv em um δt, depois de um tempo t haverá um campo elétrico perpendicular ao movimento:

$$\frac{E_\perp}{E_r} = \frac{\delta v\, t \operatorname{sen}\theta}{c\,\delta t}$$

onde θ é o ângulo entre o vetor de aceleração e observador.

Pela Lei de Coulomb, no sistema c.g.s, o campo (força) elétrico é dado por:

$$E_r = \frac{e}{r^2}$$

Substituindo $t = r/c$, obtemos

$$E_\perp = \frac{e}{r^2}\left(\frac{\delta v}{\delta t}\right)\frac{r\text{sen}\,\theta}{c^2}$$

A energia irradiada por unidade de área (erg/s/cm^2), o fluxo de Poynting [John Henry Poynting (1852-1914)]

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$$

e como $|E| = |H|$,

$$j = \frac{c}{4\pi}E^2$$

ou, com a aceleração $a = \delta v/\delta t$,

$$j = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{e\,a\,\text{sen}\,\theta}{rc^2}\right)^2$$

A potência emitida é obtida integrando-se sobre todas as direções

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} jr^2\text{sen}\,\theta d\theta$$

e como $\int_0^\pi \text{sen}^3\,\theta d\theta = 4/3$,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2(t) \tag{23.213}$$

onde $a(t)$ é a aceleração, que depende do tempo. A aceleração do elétron se dá por interação com o íon, e a energia irradiada, integrada no tempo, será dada por:

$$E = \frac{Z^2e^6\pi}{3c^3m_e^2}\frac{1}{vs^3} \tag{23.214}$$

onde s é o parâmetro de impacto da trajetória (distância de menor aproximação). A energia irradiada tem um máximo para freqüências angulares de $w \simeq v/s$.

Para as transições livre-livre (desaceleração ou *bremstrahlung*), a fórmula de Kramers pode ser expressa considerando-se um íon de carga nuclear efetiva $S_{f,i}Z_ie$, em um meio com $dn_e(p)$ elétrons livres por unidade de volume com momenta entre p e $p+dp$, em relação ao íon. O coeficiente de absorção livre-livre (*free-free*) por íon, para absorção da radiação de freqüência ν pelos dn_e elétrons livres com *momentum* no intervalo relevante, é dado pela fórmula de Kramers:

$$a_0'(\nu,i,p)dn_e(p) = \frac{4\pi Z_i^2 e^6}{3\sqrt{3}hcm_e^2\nu^3 v(p)} S_{f,i}^2\, g_{\mathrm{ff},i}(\nu,p)\, dn_e(p) \qquad (23.215)$$

onde $v(p)$ é a velocidade correspondente ao *momentum* p e $g_{\mathrm{ff},i}$ é o fator Gaunt para as transições livre-livre. Para que um elétron possa absorver um fóton, é necessário que um íon esteja na vizinhança, para conservar o *momentum*. Para $h\nu < kT$ e maior do que a freqüência de plasma

$$g_{ff} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\ln\frac{(2kT)^{\frac{3}{2}}}{\pi e^2\nu m_e^{\frac{1}{2}}} - \frac{5\gamma}{2}\right]$$

onde $\gamma = 0,577$ é a constante de Euler. Para T em Kelvin, ν em Hertz,

$$g_{ff} = 9,77\left(1 + 0,130\log\frac{T^{\frac{3}{2}}}{\nu}\right)$$

e varia de 1,1 a 1,5 entre $\log T$ variando de 4 a 8,5.

Como um exemplo, para o núcleo do Sol, com $T = 10^7$ K, para $\lambda =$ 912 Å, $\rho \simeq 100$ g/cm^3, ou seja, $n_e \simeq n_H \simeq 6\times10^{25}$ cm^{-3}, $F \simeq 1$ e $a_{ff} \simeq 2\times10^{-16}$ cm^2.

Seja y_e^i o número de elétrons livres, por átomo, provenientes de um átomo de carga nuclear Z_ie. Nesse caso,

$$S_{f,i} = \frac{y_e^i}{Z_i} \qquad (23.216)$$

Para obter o coeficiente de absorção livre-livre por átomo, precisamos integrar a equação anterior sobre todos os momenta possíveis. Utilizando a distribuição de *momentum* de Fermi-Dirac, juntamente com $v(p) = p/m_e$, já que a absorção livre-livre só é importante para elétrons não-relativísticos, obtém-se:

$$a_0(\nu,i) \;=\; \frac{16\pi^2 Z_i^2 e^6 S_{f,i}^2\, \bar{g}_{\mathrm{ff},i}(\nu)F}{3\sqrt{3}hc(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\nu^3}\frac{n_e}{(kT)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \quad 3,692 \times 10^8 \frac{Z_i^2 S_{f,i}^2 \, \bar{g}_{\mathrm{ff},i}(\nu) F n_e}{T^{\frac{1}{2}} \nu^3} \, \mathrm{cm}^2 \tag{23.217}$$

onde

$$F \equiv \frac{2(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n_e} \ln(1 + e^{\varepsilon_F / kT}) \tag{23.218}$$

23.19.3 Coeficiente de absorção monocromática

Para obter o coeficiente de absorção por unidade de massa K, consideremos N/ρ como o número de partículas absorventes por unidade de massa, com ρ a densidade de massa do material. Se A for a massa atômica do átomo,

$$\frac{N}{\rho} = \frac{N_A}{A} \tag{23.219}$$

onde N_A é o número de Avogadro. Logo,

$$K = \frac{a_0 N_0}{A} \tag{23.220}$$

Portanto, se a_{ff} denota o coeficiente de absorção atômica por transições livre-livre:

$$K_{\mathrm{ff}} = \frac{N a_{\mathrm{ff}}}{\rho} \tag{23.221}$$

Para o caso de transições ligado-livre, precisamos multiplicar a_{bf} pela fração média de núcleos no nível i, y_i:

$$K_{\mathrm{bf}} = \frac{N y_i a_{bf}}{\rho} \tag{23.222}$$

e y_i pode ser estimado de:

$$y_i = \frac{g_n^i}{\exp\left[-\left(\varepsilon_F + E_i\right)/kT\right]} \tag{23.223}$$

onde g_n^i é o peso estatístico do nível n, ($g_n^i = 2n^2$ assumindo hidrogênicos).

Para uma mistura de elementos, o coeficiente de absorção monocromático tem a forma esquemática da Figura (23.11).

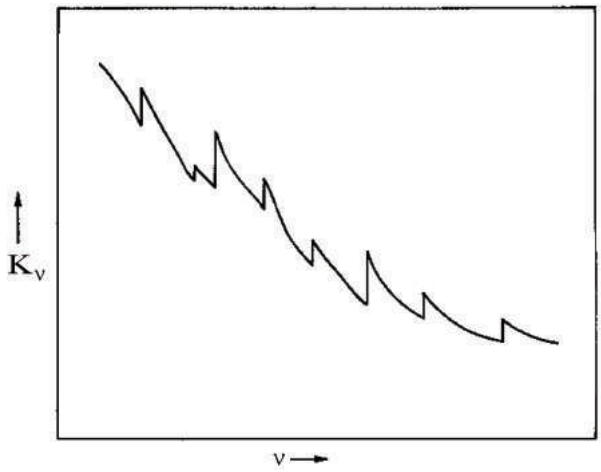


Figura 23.11: Coeficiente de absorção monocromático.

23.19.4 Espalhamento Thomson

Quando uma onda eletromagnética passa por um elétron, o campo elétrico faz o elétron oscilar. Um elétron oscilando representa um dipolo clássico (carga em movimento), que irradia em todas as direções, isto é, o elétron espalha parte da energia da onda incidente. O tratamento clássico, chamado de espalhamento Thomson, é válido para

$$\frac{h\nu}{m_e c^2} \ll 1 \rightarrow \lambda \gg 0,02 \text{ Å} \tag{23.224}$$

Nesse caso, a energia irradiada por um elétron com aceleração a é dada pela equação de Larmor (23.213):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 \tag{23.225}$$

Se o campo elétrico da radiação incidente for representado por

$$E = E_0 \operatorname{sen}(2\pi\nu t) \tag{23.226}$$

a será dado por:

$$a = -\frac{eE}{m_e} = -\frac{eE_0}{m_e}\operatorname{sen}(2\pi\nu t) \tag{23.227}$$

de modo que

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m_e^2 c^3}E_0^2 \operatorname{sen}^2(2\pi\nu t) \tag{23.228}$$

Como a energia incidente por unidade de área é dada por

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H} \tag{23.229}$$

onde H é o campo magnético, perpendicular e de mesma magnitude que o campo elétrico E, temos

$$j = \frac{c}{4\pi}E_0^2 \,\mathrm{sen}^2(2\pi\nu t) \tag{23.230}$$

e a seção de choque do espalhamento Thomson é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\equiv \frac{d\varepsilon/dt}{j} && (23.231)\\ &= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \\ &= 0,6652 \times 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 && (23.232) \end{aligned}$$

Para o espalhamento Thomson, o coeficiente de absorção monocromático por unidade de massa é

$$K_\nu^e = \frac{\sigma_0 n_e}{\rho} \tag{23.233}$$

Se o elétron for acelerado para velocidades relativísticas, precisamos utilizar as fórmulas do espalhamento de Compton, e o espalhamento será incoerente, isto é, a radiação emitida pelos elétrons terá uma freqüência

$$\nu = \nu_0\left[1 - \frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)}\right] \tag{23.234}$$

onde ν_o é a freqüência da radiação incidente,

$$\alpha \equiv \frac{h\nu_0}{m_e c^2} \tag{23.235}$$

e θ o ângulo entre o feixe incidente e a direção do feixe irradiado.

Para um gás completamente ionizado, a densidade de elétrons é dada por

$$n_e = \rho N_A\left\langle\frac{Z}{A}\right\rangle \tag{23.236}$$

Se $A_i \simeq 2Z_i$,

$$n_e \simeq \frac{1}{2}\rho N_A(1+X) \tag{23.237}$$

e o coeficiente de absorção por unidade de massa

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{\sigma_0 n_e}{\rho} \\ &= 0,2004(1+X)\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{g} \end{aligned}$$

O espalhamento por íons é sempre menor do que o por elétrons, pois, como têm massa mais alta, os íons respondem menos a oscilações impostas:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{ion}}}{\sigma_e} = \frac{Z^4}{A^2}\frac{m_e^2}{m_p^2} \simeq 3 \times 10^{-7} \tag{23.238}$$

23.19.5 Coeficiente total

Finalmente, o coeficiente total de absorção por unidade de massa, levando-se em conta o espalhamento coerente e a emissão induzida, pode ser escrito como:

$$\boxed{K_\nu = K_\nu^a \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) + K_\nu^e} \tag{23.239}$$

A emissão induzida leva em conta que se uma radiação de freqüência $\nu = \nu_{E_i}$ incide sobre um átomo já no estado i, a probabilidade de emissão de radiação nessa freqüência será aumentada. O excesso de probabilidade é proporcional à intensidade I_ν da radiação incidente, como determinado por Einstein em 1917, em sua derivação da lei de Planck.

Podemos obter fórmulas aproximadas para os coeficientes de absorção, no caso de ionização completa:

$$\boxed{K_{\mathrm{ff}} \simeq 37,6[X + Y + B(1 - X - Y)](1 + X)\bar{g}_{\mathrm{ff}} F'(\rho, T)\frac{\rho}{T_6^{3,5}}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{g}} \tag{23.240}$$

onde

$$B \equiv \sum_{i(Z_i>2)} \frac{c_i Z_i^2}{A_i} \tag{23.241}$$

e

$$c_i \equiv \frac{X_i}{(1 - X - Y)} \tag{23.242}$$

$$F'(\rho, T) \equiv \frac{2\left(2\pi m_e kT\right)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \ln\left(1 + e^{\frac{\varepsilon_F}{kT}}\right) \tag{23.243}$$

$$T_6 \equiv \frac{T}{10^6\ \mathrm{K}} \tag{23.244}$$

e

$$\boxed{K_{\rm bf} \simeq 7,40 \times 10^3 B(1-X-Y)(1+X)\frac{\bar{g}_{\rm bf}}{t}\frac{\rho}{T_6^{3,5}}\ {\rm cm}^2/{\rm g}} \tag{23.245}$$

onde t é chamado de fator de guilhotina

$$t \equiv \int_0^\infty \frac{W(u)du}{\bar{f}(u)} \simeq 10 \tag{23.246}$$

$$W(u) = \frac{15}{4\pi^4}\frac{u^7 e^{-u}}{(1-e^{-u})} \tag{23.247}$$

com $u \equiv \frac{h\nu}{kT}$, $\bar{f}(u)$ uma média de $f^{(i)}(u)$ sobre todos os elementos relevantes exceto H e He de

$$f^{(i)}(u) \equiv \sum_n \frac{2\pi^2 e^4 m_e Z_i^2}{n^2 h^2 kT}\frac{S_{n,i}^4}{n^3}\left[\frac{2\left(2\pi m_e kT\right)^{3/2} n_n^i}{n_e h^3}\right]$$

e $S_{n,i} = \frac{\nu_e(i)}{Z_i}$ a carga efetiva.

Como o coeficiente numérico de $K_{\rm bf}$ é muito maior do que o coeficiente de $K_{\rm ff}$, o coeficiente de absorção ligado-livre domina sobre o coeficiente livre-livre no interior estelar, se a abundância dos elementos pesados $Z = 1-X-Y$ for grande o suficiente. Se usarmos $\bar{g}_{\rm ff} = \bar{g}_{\rm bf} = F'(\rho,T) = 1$, $B = 5$ e $t = 10$, obtemos a condição

$$K_{\rm bf} \geq K_{\rm ff} \tag{23.248}$$

$$7,40 \times 10^{24}\frac{5}{10}Z(1+X)\rho T^{-3,5} \geq 3,76 \times 10^{22}(1+X)\rho T^{-3,5} \tag{23.249}$$

ou seja

$$Z = 1-X-Y \geq 0,01$$

isto é, a opacidade ligado-livre domina sobre a livre-livre para estrelas de População I, como o Sol.

Já a condição $K_e \geq K_{\rm bf}$, assumindo $\bar{g}_{\rm ff}\, B/t = 1/2$, se dá com:

$$0,20(1+X) \geq 7,40 \times 10^{24}\frac{1}{2}(1+X)Z\rho T^{-3,5} \tag{23.250}$$

ou

$$T \geq 1,66 \times 10^7 \left(\frac{\rho}{100}\cdot\frac{Z}{0,01}\right)^{2,7}\ {\rm K} \tag{23.251}$$

isto é, para

$$\log\rho = 3,5\log T - 23,27 \tag{23.252}$$

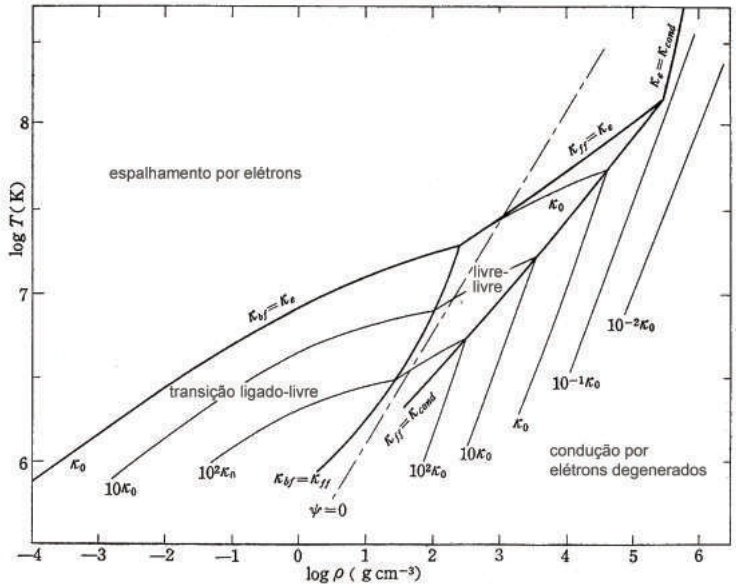


Figura 23.12: Figura publicada por Chushiro Hayashi (1920-2010), Minoru Nishida and Daiichiro Sugimoto (1962, Progress of Theoretical Physics Supplement, 22, 1) ilustrando as regiões onde cada tipo de opacidade é mais importante, em função da temperatura e densidade.

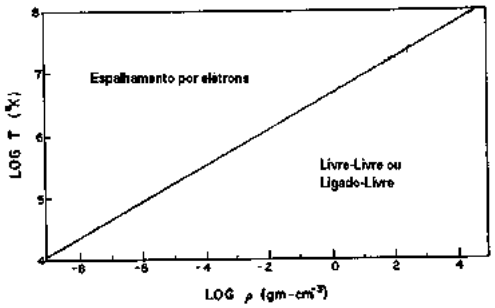


Figura 23.13: Regiões de domínio dos diferentes tipos de absorção.

$K_e \simeq K_{\rm bf} \simeq K_{\rm ff}$, para $Z = 0,01$. Portanto, *para densidades* $\rho \simeq 10 - 100$ g/cm^3*, normais nos interiores estelares, o espalhamento por elétrons domina para* $T \geq 10^7$ *K.*

Outras componentes que precisam ser levadas em conta são as transições ligado-ligado, e o alargamento da linha por colisão, efeito Doppler (velocidade) e efeito Stark (densidade) [Johannes Stark (1874-1957)].

23.19.6 Íon negativo de hidrogênio

Para temperaturas abaixo de 7000 K, pode formar-se o íon negativo H^- pois um hidrogênio neutro se polariza se houver uma carga elétrica próxima, podendo atrair e ligar-se a outro elétron. A baixas temperaturas o H^- é a principal fonte de absorção, pois tem um nível somente 0,754 eV acima do fundamental, que corresponde a um fóton de $\lambda = 16\,500$ Å. Para que exista o íon, é necessária a presença de hidrogênio neutro e elétrons livres. O número de íons negativos de hidrogênio em equilíbrio é dado pela lei de Saha, onde o potencial de ionização é dado pela energia de ligação do segundo elétron. A função de partição $g_- = 1$ para o íon negativo e $g_0 = 2$ para o hidrogênio neutro. Logo a lei de Saha pode ser escrita como

$$\frac{n_0}{n_-} P_e = 4 \frac{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-0{,}754 \text{ eV}/kT}$$

Os elétrons são provenientes de algum hidrogênio ionizado e de elétrons das camadas externas de alguns metais abundantes, como Na, K, Ca e Al. Portanto, a opacidade do H^- depende não somente da temperatura, mas da abundância dos metais. Para $3000 \leq T \leq 6000$ K, densidades de $10^{-10} \leq \rho \leq 10^{-5}$ g/cm^3, uma estimativa da opacidade é

$$\boxed{K_{H^-} \approx 2,5 \times 10^{-31} (Z/0,02) \rho^{1/2} T^9 \text{ cm}^2/\text{g}} \tag{23.253}$$

Para temperaturas abaixo de 5000 K, as absorções moleculares são muito importantes.

Freqüentemente se aproxima a opacidade por uma fórmula do tipo:

$$K = K_0 \rho^n T^{-s} \tag{23.254}$$

que, embora não precisas, servem para estimativas. O caso n=1 e s=3,5, válido para absorção livre-livre em um gás não-degenerado em que a maioria dos elementos está completamente ionizado, é chamada de opacidade de Kramers, pois foi derivada classicamente para as opacidades livre-livre e ligado-livre pelo físico holandês Hendrik Anthony Kramers (1894-1952) em 1923. K_0 função da composição química, e n e s ajustados às tabelas de

opacidades. O caso $n = 1$ e $s = 3,5$ só é estritamente válido para as transições livre-livre em um gás não-degenerado basicamente ionizado.

Por condução térmica, o fluxo de energia depende do gradiente de temperatura, isto é, o fluxo se dá da região mais quente para a mais fria,

$$H_{\rm cond} = -\nu_c \frac{dT}{dr} \tag{23.255}$$

onde ν_c é o coeficiente de condução.

Evry Leon Schatzman (1920-) e Françoise Praderie no livro The Stars de 1993, (Heidelberg, Springer), p. 102, propõe que o coeficiente de difusão dos elétrons, responsáveis pela condução, para um plasma fracamente correlacionado, é dado por

$$\nu_c \simeq \frac{1}{3}\frac{1}{\pi}\frac{(kT)^{\frac{5}{2}}}{e^4 N_i \sqrt{m_e}}\frac{1}{\log(\ell_D/a)}$$

onde ℓ_D é o comprimento de Debye [Peter Joseph William Debye (1884-1966)] e

$$\frac{\ell_D}{a} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi N_e\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{8\pi N_e e^2}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Podemos modificar a definição de opacidade, definindo uma opacidade efetiva total:

$$\boxed{\frac{1}{K_{\rm total}} = \frac{1}{K_R} + \frac{1}{K_c}} \tag{23.256}$$

onde K_R é a opacidade radiativa, e K_c a opacidade conductiva, definida de modo que:

$$H_{\rm cond} = -\frac{4ac}{3K_c\rho}T^3\frac{dT}{dr} \tag{23.257}$$

ou seja:

$$K_c = \frac{4acT^3}{3\nu_c\rho}, \tag{23.258}$$

e, portanto, o fluxo total

$$H_{\rm total} = H_R + H_{\rm cond} \tag{23.259}$$

pode ser escrito usando-se a equação do equilíbrio radiativo (23.161), substituindo-se K por $K_{\rm total}$.

Embora a condução não seja um mecanismo importante de transporte de energia para estrelas na seqüência principal, ela é importante no núcleo de

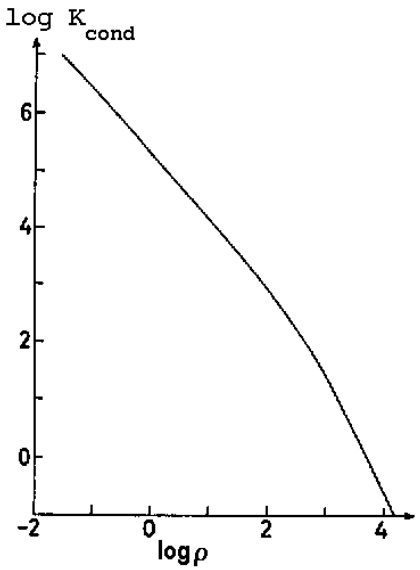


Figura 23.14: Valores da *opacidade conductiva*, $K_c(\mathrm{cm}^2/\mathrm{g})$, para $T = 10^7$ K.

estrelas anãs brancas e de algumas supergigantes vermelhas, onde os elétrons estão degenerados. Como nenhum processo envolvendo colisão de um elétron degenerado pode espalhar o elétron para um estado de energia já ocupado, somente os elétrons próximos do topo do mar de Fermi podem participar efetivamente no processo de condução. O mecanismo mais eficiente de espalhamento dos elétrons é através da interação coulombiana com os íons do meio, e, portanto, a opacidade conductiva depende da carga dos íons, Z_i.

Em 1950, Leon Mestel (1927-) calculou o coeficiente condutivo para o caso de elétrons não-relativísticos, obtendo

$$K_{\mathrm{cond}} = 1,158 \times 10^3 \frac{\sum_i Z_i X_i \Theta_i / A_i}{T_7 f\left(\varepsilon_F / kT\right)} \mathrm{cm}^2/\mathrm{g} \tag{23.260}$$

onde

$$T_7 = \frac{T}{10^7 \text{ K}} \tag{23.261}$$

O fator Θ_I leva em conta os efeitos dos encontros distantes dos elétrons e íons

$$\Theta_i = \ln \left[\frac{2}{1 - \cos\theta_i} \right]^{\frac{1}{2}} \simeq 1 \tag{23.262}$$

e θ_i também é função da degenerescência e precisa ser calculada numericamente, como $f(\varepsilon_F/kT)$:

ε_F/kT	$Z_i^{1/3}\theta_i$	$f(\varepsilon_F/kT)$
-4	0,15479	0,4369
-0,2	0,48637	17,67
4	0,77132	367,9
8	0,82284	2001

Para pequena degenerescência, $\varepsilon_F/kT \leq -4$,

$$\theta_i \simeq 0,589 \left[e^{(\varepsilon_F/kT)}\right]^{\frac{1}{3}} / Z_i^{\frac{1}{3}}$$

Para grande degenerescência, $\varepsilon_F/kT \geq +8$,

$$\theta_i \simeq 0,848 \left[1 - 2,06(\varepsilon_F/kT)^{-2}\right] / Z_i^{\frac{1}{3}}$$

Uma estimativa mais simples é

$$\boxed{K_c \approx 4 \times 10^{-8} \frac{\mu_e^2}{\mu_i} Z_i^2 \left(\frac{T}{\rho}\right)^2 \text{ cm}^2/\text{g}} \tag{23.263}$$

Essa *opacidade* também depende da carga dos íons, pois os elétrons são acelerados em interações com os íons. Como um exemplo de onde a opacidade conductiva é importante, consideremos o interior de uma anã branca fria, com $\rho \approx 10^6$ g/cm^3, $T \approx 10^7$ K, e uma composição de carbono. Como o carbono estará ionizado, a opacidade radiativa será dada por espalhamento de elétrons $K_e \simeq 0,2$ cm^2/g, e a opacidade conductiva (23.263), com $\mu_e = 2$, $\mu_i = 12$ e $Z_i = 6$, será de $K_c \simeq 5 \times 10^{-5}$ cm^2/g. Como $K_c \ll K_{\text{rad}}$, $K_{\text{total}} \approx K_c$, usando-se equação (23.256). Portanto, o transporte de energia se dará por condução, e não por radiação.

Os cálculos de opacidades são bastante complexos, pois dependem da física estatística e da física de partículas e variam de acordo com a composição química do modelo. Os modelos até o início dos anos 1990 utilizavam as tabelas do astrônomo americano Arthur Nelson Cox (1927-2013) e James Edward Tabor (1931-1989) do Los Alamos National Laboratory, publicadas em 1976 no *Astrophysical Journal Supplement*, 31, 271. Em 1990, Carlos A. Iglesias, Forrest J. Rogers e Brian G. Wilson do Lawrence Livermore National Laboratory, publicaram no *Astrophysical Journal*, 360, 281, as tabelas OPAL, disponíveis em http://opalopacity.llnl.gov. Elas foram atualizadas

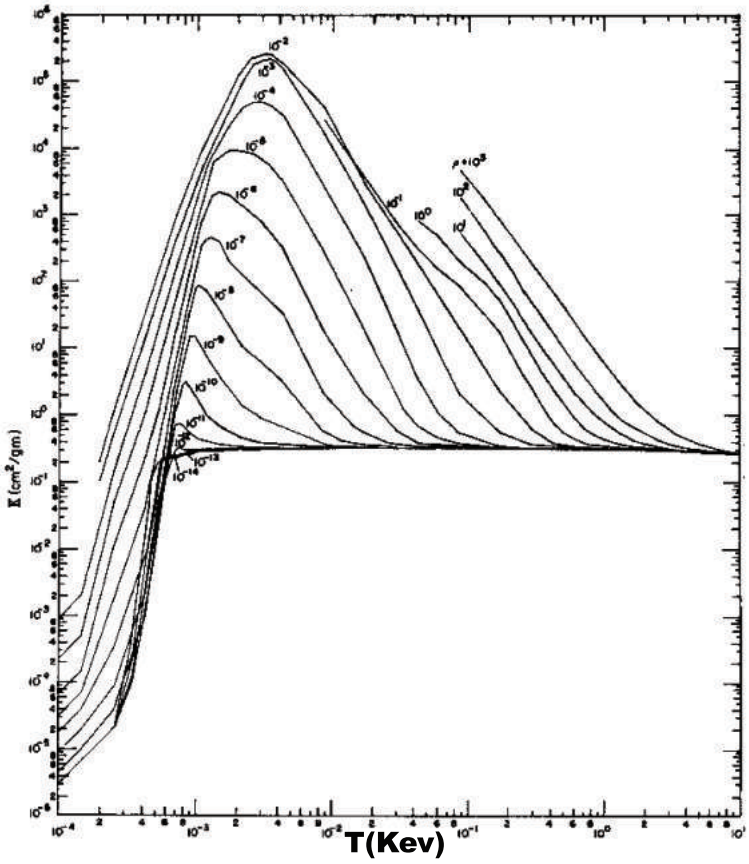


Figura 23.15: Opacidade Total.

em 1996 por Carlos A. Iglesias e Forrest J. Rogers no *Astrophysical Journal*, 464, 943 e novamente em 2006. As tabelas OPAL incluem correções de muito corpos, degenerescência dos elétrons, difração quântica e acoplamento de plasma; só com estas correções se conseguiu modelar as pulsações das estrelas RR Lyrae e Delta Scuti com precisão. Somente a aproximação hidrogênica (duas partículas) pode ser calculada analiticamente. Para todos os outros átomos, o cálculo tem de ser por aproximação. Por exemplo, o H^- tem um nível de energia 0,75 eV acima do nível fundamental do hidrogênio neutro, mas esse nível só pode ser calculado por aproximação não-hidrogênica.

As Cefeidas clássicas têm $\log P = 0,4$ a 1,8, em dias, $\log L/L_\odot = 2,81$

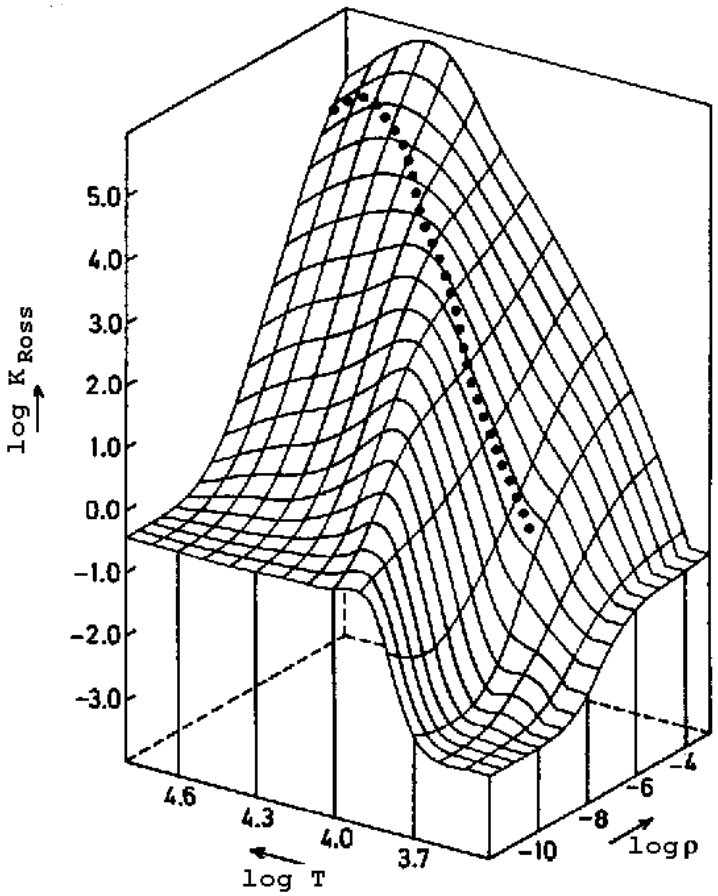


Figura 23.16: Opacidade de Rosseland $K_{Ross}(\mathrm{cm}^2/\mathrm{g})$, para valores de ρ $(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3)$ e $T(\mathrm{K})$, para uma mistura de hidrogênio e hélio com X=0,739 e Y=0,240, de acordo com os cálculos de Los Alamos.

a 4,58, $\log R/R_\odot = 1,41$ a 2,44, $\log \mathcal{M}/\mathcal{M}_\odot = \prime, \bigtriangledown\bigtriangleup$ a 1,04, e $\log T_{\rm ef} = 3,76$ a 3,69. As Cefeidas de População II têm $\log P = 0,1$ a 1,3, em dias, $\log L/L_\odot = 1,95$ a 2,87, $\log R/R_\odot = 0,86$ a 1,52, $\log \mathcal{M}/\mathcal{M}_\odot = -\prime, \in\in$, e $\log T_{\rm ef} = 3,82$ a 3,72.

Outro projeto que calcula detalhadamente as opacidades chama-se *Opacity Project* (http://vizier.u-strasbg.fr/topbase/op.html). Michael J. Seaton (2005, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 362, L1) publicou o coeficiente de absorção monocromática para 17 elementos: H, He, C,

Tabela 23.4: Estrelas Variáveis

Tipo	*Período*	*População*	*Tipo Espectral*	*Mag. Absoluta*
RR Lyrae	1,5 a 24 h	Pop. II	A2–F2	0,6
Cefeidas	1 a 50 d	Pop. I	F6–K2	-6 a -0,5
W Virg	2 a 45 d	Pop. II	F2–G6	-3 a 0
Miras	100 a 700 d	I e II	M,N,R,S	-2 a 1
δ Scuti	0,5 a 5 h	Pop. I	A5–F5	2 a 3

N, O, Ne, Na, Mg, Al, Si, S, Ar, Ca, Cr, Mn, Fe e Ni, incluindo transições de elétrons internos (*inner shell*), com um arquivo dos dados e programa para calcular a opacidade média de Rosseland, para composições químicas diferentes e temperaturas e pressões diferentes. Michael J. Seaton e Nigel R. Badnell apresentaram uma comparação entre os resultados dos dois projetos, no artigo de 2004 no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 354, 457, mostrando que os resultados são bastante similares.

23.20 Geração de Energia Nuclear

A geração de energia nuclear é altamente dependente da temperatura do meio, e a seção de choque das reações depende da energia, porque as reações são ressonantes com os níveis de energia do núcleo composto. Dessa forma, não se pode escrever uma simples expressão entre a produção de energia nuclear, ε, com a temperatura e a densidade. Entretanto, em alguns intervalos de energia, e para fins didáticos, pode-se escrever:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^n T^m, \tag{23.264}$$

onde n e m são expoentes determinados pelo tipo de reação dominante. Por exemplo, para estrelas com massa inferior à massa do Sol, o processo principal para a conversão de hidrogênio em hélio é o ciclo p-p. Para estrelas mais massivas do que o Sol, o processo dominante é o ciclo CNO, em que o carbono, nitrogênio e oxigênio fazem o papel de catalistas da conversão. Essas reações ocorrem a temperaturas de alguns milhões de graus, e densidades entre 1 e 100 g/cm^3. Nesses casos, as taxas de reações nucleares são tais que n=1 e m=4 para o ciclo p-p, e n=1, m=15 para o ciclo CNO. Após a transformação de hidrogênio em hélio, o núcleo se condensa e esquenta, e a temperaturas acima de 10^8 K, efetivamente combina três núcleos de hélio em um núcleo de ^{12}C, com n=2 e m=40.

23.20.1 Seção de choque e taxa de reação

O equilíbrio energético nos dá a energia liberada em cada reação nuclear; se considerarmos a reação genérica

$$a + X \longrightarrow Y + b \tag{23.265}$$

o princípio de conservação de energia demanda a igualidade:

$$E_{aX} + (M_a + M_X)\, c^2 = E_{bY} + (M_b + M_Y)\, c^2 \tag{23.266}$$

onde E_{aX} é a energia cinética do centro de massa de a e x, e E_{bY} é energia cinética do centro de massa de b e Y. Com a energia liberada por reação,

$$E_{\text{liberada}} = E_{bY} - E_{aX} = [(M_a + M_X) - (M_b + M_Y)]\, c^2$$

e com o número de reações por unidade de volume por segundo, podemos calcular a energia liberada por unidade de volume por segundo. Para isso, precisamos definir a seção de choque da reação, σ. A seção de choque é uma

medida da probabilidade de ocorrência da reação, por par de partículas. Na nossa reação genérica, em que um núcleo X é bombardeado por um fluxo uniforme de partícula a, a seção de choque é definida como:

$$\sigma\left(\mathrm{cm}^2\right) = \frac{\text{número de reações/núcleo X/unidade de tempo}}{\text{número de partículas incidentes/cm}^2\text{/unidade de tempo}}$$

O nome seção de choque advém da unidade, área e porque o número de reações pode ser calculado assumindo-se que o núcleo X tem uma área σ e que uma reação ocorre sempre que uma partícula a atinge aquela área.

Supondo que o núcleo X tem uma densidade N_X, a taxa de reação por unidade de volume será dado pelo produto σN_X e pelo fluxo de partículas a. Supondo que o fluxo de partículas a é dado pela translação uniforme, com velocidade v, de partículas com densidade N_a, ou seja, o fluxo é vN_a. A taxa de reações será, então, dada por

$$r = \sigma(v) v N_a N_X \frac{1}{1+\delta_{aX}} \tag{23.267}$$

onde δ_{aX} é o delta de Kronecker [Leopold Kronecker (1823-1891)] ($\delta_{aa} = 1$, $\delta_{aX} = 0$, se $a \neq X$). Este último fator leva em conta que não devemos contar duplamente as partículas idênticas. A velocidade v é a velocidade relativa entre as partículas a e X. Se o gás estiver em equilíbrio termodinâmico, existirá um espectro de velocidades $\phi(v)$, definido de modo que

$$\int_0^\infty \phi(v) dv = 1 \tag{23.268}$$

Nesse caso, $\phi(v)dv$ representa a probabilidade que a velocidade relativa esteja no intervalo v e $v + dv$, e a taxa de reação total, por unidade de volume será dada por:

$$r_{aX} = N_a N_X \frac{1}{1+\delta_{aX}} \int_0^\infty v\sigma_{aX}(v)\phi(v)dv = N_a N_X \langle \sigma v \rangle \frac{1}{1+\delta_{aX}} \tag{23.269}$$

Um estado i com uma largura energética natural Γ_i, pelo princípio da incerteza, decai em um tempo τ_i, definido como

$$\Gamma_i \tau_i = \hbar \tag{23.270}$$

A probabilidade de decaimento pelo canal i é dada por:

$$P_i = \frac{1/\tau_i}{\sum_j (1/\tau_j)} = \frac{\tau}{\tau_i} \tag{23.271}$$

onde

$$\tau \equiv \left(\sum_j \frac{1}{\tau_j} \right)^{-1} \tag{23.272}$$

é o tempo de vida médio total do estado com largura natural $\Gamma = \sum_j \Gamma_j$; de modo que a probabilidade de decaimento pelo canal i pode ser expressa como:

$$P_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \tag{23.273}$$

Portanto, o fator $\Gamma_a \Gamma_b / \Gamma\Gamma$ nos dá a probabilidade de reagir $a+X$, resultando em $b+Y$.

$$\boxed{\langle \sigma v \rangle_{ab} = \langle \sigma v \rangle_{aX} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma^2}} \tag{23.274}$$

23.20.2 Reações não-ressonantes

O raio de um núcleo de massa atômica A pode ser representado por

$$R \simeq 1,44 \times 10^{-13}\ A^{1/3}\ \text{cm} \tag{23.275}$$

Para uma reação $a + X$,

$$R = 1,44 \left(A_a^{1/3} + A_X^{1/3} \right)\ \text{fm} \tag{23.276}$$

onde fm é um fentometro, também chamado de um fermi, e corresponde a 10^{-13} cm.

Para que uma reação nuclear ocorra, as partículas precisam vencer a barreira coulombiana [Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)] repulsiva entre as partículas, dada por

$$V = \frac{K Z_1 Z_2 e^2}{R} = 1,44 \frac{Z_1 Z_2}{R(fm)}\,\text{MeV} \tag{23.277}$$

onde K=1 no sistema cgs, enquanto que a energia cinética entre as partículas é determinada por uma distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann correspondente à energia térmica

$$kT = 8,62 \times 10^{-8} T\,\text{keV}$$

Para temperaturas da ordem de dezenas a centenas de milhões de graus, a energia média das partículas interagentes é muitas ordens de magnitudes menor do que a barreira coulombiana que as separa. As reações ocorrem pelo

efeito de tunelamento quântico, proposto em 1928 pelo físico russo-americano George Antonovich Gamow (1904-1968). As partículas com maior chance de penetrar a barreira são aquelas com a máxima energia na distribuição de Maxwell-Boltzmann:

$$\phi(v)dv = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv \tag{23.278}$$

onde μ é a massa reduzida das partículas a e X.

$$\mu = \frac{m_a m_X}{m_a + m_X} \tag{23.279}$$

Entretanto, a distribuição de Maxwell-Boltzmann mostra que o número de pares de partículas com energia muito acima de kT decresce rapidamente com a energia. George Gamow foi o primeiro a demonstrar que a probabilidade de duas partículas de carga Z_1 e Z_2, movendo-se com velocidade relativa v, penetrar sua repulsão eletrostática é proporcional ao fator

$$\text{Penetração} \propto \exp\left(-\frac{V}{E_{\text{cinética}}}\right) \simeq \exp\left(-\frac{2KZ_1Z_2e^2}{hv}\right) \tag{23.280}$$

já que

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv\frac{p}{m} \simeq \frac{hv}{2r}$$

pelo Princípio da Incerteza $p \cdot r \simeq h$.

As seções de choque para reações nucleares serão proporcionais a esse fator, pois as reações dificilmente podem ocorrer se as partículas não penetrarem essa barreira. Esse fator de penetração pode ser obtido pelo método WKB [Gregor Wentzel (1898-1978), Hendrik Anthony Kramers (1894-1952) e Marcel Louis Brillouin (1854-1948)], válido para o caso de energia da barreira muito maior do que a energia média das partículas. O fator dentro da exponencial chama-se fator de Sommerfeld [Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951)].

$$\text{Penetração} \propto \exp\left(-\frac{2\pi KZ_1Z_2e^2}{\hbar v}\right) \tag{23.281}$$

A interação entre duas partículas também é proporcional ao fator *quantum*-geométrico $\pi\lambda^2$, onde λ é o comprimento de onda de de Broglie:

$$\pi\lambda^2 = \pi\left(\frac{h}{p}\right)^2 = \frac{\pi h}{2Em} \propto \frac{1}{E} \tag{23.282}$$

pois, para um parâmetro de aproximação (distância mínima) s, o *momentum* angular quantizado é $sp = \ell\hbar$, e a seção de choque passando de um estado ℓ para $(\ell + 1)$ é dada por

$$\sigma_{\ell,\ell+1} = \pi \left(s_{\ell+1}^2 - s_\ell^2 \right) = \pi\lambda^2(2\ell + 1) \tag{23.283}$$

Em baixa energia, tanto (23.281) quanto (23.282) variam rapidamente com a energia. Com essas motivações, definimos a seção de choque a baixas energias como um produto de três fatores dependentes da energia:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &\equiv \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi K Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \right) \\ &= \frac{S(E)}{E} \exp\left(-bE^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \tag{23.284}$$

onde

$$b = 31,28 Z_1 Z_2 A^{\frac{1}{2}} \text{ keV}^{\frac{1}{2}}$$

e A é o peso atômico reduzido

$$A \equiv \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$$

O fator $S(E)$ representa a parte nuclear da probabilidade de ocorrência da reação, enquanto os outros dois fatores representam dependências não-nucleares, bem conhecidas. O fator $S(E)$ é normalmente constante ou fracamente dependente da energia sobre uma faixa limitada de energias.

A distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann pode ser escrita em termos da distribuição de energia:

$$\psi(E)dE = \phi(v)dv = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT} \right) \frac{dE}{(kTE)^{\frac{1}{2}}} \tag{23.285}$$

e

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\mu\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \sigma(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} \right) dE \tag{23.286}$$

logo

$$\boxed{\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\mu\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-\frac{1}{2}} \right) dE} \tag{23.287}$$

O fator $e^{(-E/kT)}$ decresce para altas energias, enquanto que o fator $e^{\left(-bE^{-\frac{1}{2}}\right)}$ decresce para baixas energias. As reações são mais efetivas para uma energia E_0 determinada pelo máximo do integrando:

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{E}{kT}+bE^{-\frac{1}{2}}\right)_{E=E_0}=\frac{1}{kT}-\frac{1}{2}bE_0^{-\frac{3}{2}}=0$$

ou

$$\boxed{E_0=\left(\frac{bkT}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=1,220\left(Z_1^2Z_2^2AT_6^2\right)\text{ keV}} \tag{23.288}$$

onde T_6 é a temperatura em milhões de Kelvin, e E_0 é chamada de *energia efetiva para a reação nuclear*. Pela equação (23.288), podemos calcular que a energia efetiva para a reação nuclear para partículas leves e temperaturas de algumas dezenas de milhões de graus, obtendo $E_0 \simeq 10$ a 30 keV, enquanto que a energia térmica é de $kT = 0,086T_6$ keV, refletindo o fato que a penetração da barreira coulombiana favorece as partículas de alta energia da distribuição de Maxwell-Boltzmann.

23.20.3 Reações ressonantes

Em 1936, o russo Gregory Breit (1899-1981) e o húngaro Eugene Paul Wigner (Jenó Pál Wigner, 1902-1995), publicaram no *Physical Review*, 49, 519, a fórmula de Breit-Wigner para nível único, que descreve a parte ressonante da seção de choque para estado com largura natural Γ:

$$\sigma(E)=\frac{\Gamma}{2\pi\left[(E-E_r)^2+(\Gamma/2)^2\right]}$$

que tem a forma de uma lorentziana.

Portanto, para reações ressonantes, a função $S(E)$ não varia pouco com a energia, mas tem a forma:

$$S(E)=\frac{656,6}{A}\frac{w\Gamma_1(E)\Gamma_2}{(E-E_r)^2+(\Gamma/2)^2}\exp\left(31,28Z_1Z_2A^{\frac{1}{2}}E^{-\frac{1}{2}}\right)\text{ keV barns} \tag{23.289}$$

onde

$$w=\frac{2J+1}{(2J_1+1)(2J_2+1)}$$

e J é o *momentum* angular da ressonância e J_1 e J_2 são os spins das partículas 1 e 2, e 1 barn=10^{-24} cm^2.

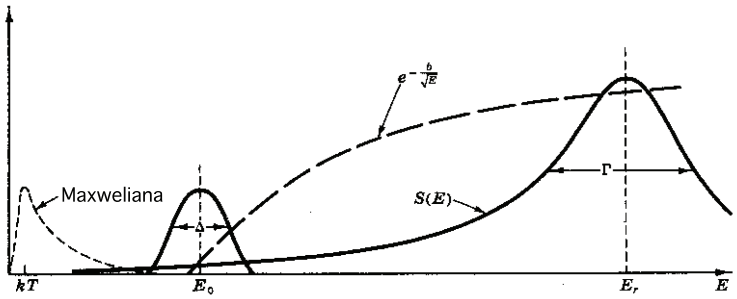


Figura 23.17: Fatores dominantes na taxa de reação nuclear.

As taxas de reações nucleares estão disponíveis na internet no endereço http://www.phy.ornl.gov/astrophysics/data/data.html e foram publicadas principalmente por Georgeanne Robertson Caughlan (1916-1994) e William Alfred Fowler (1911-1995) em 1988, no *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 40, 283. William Fowler recebeu o prêmio Nobel em física em 1983, por seus estudos de reações nucleares e a formação dos elementos no Universo. Uma lista mais moderna foi publicada em 1999 por Carmen Angulo Pérez (1965-) e colaboradores [C. Angulo et al., (1999), Nuclear Physics, A656, 3-187] do NACRE e está disponível em http://pntpm.ulb.ac.be/nacre.htm. Para o ciclo p-p, a primeira reação $^1\mathrm{H}(^1\mathrm{H}, e^+\nu_e)^2\mathrm{D}$ é não-ressonante, e a maior incerteza é o tempo de vida média do nêutron para decaimento β, da ordem de 11 min, necessário para calcular-se o processo inverso de decaimento do próton. A dependência em energia dessa reação é diretamente dependente da barreira coulombiana entre os dois prótons, e:

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle_{pp} &= \frac{6,34\times10^{-39}}{T_9^{2/3}}\left(1+0,123T_9^{1/3}+1,09T_9^{2/3}+0,938T_9\right)\\ &\times \exp\left(-3,380/T_9^{1/3}\right)\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}\end{aligned}$$

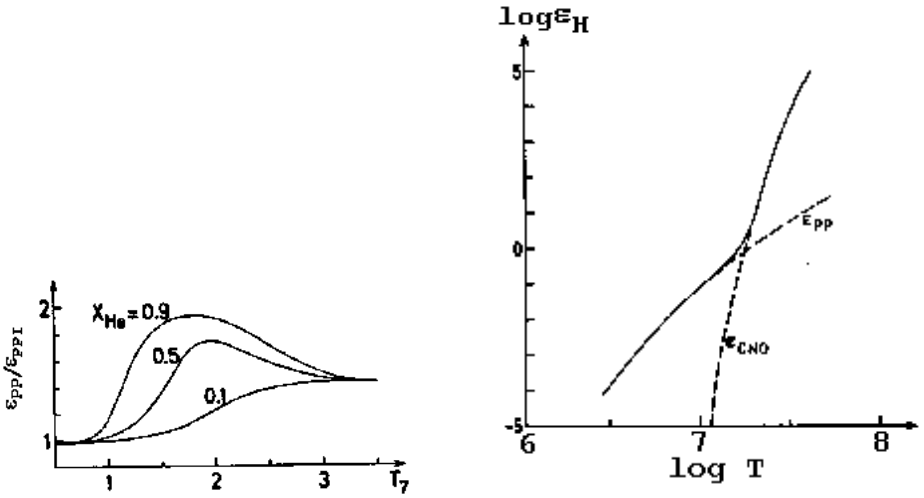
A taxa de reação é obtida multiplicando-se por $n_p^2/2$, onde o fator de 1/2 porque não podemos contar as partículas idênticas duas vezes.

$$r_{pp} = \frac{1}{2}n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp} \tag{23.290}$$

A vida média de um próton em relação à sua destruição pela reação p+p é dada por

$$\tau_p = -\frac{n_p}{dn_p/dt} = \frac{n_p}{2r_{pp}} \tag{23.291}$$

Para $T_6 \simeq 15$, $\rho \simeq 100$ g/cm^3 e $X \simeq 0,7$, obtemos $\tau_p \simeq 6 \times 10^9$ anos; a reação p+p é tão lenta que efetivamente controla a velocidade com a qual o ciclo próton-próton opera.



A quantidade de reações em cada um dos três ramos do ciclo PP, PPI, PPII e PPIII, depende da temperatura, e é ascendente, isto é, para baixas temperaturas o PPI domina e, para altas temperaturas, o PPIII domina. Para temperaturas de $T \simeq 24 \times 10^6$ K, as cadeias PPII e PPIII contribuem igualmente. A reação final do PPIII, que é o decaimento do ^{8}Be em duas partículas–α ocorre também, em processo inverso, na queima do hélio pelo triplo–α. O núcleo de ^{8}Be é extremamente instável, decaindo em $9,7 \times 10^{-17}$ s.

A energia térmica liberada pelo ciclo p-p também depende da cadeia, e um valor efetivo de Q pode ser estimado levando-se em conta os pesos relativos:

$$Q_{\rm ef} = 13,116 \left[1 + 1,412 \times 10^8 \, (1/X - 1) \, e^{-4,998/T_9^{1/3}}\right] \ \text{MeV} \qquad (23.292)$$

e a geração de energia por unidade de massa é dada por:

$$\varepsilon_{pp}^{\rm ef} = \frac{r_{pp} Q_{\rm ef}}{\rho} \qquad (23.293)$$

Usando somente os primeiros termos, obtemos como primeira aproximação

$$\boxed{\varepsilon_{pp}^{\rm ef} = \frac{2,4 \times 10^4 \rho X^2}{T_9^{2/3}} \exp\left(-3,380/T_9^{1/3}\right) \ \text{ergs}\,\text{g}^{-1}\,\text{s}^{-1}} \qquad (23.294)$$

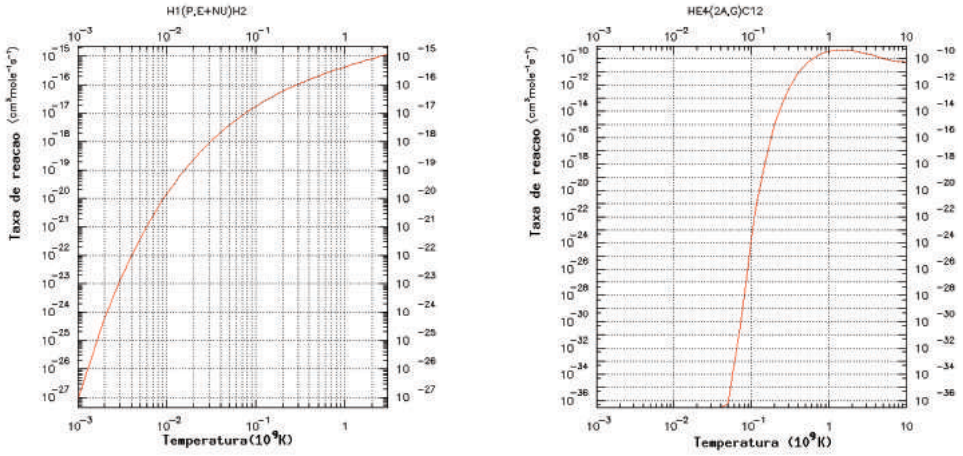


Figura 23.18: Taxa de reação nuclear para $p + p \rightarrow D + e + \overline{\nu}_e$ e $3\mathrm{He}^4 \rightarrow C^{12} + \gamma$.

O deutério é queimado mesmo em baixa temperatura ($T \geq 6 \times 10^5$ K) e, portanto, qualquer deutério primordial é queimado já na fase de pré-seqüência principal.

No ciclo CNO, se a temperatura for alta o suficiente, o principal núcleo resultante, entre C, O e N, será o ^{14}N, e praticamente todo o ^{14}N da natureza foi formado dessa maneira.

$$\boxed{\varepsilon_{CNO} \approx \frac{4,4 \times 10^{25} \rho X Z}{T_9^{2/3}} \exp\left(-15,228/T_9^{1/3}\right) \ \mathrm{ergs\,g^{-1}\,s^{-1}}} \qquad (23.295)$$

Para uma temperatura central como a solar de $T \approx 15 \times 10^6$ K, X=0,7 e Z=0,02, $\varepsilon_{pp} \approx 10\varepsilon_{CNO}$, de modo que a contribuição do ciclo CNO para a geração de energia total no Sol é de 10%. Mas estrelas um pouco mais massivas do que o Sol têm temperatura central suficientemente mais alta para o ciclo CNO dominar.

Já para a queima do hélio pelo ciclo triplo–α,

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{5,1 \times 10^8 \rho^2 Y^3}{T_9^3} \exp\left(-4,4027/T_9\right) \ \mathrm{ergs\,g^{-1}\,s^{-1}}} \qquad (23.296)$$

Tabela 23.5: Valores centrais de produção de energia termonuclear e pressão, assumindo X=0,74 e Y=0,24.

M ($M_\odot$)	T^c (10^6 K)	ρ_c (g/cm^3)	$\varepsilon^c_{\rm pp}$ (ergs/g/s)	$\varepsilon^c_{\rm CNO}$ (ergs/g/s)	$P^c_{\rm g}$ (dina/cm^2)	$P^c_{\rm rad}$ (dina/cm^2)
1	14,42	82,2	16,98	0,61	$7,9 \times 10^{16}$	$1,1 \times 10^{14}$
1,2	16,67	85,7	30,95	11,04	$9,8 \times 10^{16}$	$2,0 \times 10^{14}$
2	21,09	47,0	39,36	463,63	$6,8 \times 10^{16}$	$5,0 \times 10^{14}$

Para $T \approx 10^8$ K, $\varepsilon_{\alpha\alpha\alpha} \propto T^{40}$, consideravelmente mais alto do que para a queima do hidrogênio e, portanto, potencialmente mais explosivo.

A próxima reação importante é a captura de um α pelo ^{12}C formando um ^{16}O. Essa reação se dá próxima a uma ressonância, causando uma incerteza de uma fator de dois, experimental e teórica, na seção de choque. O valor utilizado atualmente para esta reação para as energias estelares é resultado de uma extrapolação dos dados experimentais por oito ordens de magnitude, de acordo com William Alfred Fowler [1986, *Highlights of Modern Physics*, ed. Stuart Louis Shapiro (1947-) & Saul A. Teukolski (1947-), New York: John Wiley & Sons, p.3], obtendo $S(300keV) = 240$ keV barns.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha C} &= \frac{2,62 \times 10^{25} Y X_{12} \rho}{T_9^2} \left(1 + 0,0489 T_9^{-2/3}\right)^{-2} \\ &\times \exp\left[-32,12 T_9^{-1/3} - (0,286 T_9)^2\right] \text{ ergs g}^{-1}\,\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

A incerteza nessa reação limita nosso conhecimento da composição do núcleo das estrelas anãs brancas provenientes de estrelas da seqüência principal com massa menor do que 8 $M_\odot$, isto é, da razão entre carbono e oxigênio. Em 2001, Travis Scott Metcalfe (1973-) inferiu um valor de $S(300keV) = 290 \pm 15$ keV barns para a seção de choque, utilizando a asterosismologia de anãs brancas pulsantes para restringir a fração de oxigênio $X_{\rm O} = 84 \pm 3\%$ para a DBV GD358, com $T_{\rm ef} = 22\,600$ K e $\mathcal{M} = 0,650\ \mathcal{M}_\odot$.

23.20.4 Escudamento eletrônico

A principal modificação que precisamos fazer à discussão de reações nucleares apresentada até agora é a alteração ao potencial de Coulomb entre os reagentes, devido à presença dos elétrons no meio. Esse problema é chamado de escudamento eletrônico (*electron screening*).

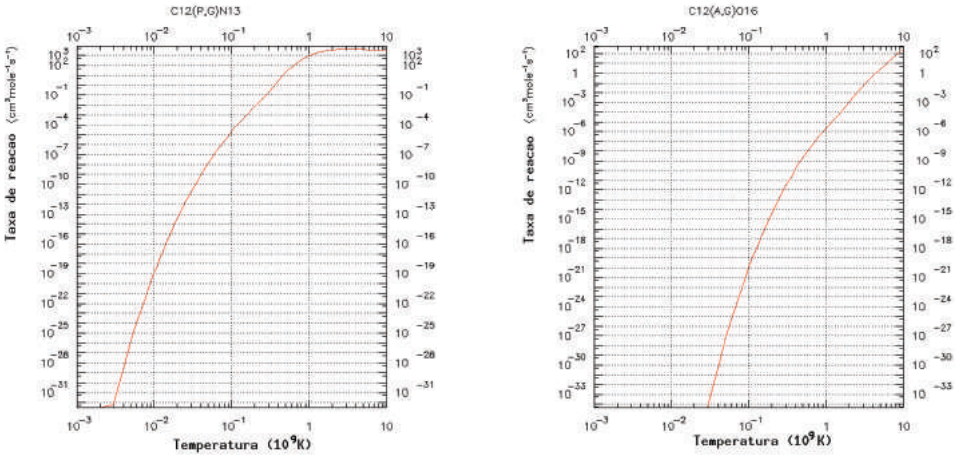


Figura 23.19: Taxa de reação nuclear para $C^{12} + p \to N^{13} + \gamma$ e $C^{12} + \alpha \to 0^{16} + \gamma$.

Considere dois reagentes totalmente ionizados e de mesma carga Z. Podemos definir o raio de Wigner-Seitz a [Eugene Paul Wigner (1902-1995) e Fredrick Seitz (1911-2008)], de modo que

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \equiv \frac{1}{n_i} \tag{23.297}$$

onde n_i é a densidade de íons, por número. Se $KZ^2e^2/a \ll kT$, a teoria de Debye-Hückel [Peter Josef William Debye (1884-1966) e Erich Hückel (1896-1980)] nos diz que o potencial eletrostático de um íon, circundado por uma nuvem de elétrons, é dado por:

$$\phi(r) = \frac{Ze}{r} e^{-\kappa_d r} \tag{23.298}$$

onde κ_d, o inverso do raio de Debye, é dado por:

$$\kappa_d = \left[\frac{4\pi e^2}{kT}\left(Z^2 n_i + n_e\right)\right]^{1/2} \tag{23.299}$$

O efeito da exponencial é o de reduzir a barreira de potencial abaixo do seu valor coulombiano KZe/r, para um dado valor de r. Como estamos interessados em calcular como esse potencial modificado afeta a barreira de penetrabilidade, o valor de r de interesse é da ordem de $r_t \simeq KZ^2e^2/E$, onde E é a energia cinética para separação infinita. Se usarmos o valor de $E \simeq$

10 KeV do pico de Gamow, e Z unitário, obtemos o valor de $r_t \simeq 10^{-11}$ cm. Portanto, para valores pequenos de r, podemos aproximar $\phi(r)$ como

$$\phi(r) \simeq \frac{Ze}{r}\,(1 - \kappa_d r) \tag{23.300}$$

de modo que a barreira potencial eletrostática $U = KZe\phi$ fica reduzida por uma quantia $U_0 \simeq Z^2 e^2 \kappa_d$ devido à presença da nuvem eletrônica circundante. Portanto, podemos, em princípio, substituir $\sigma(E)$ por $\sigma(E + U_0)$, ou seja

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{com escudamento}} = \langle \sigma v \rangle_{\text{sem escudamento}} \times \exp(U_0/kT) \tag{23.301}$$

Como $\exp(U_0/kT) > 1$, há aceleração na taxa de reação nuclear. Por exemplo, para X=0,7 e Y=0,3, isto é, desprezando os outros íons, obtemos para o ciclo pp no centro do Sol $\exp(U_0/kT) = 1,053$. Para a reação de prótons com ^{12}C em uma estrela de população I, com $T_6 = 20$ e $\rho = 100$ g/cm^3, encontramos $\exp(U_0/kT) \simeq 1,25$. Portanto, o efeito do escudamento é significativo.

23.20.5 Síntese de elementos pesados

A nucleosíntese dos elementos por sucessivos estágios de fusão termonuclear termina nos elementos do grupo do ferro, já que a energia de ligação por núcleon é máxima para esses elementos. Pode-se, portanto, entender a abundância relativa dos elementos leves em termos dos estágios de queima nuclear.

Os elementos mais pesados do que o grupo do ferro são formados por exposição de núcleos leves a um fluxo de nêutrons, mesmo em temperaturas moderadas. Os nêutrons, por serem neutros, não precisam vencer a barreira coulombiana dos íons. Uma das reações que produz nêutrons é $^{13}\mathrm{C}(\alpha, n)^{16}\mathrm{O}$. Quando um íon captura um nêutron, ele se torna um isótopo do mesmo elemento, com uma unidade maior de massa atômica:

$$(Z, A) + n \longrightarrow (Z, A + 1) + \gamma$$

Se o núcleo $(Z, A + 1)$ for estável, ele poderá capturar um novo nêutron e assim por diante. Se o núcleo for radioativo, ele poderá capturar um novo nêutron antes ou depois do decaimento beta. Essa questão distingue entre as duas cadeias principais de capturas de nêutrons, os chamados processos s de *slow*, em que a nova captura se dá antes do decaimento beta, e o processo r de rápido, em que o decaimento beta se dá antes da captura de um novo

nêutron. Essa nomenclatura foi introduzida em 1957 por Eleanor *Margaret* Peachey *Burbidge* (1919-), Geoffrey Ronald Burbidge (1925-2010), William Alfred Fowler (1911-1995) e *Sir* Fred Hoyle (1915-2001).

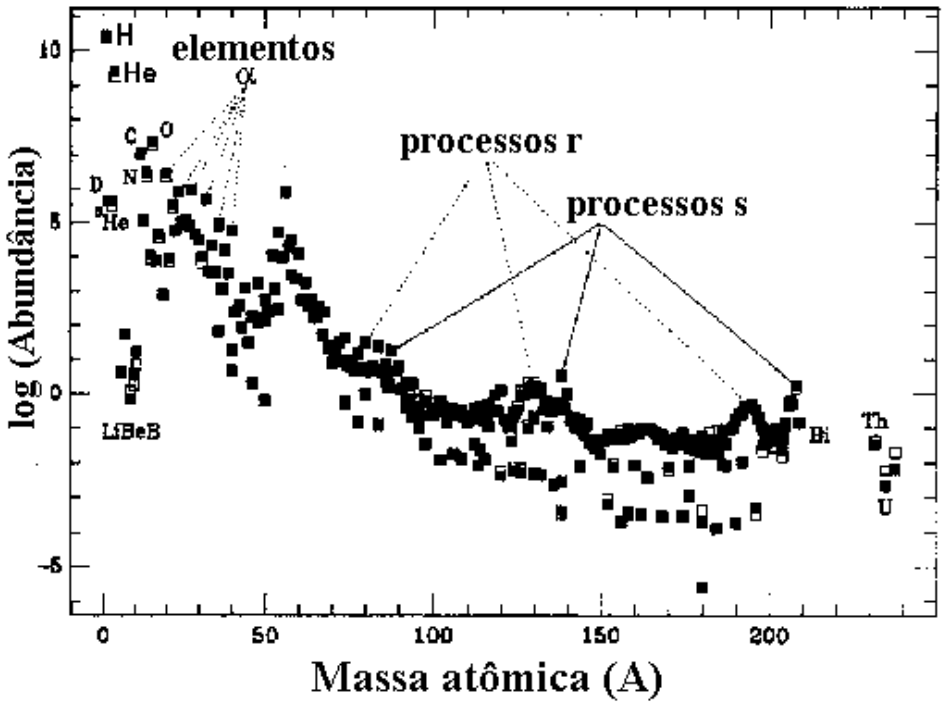


Figura 23.20: Abundâncias solares: os símbolos fechados são de acordo com a compilação de Edward Anders (1926-) & Nicolas Grevesse, 1989, Geochimica et Cosmochimica Acta, 53, 197, e os abertos de Alastair Graham Walter Cameron (1925-2005), 1982, Essays in Nuclear Astrophysics, ed. Charles A. Barnes, Donald Delbert Clayton (1935-) & David N. Schramm (1945-1997), Cambridge, p. 23. Nota-se claramente que os elementos com números pares de prótons e nêutrons têm maior abundância.

23.21 Emissão de neutrinos

Na interação fraca existe um acoplamento elétron-neutrino de modo que um par elétron-pósitron pode decair em um par neutrino-antineutrino pela interação fraca, além de poder decair em um par de raios γ pela interação

eletromagnética. Embora a interação fraca seja cerca de 10^{-20} mais rara do que a eletromagnética, no núcleo de estrelas evoluídas ela pode ser dominante devido a alta densidade.

A emissão de neutrinos funciona como uma refrigeração, já que os neutrinos interagem muito pouco com a matéria, devido à sua baixa seção de choque,

$$\sigma_\nu \simeq 2 \times 10^{-44} \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2$$

e, portanto, escapam do meio carregando energia. A energia dos neutrinos não contribui para manter o equilíbrio hidrostático ou equilíbrio térmico, removendo a energia térmica do gás. Os três processos mais importantes de emissão de neutrinos são: aniquilação de pares elétron-pósitron, formando pares neutrino-antineutrino, plasma neutrino e processos de fotoneutrinos.

Para temperaturas maiores do que 10^9 K, pares elétron-pósitron são produzidos nos interiores estelares porque a energia da radiação é alta o suficiente ($kT \geq 0,1$ MeV).

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^- + e^+ \leftrightarrow \nu_e + \overline{\nu_e}$$

Esse processo é importante no núcleo de estrelas muito massivas evoluídas.

Como um fóton tem massa de repouso zero, ele não pode decair no vácuo em um par elétron-pósitron ou neutrino-antineutrino, conservando tanto o momentum quanto a energia, já que no centro de massa do par, tanto a energia quanto o momentum são nulos. Entretanto, fótons em um gás denso têm uma massa efetiva, e são chamados de *plasmons*. A relação de dispersão para um *plasmon* transverso de número de onda k em um gás não-degenerado, não-relativístico de densidade eletrônica n_e, é dada por

$$\hbar^2 w^2 = \hbar^2 w_p^2 + k^2 c^2$$

onde a freqüência de plasma é dada por

$$w_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}$$

ou seja, a massa efetiva do *plasmon* é $\hbar w_p / c^2$. Se o gás de elétrons for degenerado, a freqüência de plasma é dada por:

$$w_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \left[1 + \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \left(3\pi^2 n_e \right)^{2/3} \right]^{-\frac{1}{2}}$$



Figura 23.21: Mário Schenberg

Como os *plasmons* têm massa efetiva, eles podem decair em pares. Esse processo é chamado de plasma neutrinos, e é dominante na remoção de energia térmica de núcleos degenerados de gigantes vermelhas, núcleos de nebulosas planetárias e anãs brancas quentes.

O processo chamado de fotoneutrino dá-se quando um fóton energético interage com um elétron, produzindo um par neutrino-antineutrino:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu_e + \overline{\nu_e}$$

Esse processo é importante no núcleo degenerado de estrelas quentes.

O processo Urca de emissão de neutrinos, em honra ao Casino da Urca, no Rio, em que se perdia de qualquer forma, foi proposto pelo físico russo-americano George Antonovich Gamow (1904-1968) e pelo físico brasileiro Mário Schenberg (1914-1990) (G. Gamow & M. Schoenberg. 1941, Physical Review 59, 539). Ele consiste de uma captura de elétron por um elemento químico qualquer (Z,A):

$$e^- + (Z, A) \rightarrow (Z - 1, A) + \nu_e$$

seguida de um decaimento β:

$$(Z - 1, A) \longrightarrow (Z, A) + e^- + \overline{\nu_e}$$

O neutrino e antineutrino são formados sem qualquer alteração da composição química, retirando energia do meio. O cálculo da taxa de produção de neutrinos é baseado na teoria eletrofraca de Steven Weinberg (1933-), publicada no Physics Review Letter, 19, 1264 em 1967, e Abdus Salam (1926-1996). A taxa varia de $Q \simeq 10^2$ ergs cm^{-3} s^{-1}, para $T = 10^7$ K e $\log g = 6$,

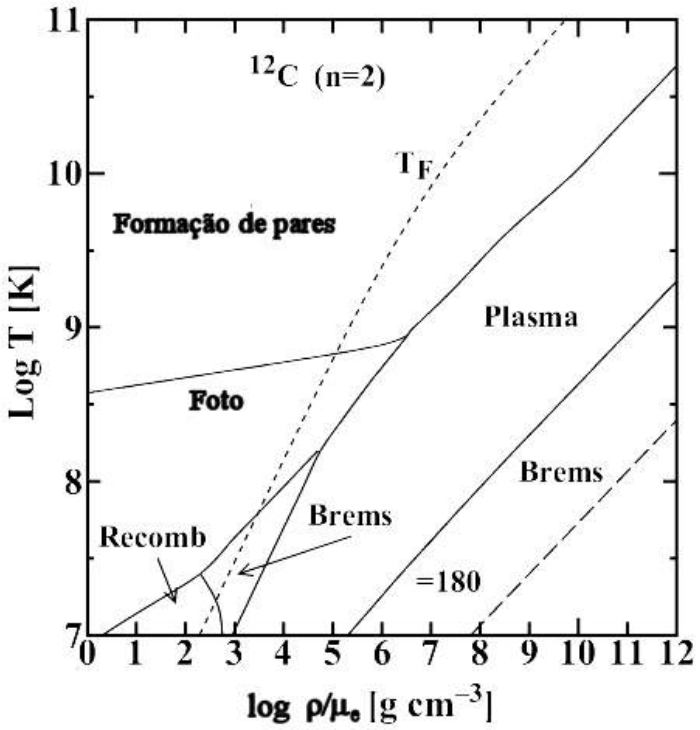


Figura 23.22: Diagrama temperatura-densidade mostrando as regiões em que os diversos processos de emissão de neutrinos são dominantes, segundo os cálculos de Naoki Itoh, Tomoo Adachi, Masayuki Nakagawa, Yasuharu Kohyama e Hiroharu Munakata (1989), Astrophysical Journal, 339, 354.

equivalente ao núcleo de uma estrela anã branca próxima de $T_{\rm ef} \simeq 13\,000$ K, para $Q \simeq 10^{15}$ ergs cm^{-3} s^{-1}, para $T = 10^9$ K e $\log g = 9$, equivalente ao núcleo de uma estrela anã branca quente, chegando a $Q \simeq 10^{18}$ ergs cm^{-3} s^{-1}, para $T = 10^9$ K e $\log g = 14$, para uma estrela de nêutrons.

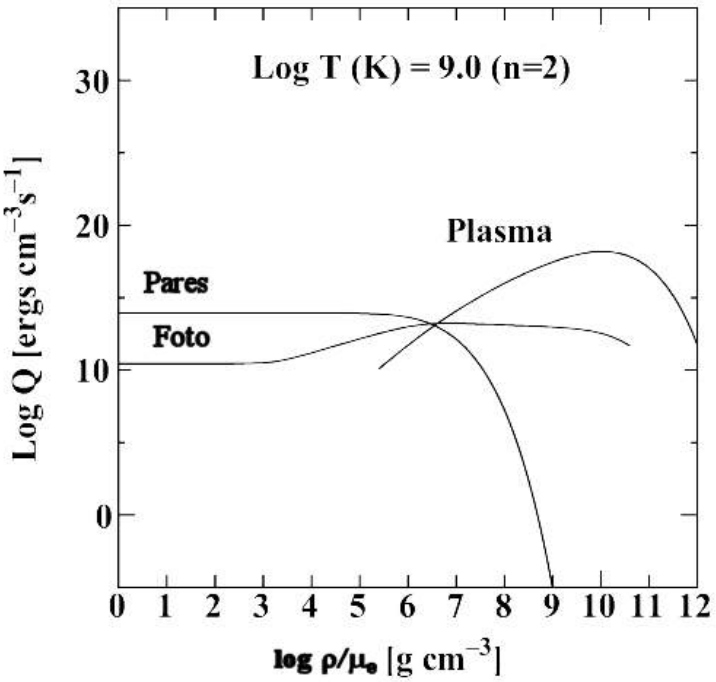


Figura 23.23: Refrigeração por produção de neutrinos, segundo os cálculos de Naoki Itoh et al.

Alguns valores aproximados para as taxas de produção de neutrinos são:

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu^{\text{pares}} &= \frac{4,9\times 10^8}{\rho} T_9^3 e^{-11,86 T_9} \quad \text{se } T_9 < 1 \\ &= \frac{4,45\times 10^{15}}{\rho} T_9^9 \quad \text{se } T_9 > 1 \end{aligned}$$

para ϵ e ρ em cgs.

$$\epsilon_\nu^{\text{foto}} = \epsilon_1 + \epsilon_2 \left(\mu_e + \bar{\rho}\right)^{-1}$$

onde

$$\epsilon_1 = 1,103\times 10^{13} \rho^{-1} T_9^9 e^{-5.93/T_9}$$

$$\epsilon_2 = 0,976\times 10^8 T_9^8 (1+4,2T_9)^{-1}$$

$$\bar{\rho} = 6,446\times 10^{-6} \rho T_9^{-1} (1+4,2T_9)^{-1}$$

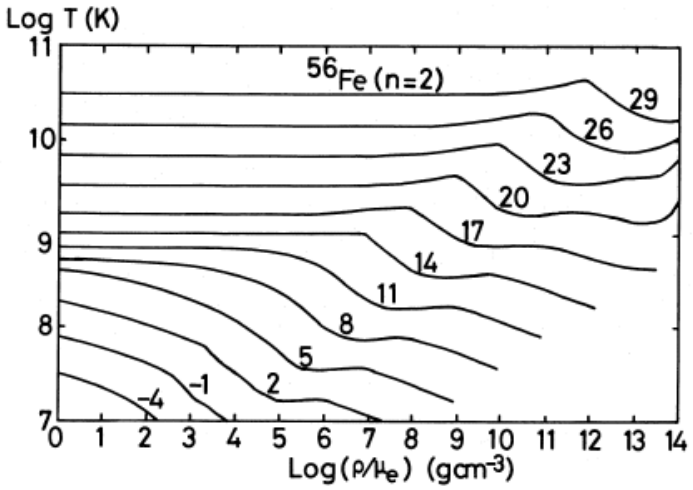


Figura 23.24: Variação na produção de neutrinos com temperatura e densidade, segundo os cálculos de Naoki Itoh et al. O diagrama mostra os contornos para a taxa de perda de energia por unidade de volume e por unidade de tempo pela emissão de neutrinos, em unidades de log Q (ergs $\mathrm{cm}^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$), somando-se todas as perdas de neutrinos por produção de pares, foto-neutrinos, plasma-neutrinos e bremsstrahlung.

para ϵ e ρ em cgs.

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu^{\text{plasma}} &= 3,356 \times 10^{19} \rho^{-1} \lambda^6 \left(1 + 0,0158\gamma^2\right) T_9^3 \quad \text{se } \gamma \ll 1 \\ &= 5,252 \times 10^{20} \rho^{-1} \lambda^{7,5} T_9^{1,5} e^{-\gamma} \quad \text{se } \gamma \gg 1 \end{aligned}$$

para ϵ e ρ em cgs, e onde

$$\gamma = \frac{\hbar w_0}{kT}$$

$$\lambda = \frac{kT}{m_e c^2}$$

e w_0 é a freqüência de plasma:

$$\begin{aligned} w_0^2 &= \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \quad \text{não-degenerado} \\ &= \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \left[1 + \left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^2 \left(3\pi^2 n_e\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{degenerado} \end{aligned}$$

$$\epsilon_\nu^{\rm brems} \simeq 0,76 \frac{Z^2}{A} T_8^6$$

para ϵ e ρ em cgs.

Em um gás não-degenerado, a remoção de energia térmica causa contração do núcleo. Pelo teorema de Virial, quando a densidade aumenta, a temperatura também aumenta. Entretanto, em um gás degenerado, a pressão é praticamente independente da temperatura e uma redução da energia térmica causa redução da temperatura. No núcleo degenerado de estrelas de massa até cerca de 10 $M_\odot$, o esfriamento pelo processo de plasma neutrinos, e em menor grau pelo processo de emissão de fotoneutrinos, inibe a elevação da temperatura no núcleo para as temperaturas necessárias para o início da queima do carbono. Se a massa total for suficiente para que a massa do núcleo atinja o limite da massa máxima de uma anã branca, com densidades nucleares da ordem de 1 a 2×10^9 g/cm^3, inicia-se a queima explosiva do carbono em um núcleo altamente degenerado, resultando em uma supernova.

As taxas de emissão de neutrinos geralmente utilizadas nos programas de evolução foram calculadas pelo astrofísico japonês Naoki Itoh, publicadas em 1996 no *Astrophysical Journal*, 102, 411–424, e estão disponíveis na forma de tabelas ou de sub-rotinas FORTRAN em http://pweb.sophia.ac.jp/∼n_itoh/182.html. Na mesma página, estão referências para os cálculos de condução eletrônica e escudamento eletrônico (*electron screening*).

Para $T_c \leq 6 \times 10^8$ K e densidades $\rho \leq 3 \times 10^5$ g cm^{-3},

$$\epsilon_\nu \simeq 1,1 \times T_8^8 \text{ ergs g}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

de modo que a luminosidade de neutrinos é, em geral, maior do que a luminosidade dos fótons, para $T_c > 5 \times 10^8$ K.

Áxions

Em 1956 Chien-Shiung Wu (1912-1997) demonstrou que o decaimento do Co^{60} ocorria mais antiparalelo ao spin do núcleo, violando a simetria de paridade (espelhamento). Em 1957 Lev Davidovich Landau (1908-1968) propos que a boa simetria era CP, ou carga e paridade, isto é, trocando-se a partícula pela antipartícula e trocando a paridade simultaneamente. Mas em 1964 o decaimento do kaon demonstrou que a CP também é violada pela força fraca, por James Watson Cronin (1931-) e Val Logsdon Fitch (1923-). A violação da carga-paridade é fundamental para explicar a assimetria matéria-antimatéria no Universo. A existência do áxion, um bóson hipotético de

spin zero, foi postulada em 1977 para explicar porque as interações fortes conservam paridade (P) e carga/paridade (CP) apesar das interações fracas violarem estas simetrias. A falta de violação de P e CP nas interações fortes é conhecida como "o grande problema de CP". O áxion resolve este problema, mas existem também outras propostas de solução, como impor $m_u = 0$ ou assumir que as simetrias P e CP são quebradas espontaneamente, mas são boas simetrias.

Uma simetria global ou rígida é a mesma em todo o espaço-tempo e geralmente leva a uma quantidade conservada. Permitindo que as transformações da simetria variem continuamente de um local no espaço-tempo para outro requer a introdução de novos graus de liberdade "gauge" mediando as forças. Uma teoria com simetria de gauge pode ser escrita em termos de potenciais em que somente diferenças de potenciais são significativas, isto é, podemos adicionar uma constante sem alterar os valores. Por exemplo, um esquilo pode caminhar sobre um fio de alta tensão porque somente diferenças de potenciais são importantes. Estas teorias portanto podem ser renormalizadas. É este princípio de transformações de gauge que permitiu a construção do modelo padrão da força forte e eletrofraca entre as partículas elementares baseados no grupo local gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. A quebra de uma simetria global leva a um bóson de Goldstone (Jeffrey Goldstone), sem massa, escalar. Na quebra de simetrias locais (gauge), o bóson de Goldstone conspira com o campo gauge, sem massa, formando um campo massivo vetorial, no fenômeno conhecido como mecanismo de Higgs. Um exemplo é a quebra de simetria da força eletrofraca, que no modelo de Glashow-Weinberg-Salam onde o grupo gauge $SU(2) \times U(1)$ se quebra no grupo U(1) do eletromagnetismo. Neste contexto, as partículas vetoriais massivas correspondem aos bósons W e Z que mediam a força fraca, de curta distância. Na quebra de simetria, todas as partículas exceto o fótons adquirem um estado de polarização adicional e tornam-se massivos. Uma aplicação especulativa do mecanismo de Higgs é a da Teoria de Grande Unificação(GUT) com um grande grupo gauge (http://soliton.wins.uva.nl/∼bais/broksym.pdf).

Na teoria padrão de campos, existem seis léptons e seis quarks. Esta teoria é não-abeliana, isto é, as transformações dependem da ordem. Os mediadores da força eletro-fraca são o fóton, sem massa, e as três partículas de campo (bósons) W^-, W^- e Z^0. A força forte é carregada pelos oito glúons, todos sem massa, e a teoria prediz a existência do bóson de Higgs H^0, cujo campo gera todas as outras partículas. A procura direta do bósons de Higgs exclui $M_H c^2 \leq 98$ GeV, mas a análise da correção radiativa indica $M_H c^2 \leq 220$ GeV. Para comparar, a massa do quark top é de 175 GeV/c^2.

O próton deve decair em:

$$p \longrightarrow e^+ + \pi^0$$

com vida média de

$$\Gamma_p = \left(\frac{\alpha_{\mathrm{GUT}}}{m_H^2} \right) m_p^5$$

Como a vida média do próton observada é $\Gamma_p \geq 10^{32}$ anos, a massa da partícula H^0 precisa ser $m_H c^2 \geq 10^{16}$ GeV. Os áxions são pseudo bósons de Yoishiro Nambu (1921-2015) e Jeffrey Goldstone, com massa zero e spin zero (http://www-lns.mit.edu/∼eluc/communications/ask-physicist.html#1) propostos por Roberto D. Peccei e Helen R. Quinn (1943-), de Stanford, em 1977, no Physical Review Letters, vol. 38, no. 25, 1440, para explicar a simetria que suprime a grande violação CP (carga-paridade) na QCD (cromodinâmica quântica). Os áxions têm acoplamentos extremamente fracos com a matéria e radiação e massa

$$m_{\mathrm{ax}} c^2 = 0,62 \text{ meV} \times \left(\frac{10^{10} \text{ GeV}}{f_A} \right)$$

onde f_A é a constante de decaimento dos áxions. Mais precisamente, $f_A N = v$, onde N é a anomalia de cor e **v** é o valor esperado do vácuo quando ocorre a quebra de simetria de Peccei-Quinn. Para temperaturas $kT = v$ o vácuo espontaneamente quebra a simetria $U_{PQ}(1)$. O parâmetro **v** determina a massa e a constante de interação dos áxions e é o parâmetro livre da teoria. O modelo original dos áxions assumia que $f_A = 247$ GeV, a escala da quebra de simetria eletrofraca, e tinha dois dubletes de Higgs como ingredientes mínimos. Ao exigir conservação de sabor nos três níveis, a massa do áxion e sua constante de decaimento estão completamente vinculados em termos de um parâmetro ($\tan \beta$): a razão do valor esperado do vácuo dos dois campos de Higgs. Como esta parametrização resultava em um áxion com massa de 1,8 MeV, não observado, dois novos modelos com $f_A \gg 247$ GeV foram propostos: KSVZ (Kim-Shifman-Vainshtein-Zakharov) = áxion hadrônico (Jihn E. Kim, 1979, Phys Rev Lett, 43, 103; Mikhail A. Shifman, Arkady I. Vainshtein e V.I. Zakharov, 1980, Nuclear Physics B, 166), que, com somente um dubleto de Higgs, introduz um novo quark pesado (Q) que carrega a carga de Peccei-Quinn, enquanto os quarks comuns e os léptons não carregam. O outro modelo é o DFSZ (Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnitskii) = áxion GUT (Michael Dine, Willy Fischler & Mark Srednicki, 1981, Physics Letters B, 104, 199), que não introduz novos quarks mas requer dois dubletes de Higgs e

todos os quarks e léptons carregam carga de Peccei-Quinn, isto é, estes áxions interagem com núcleons, elétrons e fótons.. Todos modelos contêm pelo menos um bóson escalar "singlete" eletrofraco que adquire o valor esperado e quebra a simetria de Peccei-Quinn. Este bóson, o áxion invisível, com uma constante de decaimento alta, $f_A \simeq 10^{12}$ GeV, é um bom candidato a matéria fria escura do Universo. Richard A. Battye e E. Paul S. Shellard, de Cambridge, publicaram em 1994 no Nuclear Physics B, 423, 260 um artigo "Global String Radiation" prevendo que se a massa dos áxions estiver entre 6 e 2500 μeV/c^2, os áxions, sendo não relativísticos, seriam a massa fria escura (CDM—cold dark mass) do Universo. Como a razão entre a densidade de massa dos áxions e a densidade crítica para Universo plano é dada por:

$$\Omega_{\rm ax} = \frac{\rho_{\rm ax}}{\rho_{\rm crítico}} = \left(\frac{6\mu{\rm eV}}{m_{\rm ax}}\right)^{\frac{7}{6}} \left(\frac{200{\rm MeV}}{\lambda_{\rm QCD}}\right)^{\frac{3}{4}} \left[\frac{75{\rm km/(s\cdot Mpc)}}{H_0}\right]^2$$

a massa do áxion precisa ser maior do que 1 μeV ou teríamos $\Omega_{\rm ax} \geq 1$. O segundo fator vem do fato da massa do áxion surgir para temperatura $kT = \lambda_{\rm QCD}$.

No modelo de Kim, a massa do áxion é proporcional à massa do quark pesado Q:

$$m_{\rm ax} = \frac{\sqrt{Z}}{1+Z}\frac{\alpha_S^2}{\pi^2}\frac{f_\pi}{v'} m_\pi \ln\left(\frac{m_Q^2}{m_u m_d}\right)$$

onde $Z = \langle m_u u\bar{u}\rangle / \langle m_d d\bar{d}\rangle$, $v' = \langle\sigma\rangle_0$, sendo σ o escalar de Higgs complexo, singlete de interação fraca. No modelo de Kim, os áxions se acoplam a núcleons através da mistura com o píon neutro.

No modelo DFSZ a massa é

$$m_{\rm ax}c^2 = \frac{f_\pi}{f_A} m_\pi c^2 N Z^{1/2}(1+Z)^{-1} \simeq 0,62 \text{ meV} \left(\frac{10^{10}\text{ GeV}}{f_A}\right)$$

Os áxions deste tipo podem causar uma distorção na radiação do fundo do Universo. A massa do áxions precisa ser menor do que 10 meV ou sua produção numerosa no ramo das estrelas gigantes causaria uma enorme refrigeração no núcleo destas estrelas, não observado. Uma massa menor que 10 meV/c^2 leva a um valor esperado da energia do vácuo maior que 10^9 GeV. Como o modo principal de decaimento do áxion a é $a \to 2\gamma$, os áxions podem ser detectados estimulando-se sua conversão em fótons em um forte campo magnético. Experimentos no Lawrence Livermore National Laboratory e na Universidade da Flórida estão testando massas $1,3 \leq m_a \leq 13\mu$ eV/c^2 (Christian A. Hagmann, S. Chang e Pierre Sikivie, 2001, Physical Review

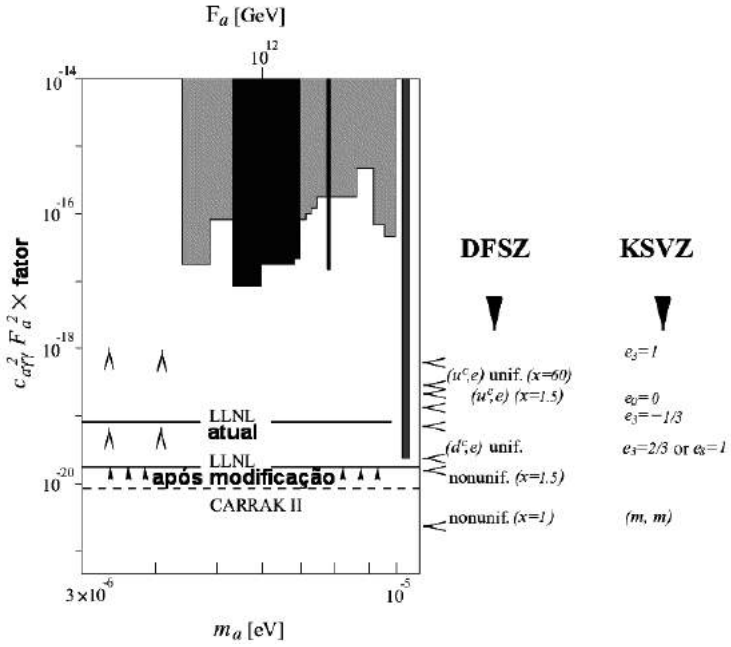


Figura 23.25: Previsões das propriedades dos áxions conforme Jihn E. Kim (1998, Physical Review D, 58, 55006), juntamente com os limites observados pelos experimentos de cavidade (decaimento por campo magnético).

D, 63, 125018). Na Kyoto University estão buscando o áxion próximo de $m_a \simeq 10\mu$ eV$/c^2$ (Ikuyo Ogawa, S. Matsuki e K. Yamamoto, 1996, Physical Review D, 53, 1740).

Em 1992, Jordi Isern, Margareta Hernanz e Enrique García-Berro publicaram um artigo no Astrophysical Journal, 392, L23, usando o valor de dP/dt da anã branca G117-B15A, publicado por S.O. Kepler et al. em 1991 no Astrophysical Journal, 378, L45, para limitar a massa dos áxions para $m\,cos^2\beta \leq 8,8$ meV$/c^2$. O valor de dP/dt publicado em 1991, maior do que o esperado, poderia ser devido ao esfriamento por áxions.

No artigo "The potential of the variable DA white dwarf G117-B15A as a tool for Fundamental Physics" de Alejandro H. Córsico, Omar G. Benvenuto, Leandro G. Althaus, Jordi Isern and Enrique García-Berro, publicado em 2001 no New Astronomy, vol. 6, no. 4, 197, Córsico e colaboradores da Universidad Nacional de La Plata, na Argentina, e da Espanha, calculam um modelo de anã-branca com os três períodos principais de G117-B15A e

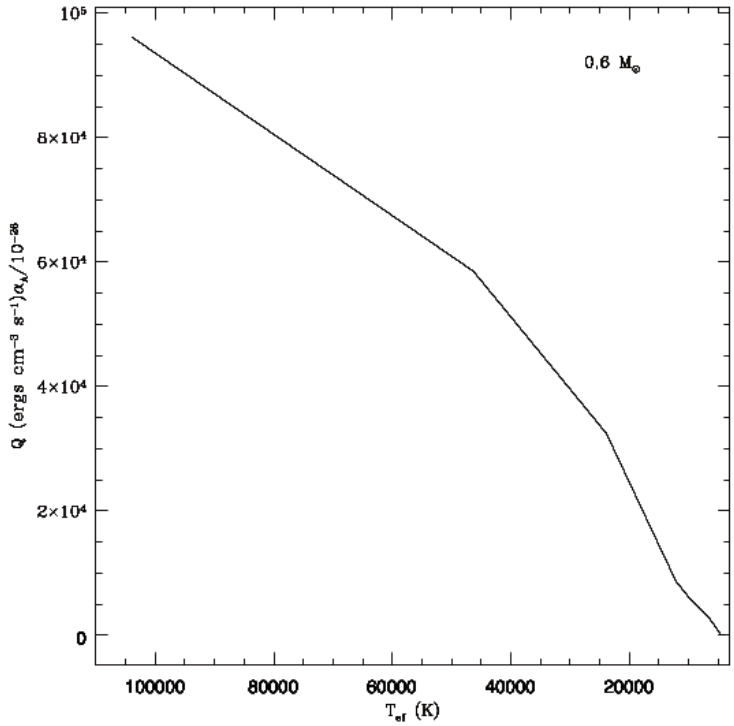


Figura 23.26: Emissão de áxions no núcleo de uma anã branca de 0,6 $M_\odot$.

a taxa de produção de energia por áxions para o modelo de DFSZ predita por Masayuki Nakagawa, Tomoo Adashi, Yasuharu Kohyama e Naoki Itoh, da Sophia University, Tokyo, publicadas em 1988 no Astrophysical Journal, 326, 241,

$$L = 1,08 \times 10^{23} \rho \ \mathrm{ergs\,g^{-1}\,s^{-1}} \frac{g_{ae}^2}{4\pi} \frac{Z^2}{A} T_7^4 [F_{\mathrm{fonons}} + F_{\mathrm{rede}} + F_{\mathrm{liquido}}]$$

onde g_{ae} é a constante de acoplamento de áxions e fótons, Z e A são a carga e a massa atômica dos núcleons, os $F \simeq 0,1-1$ para gravidades $\log g \simeq 6-8$ e fator de cristalização $\Gamma \simeq 180 - 1000$. A contribuição dos fonons é cerca de 3 vezes menor do que a de rede. Da mesma forma que na produção de neutrinos, podemos ter

$$e^- + (Z, A) \rightarrow e^- + (Z, A) + a$$

onde a é um áxion; o cálculo da taxa de produção de áxions é baseado na

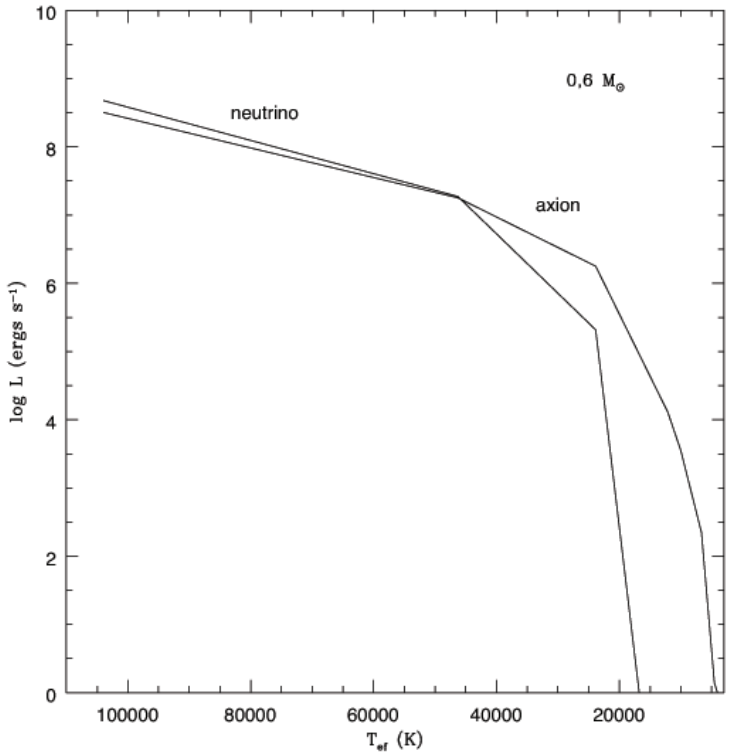


Figura 23.27: Emissão de áxions e neutrinos no núcleo de uma anã branca de 0,6 $M_{\odot}$.

teoria eletrofraca de Steven Weinberg (1933-), publicada no "A Model of Leptons", Physics Review Letter, 19, 1264 em 1967 e Abdus Salam (1926-1996). A taxa de perda de energia por áxions é sempre menor que a taxa de perda total por neutrinos, incluindo produção de pares, fotoneutrinos, plasma neutrinos e *bremsstrahlung*, para anãs brancas com núcleo de carbono e temperaturas nucleares acima de 10^7 K e densidades acima de 10^6 g/cm^3, desde que a constante de acoplamento g_{ae} de Peccei-Quinn seja menor do que 10^{-27}. De acordo com Jihn E. Kim (1997), "Cosmic Axion", no "2nd International Workshop on Gravitation and Astrophysics", ICRR, University of Tokyo, para $f_A > 10^6$ GeV, os modelos KSVZ e DFSZ têm limites similares, apesar de terem constantes de acoplamento um pouco diferentes. A relação entre a constante de acoplamento e o valor esperado do vácuo no

momento da quebra de simetria é

$$\frac{g_{ae}^2}{4\pi} \simeq 2,1 \times 10^{-26} \left(\frac{10^9 \text{ GeV}}{v} \right)^2$$

já que $g_{ae} \equiv m_e/v$, onde m_e é a massa do elétron.

No artigo de Georg G. Raffelt, do MPIfP, publicado em 2000 "Astrophysics probes of particle physics" no Physics Reports, 333-334, 593, ele explica que o plasma quente e denso estelar é uma fonte poderosa de partículas de baixa massa e fracamente interagentes, principalmente neutrinos, áxions e grávitons. As observações astrofísicas impõem os limites mais restritos nas propriedades destas partículas. Por exemplo, Gerardus 't Hooft (1946-) (1974, Nuclear Physics B, 79, 276) e Alexander M. Polyakov (1974, ZhETF Pis'ma, 20, 430) mostraram que as teorias de grande unificação (GUT) em que o grupo U(1) do eletromagnetismo é, por transformação de gauge, um subgrupo de um grupo maior SU(2) ou SU(3), predizem a existência de monopolos magnéticos primordiais (M) como soluções regulares das equações de campo, com massas da ordem de 137 M_W, onde W é um típico bóson vetorial. Os monopolos ficariam presos nas estrelas e catalisariam o decaimento de núcleons pelo efeito de Rubakov-Callan de espalhamento de monopolos por bárions (Cutis G. Callan Jr. 1982, Physical Review D, 26, 2058, Nuclear Physics B, 212, 391; Valerii Anatol'evitch Rubakov (1955-), 1982, Nuclear Physics B, 203, 311).

$$M + p \longrightarrow M + e^+ + \text{mésons (hádrons)}$$

A consequente liberação de energia é restringida pela propriedades das estrelas anãs-brancas e estrelas de nêutrons.

No artigo "Microwave cavity searches for dark-matter axions" (Reviews of Modern Physics, 2003, vol. 75, 3, p. 777), Richard Bradley, John Clarke, Darin Kinion, Leslie J. Rosenberg, Karl van Bibber, Seishi Matsuki, Michael Mück & Pierre Sikivie discutem como o áxion é um bom candidato para a matéria escura do Universo e como se pode, em princípio, detectá-los em uma cavidade de microondas permeada por um campo magnético intenso, onde eles se convertem em fótons quasi-monocromáticos pela interação de Primakoff [Henry Primakoff (1914-1983) 1937, Physical Review, 51, 990], isto é, interação com o campo eletromagnético ($a + \text{nucleon} \longrightarrow \gamma + \text{nucleon}$)". Devido à sua baixa interação, mesmo com 10^{14} axions/cm^3, se sua massa fosse 10 μeV, eles produziriam somente 10^{-23} W, de modo que sua detecção requer detectores com ruído muito próximo do ruído quântico.

A não detecção pelo CERN Axion Solar Telescope limita a massa a 0,02 eV (K. Zioutas et al. 2005, Physical Review Letters, 94, 121301), correspondente a um acoplamento áxion-fóton $g_{af} \leq 1,16 \times 10^{-10}$ GeV^{-1}.

Alejandro Córsico e colaboradores estimam o limite máximo de esfriamento por áxions consistente com as novas medidas de Kepler Oliveira [S. O. Kepler, José Eduardo da Silveira Costa, Bárbara Garcia Castanheira, Donald Earl Winget, Fergal Mullally, R. Edward Nather, Mukremin Kilic, Ted von Hippel, Anjum S. Mukadam & Denis J. Sullivan, "Measuring the Evolution of the Most Stable Optical Clock G 117-B15A", 2005, Astrophysical Journal, 634, 1311-1318] e limitam a massa massa dos áxions a $m\,cos2\beta \leq 4$ meV, com 95% de confiança.

Jordi Isern, Silvia Catalan, Enrique Garcia-Berro & Santiago Torres, no artigo "Axions and the white dwarf luminosity function" (2008, Astrophysical Journal, 682, L109), usam a função de luminosidade das anãs brancas do Sloan Digital Sky Survey medida por Steven DeGennaro, Ted von Hippel, Don Earl Winget, S.O. Kepler, Atsuko Nitta, Detlev Koester & Leandro Althaus (2008, Astronomical Journal, 135, 1) para determinar uma massa de 5 meV para os áxions.

Kyu Jung Bae, Ji-Haeng Huh, Jihn E. Kim, Bumseok Kyae, Raoul D. Viollier, no artigo "White dwarf axions, PAMELA data, and flipped-SU(5)" (2009, Nuclear Physics B, 817, 58), propõem um novo modelo de áxions eletrofílicos com massa de 0,5 meV, para explicar as medidas.

23.22 Polítropos

Quando discutimos a equação de estado de um gás completamente degenerado, não-relativístico, obtivemos na página 303 a equação (23.37):

$$P_e = 1,004 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{3}} \text{ dina/cm}^2 \tag{23.302}$$

que é uma lei de potência com $P \propto (\rho/\mu_e)^{5/3}$. Outra situação é para uma estrela completamente convectiva, com $\nabla = \nabla_{\rm ad} = \Gamma_2 - 1/\Gamma_2$. Como $d\ln P = dP/P$ e

$$\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P} \tag{23.303}$$

Integrando-se, obtemos

$$P(r) \propto T^{\Gamma_2/(\Gamma_2-1)}(r) \tag{23.304}$$

Se o gás for ideal, $T \propto P/\rho$ e portanto $P(r) \propto \rho^{\Gamma_2}(r)$.

Como nesses exemplos, se a pressão puder ser escrita como uma função da densidade somente, $P = P(\rho)$, então a estrutura da estrela depende *somente* das equações de equilíbrio hidrostático e continuidade da massa. Em particular, se a pressão em todos os pontos do interior estelar satisfizer a relação

$$\boxed{P = K\rho^{(n+1)/n}} \tag{23.305}$$

com K e n constantes, a configuração é chamada de um polítropo. Se $\Gamma_2 = 5/3$, $n = 3/2$.

As equações de equilíbrio hidrostático e continuidade da massa podem ser reduzidas a uma equação diferencial de segunda ordem, dividindo-se a equação de equilíbrio hidrostático por ρ, multiplique por r^2 e, então, derivando-se em relação a r os dois lados:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{23.306}$$

que é a equação de Poisson. Se definirmos variáveis adimensionais

$$\rho(r) \equiv \rho_c\theta^n(r) \tag{23.307}$$

e

$$r \equiv a\xi \tag{23.308}$$

onde $\rho_c = \rho(r = 0)$ é a densidade central e a constante a dada pela equação

$$a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{(1/n-1)}}{4\pi G}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{23.309}$$

a equação de Poisson (equação 23.306) pode ser escrita como

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \tag{23.310}$$

Essa equação é chamada de equação de Lane-Emden, em honra ao físico americano Jonathan Homer Lane (1819-1880), que derivou a equação do equilíbrio hidrostático em 1869 e ao físico suíço Robert Emden (1862-1940). Modelos correspondentes às soluções dessa equação, para um certo valor de n, são chamados de polítropos de índice n. A pressão será dada por

$$P(r) = K\rho_c^{1+1/n}\,\theta^{1+n} = P_c\theta^{1+n} \tag{23.311}$$

Se a equação de estado do material for a de um gás ideal, com

$$P = \frac{\rho}{\mu} N_A k T \tag{23.312}$$

então

$$P(r) = K' T^{n+1}(r) \tag{23.313}$$

e

$$T(r) = T_c \theta(r) \tag{23.314}$$

com

$$K' = \left(\frac{N_A k}{\mu}\right)^{n+1} K^{-n} \tag{23.315}$$

e

$$T_c = K \rho_c^{1/n} \left(\frac{N_A k}{\mu}\right)^{-1} \tag{23.316}$$

Portanto, para um polítropo com equação de estado de gás ideal e μ constante, θ mede a temperatura. Finalmente, nesse caso, o fator de escala radial é dado por

$$a^2 = \left(\frac{N_A k}{\mu}\right)^2 \frac{(n+1) T_c^2}{4\pi G P_c} = \frac{(n+1) K \rho_c^{1/n-1}}{4\pi G} \tag{23.317}$$

As condições de contorno $\rho(r=0) = \rho_c$ e $dP/dr = 0$ para $r = 0$ se traduzem em $\theta(\xi = 0) = 1$ e $\theta'(0) \equiv d\theta/d\xi = 0$. Se o índice politrópico n e a densidade central ρ_c forem dados, podemos integrar a equação de Lane-Emden (equação 23.310) numericamente do centro até uma distância $r = R$ onde $P = 0$. Se chamarmos de ξ_1 a variável radial onde $\theta(\xi_1) = 0$ para $r = R$, obtemos para o valor do raio R:

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1) P_c}{4\pi G \rho_c^2}\right]^{\frac{1}{2}} \xi_1 \tag{23.318}$$

Dessa forma, especificando K, n e ρ_c ou P_c, obtemos o raio R.

Solução analíticas existem para $n = 0, 1$ e 5. Soluções numéricas precisam ser obtidas para um valor de n geral. A solução para $n = 0$ corresponde a uma esfera de densidade constante, e

$$\theta_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} \tag{23.319}$$

com $\xi_1 = \sqrt{6}$. Nesse caso

$$P_c = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \tag{23.320}$$

Para n=1 a solução θ_1 é a função *sinc*

$$\theta_1(\xi) = \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi} \tag{23.321}$$

com $\xi_1 = \pi$. A densidade é dada por $\rho = \rho_c\theta$ e a pressão por $P = P_c\theta^2$.

O polítropo para n=5 tem uma densidade central finita, mas o raio é ilimitado

$$\theta_5(\xi) = \left[1 + \xi^2/3\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{23.322}$$

com $\xi_1 \to \infty$. Apesar de ter raio infinito, o polítropo contêm uma quantidade de massa finita. As soluções com $n > 5$ também são infinitas em raio, mas contém também massa infinita. O intervalo de interesse, portanto, está limitado para $0 \leq n \leq 5$.

A massa contida em uma esfera de raio r pode ser obtida pela equação da continuidade da massa

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr \tag{23.323}$$

Em termos de ξ, obtemos

$$M_\xi = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^\xi \xi^2 \theta^n d\xi \tag{23.324}$$

Pela equação de Lane-Emden (equação 23.310), podemos substituir θ^n por

$$\theta^n = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) \tag{23.325}$$

eliminando o fator ξ^2 e a própria integral, obtendo

$$M_\xi = 4\pi a^3 \rho_c \left(-\xi^2\theta'\right)_\xi \tag{23.326}$$

onde $\left(-\xi^2\theta'\right)_\xi$ significa calcular $\left(-\xi^2 d\theta/d\xi\right)$ no ponto ξ. A massa total é dada por $M = M\left(\xi_1\right)$ e

$$\boxed{M = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{n+1}{G}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{P_c^{3/2}}{\rho_c^2}\left(-\xi^2\theta'\right)_{\xi_1}} \tag{23.327}$$

Com alguma álgebra, pode-se chegar a

$$P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)(\theta')^2_{\xi_1}} \frac{GM^2}{R^4} \tag{23.328}$$

$$= \frac{8,952 \times 10^{14}}{(n+1)(\theta')^2_{\xi_1}} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4} \text{dina/cm}^2 \tag{23.329}$$

Tabela 23.6: Resultados para polítropos com n=1,5 e 3

n	ξ_1	$\theta'(\xi_1)$	$\rho_c/\langle\rho\rangle$
1,5	3,6538	-0,20330	5,991
3,0	6,8969	-0,04243	54,183

Se a equação de estado for de um gás ideal

$$T_c = \frac{1}{(n+1)\left(-\xi\theta'\right)_{\xi_1}} \frac{G\mu}{N_A k} \frac{M}{R} \tag{23.330}$$

$$= \frac{2,293 \times 10^7}{(n+1)\left(-\xi\theta'\right)_{\xi_1}} \mu \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{R_\odot}{R}\right) \text{K} \tag{23.331}$$

Para cada valor de n, podemos obter K em função de M e R:

$$K = \left[\frac{4\pi}{\xi^{n+1}\left(-\theta'\right)^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}_{\xi_1} \frac{G}{n+1} M^{1-1/n} R^{-1+3/n} \tag{23.332}$$

Note que se n=3, K depende somente de M.

Uma outra quantidade útil é a densidade média

$$\frac{\rho_c}{\langle\rho\rangle} = \frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{-\theta'}\right)_{\xi_1} \tag{23.333}$$

Os valores de n que nos interessam são n=3/2, para o caso de um gás completamente degenerado mas não relativístico, $P_e \propto \rho^{5/3}$, que também é o caso de um gás ideal completamente convectivo, e $n = 3$ para um gás totalmente relativístico $P_e \propto \rho^{4/3}$.

As soluções numéricas, nesses casos, estão listadas na Tabela (23.22).

23.22.1 Aplicações para anãs brancas

Um gás completamente degenerado mas não-relativístico pode ser representado por um polítropo de ordem $n = 3/2$. Além disso, a comparação da relação entre pressão e densidade de um polítropo (equação 23.305) com a equação da pressão degenerada não-relativística (equação 23.302) mostra que

$$K = \frac{1,004 \times 10^{13}}{\mu_e^{5/3}} \tag{23.334}$$

Mas se usarmos a equação (23.332), com o valor do coeficiente dado pela tabela (23.22), obtemos

$$K = 2,477 \times 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{R_\odot}\right) \tag{23.335}$$

que nos dá a relação massa-raio:

$$\boxed{\frac{M}{M_\odot} = 2,08 \times 10^{-6} \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^5 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-3}} \tag{23.336}$$

Da equação 23.336, vemos que $M \propto R^{-3}$. Como a densidade é, por definição,

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

vemos que

$$\rho \propto M^2 \tag{23.337}$$

para o caso não relativístico.

Para o caso completamente relativístico, encontramos

$$P_e = 1,243 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} \text{ dina/cm}^2 \tag{23.338}$$

Portanto, trata-se de um politropo com $n = 3$ e a equação (23.332), com o valor do coeficiente dado pela tabela (23.22) no dá

$$K = \frac{1,243 \times 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} = 3,841 \times 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{23.339}$$

ou

$$\boxed{M_{\text{Chand}} = 1,456 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot} \tag{23.340}$$

que é a massa limite de Chandrasekhar.

23.23 Limite de Eddington

Para estrelas de altíssima massa, a pressão de radiação domina. Calculemos quando a pressão de radiação é igual à gravidade local; para qualquer valor de radiação acima desse limite, não haverá equilíbrio hidrostático, causando

perda de massa. Pela equação do equilíbrio hidrostático, substituindo a pressão total pela pressão de radiação:

$$-\frac{dP_{\rm rad}}{dr} = g_s \rho \tag{23.341}$$

A equação do transporte radiativo é dada por

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{4ac}{3}\frac{T^3}{K\rho}\frac{dT}{dr} \tag{23.342}$$

e a pressão de radiação por

$$P_{\rm rad} = \frac{1}{3}aT^4 \tag{23.343}$$

Portanto, derivando a equação (23.343) em relação a r, obtemos

$$\frac{dP_{\rm rad}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3\frac{dT}{dr} \tag{23.344}$$

ou seja, podemos escrever a equação (23.342) como

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{c}{K\rho}\frac{dP_{\rm rad}}{dr} \tag{23.345}$$

Substituindo o último termo pela equação (23.341), obtemos

$$L_r = 4\pi r^2 \frac{c}{K} g_s = 4\pi r^2 \frac{c}{K}\frac{GM}{r^2} \tag{23.346}$$

chegando-se ao limite de Eddington, que representa a maior luminosidade que uma estrela de massa M pode ter e ainda estar em equilíbrio hidrostático:

$$\boxed{L_{\rm Edd} = \frac{4\pi cGM}{K}} \tag{23.347}$$

Como para altas temperaturas a opacidade K é dominada pelo espalhamento de elétrons, $K = K_e = 0,2(1+X)\,{\rm cm}^2/{\rm g}$ e podemos estimar, para X=0,7:

$$\boxed{\frac{L_{\rm Edd}}{L_\odot} \simeq 3,5 \times 10^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)} \tag{23.348}$$

Na verdade, se a luminosidade for alguns décimos da luminosidade de Eddington, a pressão de radiação será tão intensa que haverá perda de massa significativa.

Se dividirmos a relação entre a massa e a luminosidade na seqüência principal

$$\frac{L}{L_\odot} \simeq \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$$

pela equação (23.347) obtemos

$$\frac{L}{L_{\rm Edd}} \simeq \frac{1}{3,5\times 10^4}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2$$

ou seja

$$L = L_{\rm Edd} \quad \text{para} \quad M = \sqrt{3,5\times 10^4}\, M_\odot \simeq 187 M_\odot$$

Sir Arthur Stanley Eddington (1882-1944), no seu livro "A Constituição Interna das Estrelas" de 1929, já propôs que as estrelas acima de uma certa massa sofreriam pulsações que as tornariam instáveis, limitando suas massas.

O limite derivado acima, em que a opacidade é dada por espalhamento de elétrons é cerca de 10 vezes maior do que o observado, pois o vento é dominado pela opacidade das linhas metálicas, como mostrado por Henny J. G. L. M. Lamers (1941-) & Edward L. Fitzpatrick em 1988, no Astrophysical Journal, 324, 279.

É interessante notar que embora as estrelas tipo O sejam intrinsecamente mais luminosas, como a maior parte da radiação é emitida no ultravioleta, as estrelas A7 supergiantes são mais luminosas no visível. Note também que durante a seqüência principal, o vento de uma estrela de 100 massas solares contribui cerca de 2×10^{51} ergs, mais do que os cerca de 10^{51} ergs despejados no meio interestelar por uma supernova tipo II.

23.24 Modelos de evolução

Com as quatro equações diferenciais: dP_r/dr, dM_r/dr, dL_r/dr e dT_r/dr, a equação de estado do gás, a opacidade e a equação de geração de energia, além das condições de contorno:

$$M = 0, L_r = 0 \qquad \text{em r=0,}$$

$$\int_0^R dM_r = M \qquad \text{em r=R,}$$

e dados a massa total (M) e a composição química, calculamos primeiro o modelo em equilíbrio com composição homogênea, que define a seqüência principal de idade zero, e sucessivos estados de equilíbrio. Para funções

realísticas, não é possível obter-se soluções analíticas, de modo que o sistema de equações diferencias acopladas precisa ser resolvido numericamente.

Em 1926 Heinrich Vogt (1890-1968), em seu artigo "A Relação entre a Massa e a Luminosidade das Estrelas" ["Die Beziehung zwischen den Massen und den absoluten Leuchtkräften der Sterne", Astronomische Nachrichten 226, 301] e Henry Norris Russel (1877-1957) [Henry Norris Russell, Raymond Smith Dugan (1878-1940) e John Quincy Stewart (1894-1972), Astronomy II, 1927, p. 909-911] propuseram o chamado teorema de Vogt-Russel, sem qualquer base matemática, que afirma que para dada massa total e composição química, existe uma e somente uma solução para as equações básicas de estrutura estelar. Numericamente, quando uma seqüência evolucionária chega a um ponto onde nenhuma solução em equilíbrio pode ser encontrada, alguma aproximação utilizada não é mais válida, e precisamos relaxar as condições, por exemplo de equilíbrio térmico.

Existem, entretanto, três parâmetros ajustáveis: comprimento de mistura, eficiência de perda de massa e quantidade de sobreimpulso (*overshooting*) de convecção, além da variação da composição química do modelo, que afetam os resultados. Os modelos mostram que, para temperaturas efetivas menores do que 10 000 K, o hidrogênio estará neutro na atmosfera da estrela e, portanto, há uma zona de ionização parcial do hidrogênio em uma camada mais profunda. Nessa zona de ionização parcial, a opacidade é alta e dificulta o transporte radiativo de energia. Desenvolve-se, portanto, uma camada de convecção superficial. Para as estrelas mais quentes, não há zona de ionização parcial e, portanto, não há convecção superficial. As estrelas de baixa massa, como nosso Sol, transformam hidrogênio em hélio pelo ciclo próton-próton (pp), enquanto que as estrelas massivas transformam pelo ciclo CNO. O limite se dá para estrelas de cerca de 1,75 $M_\odot$, para as quais $L_{\rm pp} = L_{\rm CNO}$. Para as estrelas com queima de hidrogênio pelo ciclo CNO, a taxa de geração de energia varia com uma alta potência da temperatura ($\varepsilon_{\rm CNO} \propto T^{18}$), gerando um forte gradiente de temperatura na borda superior do núcleo, o que causa uma zona de convecção no núcleo. Outros limites importantes são que para massa menor do que 2,25 $M_\odot$ [ou 1,85 $M_\odot$ se o sobreimpulso (*overshooting*) for importante], o início da transformação de hélio em carbono se dá em um núcleo com elétrons degenerados, causando um *flash* de hélio, isto é, um forte aumento de luminosidade, antes que o núcleo possa se reajustar em uma queima quiescente.

23.25 Condições de contorno

Na nossas derivações até o momento, usamos as condições de contorno nulas, isto é, $P(r = R) = 0$. Os modelos reais utilizam uma condição um pouco mais realista, advinda dos modelos de atmosferas estelares.

23.25.1 Atmosferas estelares

Quando discutimos transporte radiativo, escrevemos a equação de transporte radiativo:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -K_\nu I_\nu + j_\nu \tag{23.349}$$

onde ds é o elemento de comprimento, A profundidade ótica τ_ν foi definida como

$$\tau_\nu = \int_o^s K_\nu ds' \tag{23.350}$$

de modo que $d\tau_\nu = K_\nu ds$.

A função fonte S_ν é definida pela equação

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{K_\nu} \tag{23.351}$$

Em equilíbrio termodinâmico local (ETL),

$$\frac{dI}{ds} = 0 \longrightarrow I = \frac{j}{K} \tag{23.352}$$

e nenhuma radiação será transportada. Para simplificar, estamos, nesse momento, tratando do caso integrado em freqüência. Como

$$E = \frac{1}{c}\int I d\omega = \frac{4\pi}{c} I \tag{23.353}$$

Mas sabemos que em equilíbrio termodinâmico local $E = aT^4$, logo

$$I = \frac{j}{K} = \frac{c}{4\pi} aT^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4 = B(T) \tag{23.354}$$

isto é, em ETL a função fonte é dada pela função de Planck B_ν. Se dividirmos a equação (23.349) por K_ν, podemos escrever

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \tag{23.355}$$

Multiplicando por e^{τ_ν}, e levando em conta que

$$\frac{d\left(I_\nu e^{\tau_\nu}\right)}{d\tau_\nu} = e^{\tau_\nu}\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu e^{\tau_\nu}$$

obtemos

$$\frac{d\left(I_\nu e^{\tau_\nu}\right)}{d\tau_\nu} = e^{\tau_\nu} S_\nu \tag{23.356}$$

que podemos integrar, obtendo

$$I_\nu\left(\tau_\nu\right) = I_\nu(0)e^{\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-\left(\tau_\nu - \tau'_\nu\right)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \tag{23.357}$$

Se a função fonte for independente da profundidade ótica,

$$\begin{aligned} I_\nu\left(\tau_\nu\right) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right) \\ &= S_\nu + e^{-\tau_\nu}\left[I_\nu(0) - S_\nu\right] \end{aligned} \tag{23.358}$$

Se houver equilíbrio termodinâmico local, $I_\nu(0)$ e S_ν são iguais a $B_\nu(T_0)$ e $B_\nu(T)$, onde T_0 é a temperatura na camada onde $\tau = 0$. Para $\tau \gg 1$, $I_\nu = B_\nu(T)$ e

$$I_\nu\left(\tau_\nu\right) = B_\nu\left(T_0\right)\left(1 - \tau_\nu\right) + B_\nu(T)\tau_\nu \tag{23.359}$$

que é uma expansão em série de Taylor e nos dá a primeira correção à intensidade.

Pela definição de temperatura efetiva, que é a temperatura que a estrela teria se emitisse como um corpo negro, o fluxo através da superfície da estrela, integrado sobre todas as freqüências é dado por

$$F = 2\pi\int_0^\infty \cos\theta I_\nu \operatorname{sen}\theta d\theta d\nu \equiv \sigma T_{\rm ef}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \tag{23.360}$$

Substituindo $I_\nu = B_\nu(T_{\rm ef})$, obtemos

$$F = \pi\int_0^\infty B_\nu(T_{\rm ef}) d\nu = \frac{ac}{4}T_{\rm ef}^4 \tag{23.361}$$

Se considerarmos uma atmosfera plano-paralela e assumirmos que o coeficiente de absorção K_ν é independente da freqüência, podemos escrever a equação de transporte radiativo como:

$$-\cos\theta\frac{dI_\nu(\theta)}{d\tau} = -I_\nu(\theta) + \frac{j_\nu}{K} \tag{23.362}$$

onde θ é o ângulo entre a normal e a direção considerada. Integrando sobre freqüência,

$$-\cos\theta\frac{dI(\theta)}{d\tau} = -I + \frac{j}{K} \tag{23.363}$$

Integrando-se, agora, a equação (23.363) sobre o ângulo sólido $d\omega = 2\pi \text{sen}\,\theta s\theta$, e lembrando as nossas definições:

$$E = \frac{1}{c}\int I(\theta)d\omega \tag{23.364}$$

$$F = \int I(\theta)\cos\theta d\omega \tag{23.365}$$

e

$$P_r = \frac{1}{c}\int I(\theta)\cos^2\theta d\omega \tag{23.366}$$

podemos escrever

$$\frac{dF}{d\tau} = cE - \frac{4\pi j}{K} \tag{23.367}$$

Como em uma atmosfera estelar plana o fluxo é constante (define-se uma atmosfera plana justamente para não termos a variação de área de uma casca esférica), essa equação se reduz a

$$j = K\frac{cE}{4\pi} \tag{23.368}$$

Multiplicando-se a equação (23.363) por $\cos\theta$ e integrando-se sobre o ângulo sólido, obtemos

$$c\frac{dP_r}{d\tau} = F \tag{23.369}$$

e sua integral

$$cP_r = F\tau + \text{constante} \tag{23.370}$$

Se assumirmos que $I(\theta)$ pode ser aproximado como

$$I = I_1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \tag{23.371}$$

$$I = I_2 \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right) \tag{23.372}$$

isto é, o fluxo saindo da estrela é dado por I_1 e o fluxo entrando na estrela por I_2, podemos integrar as equações (23.364), (23.365) e (23.366) obtendo:

$$\frac{cE}{4\pi} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \tag{23.373}$$

$$\frac{F}{4\pi} = \frac{1}{4}\left(I_1 - I_2\right) \tag{23.374}$$

e

$$P_r = \frac{1}{3}E \tag{23.375}$$

Tendo em vista que não existe entrada de radiação pela atmosfera, assumimos que $I_2 = 0$ para $\tau = 0$. Logo $cE = 2F$ em $\tau = 0$ e a constante da equação (23.370) pode ser obtida:

$$cE = 3 \cdot \text{constante} = 2F \longrightarrow \text{constante} = \frac{2}{3}F$$

Portanto, podemos escrever a equação (23.370) como

$$cE = F(2 + 3\tau) \tag{23.376}$$

Sabemos que nas condições de equilíbrio termodinâmico local e assumindo K_ν independente da freqüência, a função fonte (equação 23.351) é dada pela função de Planck, e podemos escrever

$$j_\nu = KB_\nu(T) \tag{23.377}$$

onde $B_\nu(T)$ é a função de Planck. Como

$$\frac{cE}{4\pi} = \frac{j}{K} = \int_o^\infty B_\nu(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \tag{23.378}$$

podemos escrever equação (23.376) como

$$\frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{F}{4\pi}(2 + 3\tau) \tag{23.379}$$

e como o fluxo F é dado por

$$F \equiv \sigma T_{\text{ef}}^4 \tag{23.380}$$

A equação (23.379) pode ser escrita como:

$$\boxed{T^4 = \frac{T_{\text{ef}}^4}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)} \tag{23.381}$$

demonstrando que a temperatura é igual à temperatura efetiva para $\tau = 2/3$. Note que a temperatura, mesmo onde a profundidade ótica é nula, não é nula, $T(\tau = 0) = 2^{-1/4}T_{\text{ef}}$.

Da nossa definição de temperatura efetiva:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm ef}^4 \tag{23.382}$$

Note que somente a luminosidade L é diretamente observável. O raio R depende da freqüência, já que os fótons em diferentes freqüências podem emergir de diferentes profundidades e $T = T_{\rm ef}$ para uma profundidade ótica $\tau = 2/3$.

Podemos finalmente estimar a pressão na fotosfera, onde $r = R$ e $g \equiv g_s$, usando a equação de equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -g_s \rho \tag{23.383}$$

e a definição de profundidade ótica $d\tau = -K\rho dr$ para escrever

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g_s}{K} \tag{23.384}$$

e integrar

$$P_f = g_s \int_0^{\tau_f} \frac{1}{K} d\tau \simeq \frac{g_s}{K_f} \tau_f \tag{23.385}$$

e finalmente, substituindo $\tau_f = 2/3$ obter uma estimativa para a pressão na fotosfera de

$$\boxed{P_f = \frac{2}{3} \frac{g_s}{K_f}} \tag{23.386}$$

onde K_f representa a opacidade na fotosfera. Esta é a pressão na fotosfera, isto é, na mesma camada com $T = T_{\rm ef}$.

23.25.2 Envelope radiativo

No envelope, podemos assumir $L_r = L$ e $M_r = M$, isto é, a contribuição do envelope para a luminosidade e para a massa é desprezível. Se o envelope for radiativo, $\nabla = \nabla_{\rm rad}$ ou seja, dado pela equação (23.171) na página 362:

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{PK}{T^4} \frac{L}{M} \tag{23.387}$$

Vamos assumir no momento que a pressão de radiação seja desprezível e que a opacidade pode ser escrita de forma geral como $K = K_0 \rho^n T^{-s}$. Para um gás ideal

$$P = \frac{N_A k}{\mu} \rho T \tag{23.388}$$

e podemos expressar o coeficiente de absorção

$$K = K_g P^n T^{-n-s} \tag{23.389}$$

onde

$$K_g \equiv K_0 \left(\frac{\mu}{N_A k} \right)^n \tag{23.390}$$

Com esta substituição, a equação (23.387) somente contém P e T como variáveis, já que estamos assumindo M e L constantes. Podemos reescrevê-la como

$$P^n dP = \frac{16\pi acGM}{3K_g L} T^{n+s+3} dT \tag{23.391}$$

Se T_0 e P_0 representam a temperatura e a pressão em algum ponto exterior do envelope, como a fotosfera, de modo que $P(r) > P_0$ e $T(r) > T_0$, podemos integrar a equação (23.391) e obter

$$P^{n+1} = \frac{n+1}{n+s+4} \frac{16\pi acGM}{3K_g L} T^{n+s+4} \left[\frac{1 - (T_0/T)^{n+s+4}}{1 - (P_0/P)^{n+1}} \right] \tag{23.392}$$

Desta forma, assumindo $P_0 = P_f$ dado pela equação (23.386), obtemos a pressão no envelope para uma temperatura T qualquer.

23.25.3 Estrelas completamente convectivas

Consideremos uma estrela fria cuja opacidade superficial seja dominada por H^-; como vimos na equação (23.253) na página 393, o coeficiente de absorção pode ser estimado por

$$K_{H^-} \approx 2,5 \times 10^{-31} \left(\frac{Z}{0,02} \right) \rho^{\frac{1}{2}} T^9 \text{ cm}^2/\text{g} \tag{23.393}$$

A relação entre temperatura e pressão dada pela equação (23.392) pode ser transformada em uma equação para ∇ em função da temperatura

$$\nabla = \frac{1}{1+n_{\text{ef}}} + \left(\frac{T_{\text{ef}}}{T} \right)^{n+s+4} \left[\nabla_f - \frac{1}{1+n_{\text{ef}}} \right] \tag{23.394}$$

onde

$$n_{\text{ef}} = \frac{s+3}{n+1} \tag{23.395}$$

e o subscrito f significa fotosférico, isto é, ∇_f é ∇ calculado na fotosfera. De acordo com equação (23.387):

$$\nabla_f = \frac{3K_0L}{16\pi acGM}\left(\frac{\mu}{N_Ak}\right)^n \frac{P_f^{n+1}}{T_{\rm ef}^{n+s+4}} \tag{23.396}$$

$$= \frac{3L}{16\pi acGM}\frac{P_fK_f}{T_{\rm ef}^4} \tag{23.397}$$

Na fotosfera, $P_f = 2g_s/3K_f$, $g_s = GM/R^2$ e $L = 4\pi R^2\sigma T_{\rm ef}^4$, de modo que $\nabla_f = 1/8$. Abaixo da fotosfera, a equação (23.394), com $n_{\rm ef} = -4$ para a opacidade do H^- se reduz a

$$\nabla(r) = -\frac{1}{3} + \frac{11}{24}\left[\frac{T_{\rm ef}}{T(r)}\right]^{-\frac{9}{2}} \tag{23.398}$$

Como a temperatura cresce com a profundidade, $\nabla(r)$ também cresce. Em algum ponto $\nabla(r)$ tornar-se-a maior do que $\nabla_{\rm ad}$ e a camada interior será convectiva. Por exemplo, se assumirmos que $\nabla_{\rm ad}$ é dado pelo seu valor de gás ideal, sem ionização, $\nabla_{\rm ad} = 0,4$, podemos estimar a temperatura para a qual $\nabla(r) = \nabla_{\rm ad}$. Para a região interior, teremos um politropo de índice 3/2 e

$$P = K'T^{5/2} \tag{23.399}$$

como demonstramos na seção de politropos. Dessa maneira, teremos uma fotosfera, de onde escapa a radiação, sobre uma camada radiativa, e sob esta, uma zona de convecção, como no caso do Sol.

No caso extremo em que a convecção continua até o centro da estrela, a constante K' precisa satisfazer as condições de contorno centrais, e portanto a constante K' precisa ser a do politropo. Vamos escrever a temperatura e a pressão em termos de variáveis adimensionais

$$p = \frac{4\pi}{G}\frac{R^4}{M^2}P \tag{23.400}$$

$$t = \frac{N_Ak}{G}\frac{R}{\mu M}T \tag{23.401}$$

de modo que a equação (23.399) se torna

$$p = E_0t^{\frac{5}{2}} \tag{23.402}$$

com

$$E_0 = K'4\pi\left(\frac{\mu}{N_Ak}\right)^{\frac{5}{2}} G^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}R^{\frac{3}{2}} \tag{23.403}$$

Como para um polítropo representando um gás ideal completamente convectivo o *índice politrópico é n=3/2* e K' é dado pela equação (23.315)

$$K'_{n=3/2} = \left(\frac{N_A k}{\mu}\right)^{\frac{5}{2}} K_{n=3/2}^{-3/2} \tag{23.404}$$

e substituindo a constante K do polítropo (equação 23.332)

$$K'_{n=3/2} = \frac{2,5^{3/2}}{4\pi}\left[\xi_{3/2}^{5/2}\left(-\theta'_{3/2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{\xi_1}\left(\frac{N_A k}{\mu}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{G^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}R^{\frac{3}{2}}} \tag{23.405}$$

e concluímos que E_0 não depende de nenhum parâmetro físico do modelo, mas somente dos valores superficiais das variáveis politrópicas, sendo uma constante:

$$E_0 = \left(\frac{-125}{8}\xi_{3/2}^5\theta'_{3/2}\right)_{\xi_1}^{\frac{1}{2}} = 45,48 \tag{23.406}$$

utilizando os valores da tabela dos polítropos.

Podemos, agora, calcular o valor da temperatura e densidade no ponto interior à fotosfera, onde $\nabla = \nabla_{\rm ad} = 0,4$. Utilizando os valores $\nabla_f = 1/8$, e os expoentes $n = 1/2$ e $s = -9$ da opacidade de H^- na equação (23.394), obtemos

$$T_c = (8/5)^{\frac{2}{9}} T_{\rm ef} \approx 1,11\ T_{\rm ef} \tag{23.407}$$

isto é, a temperatura no topo da zona de convecção é somente 11% maior do que a temperatura efetiva, comprovando que a convecção inicia logo abaixo da fotosfera.

A pressão P_c no topo da camada convectiva é obtida reescrevendo a equação (23.392) na forma

$$\left(\frac{P}{P_f}\right)^{n+1} = 1 + \frac{1}{1+n_{\rm ef}}\frac{1}{\nabla_f}\left[\left(\frac{T}{T_{\rm ef}}\right)^{n+s+4} - 1\right] \tag{23.408}$$

que resulta em $P_c = 2^{\frac{2}{3}} P_f$. Podemos, agora, substituir $P_c = K' T_c^{5/2}$ na equação (23.405), obtendo

$$K' = \frac{3,564\times 10^{-4} E_0}{\mu^{2,5}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{23.409}$$

Como a pressão fotosférica é dada por $2g_s/3K_f$, $K_f = K_0\rho_f^n T_{\rm ef}^{-s}$ e a densidade pode ser eliminada usando-se a equação de estado de um gás ideal,

$$P_f = \left(\frac{2}{3}\frac{GM}{K_0 R^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\mu}{N_A k}\right)^{-\frac{n}{n+1}} T_{\rm ef}^{\frac{n+s}{n+1}} \tag{23.410}$$

Podemos utilizar $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm ef}^4$ para eliminar as dependências em R, e escrever, para n=1/2 e $s = -9$ da opacidade H^-

$$\boxed{T_{\rm ef} \simeq 2600 \mu^{13/51} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{7}{51}} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{102}} \text{ Kelvin}} \tag{23.411}$$

A constante obtida, de 2600 K, na realidade é próxima de 4000 K, mas esta relação representa uma série de linhas quase verticais no diagrama H-R, uma para cada valor de M e com $T_{\rm ef}$ praticamente independente de L para cada valor de M.

Tabela 23.7: Variação da luminosidade com a temperatura para uma estrela completamente convectiva de massa $M = 1\ M_\odot$. Para 10 $M_\odot$, a temperatura será somente 37% maior.

$T_{\rm ef}$	$L/L_\odot$
2600	1
2569	10
2720	10^2
2782	10^3
2846	10^4
2911	10^5
2977	10^6

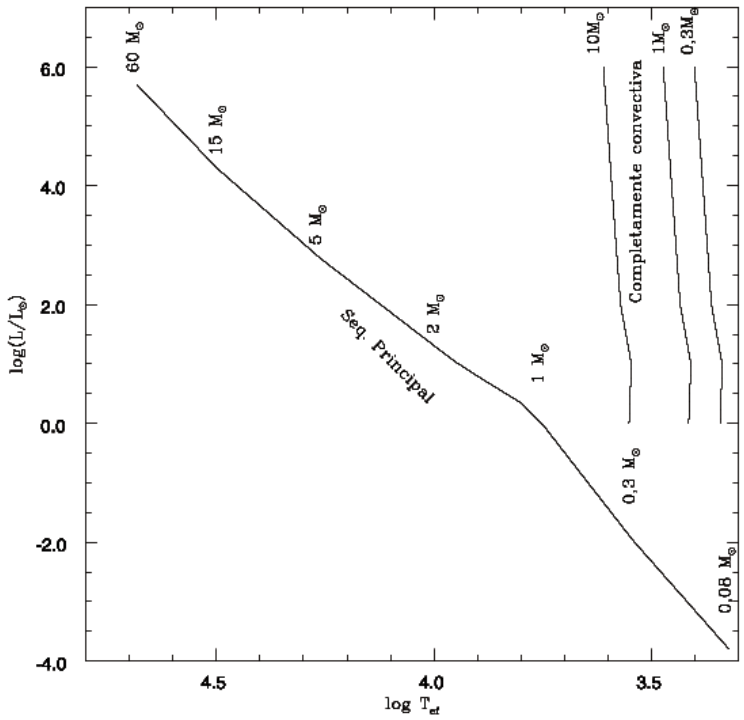


Figura 23.28: Seqüência principal e zona completamente convectiva

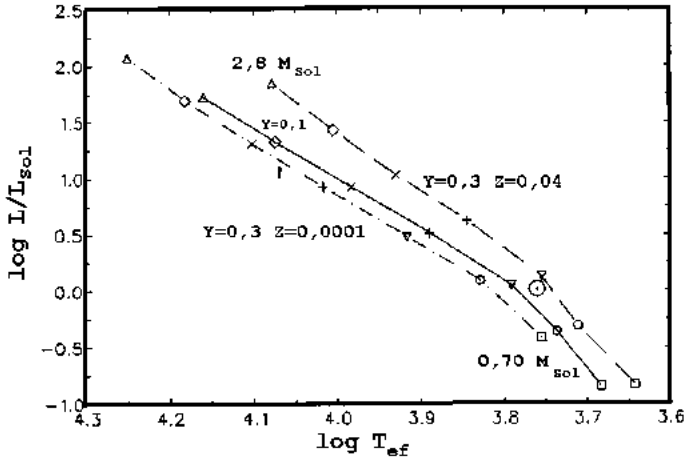


Figura 23.29: Seqüência Principal de Idade Zero para modelos com diferentes composições químicas. A seqüência com Y=0,1 tem Z=0,0001.

Modelos de Seqüência Principal de Idade Zero. Os modelos com massa menor do que 1 $M_\odot$ têm X=0,70 e Y=0,28, enquanto os outros têm X=0,74 e Y=0,24.

$\frac{M}{M_\odot}$	$\log \frac{L}{L_\odot}$	$T_{\rm ef}$ (K)	$R/10^{10}$ (cm)	T_c (10^6 K)	ρ_c (g/cm^3)	$\log P_c$ (dina/cm^2)	q_c	q_e	$\langle\rho\rangle$ (g/cm^3)	$\frac{\rho_c}{\langle\rho\rangle}$
60	5,70	48200	70,96	39,28	1,93	16,12	0,74	0	0,08	24
15	4,29	31500	32,89	32,75	5,48	16,44	0,40	0	0,20	27
5	2,77	18200	17,18	26,43	19,0	16,84	0,23	0	0,47	8
2	1,26	9800	10,30	21,09	47,0	17,21	0,13	0	0,87	54
1,75	1,03	8900	9,683	20,22	66,5	17,25	0,11	0	0,92	72
1,5	0,76	7800	9,141	19,05	76,7	17,28	0,07	0	0,94	82
1,2	0,34	6300	8,650	16,67	85,7	17,26	0,01	10^{-7}	0,89	97
1	-0,04	5600	6,934	14,42	82,2	17,17	0	0,0035	1,43	57
0,3	-1,96	3500	2,054	7,59	107	17,05	0	1	16,5	0,15
0,08	-3,80	2100	0,650	3,30	775	17,83	0	1	139	0,18

Note que, embora a zona convectiva superficial do modelo com uma massa solar abranja somente 0,35% da massa, isso corresponde a 17% do raio.

23.26 Resultado dos modelos

Recapitulando, com as quatro equações de equilíbrio e as equações da física da matéria, $P(\rho, T, X_i)$, $K(\rho, T, X_i)$ e $\epsilon(\rho, T, X_i)$, além da condição de equilíbrio radiativo

$$\nabla = \nabla_{\rm rad} \quad \text{se} \quad \nabla_{\rm ad} \geq \nabla_{\rm rad}$$

ou convectivo

$$\nabla = \nabla_{\rm ad} \quad \text{se} \quad \nabla_{\rm ad} < \nabla_{\rm rad}$$

e as condições de contorno, podemos calcular a estrutura estelar. Uma dificuldade é que as condições de contorno estão separadas: um par se refere ao centro e outro par se refere à superfície. E nem sempre existe uma solução em equilíbrio para certas escolhas de massa total e composição química.

Uma maneira de resolver o sistema de equações é usando o método de integração chamado de Runge—Kutta [Carl David Tolmé Runge (1856-1927) e Wilhelm Martin Kutta (1867 - 1944)], que envolve o cálculo de uma série de derivadas da variável dependente, y, em uma série de pontos no intervalo começando em x e terminando em $x + h$, onde x é a variável independente e h é chamado de passo. Estas derivadas são então utilizadas para encontrar $y(x + h)$. As versões mais sofisticadas do método automaticamente ajustam o valor do passo para manter a precisão desejada.

Outro método, usado no cálculo de modelos estelares reais, leva em conta que, se integrarmos do centro para fora, é possível que pequenos erros no núcleo sejam amplificados ao chegar na superfície, como a idéia de balançar amplamente a ponta de um chicote com pequenos movimentos de mão. O mesmo problema acontece nos modelos estelares devido ao grande contraste entre as condições centrais e superficiais, e a condição de equilíbrio radiativo contém o fator T^{-4}, enquanto a condição de equilíbrio hidrostático depende de r^{-4}. O método usado é integrar a partir do centro e da superfície simultaneamente e ver se as soluções se ajustam de forma contínua em algum ponto entre os extremos, por exemplo na borda entre o núcleo convectivo e o envelope radiativo, nas estrelas de alta massa. Precisamos então minimizar $y_i(x_f) - y_o(x_f)$, onde x_f é o ponto de ajuste, de modo que podemos calcular a derivada desta diferença, que deve se anular no ponto de mínimo. Como nossas funções não são lineares, iteramos o cálculo até que a diferença esteja

dentro da precisão pré-determinada. Este método, de transformar um problema não linear em um linear, chama-se de método de Newton—Raphson [Isaac Newton (1642-1727) e Joseph Raphson (1648-1715)]. No método de Henyey, a cada interação correções para todas as variáveis em todos os pontos são calculados simultaneamente [Louis George Henyey (1910-1970), J.E. Forbes e Nancy L. Gould 1964, Astrophysical Journal, 139, 306]. Nosso cálculo para estrelas esféricas consiste então em um sistema de 4 equações diferenciais ordinárias para as 4 variáveis: r, P, T e L. Como linearizamos as equações assumindo correções pequenas, se a aproximação inicial é muito diferente da solução, as correções necessárias são grandes e o sistema não converge.

No cálculo de uma seqüência evolucionária, isto é, como um modelo de certa massa evolui com o tempo, podemos empregar um método explícito de cálculo, em que o estado de um sistema em um tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ só depende do conhecimento do estado em tempo t_n. Este método assume que os movimentos são subsônicos, isto é, que choques não se desenvolvem. Se choques se desonvolvem, como por exemplo em supernovas, existem discontinuidades em densidade, que tornam o problema mais complexo. Neste caso precisamos usar outras técnicas, como as descritas por Yakov Borisovich Zel'dovich (1914-1987) e Yuri P. Raizer no seu livro *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, 1966, eds. W.D. Hayes e R.F. Probstein (New York: Academic Press). Naturalmente a escolha do passo de tempo, Δt depende de quão rapidamente o sistema está mudando no tempo em questão. Se o sistema está mudando rapidamente, Δt precisa ser pequeno. O passo em tempo precisa ser menor do que o tempo em que uma onda sonora leva para atravessar uma camada. Examinando-se todas as camadas, escolhe-se o limite superior do passo. Esta condição chama-se condição de Courant [Richard Courant (1888-1972)]. O maior passo possível também depende da estabilidade numérica. Desta maneira calculam-se as acelerações e as velocidades, corrige-se o raio e calculam-se as novas densidades. Então calculam-se as novas temperaturas. Se o modelo for hidrostático, as acelerações serão nulas. O raio para um tempo qualquer precisa ser calculado simultaneamente com as outras variáveis. Como reações nucleares estão quase sempre presentes, precisamos incluir a mudanças nas abundâncias. Como as mudanças no peso molecular médio devido à ionização são muito rápidas, elas são incorporadas à equação de estado. Exceto em situações especiais, as abundâncias mudam vagarosamente e podem ser calculadas como simples diferenças.

Como $L \propto M^3$,

$$t_{\rm SP} \simeq 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \text{ anos} \tag{23.412}$$

para as estrelas acima de 3 $M_\odot$. Essa relação indica que, para uma estrela de $M \simeq 100\ M_\odot$, a seqüência principal dura cerca de 1 000 000 anos.

Em 1942, o brasileiro Mário Schenberg (1914-1990) e o indiano Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995), demonstraram no *Astrophysical Journal*, 96, 161, que, quando o núcleo isotérmico de hélio corresponde a 10% da massa inicial de hidrogênio da estrela, não é mais possível manter o equilíbrio hidrostático no núcleo se a pressão é dada por um gás ideal. Se o núcleo não estiver degenerado, a difusão térmica rapidamente equipara a temperatura do núcleo com aquela da camada onde ocorre a queima do hidrogênio. Este é o chamado limite de Schenberg-Chandrasekhar, e os modelos evolucionários comprovam que o núcleo se contrai rapidamente, esquentando e aumentando a produção de energia. A região em volta do núcleo se expande rapidamente e a estrela sai da seqüência principal.

Icko Iben Jr. e Gregory Laughlin, no seu artigo publicado em 1989 no *Astrophysical Journal*, 341, 312, fitaram os resultados do tempo de vida desde a seqüência principal até a fase de nebulosa planetária dos modelos com $0,6 \leq M \leq 10\ M_\odot$ e encontraram

$$\log t_{\rm evol} = 9,921 - 3,6648 \log \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \tag{23.413}$$

para idade em anos. Por exemplo, para um modelo de 0,7 $M_\odot$, obtemos um tempo de evolução de 35 Ganos, algumas vezes maior do que a idade do Universo.

Tabela 23.8: Tempo em anos das fases marcadas na Figura 23.30.

$M/M_\odot$	(1-2)	(2-3)	(3-4)	(4-5)
9,00	$2,14 \times 10^7$	$6,05 \times 10^5$	$9,11 \times 10^4$	$1,48 \times 10^5$
5,00	$6,55 \times 10^7$	$2,17 \times 10^6$	$1,37 \times 10^6$	$7,53 \times 10^5$
3,00	$2,21 \times 10^8$	$1,04 \times 10^7$	$1,03 \times 10^7$	$4,51 \times 10^6$
2,25	$4,80 \times 10^8$	$1,65 \times 10^7$	$3,70 \times 10^7$	$1,31 \times 10^7$
1,50	$1,55 \times 10^9$	$8,10 \times 10^7$	$3,49 \times 10^8$	$1,05 \times 10^8$
1,25	$2,80 \times 10^9$	$1,82 \times 10^8$	$1,05 \times 10^9$	$1,46 \times 10^8$

Os modelos de perda de massa durante os pulsos térmicos de Thomas Blöcker (1995, Astronomy & Astrophysics, 297, 727) mostram que a perda

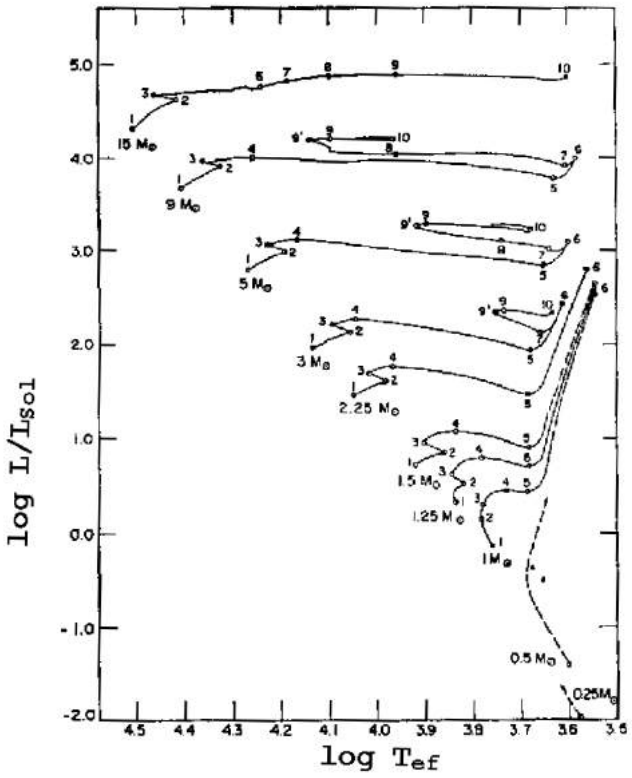


Figura 23.30: Evolução a partir da seqüência principal.

Tabela 23.9: Tempo em anos das fases marcadas na Figura 23.31.

Pontos	$1,0\ M_\odot$	$1,25\ M_\odot$	$1,5\ M_\odot$
1-2	$3,77 \times 10^9$	$1,39 \times 10^9$	$1,01 \times 10^9$
2-3	$2,89 \times 10^9$	$1,41 \times 10^9$	$5,43 \times 10^8$
3-4	$1,46 \times 10^9$	$1,82 \times 10^8$	$8,10 \times 10^7$
4-5	$1,03 \times 10^9$	$5,38 \times 10^8$	$1,74 \times 10^8$
5-6	$7,02 \times 10^8$	$3,69 \times 10^8$	$1,41 \times 10^8$
6-7	$2,92 \times 10^8$	$1,38 \times 10^8$	$3,44 \times 10^7$
7-10	$1,57 \times 10^8$	$1,46 \times 10^8$	$1,05 \times 10^8$
10-12	$3,98 \times 10^8$	$2,45 \times 10^8$	$1,57 \times 10^8$

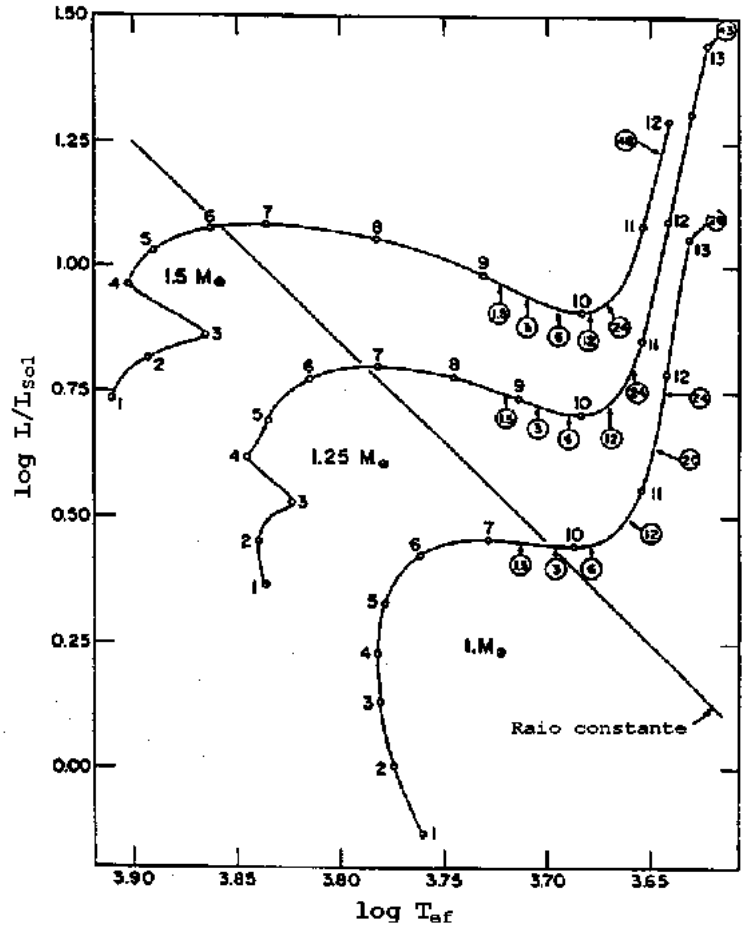


Figura 23.31: Evolução a partir da seqüência principal para modelos de População I. Os números circundados indicam a quantia pela qual a abundância de lítio superficial foi reduzida, assumindo que nenhuma massa foi perdida e que o único mecanismo de mistura é a convecção.

de massa no AGB é muito maior do que nas fases anteriores. A fórmula de Reimers (Dieter Reimers, 1975, *Problems in Stellar Atmospheres and Envelopes*, ed.: B. Baschek, W.H. Kegel, G. Traving, Springer, Berlin, p. 229)

$$\dot{M}_{\rm Reimers} = 4 \times 10^{-13}\,(M_\odot/{\rm ano})\,\eta_R \frac{LR}{M}$$

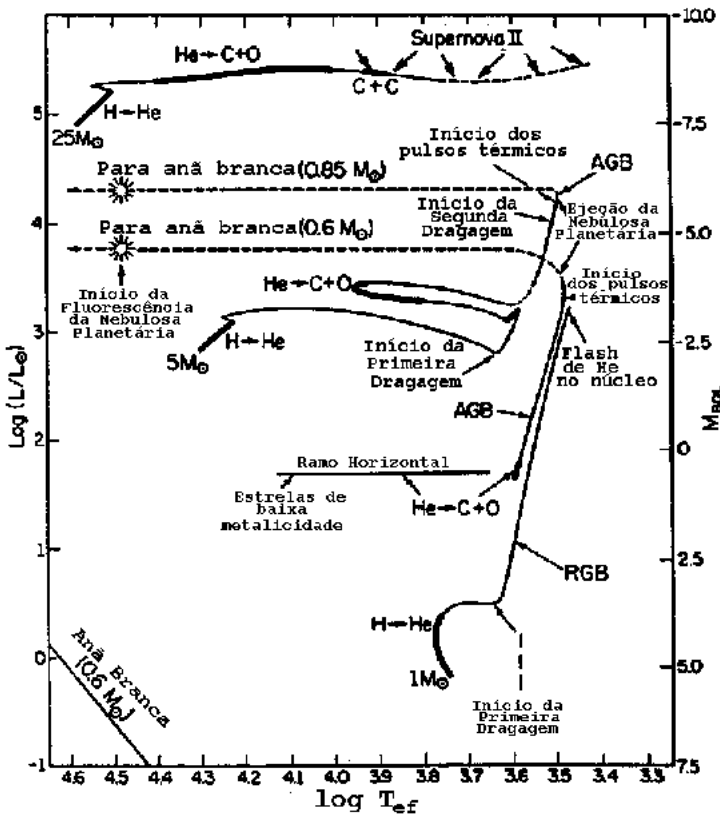


Figura 23.32: Evolução a partir da seqüência principal para modelos de 1, 5 e 25 $M_\odot$. A queima de combustível no núcleo ocorre nas regiões mais escuras das curvas. Durante a fase interpulso, o He produzido pela camada termonuclear dominante, de queima de H, é acumulado na camada de He, até que um flash de He ocorra, que induz a uma zona de convecção entre as camadas. A terceira dragagem ocorre durante a fase de pulsos térmicos, e é onde se formam as estrelas carbonadas e estrelas ricas em ZrO. A opacidade das moléculas na atmosfera, que está mudando com a dragagem, bem como o aumento da perda de massa com a metalicidade, precisa ser incluída nos modelos. Nos modelos de Leo Girardi e Paola Marigo, a fase das estrelas carbonadas dura entre 2 e 3 milhões de anos.

com $1/3 < \eta_R < 3$, e L, R e M em unidades solares, é adequada para o ramo das gigantes mas não para o AGB, onde choques e ventos acelerados

pela poeira causam uma aceleração da perda de massa durante o AGB. Sem poeira a perda de massa decresce duas ordens de magnitude. A perda de massa determina o número de pulsos térmicos e portanto a nucleossíntese associada aos pulsos. Blöcker propõe, para o AGB:

$$\dot{M} = 4,83 \times 10^{-9}\,(M_\odot/\text{ano})\,M^{-2,1}L^{2,7}\dot{M}_{\text{Reimers}}$$

No topo do AGB a taxa de perda de massa de Blöcker, necessária para fitar a relação massa inicial — massa final observada, chega a $10^{-4}\ M_\odot$/ano, caracterizando um super vento, mas não levando a uma grande ejeção instantânea.

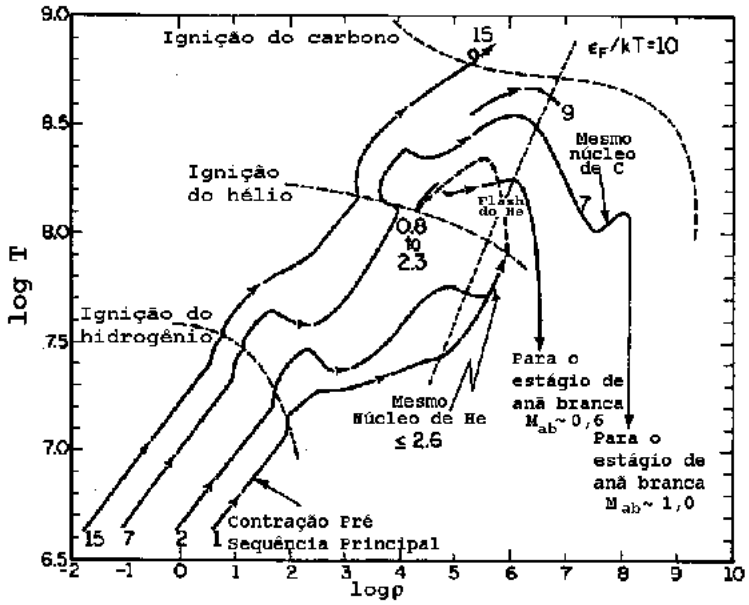


Figura 23.33: Densidade e temperaturas centrais para modelos evolucionários de Icko Iben Jr. A linha pontilhada $\varepsilon_F/kT = 10$ indica quando a pressão de degenerescência dos elétrons domina. À direita da linha o gás é degenerado, e à esquerda não-degenerado.

Iben e Renzini fitaram seus modelos teóricos a uma relação entre a idade dos cúmulos e o *turnoff point* - *TOP*, que é a luminosidade para a qual as estrelas começam a sair da seqüência principal:

$$\begin{aligned}\log\left(L_{\text{TOP}}/L_\odot\right) &\simeq \left[0,019(\log Z)^2 + 0,064\log Z + 0,41Y - 1,179\right]\log t_9 \\ &+ \quad 1,246 - 0,028(\log Z)^2 - 0,272\log Z - 1,073Y\end{aligned}$$

onde t_9 é a idade do cúmulo, em unidades de 10^9 anos.

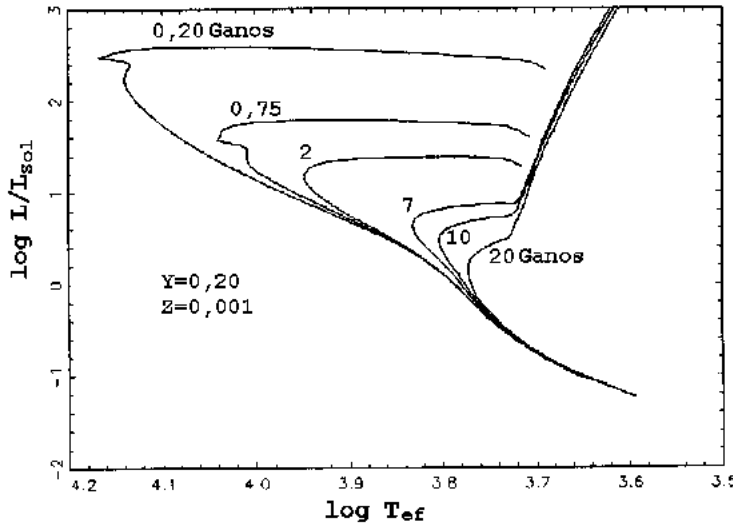


Figura 23.34: Isócronas teóricas.

No diagrama H-R, as estrelas brilhantes como Rigel, Deneb, Capela e Polux estão em uma linha aproximadamente paralela à seqüência e estão queimando hélio em seu núcleo, na chamada seqüência principal do hélio.

As estrelas Betelgeuse, Mira, Antares e Aldebaran têm, aproximadamente, a mesma temperatura efetiva e são chamadas de supergigantes vermelhas. As menos brilhantes estão queimando hidrogênio em uma camada sobre o núcleo compacto, comparável em tamanho às anãs brancas menos massivas conhecidas. As estrelas como a Mira, alternam entre queimando hidrogênio e queimando hélio em camadas sobre um núcleo de carbono e oxigênio similar às anãs brancas. Essas estrelas pertencem ao Ramo Gigante Assintótico (AGB), são pulsantes térmicas e passam por estágios de queima termonuclear descontrolada intermitente. Elas são responsáveis pela formação da maioria do carbono e dos isótopos ricos em nêutrons formados pelo processo lento de captura de nêutrons.

Aproximadamente 80% da fase da vida de uma estrela em que ocorrem reações nucleares é passada na seqüência principal. Se a estrela tiver massa acima de 1,25 $M_\odot$ a conversão de hidrogênio em hélio se dá pelo ciclo CNO, em um núcleo convectivo. Depois de consumir o hidrogênio central, a estrela se desloca rapidamente para o ramo das gigantes, queimando hidrogênio em

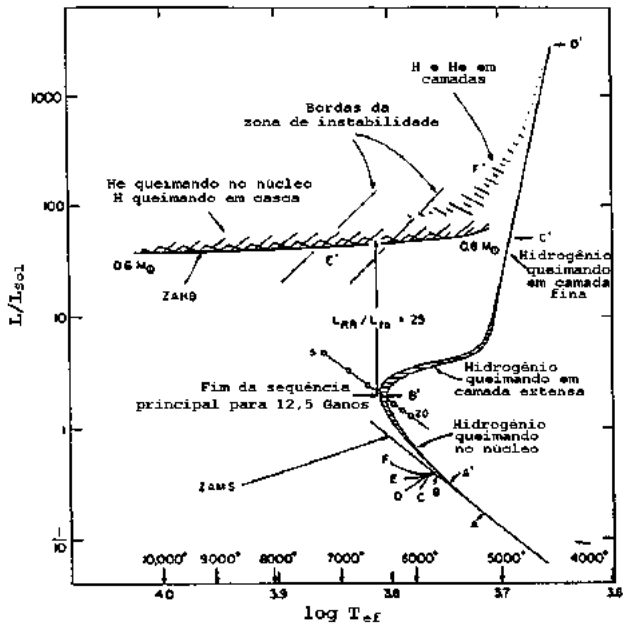


Figura 23.35: Isócrona teórica correspondente à idade de 12,5 Ganos, para modelos com composição inicial Y=0,29 e Z=0,001, publicados por Icko Iben Jr, em 1971, no Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 83, 697. Na isócrona, os pontos referidos com um caracter e linha, como D', correspondem à posição na seqüência principal de idade zero (ZAMS) indicada pelo mesmo carácter sem linha, como D.

uma camada fina sobre o núcleo em rápida contração e aquecimento, composto essencialmente de hélio puro. Como a camada é fina, a temperatura em que ocorre a queima é significativamente maior do que quando houve queima no núcleo, já que a mesma luminosidade tem que ser gerada em uma camada com menor massa. Com a contração do núcleo, há expansão das camadas externas. Ao se aproximar do ramo das gigantes, a base da região convectiva superficial se estende até as camadas em que o carbono foi convertido em nitrogênio; a abundância superficial desses dois elementos começa a mudar em quantidades detectáveis. Esse processo de mistura convectiva de elementos processados termonuclearmente no núcleo convectivo é chamado de primeira dragagem (*first dredge-up*).

Para uma estrela de massa intermediária, isto é, acima de 2,3 $M_\odot$ (ou

acima de 1,8 $M_\odot$ se *overshooting* for significativo), a temperatura central atingirá 10^8 K e a densidade central 10^4 g/cm^3 em um núcleo não-degenerado, e o hélio começará a ser transformado em carbono no centro, revertendo a ascensão da estrela no ramo das gigantes no diagrama H-R. A liberação de energia expande o núcleo e as camadas externas se contraem, aumentando a temperatura efetiva de cerca de 4000 K para 8000 K. A estrela, então, passará uma longa fase de queima de hélio em um núcleo convectivo e em crescimento. A queima de hidrogênio em uma camada fina continua a prover a maior parte da luminosidade da estrela (80%) e, portanto, a massa da região central exaurida de hidrogênio continua a aumentar. A duração total durante a fase de queima de hélio no núcleo é de aproximadamente 25% do tempo de queima do hidrogênio nuclear.

Quando a abundância do hélio central decresce significativamente, o hélio continua a queimar em uma camada externa que se desloca para massas maiores. O núcleo exaurido de hélio se contrai e esquenta enquanto que o envelope rico em hidrogênio se expande e esfria tanto que o hidrogênio para de queimar. No diagrama H-R, o modelo evolui novamente para o ramo das gigantes, e a base do envelope convectivo se estende até a interface hidrogênio-hélio, entrando em camadas em que o hidrogênio foi completamente convertido em hélio e a maior parte do carbono original convertido em nitrogênio. Hélio e nitrogênio são trazidos para a superfície na segunda dragagem. A matéria na base do envelope convectivo é aquecida até reiniciar a queima do hidrogênio, o que força a base do envelope convectivo a recuar para uma região acima da camada onde ocorre a queima de hidrogênio.

Para uma estrela de 5 $M_\odot$, logo após o início da segunda dragagem a matéria no núcleo exaurido de hélio atinge $\rho_c \approx 10^6$ g/cm^3 e os elétrons se tornam degenerados. Nessas condições, a condução de calor pelos elétrons ajuda a manter a matéria nuclear dentro de um fator de 2 da temperatura média do núcleo, $\langle T \rangle \approx 2 \times 10^8$ K, e a perda de energia pelos processos de plasma e foto-neutrinos se tornam importantes. Grande parte da liberação de energia gravitacional potencial pelas camadas superiores é perdida pela emissão de neutrinos, mantendo a temperatura do núcleo próxima da temperatura da camada onde ocorre a queima de hélio. O núcleo da estrela tem as dimensões de uma anã branca e é, de fato, uma anã branca quente.

A queima de hidrogênio e hélio ocorre alternadamente em camadas, ocorre extensa nucleosíntese por captura de nêutrons, sintetizando centenas de isótopos ricos em nêutrons, e esses isótopos, junto com o carbono, são trazidos para a superfície em uma série de episódios de terceira dragagem.

Nos modelos teóricos sem perda de massa, a massa do núcleo central

de carbono e oxigênio cresce até atingir 1,4 $M_\odot$, o limite de Chandrasekhar. Nesse ponto, o carbono começa a queimar, pois há forte escudamento eletrônico e, depois de um curto episódio durante o qual a perda de energia pelo processo Urca balança a energia gerada pela queima do carbono, a taxa de queima de carbono cresce exponencialmente, criando uma frente de queima que se desloca na direção da superfície, convertendo matéria em elementos do grupo do ferro, mas com velocidades acima da velocidade de escape. Dessa forma, o núcleo é completamente desfeito como uma supernova. A massa do envelope rico em hidrogênio do modelo é grande o suficiente para que linhas de hidrogênio sejam proeminentes. Como por definição uma supernova do tipo Ia não tem linhas de hidrogênio, esse tipo de supernova não é oriundo da evolução de uma estrela de massa intermediária sem perda de massa significativa. Na verdade, os modelos indicam que as supernovas tipo Ia são formadas por acresção de massa em estrelas anãs brancas, já que, nesse caso, a temperatura é suficiente para queimar todo o hidrogênio.

As supernovas formadas pelas estrelas de massa intermediária são supernovas do tipo II. Como a taxa de nascimento de estrelas na nossa galáxia é de aproximadamente uma estrela por ano, o número de estrelas com massa inicial superior a 1,4 $M_\odot$, de acordo com a função de massa proposta em 1955 pelo astrônomo americano Edwin Ernest Salpeter (1925-2008) que dá a taxa de formação de estrelas por pc^3 por ano

$$\psi d\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = 2 \times 10^{-12}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2,35} d\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{ pc}^3/\text{ano} \qquad (23.414)$$

corresponde a 20 vezes a taxa de formação de supernovas na nossa galáxia, concluímos que a maior parte das estrelas de massa intermediária termina de alguma forma sua vida antes da queima explosiva do carbono. Estrelas reais ejetam seus envelopes ricos em hidrogênio antes que o núcleo comece a queimar o carbono. Se supusermos que as supernovas só ocorrem para massas iniciais acima de 10 $M_\odot$, a taxa se torna uma a cada 39 anos, próxima da estimativa atual de uma a cada 50 anos na Galáxia.

A estimativa da taxa de formação de nebulosas planetárias na nossa galáxia é consistente com a estimativa de formação de estrelas de massas baixa e intermediária.

Após a ejeção da maior parte do envelope de hidrogênio, o núcleo remanescente de um modelo de estrela com massa inicial de 5 $M_\odot$ evolui rapidamente para o azul no diagrama H-R, em uma trajetória essencialmente horizontal. A luminosidade do modelo é, ainda, devida à queima de hidrogênio em uma camada fina, mas, quando a temperatura efetiva do

modelo atinge $T_{\rm ef} \simeq 10\,000$ K, a quantidade total de hidrogênio acima da camada é tão pequena que a queima só continua por aproximadamente 300 anos. Quando a temperatura efetiva atinge 30 000 K, o material ejetado pode ser fotoionizado pela radiação do remanescente compacto, e o sistema terá as características de uma nebulosa planetária com uma estrela central quente.

Se não houver *overshooting*, a massa mínima para que uma estrela de população I queime o hélio em um núcleo não-degenerado é da ordem de 2,3 $M_\odot$. Com *overshooting*, este limite inferior pode ser de até 1,5 $M_\odot$, mas uma comparação com as observações sugere um limite entre 1,6 $M_\odot$ e 2,1 $M_\odot$.

Para modelos de alta massa ($\sim$ 25 $M_\odot$), o modelo se desloca para o vermelho, enquanto o hidrogênio central queima em um núcleo convectivo e, após a exaustão do hidrogênio, para o azul. O deslocamento para o vermelho recomeça quando o hidrogênio queima em uma camada, e o núcleo se contrai e esquenta. A queima do hélio central se inicia antes de o modelo atingir o ramo das gigantes, e o modelo continua a evoluir monotonicamente para o vermelho enquanto o hélio queima em um núcleo convectivo central, mas, novamente, a queima do hidrogênio fora do núcleo fornece a maior parte da luminosidade.

Logo depois da exaustão do hélio no núcleo a temperatura e densidade são suficientes para iniciar a queima do carbono, enquanto os elétrons ainda não são degenerados. Nessa fase, toda a energia gerada no núcleo é perdida pela emissão de neutrinos e antineutrinos, e a energia luminosa é totalmente produzida pelas camadas extra-nucleares queimando hélio e hidrogênio. O núcleo exaurido em hélio se transforma em um caroço com a massa de Chandrasekhar com todos os componentes próximos do grupo do ferro, que subseqüentemente colapsa, formando uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. O colapso ejeta o manto acima do núcleo por depósito de energia na forma de neutrinos nesse manto. O resultado é uma explosão de supernova tipo II que forma um remanescente extenso e um núcleo compacto. O precursor da supernova 1987A na Pequena Nuvem de Magalhães era um estrela azul, com $T_{\rm ef} \approx 10\,000$ K, e luminosidade apropriada para um modelo de 20 $M_\odot$. Em seu brilho máximo ela era muito menos brilhante do que a maioria das supernovas do tipo II previamente identificadas. Uma das causas é a baixa metalicidade da Nuvem.

Para uma estrela de 25 $M_\odot$, o carbono inicia sua combustão quando o núcleo atinge 6×10^8 K e dura cerca de 300 anos. Quando a temperatura atinge $1,5 \times 10^9$ K, a queima do neônio se inicia e dura cerca de um ano. A

queima do oxigênio inicia quando o núcleo atinge $2,0 \times 10^9$ K e dura cerca de 8 meses, seguida da queima do silício quando o núcleo atinge $3,5 \times 10^9$ K e dura somente 4 dias. Logo após o carbono começa a queimar em uma camada de cerca de 1,5 $M_\odot$ logo acima do núcleo de ferro. Depois que o silício começa a queimar em camada, o núcleo se contrai atingindo o colapso hidrodinâmico. A distribuição de massa é

Elemento	**Massa ($M_\odot$)**
H	12,10
He	9,148
C	0,543
O	1,040
Ne	0,357
Mg	0,177
Si Ca	0,175
Ni	0,034
Fe	1,504

Os modelos de nucleosíntese explosiva predizem quantidades aproximadamente iguais de ^{68}Zn e ^{70}Zn, mas no sistema solar a razão destes isótopos é de 0,033, portanto inconsistente, apesar da razão dos núcleos leves ser predita corretamente. Nas estrelas massivas a queima de carbono, oxigênio, neônio e silício se dá quando o esfriamento por neutrinos, pela emissão de pares de neutrinos e antineutrinos, é dominante. As mudanças estruturais causadas pela emissão de neutrinos permite que a maior parte das estrelas ejete massa e forme uma estrela de nêutrons e não um buraco negro.

Entretanto, é importante distinguir modelos quase-estacionários com massa constante de estrelas reais, já que as estrelas massivas reais perdem massa a taxas consideráveis mesmo quando estão na seqüência principal, por ventos acelerados pela radiação. Cesare Chiosi (1941-) e André Maeder (1942-), em 1986, fitaram os dados observacionais de perda de massa obtendo:

$$\dot{M} = 10^{-14,97} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{1,62} \; M_\odot/\text{ano} \tag{23.415}$$

Jorick S. Vink, Alexander de Koter e Henny J. G. L. M. Lamers, no Astronomy and Astrophysics, 369, 574 (2001), propõem $\dot{M} \propto z^{0,69}$, pelos seus modelos de perda de massa.

A determinação de massa média de anãs brancas de 0,43 para o cúmulo aberto NGC 6791, com cerca de 7 bilhões de anos e metalicidade Fe/H duas

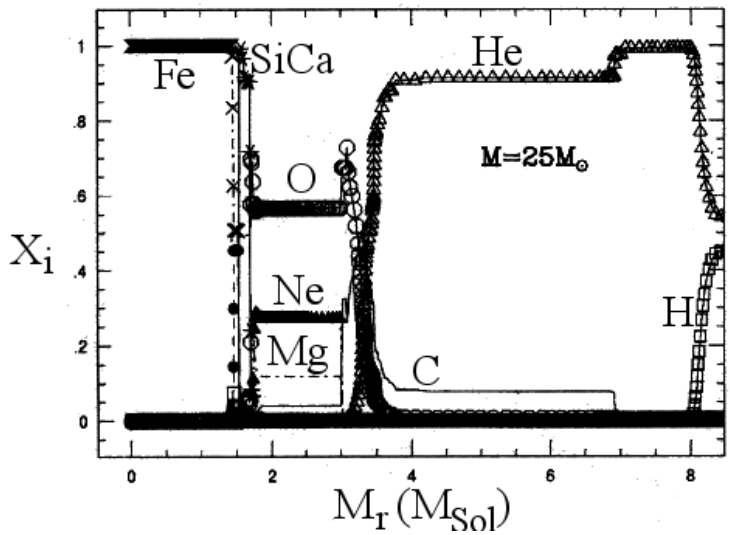


Figura 23.36: Estrutura dos 8,5 $M_\odot$ internos de um modelo de estrela de 25 $M_\odot$ quando o núcleo se converte em ferro. Para cada elemento existe um par de camadas, uma onde está a chama, convectiva, e outra inerte, com o resultado da combustão. Portanto, logo acima do núcleo de elementos do grupo de ferro existe uma camada de elementos Si a Ni, sem oxigênio, onde ocorre a queima do silício. Na parte mais externa que 8,5 $M_\odot$ está o material acima da camada queimando o hidrogênio. A massa da camada com a chama é cerca de 40 vezes menor do que a massa da camada já queimada.

vezes a solar, por Jasonjot Kalirai, Pierre Bergeron, Brad M.S. Hansen, Daniel D. Kelson, David B. Reitzel, R. Michael Rich e Harvey R. Richer, (2007, Astrophysical Journal, 671, 748) indica que a perda de massa é fortemente dependente da metalicidade, e que mesmo estrelas com 1 massa solar inicialmente podem gerar anãs brancas com núcleo de He.

Para estrelas com massa acima de 40–50 $M_\odot$, a perda de massa pode ser tão expressiva que as camadas que passaram por queima de hidrogênio podem ser expostas. Essa é a forma pela qual as estrelas Wolf-Rayet tipo N são formadas. Durante a fase de Wolf-Rayet, a taxa de perda de massa é ainda maior do que na fase de seqüência principal, e acredita-se que as estrelas Wolf-Rayet tipo N evoluem para Wolf-Rayet tipo C, uma vez que todas as camadas contendo hidrogênio sejam removidas.

As estrelas de baixa massa são, por definição, aquelas que desenvolvem

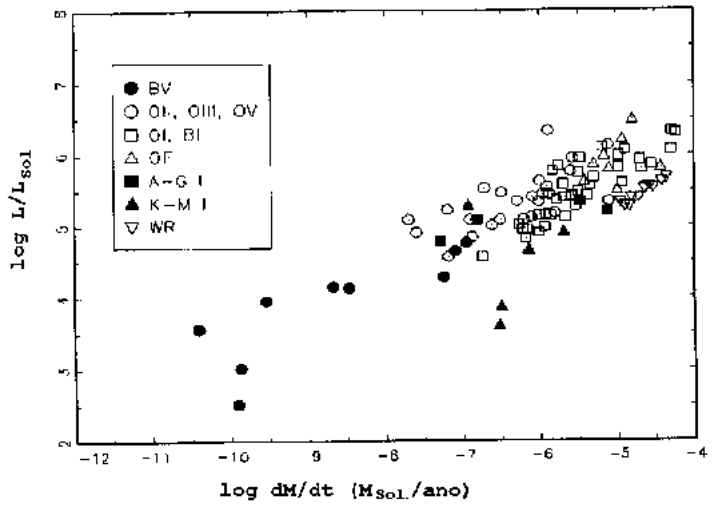


Figura 23.37: Taxas de perda de massa para estrelas massivas.

um núcleo com elétrons degenerados logo após sair da seqüência principal. Elas têm um ramo gigante mais estendido do que as estrelas de massa intermediária, pois o núcleo exaurido de hidrogênio *se esfria* por condução eletrônica quando os elétrons se tornam degenerados, aumentando o tempo até o início da queima de hélio, que termina a subida do ramo das gigantes. Quando a massa do núcleo de hélio atinge cerca de 0,45 $M_\odot$, a queima de hélio descontrolada se inicia no núcleo. Essa queima descontrolada continua até que a degenerescência seja levantada. A perda de energia por emissão de neutrinos no núcleo causa um gradiente negativo de temperatura nas regiões centrais do núcleo, e o início da queima de hélio ocorre fora do centro e depois procede para dentro em uma série de flashes que ocorrem sucessivamente mais próximos do centro. A luminosidade máxima devido a transformação de $3\alpha \rightarrow {}^{12}\mathrm{C}$ alcança $L \simeq 10^{11}\ L_\odot$. Essa energia não sai da estrela, mas permanece na camada convectiva, que se estende quase até a camada de queima de hidrogênio. A temperatura sobe até que a degenerescência desapareça. A proporcionalidade entre temperatura e pressão, então, permite um novo equilíbrio: o núcleo de hélio se expande e esfria, e o modelo inicia uma fase de queima quiescente de hélio, como os modelos de massa intermediária, que dura cerca de 10^8 anos. A posição do modelo no diagrama H-R depende, principalmente, da metalicidade. Os modelos de alta metalicidade se concentram em uma pequena região no ramo das

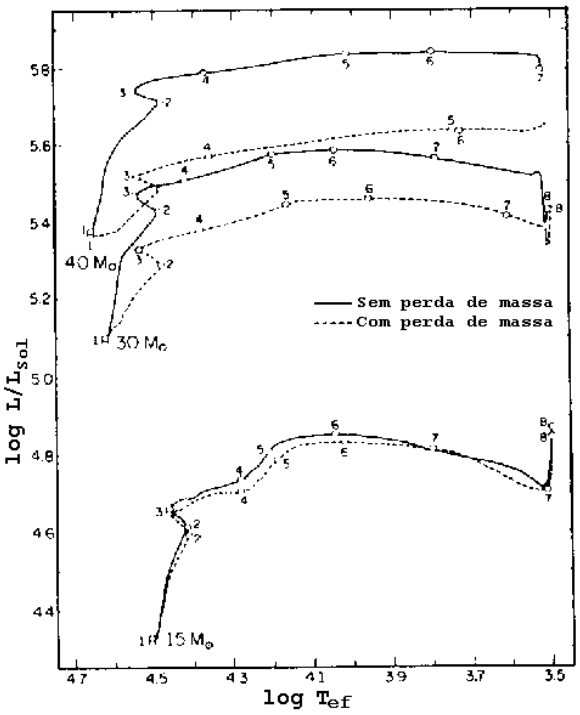


Figura 23.38: Seqüências evolucionárias para estrelas massivas, com ou sem perda de massa.

gigantes, aproximadamente 3 magnitudes abaixo do topo do ramo gigante, enquanto que os modelos de baixa metalicidade cobrem uma região extensa de temperaturas efetivas mais azuis do que o ramo das gigantes, levando à designação de *ramo horizontal*. Com uma opacidade $\propto \rho T^{-s}$, podemos estimar $T_{\rm ef} \propto Z^{-(s+3)/2}$. Portanto, de Z=0,0001 (Pop II extrema) até Z=0,02 (Pop I), obtemos $T_{\rm ef}(I)/T_{\rm ef}(II) = 0,64$ para s=3 e $T_{\rm ef}(I)/T_{\rm ef}(II) = 0,41$ para s=0.

Os modelos têm aproximadamente a mesma luminosidade, pois têm aproximadamente a mesma massa nuclear e, portanto, a mesma contribuição para a luminosidade pela queima do hélio. Diferente dos modelos de massa intermediária, a contribuição da camada queimando hidrogênio não é dominante para a luminosidade. A massa do núcleo exaurido de hidrogênio no fim do ramo horizontal é tipicamente $0,5\ M_\odot$, ou seja, $0,05\ M_\odot$ maior do que no início da queima do hélio. Após a exaustão do hélio central, o modelo de

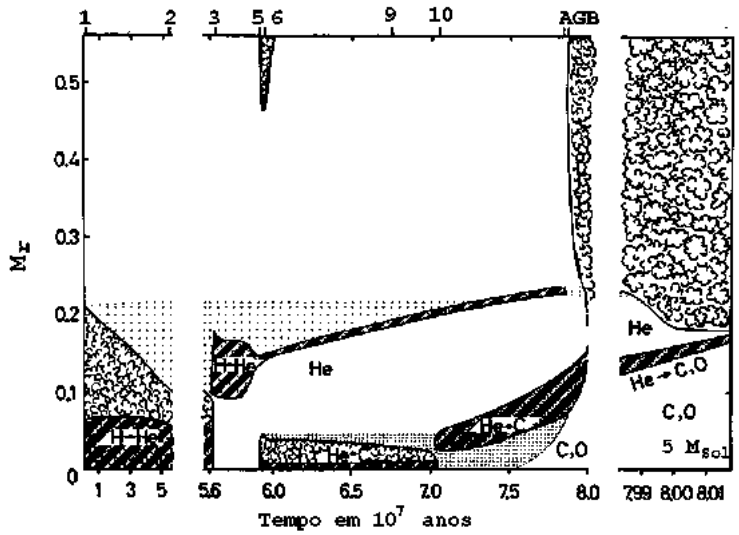


Figura 23.39: Evolução da estrutura interna de uma estrela de 5 $M_\odot$ após a seqüência principal. Os números na parte superior da figura correspondem às fases equivalentes da figura na página 450. As regiões escuras indicam queima nuclear, e as com bolhas indicam convecção.

baixa massa é similar ao modelo de massa intermediária: um núcleo de C-O com elétrons degenerados, uma camada extranuclear queimando hélio e um envelope rico em hidrogênio em que o hidrogênio não queima significativamente, mesmo na sua base. Os modelos ocupam a mesma região do Ramo Gigante Assintótico. Nessa fase, a maior parte do envelope de hidrogênio é perdida por vento radiativo. Para massas mais altas, mas ainda abaixo de cerca de 10,5 $M_\odot$", o núcleo contém oxigênio, neônio e magnésio. As estrelas do AGB são importantes no enriquecimento da galáxia e dominantes na luminosidade integral de sistemas estelares de idades intermediárias e, portanto, ferramentas para o estudo das populações extragaláticas.

Para os modelos de baixa massa, a fase inicial do AGB, antes do início dos pulsos térmicos, dura cerca de 10^7 anos, comparados com 10^8 anos no ramo gigante. As estrelas de baixa metalicidade provavelmente não chegam à fase de pulsos térmico, tornando-se anãs brancas com massa igual àquela do núcleo no fim do ramo horizontal, $0,5\ M_\odot$.

Para estrelas de População I, as observações indicam que o AGB termina com massa de cerca de $0,65\ M_\odot$, ou seja, estrelas com massas iniciais

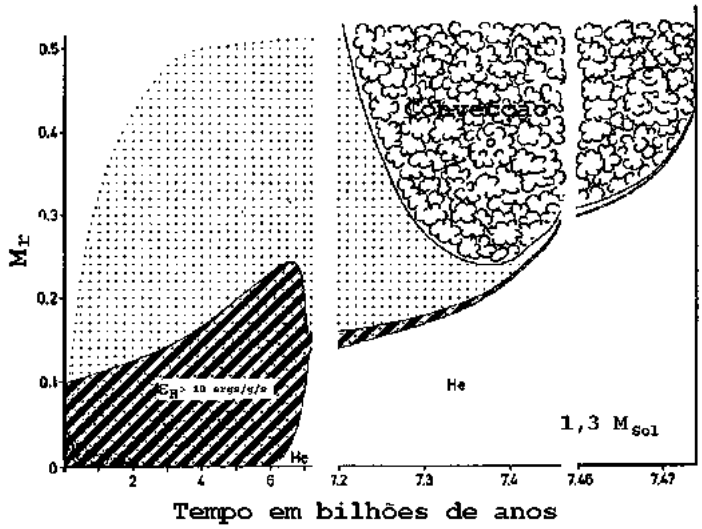


Figura 23.40: Evolução da estrutura interna de uma estrela de 1,3 $M_\odot$ após a seqüência principal.

de cerca de 1,4 $M_\odot$ aumentam a massa do núcleo em cerca de 0,15 $M_\odot$ durante o AGB, e retornam aproximadamente metade de sua massa inicial para o meio interestelar. A matéria perdida durante o AGB é, provavelmente, enriquecida em carbono e elementos ricos em nêutrons formados pelo processo "s".

Observações com o observatório Chandra das estrelas RXJ1856.5-3754 por Jeremy Drake, Herman L. Marshall, Stefan Dreizler, Peter E. Freeman, Antonella Fruscione, Michael Juda, Vinay Kashyap, Fabrizio Nicastro, Deron O. Pease, Bradford J. Wargelin e Klaus Werner (2002, The Astrophysical Journal, 572, Issue 2, pp. 996-1001) mostram $T_{\rm ef}$= 1,2 milhões Fahrenheit (700 000 Celsius). A coluna de hidrogênio derivada favorece a medida de paralaxe de 140 pc derivada pelo HST e um raio de implícito de R=3.8-8.2 km, muito pequeno para ser consistente com modelos normais de estrelas de nêutrons, indicando que a estrela estaria na forma de matéria de quarks. A maior parte das equações de estado de estrelas de nêutrons produz um raio maior que 12 km, para qualquer massa (P. Haensel 2001, Astronomy & Astrophysics, 380, 186). A estrela foi originalmente descoberta em 1996 pelo satélite alemão Roetgen. Entretanto, a análise de Frederick M. Walter e James Lattimer, da the State University of New York, Stony Brook, (2002,

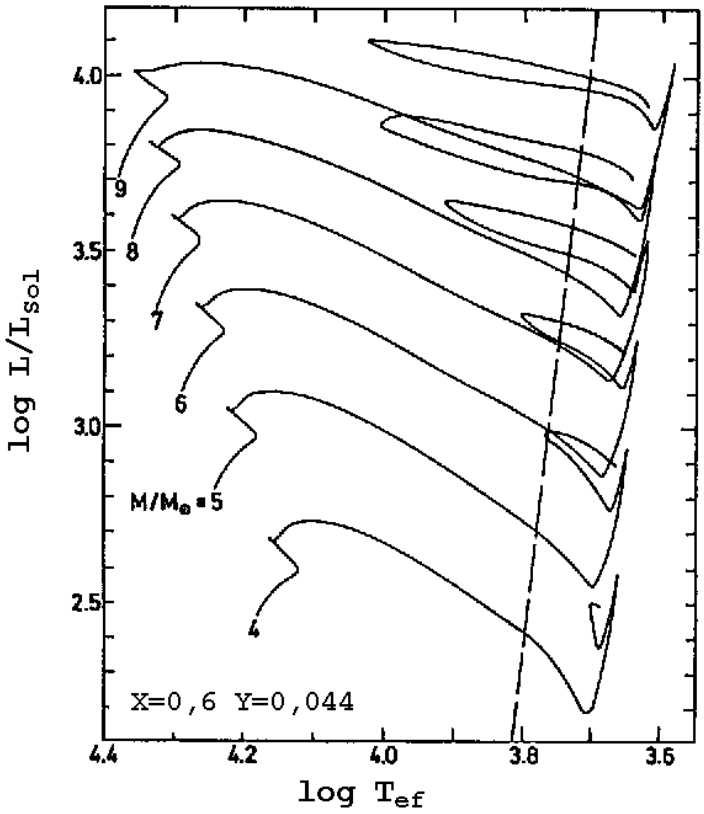


Figura 23.41: Diagrama H-R com as seqüências evolucionárias para massas entre 4 e 9 $M_\odot$, desde a seqüência principal até a fase de queima nuclear de hélio. A linha pontilhada indica a borda vermelha da faixa de instabilidade das Cefeidas.

Astrophysical Journal, 576, L145; 2004, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 30, 461) de uma imagem do Telescópio Espacial Hubble com a Wide Field and Planetary Camera 2 resulta em d=(117 $\pm$ 12) pc e R=15 km, consistente com matéria de nêutrons normal. A análise do espectro, sem linhas, por Frederick M. Walter, J. A. Pons, V. Burwitz, James Lattimer, D. Lloyd, S. J. Wolk, M. Prakash & R. Neuhäuser, publicada em 2004 no Advances in Space Research, 33, 4, 513, concorda que matéia estranha não é necessária. Wynn C. G. Ho, no Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 380, 71 (2007), obtém um raio de 14 km, também

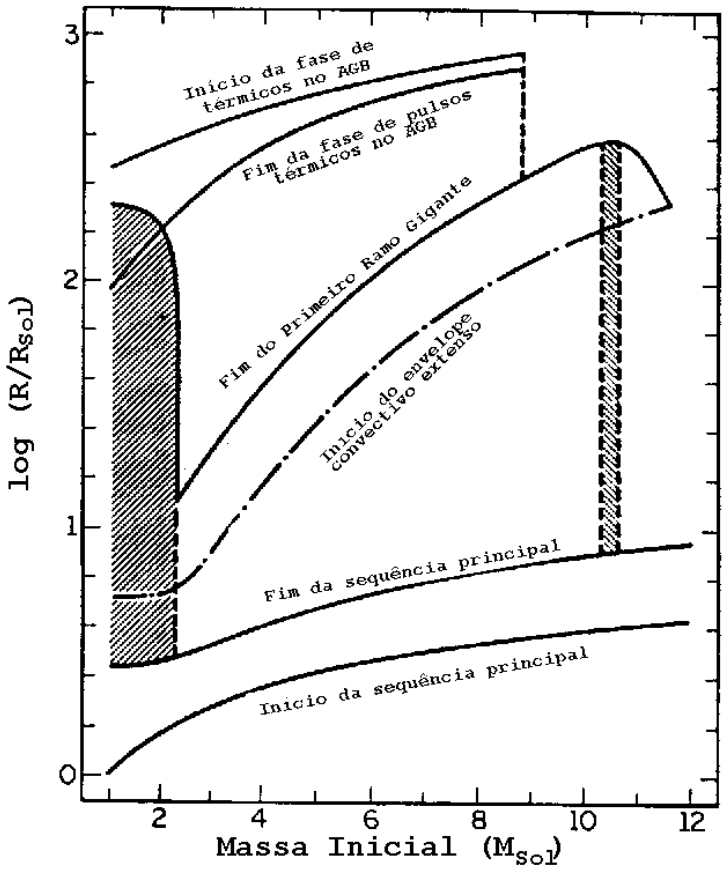


Figura 23.42: Variação do raio das estrelas com o tempo, devido à sua evolução.

consistente com uma estrela de nêutrons normal.

As obsercações da estrela de nêutrons 3C58, pulsar J0205+6449 com período de 65 ms, a 3,2 kpc de distância por Patrick Slane, Steven Murray, e David Helfand (2002, The Astrophysical Journal, 571, L45-L49), não detectaram raio-X térmico do corpo central, mostrando que ela está muito mais fria ($T_{\rm ef} \leq 1,13 \times 10^6$ K) do que deveria, para esta estrela que é a mais jovem estrela de nêutrons conhecida. Ela é supostamente a remanescente da SN1181. Os detalhes do interior das estrelas de nêutrons ainda não são bem conhecidos devido a nossa ignorância dos detalhes da força forte em altíssimas densidades. Como o esfriamento é dominado pela emissão de neu-

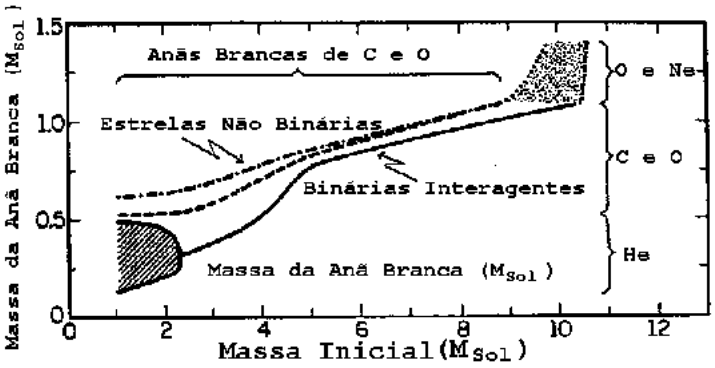


Figura 23.43: Relação entre a massa inicial da estrela e a composição do núcleo da anã branca resultante, nos modelos de Icko Iben Jr.

trinos e dependendo do modelo condensados de píons ou káons ou matéria de quark é formada, aumentando drasticamente a emissão de neutrinos e esfriando a estrela mais rapidamente. Desta maneira a medida da temperatura pode diferenciar os modelos com ou sem formação de matéria exótica.



Figura 23.44: Foto de Icko Iben Jr. (1934-), que estudou com Martin Schwarzschild (1912-1997), o precursor dos cálculos de modelos de evolução estelar. Icko Iben continuou esse trabalho e é considerado o maior especialista no assunto.

Durante toda a evolução da estrela, a energia gravitacional do núcleo vai aumentando, por contração, mas, no momento da explosão de uma su-

Tabela 23.10: Alguns buracos negros estelares. Jorge Casares (2007, Proceedings IAU Symposium No 238, p.3) relaciona objetos com massas entre 4 e 15 $M_{\odot}$.

Nome	Massa ($M_{\rm Sol}$)	Publicação
GS2000+25	≥ 5.66	Zacharias Iannou, Edward Lewis Robinson (1945-), Bill Welsh, Carol Haswell 2002, ASP CS, 261, 285
A0620-00	3,3 a 13,6	Cinthia Froning & Edward Lewis Robinson 2002, ASP CS, 261, 53
XTE J1550-564	12 a 15	Lev Titarchuk & C.R. Shrader 2002, ApJ, 567, 1057
XTE J1859+226	$7,4 \pm 1,1$	Robert Hynes, Carol Haswell, Shrader, Cui 2002, MNRAS, 331, 169
X9 M81	80 a 150	Daniel Q. Wang 2002, MNRAS, 332, 764

pernova, aproximadamente $0,1\ M_{\odot}c^2 \simeq 10^{53}$ ergs, correspondendo a toda a energia gravitacional acumulada, são liberados, sendo que somente 10^{51} ergs correspondem à luminosidade perdida através de fótons. A maior parte da energia é perdida através de neutrinos.

Em 1961, o japonês Chusiro Hayashi (1920-2010) demonstrou que uma estrela totalmente convectiva tem a menor temperatura atmosférica possível; modelos com temperaturas mais baixa não estão em equilíbrio hidrostático. Essa temperatura é chamada de limite de Hayashi e corresponde ao ramo das gigantes.

Em uma região do Ramo Horizontal, as estrelas apresentam variações de luz, causadas pelas zonas de ionização parcial do hidrogênio e do hélio, e são chamadas de variáveis RR Lyrae. Os modelos hidrodinâmicos das variações mostram que essas estrelas têm massa entre 0,6 e 0,7 $M_{\odot}$, embora os precursores sejam mais massivos, indicando que já perderam uma quantidade significativa de massa durante sua evolução, mas principalmente no ramo das gigantes. Estrelas mais massivas, com massas $5 \leq M \leq 10\ M_{\odot}$, tornam-se pulsantes quando ainda estão queimando He no núcleo, mas com períodos mais longos, da ordem de dias, e são chamadas de Cefeidas. Elas

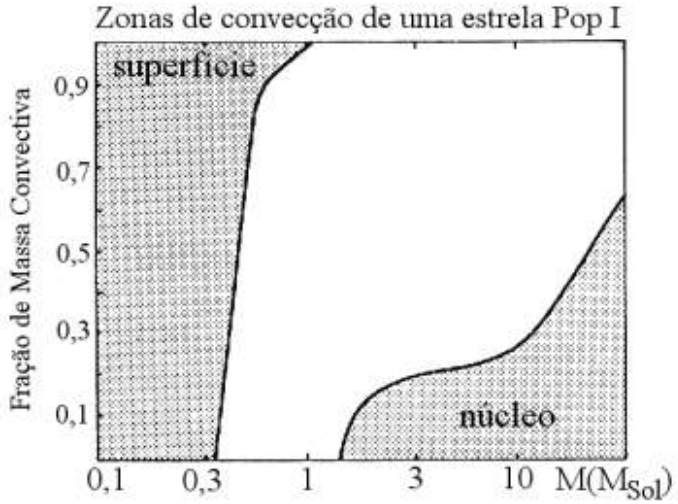


Figura 23.45: Zonas de Convecção para estrelas de população 1.

são usadas como indicadores de distância para as galáxias, pois seu período de pulsação é proporcional à sua luminosidade, como descoberto em 1912 por Henrietta Swan Leavitt (1868-1921). Já no topo do ramo gigante assintótico, as estrelas se tornam variáveis tipo Mira, com períodos de 6 meses a dois anos, e luminosidades da ordem de 2500 $L_{\odot}$. Para estrelas de massa intermediária, o forte esfriamento por emissão de neutrinos faz com que o núcleo nunca atinja a temperatura necessária para a ignição do carbono.

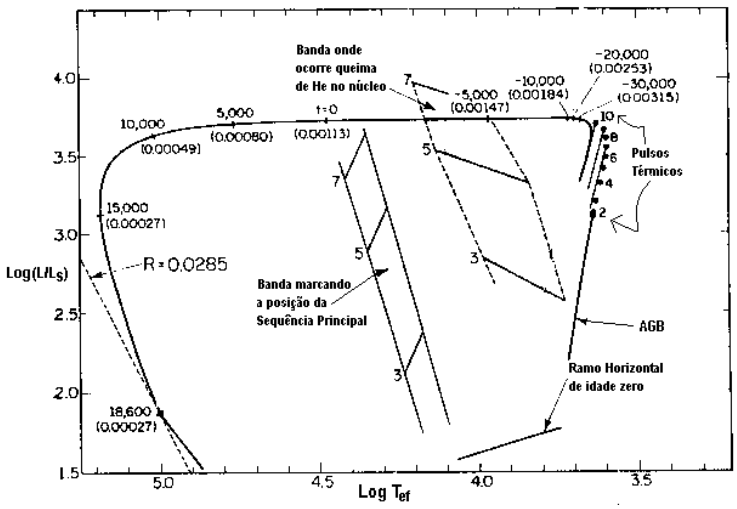


Figura 23.46: Diagrama HR teórico mostrando o caminho evolucionário de uma estrela de 0,6 $M_\odot$, a partir do Ramo Horizontal, calculado pelo americano Icko Iben Jr. e pelo italiano Alvio Renzini. O ramo horizontal é onde as estrelas queimam He no núcleo. As estrelas com massa até cerca de 6 $M_\odot$ chegam ao ramo horizontal com um núcleo com, aproximadamente, 0,6 $M_\odot$. Posteriormente, perdem suas camadas superiores por perda de massa contínua, como vento solar e ejeção de nebulosa planetária. Os tempos indicados em cada ponto, positivos e negativos, são medidos em anos a partir de um ponto, no caminho, com $T_{ef} = 35\,000$ K.

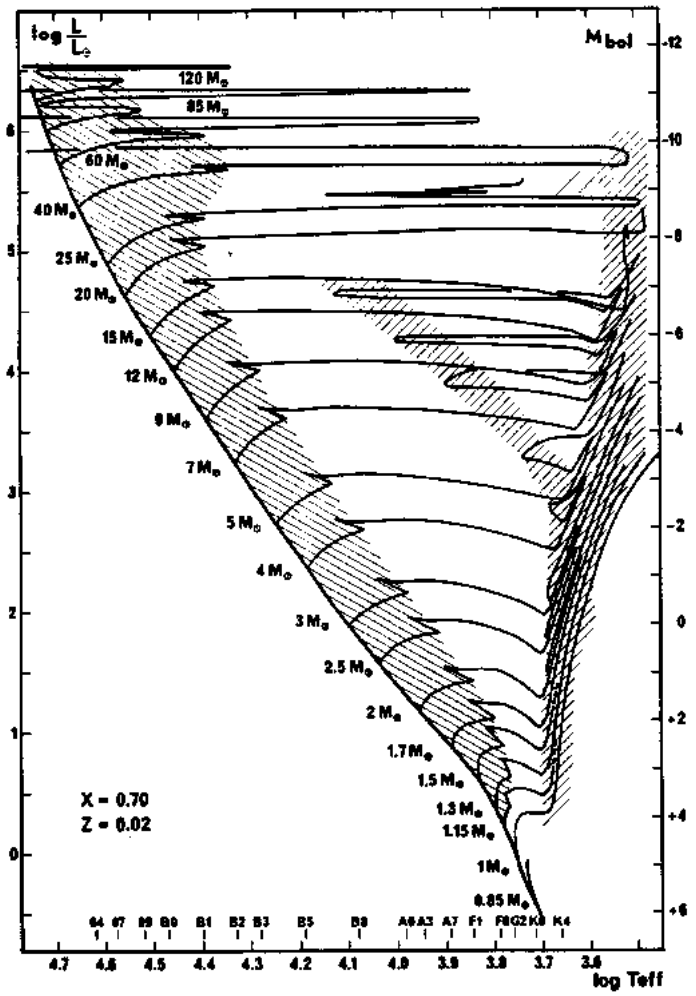


Figura 23.47: Diagrama HR teórico mostrando o caminho evolucionário de estrelas de diferentes massas, com um *overshooting* convectivo moderado, conforme cálculos de André Maeder (1942-) e Georges Meynet, da Universidade de Genebra, publicados em 1989. Nesses modelos, a massa máxima de uma estrela Cefeida é de 12 $M_{\odot}$. A base de dados desses modelos pode ser encontrada em http://obswww.unige.ch/∼schaerer/evol/Evol_grids.html

23.27 Anãs brancas

Embora as anãs brancas conhecidas estejam todas na vizinhança imediata do Sol, principalmente dentro de 300 pc, aproximadamente 98% de todas as estrelas que já saíram da seqüência principal são anãs brancas. Como as anãs brancas esfriam vagarosamente, mesmo as anãs brancas mais velhas no disco da nossa galáxia ainda estão visíveis, com luminosidades acima de $3 \times 10^{-5} L_{\odot}$. Como as anãs brancas têm massa abaixo de 1,4 $M_{\odot}$, e são os núcleos degenerados das estrelas de 1 a 8 massas solares, a maior parte da massa dos progenitores foi perdida antes da fase de anã branca. As nebulosas planetárias são um dos canais de formação das anãs brancas, mas existem outros canais evolutivos: estrelas passando para anã branca diretamente do ramo horizontal estendido e também estrelas binárias interagentes. No diagrama de Hertzsprung-Russel, as estrelas anãs brancas formam uma seqüência bem definida, cerca de 8 magnitudes menos brilhantes do que a seqüência principal. O limite máximo de massa de uma estrela que evolui para anã branca depende da metalicidade da estrela, e ainda é um valor incerto. Lionel Siess publicou em 2008 no Proceedings IAU Symposium No. 252, a estimativa de 11 $M_{\odot}$ como a massa máxima das estrelas que geram anãs brancas de O/Ne/Mg e não explodem como supernovas. Stephen J. Smartt em 2009 no *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 47, 63, estimou 8 ± 1 $M_{\odot}$.

23.27.1 Propriedades de anãs brancas não-binárias

A análise das isócronas das seqüências principais dos cúmulos abertos que contém anãs brancas sugere que as anãs brancas — não associadas a estrelas binárias — têm progenitores com massas entre 1 e 8 $M_{\odot}$. As anãs brancas têm temperaturas desde 150 000 K até 3700 K e luminosidades correspondentes entre $3 \geq \log L/L_{\odot} \geq -4,5$.

Apesar de suas origens diversas e suas diferentes luminosidades, as anãs brancas formam uma classe bastante homogênea. Depois da fase de pré-anãs brancas, as anãs brancas não binárias têm $\log g \approx 8$, correspondente a uma distribuição de massa bastante restrita, centrada em $0,6 M_{\odot}$. É importante notar que os núcleos das nebulosas planetárias observadas em nossa galáxia também têm massa centrada em $0,6\, M_{\odot}$, embora exista um fator de seleção em favor dos núcleos de nebulosas planetárias com essa massa. A teoria de evolução estelar prediz que as estrelas progenitoras de anãs brancas com massas até $0,40$ $M_{\odot}$ têm vida na seqüência principal maior do que a idade da nossa galáxia, de modo que as anãs brancas com essas massas devem ser

oriundas da evolução de sistemas binários. Da mesma forma, a teoria de evolução estelar prediz que a massa mínima para a ignição do hélio nuclear é de $0,45-0,47\ M_\odot$, sugerindo que essas estrelas têm núcleo de hélio (Don A. VandenBerg, P.A. Bergbusch & P.D. Dowler, 2006, Astrophysical Journal Supplement, 162, 375; Jorge Alejandro Panei, Leandro Gabriel Althaus, X. Chen, & Z. Han, 2007, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 382, 779). Lee Anne Willson, em seu artigo de 2000 no *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38, 573, propõe que, como as estrelas de baixa metalicidade têm menor perda de massa, seus núcleos crescem até cerca de 1 $M_\odot$ antes do envelope decrescer para $0,02\ M_*$, quando a estrela sai do ramo assimptótico das supergigantes e, portanto, as estrelas de baixa metalicidade formariam anãs brancas de mais alta massa. Podemos calcular a relação entre a massa de uma anã branca e seu raio usando a expressão para a pressão de um gás totalmente degenerado, mas não-relativístico [equação (23.30)]:

$$P_{e,nr} = 0,0485 \frac{h^2}{m_e} n_e^{\frac{5}{3}}$$

na equação de equilíbrio hidrostático; obtém-se

$$\boxed{R = 0,114 \frac{h^2}{G m_e m_p^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}} M^{-\frac{1}{3}}}$$

ou

$$\boxed{M_{nr} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^4 \left(\frac{h^2 N_A}{m_e G}\right)^3 \frac{N_A^2}{\mu_e^5} \frac{1}{R^3}}$$

onde μ_e é o peso molecular médio dos elétrons, e é igual a 2 para He, C, ou O totalmente ionizados, e m_p é a massa de um próton, ou mais acuradamente a massa atômica. Numericamente

$$M/M_\odot \simeq 10^{-6} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-3} \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^5$$

Como a maioria das anãs brancas tem massa de $0,6\ M_\odot$, obtemos um raio de R=6380 km. Entretanto esta fórmula só é valida para material completamente degenerado, o que não é o caso abaixo de 1,3 massas solares. O raio de uma anã branca de $0,6\ M_\odot$ varia de cerca de 11 000 km para $T_{\rm ef} = 60\,000$ K, para 8 600 km para $T_{\rm ef} = 4\,000$ K. Note que o raio *diminui* para massa maior.

Se substituirmos $\mu_e \to 1$ e $m_e \to m_p$, podemos estimar a relação entre a massa e o raio para uma estrela de nêutrons, já que, nesse caso, são os

nêutrons que estão degenerados:

$$\frac{M_{EN}}{M_\odot} \simeq 5 \times 10^{-15} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-3}$$

que resulta em um raio de 11 km para uma massa de uma massa solar. As estrelas de nêutrons têm massa média de $M_{\rm NS} = 1,36 \pm 0,30\ M_\odot$.

Massa de Chandrasekhar

A massa máxima de uma anã branca (Subramanian Chandrasekhar, 1931, "The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs", Astrophysical Journal, 74, 81 e Edmund C. Stoner, "Upper limits for densities and temperatures in stars", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 92, p.662) é obtida calculando-se a pressão totalmente degenerada e totalmente relativística ($v = c$),

$$P_e = 0,123 \frac{hc}{m_p^{4/3}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{23.416}$$

e substituindo-se na equação de equilíbrio hidrostático, obtendo-se:

$$\boxed{M_{\rm Ch} = 0,2 \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \left(\frac{hc}{G m_p^2}\right)^{3/2} m_p = \frac{5,8348}{\mu_e^2}\ M_\odot = 1,4587 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot} \tag{23.417}$$

onde μ_e é o peso molecular médio dos elétrons, e é igual a 2 para He, C, ou O totalmente ionizados.

O limite de massa de Chandrasekhar [$= 1,4587(\frac{2}{\mu_e})^2\, M_\odot$] é a massa máxima que uma anã branca pode ter e ainda ser suportada pela pressão de degenerescência dos elétrons; $\mu_e = A/Z$ é o peso molecular médio ($\mu_e = 2$ para hélio, carbono ou oxigênio).

Tetsuo Hamada & Edwin Ernest Salpeter (1924-2008) publicaram no Astrophysical Journal, 134, 683, correções devido às interações eletrostáticas entre os íons, os desvios de Thomas-Fermi da distribuição não uniforme das cargas dos elétrons e a energia de troca das interações spin-spin. Demonstraram que em altas densidades os decaimentos β inversos tornam-se importantes, e os elétrons tunelam para dentro dos núcleos, formando nêutrons, e mudando efetivamente o peso molecular médio dos elétrons. Quando a densidade do núcleo atinge um certo valor crítico, os elétrons começam a ser pressionados para dentro dos prótons, o que também define um processo de decaimento β inverso, criando nêutrons e neutrinos. A estrutura nuclear

dentro do núcleo da anã branca muda. Quando as transições de fase se iniciam, uma parte do núcleo estelar é composto de núcleos pesados, mudando efetivamente o índice adiabático da estrela. Entretanto, ultrapassar esta densidade crítica, que leva às transições de fase, não é suficiente para causar a instabilidade, que requer ou uma grande diferença entre a densidade do núcleo da estrela e as camadas externas (W. H. Ramsey, 1950, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 110, 444 15),

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{A_2 Z_1}{A_1 Z_2} > 1,5$$

ou uma cadeia de decaimentos β inversos entre elétrons e núcleos devido ao núcleo tornar-se cada vez mais denso. Isto leva a uma nova condição sobre a massa máxima, reduzindo-o como mostrado explicitamente nos modelos de temperatura zero de Hamada & Salpeter. A massa máxima para uma anã branca com núcleo de magnésio era $1,35 M_\odot$, e $1,396\ M_\odot$ para carbono. No mesmo artigo eles derivaram a relação empírica massa-raio das anãs brancas, para temperatura zero.

Outra componente que tem efeito sobre a massa máxima de uma anã branca é a Relatividade Geral. Inicialmente proposto por Samuil Aronovich Kaplan (1921-1978) em 1949 (Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki, 19, 951 16) e calculado precisamente por Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) e Robert F. Tooper no Astrophysical Journal, 139, 1396 e Subrahmanyan Chandrasekhar no Astrophysical Journal, 140, 417, este efeito quebra a estabilidade dinâmica a densidades mais baixas que aquelas calculadas para os modelos de temperatura zero, reduzindo a massa de Chandrasekhar para 98% da massa de Chandrasekhar sem correção relativística:

$$\boxed{M_{\rm Ch}^{\rm RG} = 1,43 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot} \tag{23.418}$$

Note que como raio das anãs brancas, $R_{\rm ab} \simeq 10\,000$ km, é mais de mil vezes o raio de Schwarzschild de mesma massa, $R_{\rm Sch} \simeq 3$ km, os efeitos relativísticos são muito pequenos.

A composição química do núcleo das anãs brancas, que compõe 99,9% da massa das estrelas é de He (até cerca de 0,46 e 0,50 $M_\odot$, para Z=0,04 e Z=0,0001, respectivamente, Inma Domínguez, Alessandro Chieffi, Marco Limongi & Oscar Straniero, 1999, Astrophysical Journal, 524 226, Leo Girardi 2000, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 308 818, Marcelo Miguel Miller Bertolami, Leandro Gabriel Althaus, Klaus Unglaub,

Achim Weiss, 2008, Astronomy & Astrophysics, 491, 253), C/O (até cerca de 1,05 $M_{\odot}$, Volker Weideman (1924-2012) 2000, Astronomy & Astrophysics, 363, 647, Pier Giorgio Prada Moroni & Oscar Straniero 2007, Astronomy & Astrophysics, 466, 1043, Silvia Catalan, Jordi Isern, Enrique Garcia-Berro & Ignasi Ribas, 2008, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 387, 1693, Xiangcun Meng, Xuefei Chen & Zhanwen Han, 2008, "Initial-final mass relationship for stars of different metallicities", Astronomy & Astrophysics, 487, 625), e de O/Ne/Mg (acima de cerca de 1,05 $M_{\odot}$). A composição do núcleo depende da metalicidade das progenitoras e se elas eram binárias (Icko Iben Jr. & Alexander Tutukov, 1985, Astrophysical Journal Supplement Series, 58, 661; Zhanwen Han, Christopher A. Tout & Peter P. Eggleton, 2000, "Low- and intermediate-mass close binary evolution and the initial-final mass relation", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 319, 215).

Várias anãs brancas são encontradas com massas abaixo de 0,50 $M_{\odot}$; os modelos de evolução estelar indicam que essas estrelas não passaram pela fase luminosa (topo) do ramo gigante assintótico (AGB), fase de Mira e subseqüente fase de nebulosa planetária, mas tiveram perda de massa suficientemente alta para truncar sua evolução no início do AGB, ou, ainda, no ramo horizontal, onde há queima de hélio no núcleo. Uma razão para essa truncagem seria que a camada rica em hidrogênio próxima à superfície não tivesse massa suficiente para manter ignição e reignição de queima de hidrogênio (*shell flashes*).

Existem poucas anãs brancas com massas medidas por astrometria ou sismologia:

- Sírius B: $M = 1,053 \pm 0,028\ M_{\odot}$
- 40 Eri B (sistema triplo): $M = 0,42 \pm 0,02\ M_{\odot}$
- Procyon B: $M = 0,62\ M_{\odot}$
- L 870-2: um sistema com duas anãs brancas com $P_{orb} = 2,5\,\mathrm{d}$ e componentes com $M = 0,41$ e $0,46 \pm 0,1\ M_{\odot}$
- Stein 2051B: com massa mais provável de $M = 0,50 \pm 0,05\ M_{\odot}$
- PG 1159-035 com massa sismológica de $0,59 \pm 0,01\,M_{\odot}$
- PG 2131+066 com massa sismológica de $0,61 \pm 0,02\,M_{\odot}$

As massas sismológicas foram obtidas por Donald Earl Winget (1955-), Steven Daniel Kawaler (1958-), R. Edward Nather (1926-2014), Kepler de

Souza Oliveira Filho (1956-) e seus colaboradores do *Whole Earth Telescope*.

Como vimos anteriormente, a massa de Chandrasekhar [$= 1,43(\frac{2}{\mu_e})^2\, M_\odot$] é a massa máxima que uma estrela anã branca pode ter e ser suportada por pressão degenerada dos elétrons. As duas estrelas não-binárias de mais alta massa, inferidas espectroscopicamente, são PG1658+441, com $\log g = 9,36 \pm 0,07$, massa $M = 1,31 \pm 0,02\ M_\odot$ e $T_{\rm ef} = 30\,500$ K, e GD 50, com $\log g = 9,00 \pm 0,15$ e massa $M = 1,2 \pm 0,07\ M_\odot$. Ambas estão abaixo do limite de $1,35\ M_\odot$, a massa de Chandrasekhar para um núcleo de Mg, o elemento nuclear mais provável.

A maior parte das estrelas anãs brancas com massas acima de $0,55\ M_\odot$ provavelmente passou pela fase de nebulosa planetária, mas em geral 30% das anãs brancas não são descendentes das nebulosas planetárias. Somente cerca de 2% das anãs brancas evoluíram diretamente do ramo horizontal e os 28% restantes vêm igualmente do ramo gigante assintótico e da evolução de sistemas binários interagentes.

Em termos de sua composição atmosférica, as anãs brancas se dividem basicamente em duas classes: 80% têm atmosfera com hidrogênio puro (DAs), e os 20% restantes têm atmosfera de hélio puro (DOs quando quentes, e DBs quando frias). A classificação de D (degenerada) seguida de letra referente ao espectro, foi proposta inicialmente por Willem Jacob Luyten (1899-1994) e estendida por Jesse Leonard Greenstein (1909-2002). Existe uma pequena quantidade de DBAs (atmosferas de He com traços de H), DABs (linhas fracas de HeI sobre um espectro com linhas de Balmer), DCs (frias, com espectro contínuo), DQs (atmosferas de hélio contaminadas com carbono) e DZs (algumas linhas metálicas, especialmente Ca). As DQs são provavelmente descendentes das DBs, com a contaminação de carbono devido à dragagem pela zona de convecção do hélio. Tendo em vista que os metais normalmente se difundem muito rapidamente para baixo nas atmosferas frias das anãs brancas, os metais presentes nas DZs se devem, provavelmente, à acresção do meio interestelar. O sufixo 'V" no tipo espectral indica que a estrela é variável em luminosidade.

23.27.2 Evolução das anãs brancas

As anãs brancas são pequenas ($R \approx 0,01\ R_\odot$) e massivas ($M_\star \approx 0,6\ M_\odot$), o que indica uma densidade média de cerca de 10^6 g/cm^3. A essas densidades, os elétrons estão degenerados no interior, mas nas camadas externas — exceto para as anãs brancas mais frias — os elétrons ainda atuam como gases ideais. Podemos estimar a extensão radial do envelope não-degenerado

Tabela 23.11: Esquema de Classificação Espectral das Anãs Brancas

Tipo Espectral	*Características*
DA	somente linhas de H: nenhum HeI ou metais presente
DB	somente linhas de HeI: nenhum H ou metais presente
DC	espectro contínuo, sem linhas aparentes
DO	He II forte: He I ou H podem estar presentes
DZ	somente linhas metálicas: nenhum H ou He
DQ	linhas de carbono de qualquer tipo

estimando o ponto onde a pressão dos elétrons é a mesma tanto na equação de gases ideais quanto na equação de gases degenerados não-relativísticos: Para $L/L_\odot = 10^{-4}$, o raio ($r_{\rm tr}$) é $r_{\rm tr}/R_\star \approx 2 \times 10^{-2}$, de modo que o envelope é realmente fino. Os modelos evolucionários indicam que a máxima quantidade de hélio que sobrevive a fase quente de núcleo de nebulosa planetária é de 10^{-2} da massa total da estrela e que a máxima massa em hidrogênio é de 10^{-4} da massa da estrela.

Evolução da Composição Química das Anãs Brancas

Os modelos evolucionários dizem que quando a estrela ejeta a nebulosa planetária na base de um pulso térmico, o remanescente deveria ter uma camada de hidrogênio de cerca de $10^{-4}\ M_*$, o que é mais provavel pois os pulsos são muito rápidos. Se a estrela ejeta a nebulosa no pico do pulso térmico, o remanescente pode ficar sem nenhum hidrogênio. Durante a evolução da nebulosa planetária, pode haver uma pequena queima termonuclear em camadas ou perda de massa, mas a procura de pulsações por Butler Preston Anderson Hine III & R. Edward Nather em 1988, nestes núcleos de nebulosas planetárias, que deveriam estar excitadas pelo mecanismo ϵ de queima termonuclear (Steven Daniel Kawaler, 1988, Astrophysical Journal, 334, 220), não acharam qualquer pulsação. O mecanismo ϵ de desestabilização da estrela pelas reações nucleares foi proposto por *Sir* Arthur Stanley Eddington (1882-1944) em 1930, em seu livro *The Internal Constitution of Stars*. A ausência de pulsações indica que os núcleos de nebulosas planetárias não retém hidrogênio suficiente para permitir a queima termonuclear. As DAVs estudadas por sismologia mostram uma camada de H entre $10^{-4}\ M_*$ e $10^{-10}\ M_*$.

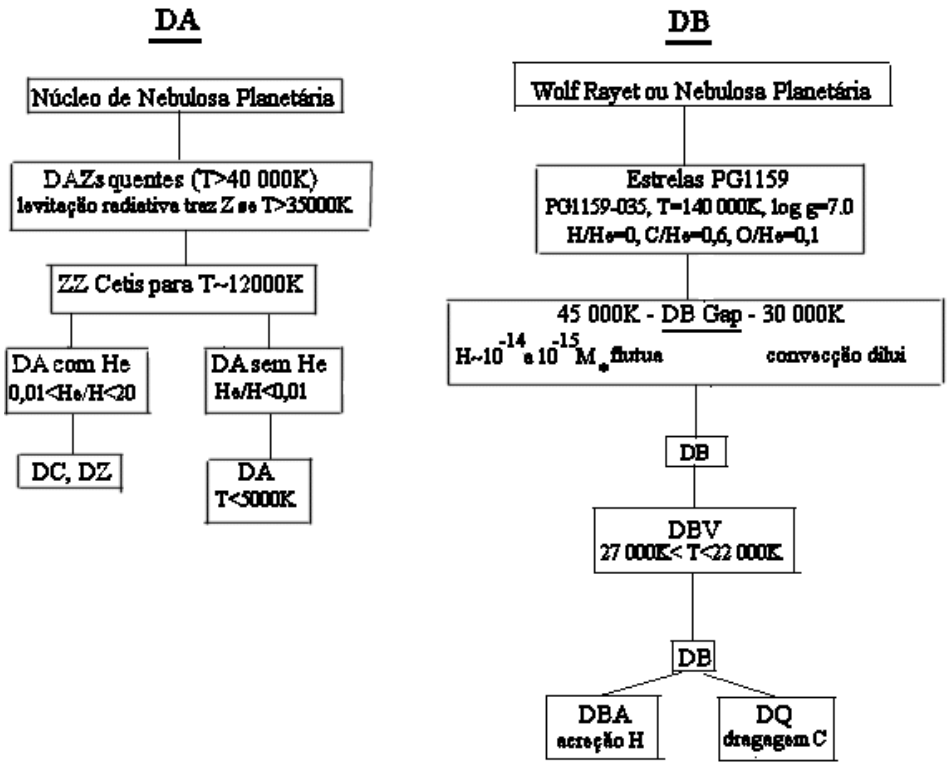


Figura 23.48: Evolução das DAs e Não DAs.

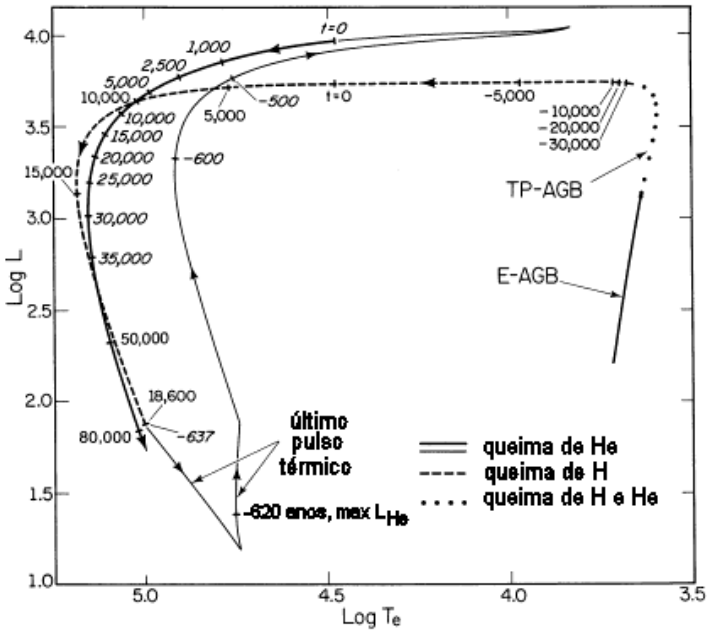


Figura 23.49: Uma das possíveis origens das anãs brancas carentes em hidrogênio é através do fenômeno "Born Again", ou renascer, proposto por Detlef Schönberner (1979, *Astronomy & Astrophysics*, 79, 108) e Icko Iben Jr. (1982, *Astrophysical Journal*, 260, 821), em que uma queima explosiva *flash* final de hélio ocorre na estrela central de uma nebulosa planetária quanto esta recém chegou ao ramo das anãs brancas, e ela retorna ao ramo assimptótico das supergigantes (AGB) momentaneamente. Este flash só deve ocorrer em uma parte pequena (15%) das estrelas, pois estas chegam ao ramo das anãs brancas com uma quantidade significativa de hélio. Esta transição torna a fotosfera deficiente em hidrogênio, rica em hélio, carbono e oxigênio, como observado na PG1159-035.

23.27.3 Evolução Térmica das Anãs Brancas

Praticamente, toda a energia térmica é armazenada pelos íons e transportada rapidamente pelo interior degenerado por condução de elétrons. No envelope, a energia difunde-se gradualmente pelo gás não-degenerado.

Estrelas com massa inicial (na sequência principal de idade zero) menores que 7,25 $M_\odot$ evoluem para anãs brancas de carbono-oxigênio (C/O). Para as estrelas com massa entre 7,25 $M_\odot$ e 9,0 $M_\odot$, o carbono queimará na fase de "super-AGB", formando um núcleo degenerado de oxigênio-neônio (O-Ne) (e.g., Enrique Garcia-Berro, Claudio Ritossa e Icko Iben Jr., 1997, Astrophysical Journal, 485, 765; Arend J. T. Poelarends, Falk Herwig, Norbert Langer e Alexander Heger, "The Supernova Channel of Super-AGB Stars", 2008, Astrophysical Journal, 675, 614). O limite máximo da massa da progenitora que gera uma anã branca depende da metalicidade e do grau de *overshooting* (http://www-astro.ulb.ac.be/∼siess/starevol.html, Lionel Siess, 2007, Astronomy & Astrophysics, 476,893). A melhor determinação observacional do limite é $M_{\rm limite} = 8^{+3}_{2}\ M_\odot$ (Detlev Koester & Dieter Reimers, 1996, Astronomy and Astrophysics, 313, 810). Estrelas mais massivas podem explodir como supernovas por captura de elétrons e as estrelas mais massivas que 11 $M_\odot$ explodem como as supernovas por colapso de núcleo canônicas.

Vamos, agora, derivar algumas relações simples de esfriamento, relacionando a escala de tempo de esfriamento com a luminosidade da estrela. Depois descreveremos os resultados mais realísticos, incluindo esfriamento por neutrinos, convecção e cristalização.

Curvas de esfriamento simples – Mestel

Ressaltamos que o calor específico de um gás de elétrons degenerados é controlado pelos íons, pois os íons têm a maior capacidade térmica no núcleo degenerado, que contém praticamente toda a massa da estrela. Produção de energia por reações nucleares e por contração gravitacional contribuem muito pouco para a luminosidade da estrela, se existem, e o núcleo é basicamente isotérmico devido à alta eficiência da condução térmica pelos elétrons degenerados. Dessa maneira, podemos modelar o núcleo como uma simples fonte de calor, com a energia produzida pelo movimento térmico dos íons. Nessas condições, obteremos uma relação do tipo lei de potência entre a idade e a luminosidade da estrela, como encontrada por Leon Mestel em 1952:

$$t_{\rm esfriar} \propto L^{-5/7}$$

Seja E a energia total armazenada pela anã branca; a luminosidade será

dada pela razão com que essa energia é irradiada:

$$L(t) = -\frac{dE(t)}{dt} \tag{23.419}$$

e define a taxa de esfriamento da anã branca. Essa terminologia foi introduzida pelo reconhecimento que a fonte da energia que é irradiada pela atmosfera da estrela é a energia térmica da estrela (E_{th}). Como a maior parte da anã branca é isotérmica, a primeira aproximação é:

$$L(t) = -\left(\frac{dE_{th}}{dT_c}\right)\left(\frac{dT_c}{dt}\right) \tag{23.420}$$

Nessa aproximação, os pequenos ajustes da densidade interna devido ao esfriamento são desprezados, já que a energia gravitacional liberada é completamente absorvida pelos elétrons degenerados, que são forçados para níveis de energia mais altos.

Se processos nucleares e de emissão de neutrinos são desprezados, bem como a liberação de energia gravitacional residual ($\partial\rho/\partial t = 0$), a luminosidade da anã branca é diretamente proporcional à taxa de decréscimo da temperatura da estrela.

Para um gás de elétrons degenerados, mas não-relativísticos, a contribuição eletrônica para o calor específico [seção (23.9.1)], por unidade de massa, derivada por Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) (1939, An Introduction to the Study of Stellar Structure, University of Chicago Press, p. 394), é:

$$c_V^e = \frac{3}{2}\frac{k}{AH}\frac{\pi^2}{3}Z\frac{kT}{E_F} \tag{23.421}$$

onde H é a unidade de massa atômica ($H = 1,66\times10^{-24}$g), Z é a carga média dos íons e A é o número atômico médio. Como o gás está altamente degenerado, kT é muito menor do que a energia de Fermi dos elétrons [equação (23.5)],

$$E_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{\rho}{\mu_e H}\right)^{2/3} \tag{23.422}$$

e podemos desprezar c_V^e em comparação com o calor específico dos íons. Fisicamente, os elétrons não contribuem para o reservatório de energia porque partículas degeneradas já ocupam seu estado de energia mais baixo e, portanto, não podem esfriar. Para um gás (de íons) ideal,

$$c_V^{ion} = \frac{3}{2}\frac{k}{AH} \tag{23.423}$$

A equação básica de evolução estelar para a conservação de energia é:

$$L = \int_0^M \left(\varepsilon - T \frac{\partial s}{\partial t} \right) dM_r \tag{23.424}$$

O termo $T\frac{\partial s}{\partial t}$ representa a troca de calor (perda) por unidade de massa, e ε é a taxa de geração ou perda de energia por unidade de massa devido a reações nucleares ou emissão de neutrinos, que desprezamos.

A alta degenerescência do núcleo da anã branca produz uma alta eficiência de condução térmica pelos elétrons, tornando o núcleo praticamente isotérmico. Como

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = c_V \frac{\partial T}{\partial t} - \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

a equação (23.424) pode ser escrita como:

$$L \approx -\frac{3}{2} \frac{kM}{AH} \frac{\partial T_c}{\partial t} \tag{23.425}$$

onde T_c é a temperatura do núcleo.

Para calcular T_c, precisamos levar em conta a transferência de energia pelo envelope fino e não-degenerado. Se o envelope está em equilíbrio radiativo, e pudermos utilizar a lei de opacidade de Kramers:

$$K = K_o \rho T^{-3,5} \tag{23.426}$$

levando-se conta as equações básicas:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \text{continuidade da massa}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}, \quad \text{equilíbrio hidrostático}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{K\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}, \quad \text{equilíbrio radiativo}$$

podemos dividir a equação do equilíbrio radiativo pela equação do equilíbrio hidrostático, obtendo:

$$\frac{dT}{dP} = \frac{3}{4ac} \frac{L_r}{4\pi G M_r} \frac{K}{T^3}$$

Tendo em vista que a base do envelope ocorre a aproximadamente $10^{-2} M_\star$, podemos aproximar $L_r \simeq L_\star$ e $M_r \simeq M_\star$ no envelope. Usando

$$P = \frac{k}{\mu H} \rho T \longrightarrow \rho = \frac{\mu H}{k} \frac{P}{T}$$

podemos usar a lei de opacidade de Kramers (23.426) para obter:

$$T^{7,5}dT = \frac{3}{4ac}\frac{L_\star}{4\pi GM_\star}\frac{K_o\mu H}{k}PdP$$

que pode ser integrada usando-se a condição de contorno zero para a superfície ($P = 0$ para $T = 0$), resultando em:

$$\frac{1}{8,5}T^{8,5} = \frac{3}{4ac}K_o\frac{\mu H}{k}\frac{L_\star}{4\pi GM_\star}\frac{1}{2}P^2 \tag{23.427}$$

onde μ é o peso molecular médio no envelope ($\mu = 1$ para hidrogênio e 2 para o hélio) e P é a pressão.

Na borda entre o núcleo isotérmico degenerado, a pressão e a temperatura estão relacionados por

$$P_{\text{ideal}} = \frac{k}{\mu H}\rho T = P_{\text{nr}} = \kappa\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

e obtemos

$$\frac{\rho}{\mu_e} = \left(\frac{kT}{\mu H}\right)^{3/2}\left(\frac{\mu_e}{\kappa}\right)^{3/2} \tag{23.428}$$

e

$$P = \kappa^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{kT\mu_e}{\mu H}\right)^{5/2} \tag{23.429}$$

Substituindo a expressão para a pressão dada pela equação (23.429) na equação (23.427), esta se reduz à relação entre a luminosidade e a temperatura:

$$L_\star = \frac{2}{8,5}\frac{4ac}{3}\frac{4\pi GM_\star}{K_o}\left(\frac{\mu H}{k}\right)^4\frac{\kappa^3}{\mu_e^5}T^{3,5} \tag{23.430}$$

ou

$$\boxed{\frac{L}{L_\odot} \simeq 1,7\times 10^{-3}\frac{M}{M_\odot}\left(\frac{4\times 10^{23}}{K_o}\right)\frac{\mu}{\mu_e^2}\left(\frac{T_c}{10^7\text{K}}\right)^{3,5}} \tag{23.431}$$

onde $\mu_e = A/Z$ é o peso molecular médio por elétron e K_0 é o coeficiente da lei de Kramers (23.426).

Podemos, agora, integrar a equação (23.425) diretamente para obter a relação idade–luminosidade:

$$\boxed{t_{\text{esfriar}}^{\text{anos}} \simeq 6,3\times 10^6\left(\frac{A}{12}\right)^{-1}\left(\frac{K_o}{4\times 10^{23}}\right)^{2/7}\left(\frac{\mu}{\mu_e^2}\right)^{-2/7}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/7}\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-5/7}}$$

Essa é a lei de esfriamento de Mestel.

As aproximações usadas para derivar a lei de Mestel foram:

1. desprezar fontes e sumidouros de energia (energia nuclear e esfriamento por neutrinos: $\varepsilon = 0$);
2. desprezar contração gravitacional ($\partial\rho/\partial t = 0$);
3. desprezar a capacidade térmica dos elétrons $\left(c_V \simeq c_V^{ion}\right)$;
4. usar lei do gás perfeito para os íons $\left(c_V^{ion} \simeq \frac{3}{2}\,\frac{k}{AH}\right)$;
5. assumir que o núcleo é isotérmico $[T(r) \equiv T_c]$;
6. assumir equilíbrio radiativo no envelope;
7. assumir uma lei de opacidade de Kramers no envelope.

Como a energia média (kT) de uma anã branca com $0,4\ M_\odot$ é maior do que $0,1\ E_F$, para $T > 2 \times 10^7\,\mathrm{K}$, não podemos desprezar o efeito de contração gravitacional residual para massas baixas. Também não podemos desprezar a contribuição eletrônica ao calor específico, já que os elétrons podem contribuir com até 30–50% ao calor específico de estrelas quentes, com núcleos de carbono.

Resultados mais precisos podem ser obtidos incluindo-se os seguintes processos, desprezados na teoria de Mestel:

- esfriamento por neutrinos (L_ν), importante para $L > 10^{-1,5} L_\odot$;
- liberação de calor latente de cristalização, importante para $L < 10^{-4} L_\odot$;
- geração de energia nuclear pelo processo próton-próton (L_{nuclear}), importante quando $M_H \gtrsim 10^{-4} M_\star$;
- liberação de energia gravitacional para as camadas externas.

Uma fórmula aproximada que inclui esses efeitos é:

$$\boxed{t_{\mathrm{esfriar}} = 8,8 \times 10^6 \left(\frac{A}{12}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/7} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-2/7} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-5/7} \text{anos}}$$

A dependência da luminosidade indica que as anãs brancas mais quentes — e mais luminosas — esfriam mais rápido. A idade das anãs brancas menos luminosas observadas (com $L = 10^{-4,5} L_\odot$) é cerca de 10^{10} anos, comparável com a idade das estrelas mais frias da nossa Galáxia.

As anãs brancas mais frias também são dominadas pela cristalização do núcleo e possível separação total dos elementos no núcleo, e suas camadas externas, embora de baixa densidade, também se tornam degeneradas.

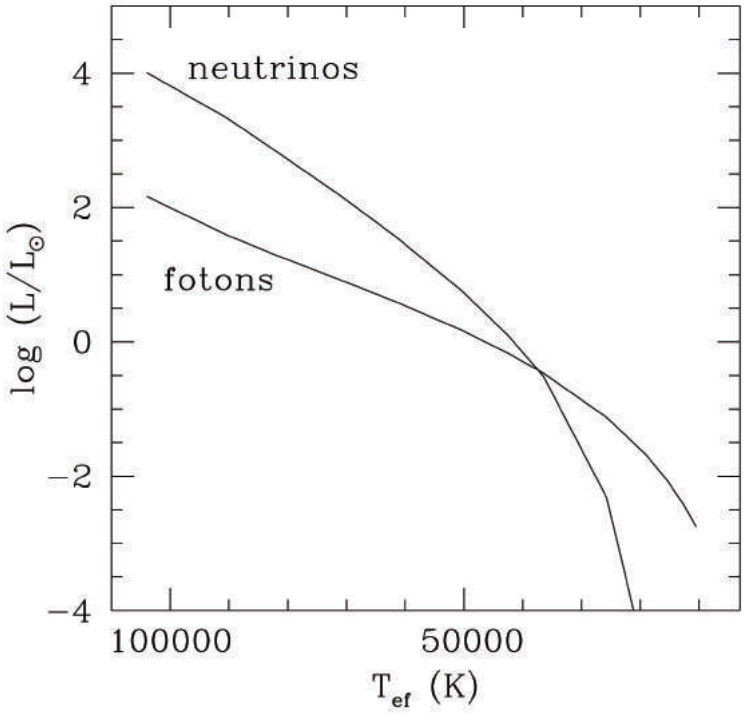


Figura 23.50: Evolução da luminosidade de uma anã branca de 0,6 $M_\odot$ com o tempo, representado pela $T_{\rm ef}$, tanto de fótons quanto de neutrinos.

23.27.4 Cristalização

Desde o início dos anos 1960, Aleksei Alekseevich Abrikosov (1928-) e David Abramovich Kirzhnits (1926-1998), na Rússia, e Edwin Ernest Salpeter (1924-2008), nos Estados Unidos, reconheceram independentemente que as interações coulombianas, nas baixas temperaturas características das anãs brancas frias, forçam os íons a formar um sólido cristalino. A cristalização altera drasticamente o esfriamento das anãs brancas, devido à liberação do calor latente de cristalização e à mudança na capacidade térmica após a cristalização.

O parâmetro principal para a cristalização é Γ, a razão entre a energia da interação de Coulomb e a energia térmica:

$$\Gamma = \frac{(Ze)^2/\langle r\rangle}{kT} = 2,275\frac{Z^2}{A^{1/3}}\frac{\left(\rho/10^6\ \mathrm{g\,cm^{-3}}\right)^{1/3}}{T/10^7\ \mathrm{K}}$$

já que $\frac{4}{3}\pi\langle r\rangle^3 = \frac{AH}{\rho}$, onde $\langle r\rangle$ é o raio médio da esfera contendo um só íon, e H é a unidade de massa atômica. De acordo com os cálculos em 1978 de Carl John Hansen (1933-2011), de Shuji Ogata e Setsuo Ichimaru, em 1987, e outros, o início da cristalização ocorre quando $\Gamma \equiv \Gamma_m \simeq 180 \pm 1$. Nos modelos evolucionários de Matthew Allan Wood (1961-), que podem ser obtidos de http://astro.fit.edu/wood/, o início da cristalização para uma anã branca de 0,6 $M_\odot$ ocorre para $T_{\rm ef} = 6000$ K se o núcleo for de C ($t_{\rm esfriar} \simeq 2$ Gano, $L \simeq 10^{-3,8} L_\odot$), e para $T_{\rm ef} = 7200$ K para um núcleo de O. Os núcleos estarão a temperaturas de 3×10^6 K (carbono) e 5×10^6 K (oxigênio). Em 1991, Kepler de Souza Oliveira Filho (1956-) e seus colaboradores Antonio Nemer Kanaan Neto (1966-), Odilon Giovannini Jr. (1966-) e Marcos Perez Diaz (1964-) descobriram a anã branca variável BPM 37093, com massa de $M_\star = (1,05 \pm 0,05)\ M_\odot$ e $T_{\rm ef} = 12500$ K e, em 1998, demonstraram com os colaboradores do *Whole Earth Telescope* que ela está pelo menos 50% cristalizada.

A cristalização da estrela, além de alterar o calor específico dos íons, pode levar à separação de fase, isto é, à deposição do oxigênio para o centro, formando cristais separados de carbono e oxigênio, dependendo de como for a transição de fase: tipo spindle, azeotrópica ou eutética. Como a cristalização nas condições de pressão e temperatura do interior das anãs brancas não pode ser testada em laboratório, é preciso calculá-la. Mas os efeitos quânticos são importantes. Gilles Chabrier, Neil W. Ashcroft e Hugh W. DeWitt (1992), Nature, 360, 48, calcularam a energia de interação entre os íons e demonstraram que $E_0/kT \geq 2$ após a transição de fase, isto é, os cristais no interior das anãs brancas são cristais quânticos.

A perda de energia interna por unidade de massa de cada camada da estrela pode ser escrita como:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dL_r}{dm} - \epsilon_\nu - P\frac{dV}{dt}$$

com $V = 1/\rho$ e $\epsilon_n u$ a perda de energia por neutrinos.

Se a anã branca é composta de dois elementos químicos, por exemplo C e O, de modo que $X_C + X_O = 1$, podemos reescrever esta equação como:

$$-\left(\frac{dL_r}{dm} - \epsilon_\nu\right) = C_V\frac{dT}{dt} + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)\frac{dV}{dt} - l_s\frac{dM_s}{dt}\delta(m - M_s) + \left(\frac{\partial E}{\partial X_O}\right)\frac{dX_O}{dt}$$

onde l_s é o calor específico e $\delta(m - M_s)$ indica que o calor específico é liberado na frente de solidificação.

Através de simulações de dinâmica molecular, Charles J. Horowitz, A.S. Schneider & D.K. Berry (2010, Physical Review Letter, 104, id. 231101)

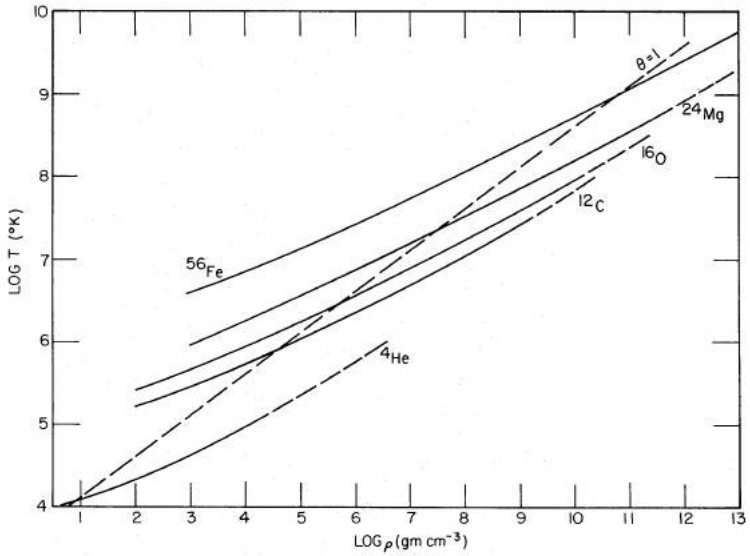


Figura 23.51: Curvas de cristalização para ^{4}He, ^{12}C, ^{16}O, ^{24}Mg e ^{56}Fe calculados por Donald Quincy Lamb & Hugh van Horn (1975) Astrophysical Journal, 200, 306. A curva pontilhada corresponde a divisória entre pressão de um líquido quântico (abaixo da curva) e de um gás ideal (acima da curva), isto é, os efeitos quânticos iônicos são importantes à direita da linha pontilhada. Quando a temperatura efetiva atinge esta curva, por esfriamento, ocorre uma pequena descontinuidade na capacidade térmica dos íons, devido à transição de fase.

demonstraram que a cristalização da mistura de C e O ocorre a uma temperatura mais baixa do que carbono puro.

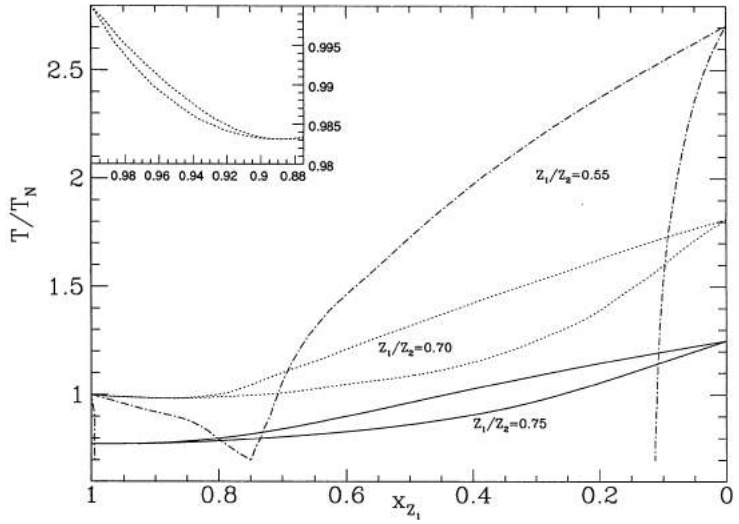


Figura 23.52: Diagrama da Transição de Fase calculado por Laurent Segretain, Gilles Chabrier, Margareta Hernanz, Enrique García-Berro, Jordi Isern, e Robert Mochkovitch (1994) Astrophysical Journal, 434, 641. A forma do diagrama determina se durante a cristalização ocorre ou não separação entre os elementos. Se o diagrama for da *spindle*, como o mostrado em linha pontilhada, existe mistura dos elementos na fase cristalizada, mas com mais oxigênio do que carbono, por exemplo. Os cálculos mostram que esta situação ocorre para $Z_1/Z_2 \geq 0,72$, como no caso do C/0 $\rightarrow Z_1/Z_2 = 0,75$. O diagrama mostra que a mistura é azeotrópica (mistura com mesma proporção dos elementos antes e após a cristalização) para $0,50 \leq Z_1/Z_2 \leq 0,72$, como no caso de CO/^{22}Ne, e eutético (total separação dos elementos) para $Z_1/Z_2 \leq 0,29$, como no caso de CO/^{56}Fe. Portanto a cristalização deixa uma região sólida enriquecida em oxigênio, em comparação com a mistura original de C/O. A razão exata depende da composição inicial. E a composição inicial depende da seção de choque de $C(\alpha,\gamma)O$, podendo variar de $X_O = 0,74$ a $X_O = 0,57$ para uma anã branca de 0,6 massas solares, se usarmos os limites alto e baixo desta secção de choque.

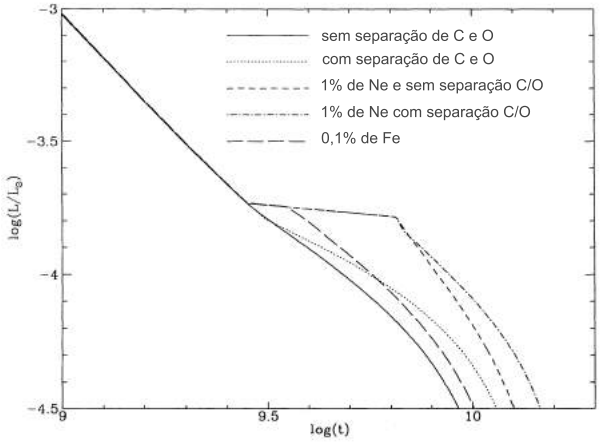


Figura 23.53: Efeito da separação de fase no esfriamento das anãs brancas frias, se houver separação de fase e liberação do calor latente.

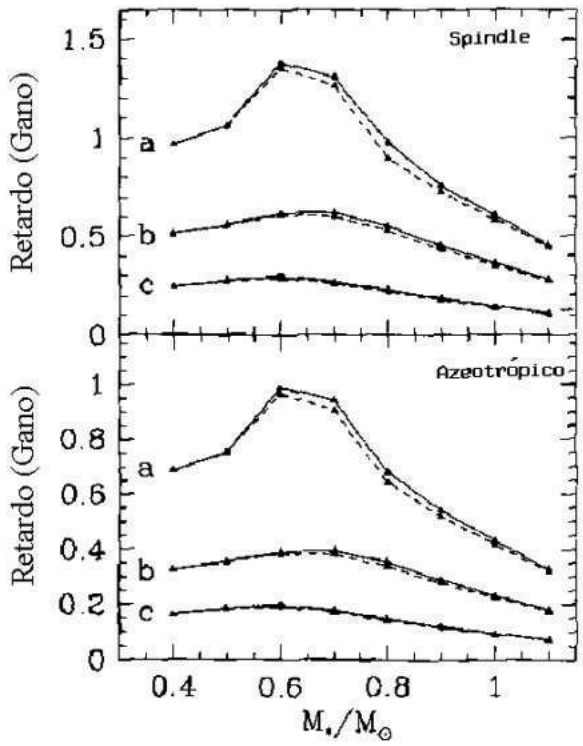


Figura 23.54: Efeito da separação de fase na idade das anãs brancas frias, se houver separação de fase e liberação do calor latente.

Anã Branca com 1,0 $M_\odot$ C/O

T_{ef}	Idade	$\log P_c$	$\log T_c$	$\log \rho_c$	$\log R$	$\log L/L_\odot$	$\log L_\nu/L_\odot$	$M_{\rm crist}/M_*$	Γ
101274 K	245 000 anos	24,597	8,0126	7,4730	8,8369	0,9577	1,9617	0,000	12,6
45973 K	4,12 Manos	24,637	7,8034	7,5020	8,7804	-0,5276	-0,3276	0,000	20,8
23686 K	146 Manos	24,660	7,2794	7,5192	8,7603	-1,7197	-4,3327	0,000	70,4
14849 K	538 Manos	24,665	6,9477	7,5234	8,7529	-2,5458	-6,2979	0,016	151,6
12255 K	1,026 Ganos	24,667	6,8036	7,5246	8,7509	-2,8833	-7,1046	0,396	211,4
10130 K	1,740 Ganos	24,668	6,6585	7,5255	8,7489	-3,2575	-10	0,748	295,5
6627 K	3,908 Ganos	24,669	6,3525	7,5263	8,7458	-3,9616	-10	0,945	598,2
4733 K	6,845 Ganos	24,670	5,8726	7,5265	8,7430	-4,5519	-10	0,870	1806,1
3369 K	7,732 Ganos	24,670	5,4889	7,5266	8,7425	-5,1436	-10	0,870	4369,9

Anã Branca com 0,6 $M_\odot$

T_{ef}	Idade	$\log P_c$	$\log T_c$	$\log \rho_c$	$\log R$	$\log L/L_\odot$	$\log L_\nu/L_\odot$	$M_{\rm crist}/M_*$	Γ
103992 K	18 316 anos	22,829	8,1742	6,2590	9,4167	2,1631	1,8449	0,000	3,4
46281 K	2,65 Manos	23,191	7,8279	6,5050	9,0392	0,0016	0,4282	0,000	9,1
23856 K	29,54 Manos	23,242	7,5792	6,5410	8,9817	-1,2646	-1,5832	0,000	16,7
12114 K	368,44 Manos	23,264	7,0568	6,5569	8,9557	-2,4936	-6,3225	0,000	56,1
10012 K	604,97 Manos	23,267	6,9198	6,5587	8,9513	-2,8335	-10	0	77,1
6647 K	1,767 Ganos	23,270	6,6244	6,5611	8,9426	-3,5622	-10	0,022	152,5
4554 K	6,540 Ganos	23,273	6,1452	6,5629	8,9340	-4,2366	-10	0,933	460,7
4044 K	7,799 Ganos	23,273	5,9823	6,5631	8,9332	-4,4448	-10	1,000	669,8
3304 K	9,373 Ganos	23,273	5,7627	6,5632	8,9324	-4,7976	-10	1,000	1110,6

Durante a cristalização, o calor latente de fusão $T\Delta s \sim \frac{3}{4}\frac{kT}{AH}$ é liberado, aumentando o tempo de esfriamento em 30%, acima do valor calculado pela teoria de Mestel. Ao cristalizar, o calor específico dos íons c_V^{ion} aumenta de $\frac{3}{2}\frac{k}{AH}$ para $3\frac{k}{AH}$, de modo que o tempo de vida da anã branca aumenta por uma fator de dois, até que o núcleo atinja a temperatura de Debye [Peter Josef William Debye (1884-1966)].

A temperatura de Debye (Θ_D), é definida como

$$2,240\frac{\Theta_D}{T} \equiv \frac{\hbar w_p}{kT}$$

$$\text{ou} \qquad \Theta_D = 1,74 \times 10^3 \rho_c^{1/2} \left(\frac{2Z}{A}\right) \approx 2 \times 10^6 \text{K}$$

onde $w_p = 4\pi\frac{\rho}{AH}\frac{Ze^2}{AH}$ é a freqüência de plasma. Para temperaturas abaixo da temperatura de Debye, a excitação de fonons de alta energia torna-se impossível, o calor específico começa a cair, e o esfriamento rápido se inicia, levando a um decréscimo substancial do tempo de vida neste estágio. Francesca D'Antona e Italo Mazzitelli encontraram, em 1989, que para um modelo de anã branca com núcleo rico em oxigênio de $0,56\ M_\odot$, $\Theta_D/T \sim 2$ quando $\log L/L_\odot \approx -4$. Quando o modelo atinge $\log L/L_\odot \approx -5$, o calor específico é proporcional a T^3, como o esfriamento de Debye prediz. Tendo em vista que as anãs brancas mais frias observadas têm $\log L/L_\odot \approx -4,5$, elas ainda não são velhas o suficiente para atingir o limite de Debye.

23.27.5 Função luminosidade

As observações de James W. Liebert, Conard C. Dahn e David G. Monet, em 1988, mostram que as anãs brancas vão ficando cada vez mais raras quando a temperatura efetiva é menor do que 5000 K e, finalmente, quando $\log L/L_\odot < -4,5$, não há mais nenhuma anã branca observada. O tempo de esfriamento das anãs brancas até essas baixas luminosidades e temperaturas é maior do que a idade do disco de nossa galáxia, de modo que mesmo as anãs brancas formadas na primeira geração de estrelas ainda estão visíveis.

O decréscimo no número de anãs brancas para baixas luminosidades representa um decréscimo na função luminosidade — a densidade espacial de anãs brancas, por intervalo de magnitude bolométrica absoluta (número *versus* luminosidade) — foi primeiro explicado, em 1987, por Donald Earl Winget (1955-), Carl John Hansen (1933-2011), Hugh M. Van Horn (1938-), Gilles Fontaine (1948-), R. Edward Nather (1926-2014), Kepler de Souza

Oliveira Filho (1956-) e Donald Quincy Lamb, Jr. (1945-), em termos da idade finita da disco local da nossa galáxia, de cerca de 9 Ganos.

A função luminosidade teórica é dada por: (Φ, em unidades de $\mathrm{pc}^{-3}\,\mathrm{M}_{\mathrm{bol}}^{-1}$),

$$\Phi = \int_{M_L}^{M_U} \int_{L_L}^{L_U} \psi(t)\,\phi(t) \frac{dt_{\mathrm{esfriar}}}{d\log(L/L_\odot)} \frac{dm}{dM} dL\,dM$$

onde M_L e M_U, L_L e L_U são os limites inferiores e superiores das massas e luminosidades das estrelas na seqüência principal que produzem anãs brancas observáveis, respectivamente. O limite inferior para a massa é o *turn-off point* da seqüência principal para a idade do disco (t_{disco}), obtida integrando-se $t_{SP} = t_{disco}$. A luminosidade superior é de cerca de $10\,L_\odot$, e a luminosidade inferior é obtida para uma idade:

$$t_{\mathrm{esfriar}}^{max}[M_{\mathrm{anã\ branca}}(M_{SP})] = t_{\mathrm{disco}} - t_{SP}(M_{SP})$$

Outros valores necessários incluem a taxa de formação estelar (SFR) como função do tempo, [$SFR \equiv \psi(t)$], a função inicial de massa [$IMF \equiv \phi(t)$], a relação massa inicial $\rightarrow$ massa final (dm/dM) e naturalmente a taxa de esfriamento das anãs brancas, que depende da massa.

As observações do cúmulo globular NGC 6397 por Brad M.S. Hansen, Harvey Richer e colaboradores publicadas em 2007 (Astrophysical, 671, 380) e 2008 (Astronomical Journal, 135, 2141) atingiram o fim da sequência de esfriamento das anãs brancas, e mostraram claramente o desvio para o azul (*blue hook*) das anãs brancas mais frias, causado pelas absorções induzidas por colisões (*CIA*), primeiro observadas em 1885 quando Pierre *Jules* César Janssen (Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris, 101, 649) observou que para o oxigênio a pressões de centenas de atomosferas, novas bandas aparecerem e o coeficiente de absorção passa de proporcional ao número de partículas do gás para proporcional ao quadrado no número de partículas, isto é, indicando que as interações ocorriam por pares de moléculas e não por moléculas individuais. Em 1873, o físico holandês Johannes Diderik van der Waals (1837-1923) já havia postulado que as interações intermoleculares incluíam uma componente atrativa, mas as absorções induzidas por colisão causam linhas muito difusas devido à pequena duração da colisão, da ordem de 10^{-13}s, levando a uma largura natural muito grande pelo princípio da incerteza de Heisenberg, enquanto as forças de van der Waals duram 10^{-10}s ou mais. Os momentos de dipolos induzidos pela interação causam um rearanjo temporário das cargas eletrônicas, formando temporariamente uma supermolécula, e produzindo absorções ou emissões além daquelas das

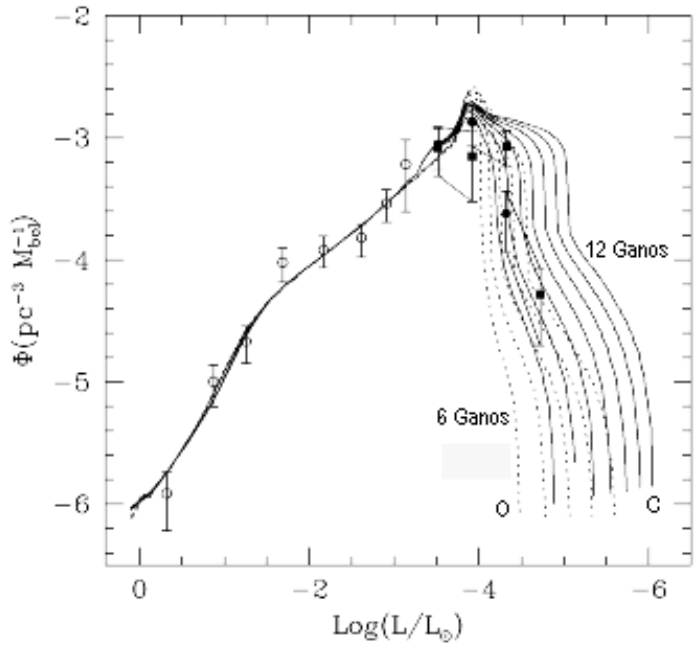


Figura 23.55: Função luminosidade das anãs brancas, calculada por Matthew Allan Wood (1961-) para idades do disco da nossa Galáxia entre 6 (linha à esquerda) e 12 Ganos (linha à direita). Os modelos de anãs brancas têm núcleo de carbono (linha contínua) e oxigênio (linha pontilhada), e os pontos são as observações de James W. Liebert (1946-), Conard Dahn e David Monet de 1988. As caixas, em baixa luminosidade, indicam a incerteza nos dados. As curvas que passam pela caixa de mais baixa luminosidade têm idade entre 6,5 e 8,5 Ganos, se as anãs brancas têm núcleo de oxigênio, e entre 8,5 e 11 Ganos, se têm núcleo de carbono. A incerteza na composição do núcleo se deve à incerteza na taxa de reação nuclear $\mathrm{C}(\alpha,\gamma)0$.

moléculas não interagentes [Collision-induced Absorption in Gases, Lothar Frommhold, 1993, Cambridge University Press].

Neste caso, a pressão P precisa ser calculada como

$$P = NkT - N^2 2\pi kT \int_0^\infty \Big[\exp\Big(-\frac{V(r)}{kT}\Big) - 1\Big] r^2 dr$$

onde $V(r)$ é o potencial de interação, função da distância internuclear.

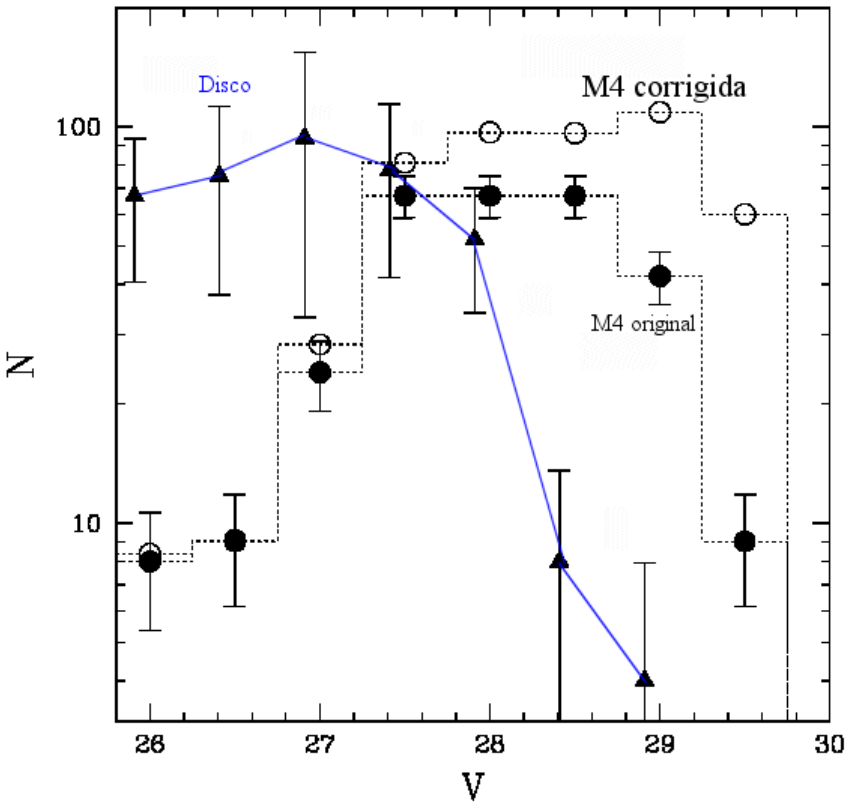


Figura 23.56: Distribuição de anãs brancas por magnitude aparente no cúmulo globular M4, o mais próximo da Terra, a 7000 anos-luz de distância, obtida com exposições totalizando 8 dias com a Wide Field Planetary Camera II do Telescópio Espacial Hubble por Harvey Richer e colaboradores (2002, Astrophysical Journal Letter, 574, L151). A linha azul mostra a curva equivalente para o disco galático, obtida por Libert, Dahn e Monet em 1988. A nova distribuição, publicada por Brad M.S. Hansen e colaboradores em 2002, (Astrophysical Journal Letter, 574, L155) apresenta anãs brancas ainda mais frias que no disco, resultando em uma idade entre 12 e 13 bilhões de anos para as anãs brancas e 13 a 14 bilhões de anos para o Universo.

Pierre Bergeron e Sandy K. Leggett, (2002, Astrophysical Journal, 580, 1070) calcularam os espectros de anãs brancas frias incluindo os efeitos de

absorções induzidas por colisões de moléculas H_2 com outras moléculas de H_2 calculados por Aleksandra Borysow, Uffe Gråe Jørgensen & Yi Fu (2001, Journal of Quantum Spectra and Radiative Transfer, 68, 235), mas também com He neutro, calculados por Uffe Gråe Jørgensen, Dominik Hammer, Aleksandra Borysow & J. Falkesgaard (2000, Astronomy & Astrophysics, 361, 283). Como anãs brancas ricas em hélio frias tendem a ter opacidade menor e portanto pressão atmosférica maior, a deficiência de fluxo infravermelho aparece a temperaturas mais altas em anãs brancas ricas em hélio do que nas ricas em hidrogênio.

23.28 Novas e supernovas

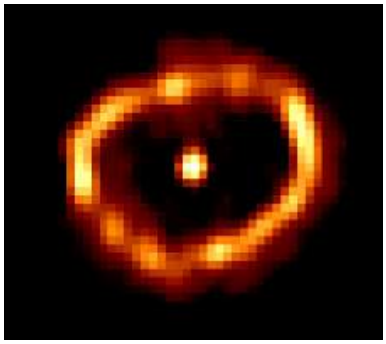


Figura 23.57: Imagem da Nova Cygni 1992 obtida em 1994 com a *Faint Object Camera*, da ESA, acoplada ao Telescópio Espacial Hubble, da NASA. Nova Cygni 1992, que está a 10 430 anos-luz da Terra, na constelação do Cisne, explodiu em 19 de fevereiro de 1992, e a imagem mostra o anel de matéria ejetada na explosão.

Algumas estrelas aumentam sua luminosidade rapidamente, devido ao início de reações termonucleares descontroladas (*runaway*): as novas e as supernovas. Existem registros históricos de supernovas desde 1300 a.C., mas as mais bem conhecidas são a da Nebulosa do Caranguejo (SN1054), a SN1572, a SN1604 e a SN1987A. Nessa nomenclatura, as iniciais SN indicam supernova, e o número que segue é o ano da descoberta. A SN1054 foi observada pelos chineses; a SN1572 foi observada por Tycho Brahe, na constelação da Cassiopéia, e foi mais brilhante que Vênus, atingindo magnitude aparente -4; a SN1604 foi observada por Johannes Kepler, na constelação da

Serpente, atingindo magnitude aparente -3; e finalmente a SN1987A descoberta por Ian Shelton na Grande Nuvem de Magalhães, a primeira visível a olho nu desde 1604, foi observada por um grande número de astrônomos profissionais e amadores e foi o resultado da explosão da supergigante azul Sanduleak -69^o202. A SN1987A foi, também, a primeira para a qual os neutrinos emitidos na explosão foram detectados na Terra. Richard McCray 1993, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 31, 175, inferiu que a SN1987A expeliu 1 $M_\odot$ em oxigênio.

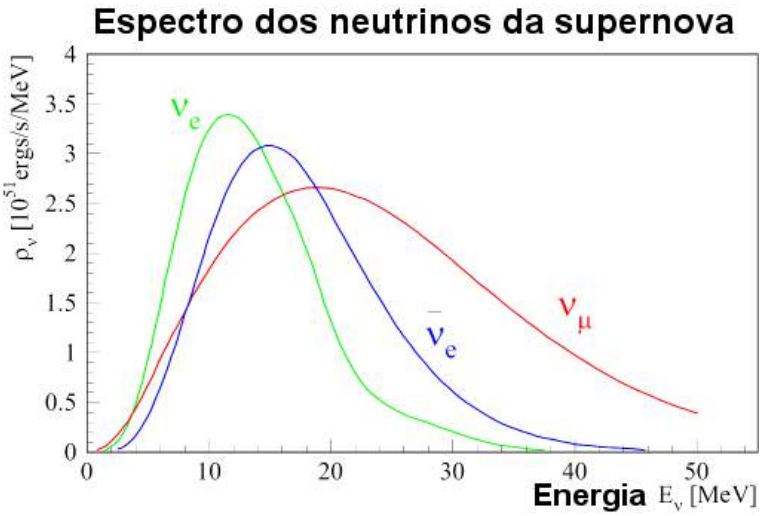


Figura 23.58: Espectro de emissão de neutrinos 30 segundos após a explosão, no modelo de Adam Burrows.

As novas ocorrem em anãs brancas que fazem parte de sistemas binários em que há transferência de massa da companheira para a anã branca. A maior parte dos sistemas em que novas ocorrem têm período orbital pequeno, algumas vezes até de horas. Nesses sistemas, ocorre transferência de massa devido ao preenchimento do lóbulo de Roche [Édouard Roche (1820-1883)] da estrela de maior raio e, na maior parte das vezes, de menor massa. O lóbulo de Roche (seção 23.31) delimita o volume em volta de um objeto dentro do qual a matéria está gravitacionalmente ligada a ele. Como a matéria tem momentum angular, ela forma um disco de acresção em volta da anã branca. A acresção se dá devido à viscosidade no disco, que faz parte da matéria espiralar até a atmosfera da anã branca.

A curva de luz das novas apresenta um rápido aumento de brilho, da

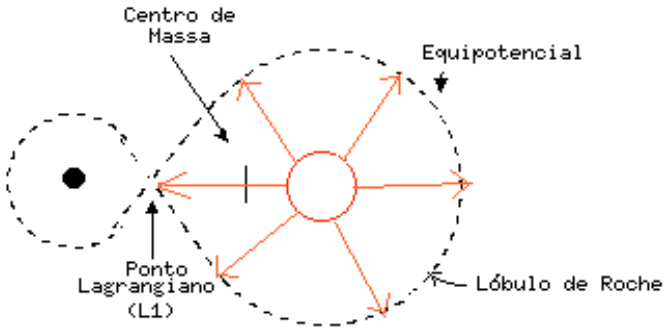


Figura 23.59: Lóbulo de Roche de um sistema binário. Quando uma estrela se expande até esta equipotencial, transfere massa para a companheira.

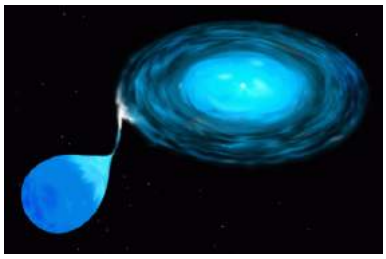


Figura 23.60: Ilustração de um sistema binário transferindo matéria, que forma um disco de acresção em volta da estrela que recebe massa. A matéria não pode cair diretamente na estrela, por conservação de momentum angular.

ordem de 1 dia, de até 9 magnitudes, e um declínio de 3 ou 4 magnitudes em algumas semanas, seguido de um declínio mais lento, de até 10 anos.

Aproximadamente 50 novas ocorrem, por ano, em galáxias massivas como a Via Láctea. O primeiro espectro de uma nova foi obtido em 12 de maio de 1868 por William Huggins (1824-1910), de T Coronae Borealis, mostrando as linhas de Hα, Hβ e Hγ em emissão. As camadas ejetadas têm velocidade de 500 a 2000 km/s e massas de 10^{-6} a 10^{-4} $M_\odot$, correspondendo a energias cinéticas de 10^{43} a 10^{44} ergs, e muitas são recorrentes. A explosão se dá porque a anã branca, normalmente tão fria que não consegue manter reações termonucleares, mas ao acumular matéria da companheira na razão de 10^{-10}

a 10^{-9} $M_\odot$/ano, atinge densidades e temperaturas suficientes para queimar o hidrogênio acretado. A queima se dá em uma camada (*shell*), em condições termicamente instáveis, pelo processo CNO.

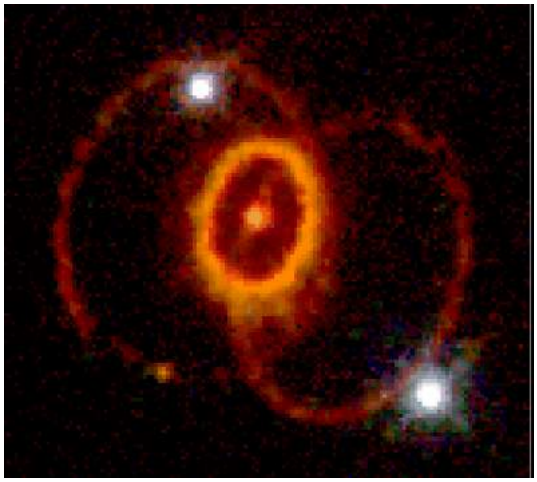


Figura 23.61: Imagem da SN1987A obtida no ótico (Hα) com a *Wide Field Planetary Camera 2* do Telescópio Espacial Hubble em 1994, mostrando 3 anéis em volta do material ejetado na explosão detectada na Terra em fevereiro de 1987, mas que, na verdade, ocorreu 169 000 anos atrás, já que essa é a distância em anos-luz para a Grande Nuvem de Magalhães, galáxia anã irregular, satélite da Via Láctea. A estrela supergigante azul, de aproximadamente 25 $M_\odot$, que explodiu, havia sido observada antes da explosão.

Já as supernovas, muito mais raras, têm energia cinética da ordem de 10^{50} a 10^{51} ergs, luminosidades de 10^9 a 10^{10} $L_\odot$, aumento de brilho em poucos dias e decréscimo em centenas de dias. O primeiro espectro de uma supernova foi obtido em 1885 pelo alemão Hermann Carl Vogel (1841-1907), de S Andromedae, três dias antes do espectro obtido pelo húngaro Nicholas von Konkoly (Miklós Konkoly Thege, 1842-1916). As supernovas são classificadas em dois tipos principais, de acordo com a classificação proposta em 1941 por Rudolph Leo Bernhard Minkowski (1895-1976): as supernovas tipo I, que não apresentam hidrogênio no espectro, e as supernovas tipo II, que apresentam linhas de emissão ou absorção de hidrogênio no espectro, alargadas pela alta velocidade de ejeção do gás. O material ejetado das supernovas atinge velocidades de 5 000 a 10 000 km/s, e suas massas são tipicamente de 1 a 10 $M_\odot$. Em galáxias espirais massivas, ocorre aproximadamente 1 SN

Tipo I a cada 100 anos, e 1 SN Tipo II a cada 30 anos. As supernovas tipo II ocorrem por implosão do núcleo em estrelas massivas e são observadas somente nos braços de galáxias espirais e em galáxias irregulares. São um pouco menos luminosas do que as tipo I.

As supernovas tipo I ocorrem tanto em galáxias espirais quanto em elípticas. Recentemente, algumas SN Tipo I e, portanto, sem linhas de hidrogênio, foram descobertas nas vizinhanças de regiões HII e em braços espirais e receberam a denominação de tipo Ib, enquanto as tipo I clássicas são chamadas de tipo Ia. As supernova de tipo Ia, que são associadas com a queima explosiva do carbono, ocorrem em sistemas binários, quando uma estrela anã branca com massa próxima à massa de Chandrasekhar recebe massa da companheira, que preenche seu lóbulo de Roche por expansão devido à evolução. Sua curva de luz é tão similar de supernova para supernova, que as SN tipo Ia são utilizadas como indicadores de distâncias das galáxias.

As supernovas tipo Ib são oriundas da queima explosiva de carbono ou colapso do núcleo em estrelas deficientes em hidrogênio, como Wolf-Rayet.

A explosão das supernovas se dá por ignição explosiva do carbono, para estrelas de massa intermediária (cerca de 10 $M_\odot$), ou por colapso gravitacional, para as estrelas massivas. Para as estrelas de massa pequena e intermediária, a emissão de neutrinos no núcleo degenerado remove energia térmica suficiente para inibir a ignição do carbono, até que a perda de massa no ramo das gigantes e ramo assintótico seja suficiente para a estrela tornar-se uma anã branca, ou que seu núcleo atinja a massa máxima para uma anã branca. Se a estrela tornou-se uma anã branca, seu núcleo deve ser rico em carbono. Se a anã branca acreta massa de uma binária companheira a taxas tão altas para que explosões como nova não ocorram, então a ignição do carbono ocorrerá em um gás altamente degenerado ($\rho \simeq 2$ a 4×10^9 g/cm^3, $T \simeq 10^8$ K). Nessas condições, a pressão do gás é praticamente independente da temperatura e, conseqüentemente, o aquecimento do núcleo não causa a expansão e o subseqüente esfriamento do núcleo. Embora a emissão de neutrinos esfrie o núcleo, a taxa de reação para a queima do carbono é tão sensível à temperatura que a queima de carbono aumenta até uma explosão descontrolada. Como conseqüência da alta taxa de queima de carbono, a temperatura torna-se alta o suficiente para a queima quase simultânea do oxigênio e do silício, sintetizando ^{56}Ni e ^{56}Co, que são transformados em ^{56}Fe. A energia liberada pelas reações nucleares ($\simeq 2 \times 10^{51}$ ergs) torna-se maior do que a energia de ligação gravitacional do núcleo degenerado ($\simeq 3 \times 10^{50}$ ergs), e a estrela é totalmente dispersada no espaço.

Estrelas mais massivas que aproximadamente 10 $M_\odot$, queimam o carbono, o oxigênio e o silício – em núcleo não-degenerado – e, conseqüentemente, seus núcleos são formados por elementos do grupo do ferro quando se inicia o colapso gravitacional. Quando o colapso se inicia, a massa do núcleo é da ordem de 1,5 $M_\odot$, independente da massa total da estrela. Antes do colapso, zonas de convecção extensas durante a queima do carbono, oxigênio e silício homogeneizaram a composição química do núcleo. No núcleo de uma estrela com 15 $M_\odot$, o colapso se inicia quando a densidade central é da ordem de 4×10^9 g/cm^3, e a temperatura central da ordem de 8×10^9 K e, portanto, a pressão é mantida por elétrons degenerados e relativísticos. Com a contração do núcleo, a foto-dissociação parcial dos elementos do grupo do ferro se inicia,

$$\gamma + {}^{56}\mathrm{Fe} \leftrightarrow 13\alpha + 4n$$

removendo energia térmica do gás e, conseqüentemente, reduzindo a pressão. Com o aumento da densidade no núcleo, a energia de Fermi dos elétrons aumenta, e os elétrons são capturados pelos prótons dentro dos núcleos, por decaimento β inverso, já que a energia média dos elétrons é maior do que 1,29 MeV$= (m_\mathrm{n} - m_\mathrm{p})\, c^2$. Com a redução do número de elétrons degenerados, principal fonte de pressão do gás, o colapso se acentua. Um subsequente decaimento β não ocorre porque, na maior densidade, os níveis de energia dos elétrons estão ocupados até um valor mais alto de energia. Esse processo, chamado de fotodesintegração, foi proposto, em 1957, por William Alfred Fowler (1911-1995) e *Sir* Fred Hoyle (1915-2001). Durante os primeiros estágios do colapso, os neutrinos emitidos por captura de elétrons escapam da estrela. Alguns neutrinos são, também, emitidos pela aniquilação de elétrons e pósitrons e por reações do tipo Urca (seção 23.21). Com o aumento de densidade do núcleo, a opacidade dos neutrinos aumenta, pois sua energia é maior do que a massa de repouso dos elétrons e, portanto, o espalhamento neutrino-elétron pode mudar suas energias significativamente. O aprisionamento dos neutrinos no núcleo colapsante ocorre para densidades acima de 3×10^{11} g/cm^3 e ocorre a termalização dos neutrinos. Durante as etapas finais do colapso, que duram 1 a 2 milisegundos, a escala de tempo de difusão dos neutrinos é cerca de mil vezes maior do que a escala de tempo de colapso ($\simeq 1/\sqrt{G\rho}$).

Uma supernova tipo Ia ocorre quando a massa acrescida de uma binária próxima faz com que a massa do núcleo degenerado supere a massa de Chandrasekhar. Nesse momento, ocorre uma detonação em uma camada acima do núcleo, pois a parte central é resfriada pela emissão de neutrinos. A detonação se move para dentro e para fora, rompendo a estrela.

A liberação de energia na combustão degenerada do C é tão rápida que se dá instantaneamente, em uma camada extremamente fina. Somente depois da queima total é que a próxima camada esquenta o suficiente para iniciar a queima. Ocorre, portanto, uma frente de queima que provoca uma onda de choque, supersônica. Se essa compressão é suficiente para iniciar a queima, a frente de combustão coincide com a frente de choque e chama-se frente de detonação.

Se a compressão pela onda de choque não for suficiente para iniciar a ignição, o transporte de energia por convecção, ou condução, aumentará a temperatura mais lentamente, gerando uma frente de queima subsônica e chama-se deflagração. Nesse caso, a densidade e pressão diminuem.

Uma onda de deflagração ocorre quando o combustível é aquecido pela queima violenta na frente de queima. Já uma onda de detonação ocorre quando a queima é tão violenta que o combustível queimado se expande tão rapidamente que impinge uma onda de choque no combustível não queimado, comprimindo-o e aquecendo-o até iniciar a combustão. Neste caso a energia térmica se transfere não por condução ou radiação difusiva, mas pelo movimento hidrodinâmico que causa o aquecimento por compressão.

A ignição do carbono em núcleo degenerado procede instantaneamente, com a queima do O, do Si, chegando a Fe.

Não existe, ainda, uma teoria completamente desenvolvida para esse evento, mas as soluções numéricas favorecem a deflagração (subsônica), pois

$$u_e = \frac{E}{\rho} = \frac{3P_e}{\rho} \simeq 1,87 \times 10^{18} \text{ ergs/g}$$

enquanto a queima de carbono e oxigênio libera 5×10^{17} ergs/g (27% de u_e) e, portanto, o excesso de pressão não é muito grande e o choque não é muito forte. O ponto crítico no cálculo da frente de detonação é que uma teoria de convecção dependente do tempo é necessária. Embora a frente mova-se subsonicamente, o núcleo é normalmente destruído pela ignição do carbono em núcleo degenerado.

Uma estrela de massa intermediária explode como supernova quando $\rho \simeq 3 \times 10^9$ g/cm^3 e $T \simeq 10^8$ K. Uma estrela de $M = 15\ M_\odot$ foto-desintegra-se com $\rho \simeq 4 \times 10^9$ g/cm^3 e $T_c \simeq 8 \times 10^9$ K. A existência de estrelas de nêutrons garante que houve colapso, pois não é possível chegar a esse estado em equilíbrio hidrostático. Em um colapso para estrela de nêutrons, podemos estimar a energia liberada como:

$$E_G \simeq GM_c^2 \left(\frac{1}{R_{\text{EN}}} - \frac{1}{R_{\text{AB}}} \right)$$

já que o núcleo que colapsa tem uma massa de 1,4 $M_\odot$ e o raio da ordem do da Terra. O envelope acima do núcleo tem uma energia gravitacional da ordem de

$$E_{\text{envelope}} \approx \frac{GM_{\text{envelope}}^2}{R_{\text{AB}}}$$

Embora a matéria estelar normal seja transparente aos neutrinos, no núcleo de uma estrela em colapso a densidade chega a $\rho \simeq 4 \times 10^{14}\ \text{g cm}^{-3}$ e a energia dos neutrinos é da ordem de $E_\nu \simeq 150$ MeV. Como o livre caminho médio é dado por

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma}$$

e

$$\sigma_\nu \simeq 2 \times 10^{-44}\ \text{cm}^2 \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2}\right)^2$$

obtemos $\lambda \simeq 2,2$ cm. Como o raio R do núcleo é da ordem de 10 km, o tempo de difusão

$$\tau_{\text{dif}} \simeq \frac{3R^2}{\pi \lambda c} \simeq 5\ \text{s}$$

enquanto o tempo hidrodinâmico

$$\tau_{\text{hidro}} \simeq \frac{446\ \text{s}}{\rho^{\frac{1}{2}}} \simeq 2 \times 10^{-5}\ \text{s}$$

Quando o núcleo se aproxima de densidades nucleares e os nucleons se juntam em um enorme núcleo, a parte repulsiva da força forte resiste à compressão. Nos modelos, depois de um milisegundo do colapso, os efeitos da repulsão nuclear tornam-se evidentes e uma onda de choque começa a se propagar para fora. Após percorrer cerca de 1,1 $M_\odot$, este choque perdeu a maior parte de sua velocidade, pois os neutrinos produzidos nestas camadas escapam, retirando do choque sua energia. A onde de choque se transforma então em uma onda de acresção. Existem modelos com rebote desta onda de acresção. Embora na natureza ocorra tanto a formação de buracos negros por acresção ao núcleo quanto ejeção explosiva de matéria, uma compreensão completa dos dois casos ainda não foi obtida (Wolfgang Hillebrandt & Jens C. Niemeyer, "Type IA Supernova Explosion Models", Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 2000, Vol. 38: 191-230).

Os modelos precisam incluir a rotação, a não esfericidade do colapso, o aquecimento devido ao decaimento radiativo, principalmente do ^{56}Ni para o ^{56}Co, com vida média de 6,10 dias (E=2,136 MeV) e deste para o ^{56}Fe, com vida média de 77,12 dias (E=4,566 MeV). A energia só pode ser usada

depois do decaimento, o que prolonga o brilho da supernova. Os modelos precisam também incluir a dinâmica, já que as camadas externas expandem com velocidades de cerca de 5000 km/s (SN tipo II) e 10 000 km/s (SN tipo I). A SN1987A, a mais brilhante desde a invenção do telescópio, ejetou cerca de 15 $M_\odot$ e $1,7 \times 10^{51}$ ergs. Cerca de $0,075$ $M_\odot$ de ^{56}Ni decairam. Em comparação, outra SN tipo II, a SN1980K, ejetou somente 2,2 $M_\odot$, energia de $1,0 \times 10^{51}$ ergs e a mesma quantidade de ^{56}Ni. Para as SNI, que são majoritariamente explosões de anãs brancas por acréscimo, a massa ejetada é da ordem de 1,1 a 1,3 $M_\odot$ e as massas de ^{56}Ni variam de cerca de 0,075 a 0,692 $M_\odot$.

Uma supernova SN II normal libera cerca de 10^{51} ergs em energia cinética, a massa de Fe é de cera de $0,1$ $M_\odot$, independentemente da massa da progenitora, mas a massa transformada em elementos α: O, Ne, Mg. Si, S, Ar, Ca e Ti são maiores para as estrelas mais massivas, porque provêm de um manto maior.

Já as **hipernovas**, como SN1998bw e SN2003dh, associadas às explosões de raios-γ GRB 980425 e GRB 030329, liberam cerca de 10^{52} ergs, sendo tão luminosas no pico quanto as SN Ia, e vêm do limite superior em massa dos progenitores das SNs tipo II. Elas sintetizam entre 0,3 a 0,5 $M\odot$ de ^{56}Ni. Note que durante o colapso do núcleo da supernova ou hipernova, o material estelar sofre aquecimento por choque e nucleosíntese explosiva. Ken'ichi Nomoto, Nozomu Tominaga, Hideyuki Umeda e Chiaki Kobayashi, em seu artigo de 2005 nos anais do *IAU Symposium 228, "From Lithium to Uranium: Elemental Tracers of Early Cosmic Evolution"*, (editores Vanessa Hill, Patrick François e Francesca Primas, p. 287), concluem que as abundâncias químicas observadas nas duas estrelas com menor abundância de metais conhecidas, a gigante do halo HE 0107-5240, com [Fe/H]=-5,3±0,2 e massa 0,8 $M_\odot$, (Norbert Christlieb, Michael S. Bessell, Timothy C. Beers, Bengt Gustafsson, Andreas J. Korn, Paul S. Barklem, Torgny Karlsson, Michelle Mizuno-Wiedner & Silvia Rossi, 2002, Nature, 419, 904) e da estrela de seqüência principal HE1327-2326 (Anna Frebel, Wako Aoki, Norbert Christlieb, Hiroyasu Ando, Martin Asplund, Paul S. Barklem, Timothy C. Beers, Kjell Eriksson, Cora Fechner, Masayuki Y. Fujimoto, Satoshi Honda, Toshitaka Kajino, Takeo Minezaki, Ken'ichi Nomoto, John E. Norris, Sean G. Ryan, Masahide Takada-Hidai, Stelios Tsangarides & Yuzuru Yoshii. 2005, *Nucleosynthetic signatures of the first stars*, Nature, 434, 871), com $[Fe/H] = \log\left(\mathrm{N_{Fe}/NH}\right) - \log\left(\mathrm{N_{Fe}/N_H}\right)_\odot = -5,4 \pm 0,2$, são consistentes com modelos de supernovas oriundas de População III de 20 a 130 $M_\odot$, mas não de modelos mais massivos, já que os modelos mais massivos são completa-

mente desmanchados, resultando em não consistentes com a alta fração de C/Fe observadas nas estrelas de metalicidade extremamente baixa. Os modelos mais massivos, que explodem por instabilidade de pares ($\gamma \leftrightarrow e^+ + e^-$), produzem uma alta taxa de metais e, para os modelos mais massivos, a maior parte dos metais é na forma de ferro. Naoki Yoshida, Volker Bromm & Lars Hernquist, em 2004 no Astrophysical Journal, 605, 579, propõe que se a reionização observada pelo Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) foi provocada pelas estrelas de População III, o meio interestelar do Universo foi enriquecido para metalicidades $Z > 10^{-4} > Z_\odot$ já em deslocamento para o vermelho (*redshift*) $z \geq 15$.

Como a energia de ligação de uma estrela de nêutrons de massa M é aproximadamente $0,1\,Mc^2 \simeq 10^{53}(M/M_\odot)$ ergs, essa quantidade de energia precisa escapar para que uma estrela de nêutrons se forme. A maior parte da energia escapa na forma de neutrinos.

A estrutura das estrelas de nêutrons e buracos negros não pode ser tratada com a mecânica newtoniana utilizada até aqui. Ela necessita da Relatividade Geral.

23.29 Equilíbrio hidrostático na Relatividade Geral

Para campos gravitacionais fortes, como no caso de estrelas de nêutrons e buracos negros, precisamos utilizar a equação de campo de Einstein

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}} \tag{23.432}$$

onde R_{ik} é o tensor espaço-tempo, g_{ik} são as componentes do tensor métrico e dependem do sistema de coordenadas usado e da unidade da coordenada temporal, T_{ik} é o tensor *momentum*-energia, que depende da distribuição e movimento das massas e do campo eletromagnético, e

$$\boxed{\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^2}}$$

é a *constante gravitacional de Einstein.* O tensor de segunda ordem R_{ik}, que descreve a forma do espaço-tempo, é chamado de tensor Ricci [Georgorio Ricci-Curbastro (1853-1925)], e, contraído, nos dá a curvatura escalar do espaço-tempo:

$$R = R_{km} g^{km}$$

também chamada de curvatura de Riemann [Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)]. Na equação (23.432), os dois índices i e k variam de 0 a 3, os dois termos à esquerda do sinal de igualdade representam a curvatura do espaço-tempo, e o termo à direita as forças que atuam nesse sistema. Os índices repetidos significam soma, pela convenção da soma de Einstein.

A equação é escrita de forma tensorial de modo a não depender dos detalhes do sistema de coordenadas, já que sempre podemos transformar o sistema de coordenadas para qualquer outro. Na relatividade geral não existe sistema de coordenadas absoluto e a única forma de medir o movimento de um corpo é em relação a outro objeto.

O tensor de segunda ordem de Ricci é função da geodésica:

$$\boxed{R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}} \tag{23.433}$$

através dos Γ^i_{kl}, os símbolos de Christoffel [Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)]:

$$\boxed{\Gamma^i_{kl} \equiv \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right)} \tag{23.434}$$

O tensor de Einstein é definido como:

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{23.435}$$

Para um gás, o tensor energia-*momentum* em coordenadas curvilíneas pode ser escrito como:

$$T^{ik} = (\varepsilon + P) u^i u^k - P g^{ik} \tag{23.436}$$

onde

$$\varepsilon = \rho c^2,$$

é a densidade de energia da matéria, incluindo a energia de repouso, medida no sistema em repouso com a matéria, P é a pressão isotrópica,

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

é a quadri-velocidade do gás e ds o intervalo entre dois pontos x^i e $x^i + dx^i$. Como a quadri-velocidade de um fluido medido por um observador em comovimento com o fluido é simplesmente $u^i = (1, 0, 0, 0)$, temos para um gás

ideal:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

O tensor energia-momentum para um campo eletromagnético é dado por

$$T^{ik} = -\frac{g_{lm}}{4\pi} F^{il} F^{km} + \frac{g^{ik}}{16\pi} F_{lm} F^{lm}$$

onde F_{lm} é o tensor de campo eletromagnético. Este tensor causa uma tensão $(E^2 + B^2)/8\pi$ ao longo das linhas de campo, e uma pressão $(E^2 + B^2)/8\pi$ perpendicular às das linhas de campo, onde $(E^2 + B^2)/8\pi$ é a densidade de energia do campo eletromagnético.

Na relatividade *especial*, isto é, para campos gravitacionais desprezíveis, o intervalo de tempo próprio $d\tau$ entre dois eventos definidos pelas coordenadas $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ e (t, x, y, z) é dado pela equação:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ij} dx^i dx^j$$

mas para um campo gravitacional forte, o intervalo invariante de Riemann ds é dado por:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

onde g_{ij} é um tensor simétrico, chamado de tensor métrico. Para pequenas regiões do espaço-tempo, o espaço pode ser considerado plano e as coordenadas Lorentzianas [Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)]. Nesse caso,

$$g_{ik} = \frac{dx^i}{dx^k}$$

Um postulado da geometria de Riemann é que, em volta de qualquer ponto não-singular, é possível definir um sistema de coordenadas em que o espaço é localmente inercial. Na relatividade geral, esse postulado é chamado de princípio da equivalência e significa que, na vizinhança de um ponto não-singular arbitrário, o campo gravitacional é equivalente a uma aceleração uniforme.

A conservação de energia-*momentum* é expressa, por construção, pela lei fundamental de geometria:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

onde $\nabla\cdot$ denota a divergência covariante, com componentes:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}T_l^k}{\partial x^k} - \frac{T^{km}}{2}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} = 0$$

com o determinante $g = |g_{ik}|$.

A equação (23.432) pode ser escrita como:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)T_{ik} \tag{23.437}$$

A equação da geodésica (*world line*) de uma partícula, isto é, a distância entre dois eventos, pode ser definida em termos do seu *tempo próprio* τ e da sua quadri-velocidade $\mathbf{u}$ como um extremo:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\,\mathbf{u} = 0. \tag{23.438}$$

O movimento de uma partícula viajando de p_1 a p_2 no espaço-tempo é o caminho para o qual o tempo próprio dado por

$$\tau = \int_{p_1}^{p_2} d\tau$$

é um extremo, onde $d\tau^2 = c^2 ds^2$.

Aplicando o cálculo variacional para achar o extremo:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$$

onde o Lagrangiano $\mathcal{L}$ é definido por:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{c^2 d\tau}\right)^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

e $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$.

A densidade de massa-energia, medida por um observador de quadri-velocidade $\mathbf{u}$ é dada por:

$$\varepsilon = \rho c^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} = u^i T_{ij} u^j$$

A equação tensorial (23.432), no limite de campos gravitacionais fracos e velocidades não-relativísticas, se reduz à equação de Poisson (23.471).

Na relatividade geral, as trajetórias dos fótons têm $ds = 0$ e $ds^2_{\text{fótons}} = c^2 d\tau^2_{\text{fótons}} = 0$, onde τ é o tempo próprio, isto é, medido no referencial da partícula.

A equação de campo de Einstein vale para qualquer sistema de coordenadas generalizadas. Por que não escolhemos as coordenadas esféricas normais? Porque essas coordenadas não incluem a curvatura do espaço. Precisamos modificá-la para incluir a curvatura causada pelos efeitos gravitacionais, mas preservando a simetria esférica. Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), a distância entre dois eventos é dada de forma genérica por:

$$ds^2 = U(r)c^2dt^2 - V(r)dr^2 - W(r)r^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2\right)$$

onde $U(r)$, $V(r)$ e $W(r)$ são funções de r.

Encontrar a solução da equação de campo de Einstein significa encontrar a geodésica que descreve o intervalo entre os eventos, para dados valores do tensor *momentum*-energia. Sem perda de generalidade, podemos escolher as funções $U(r)$ e $V(r)$, com $W(r) \equiv 1$, escrevendo:

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{23.439}$$

onde $\nu = \nu(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$ são as funções que queremos determinar. Essa forma foi utilizada por Karl Schwarzschild (1873-1916) em 1916, bem como por Richard Chase Tolman (1881-1948) no seu artigo publicado em 1939 no *Physical Review*, 55, p.364-373, e Julius *Robert* Oppenheimer (1904-1967) e George Michael Volkoff (1914-2000) no artigo publicado no mesmo volume, p. 374-381. Trata-se de uma métrica estática $\left(\partial g^{ij}/\partial t = 0\right)$ e ortogonal $(g_{tr} = g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0)$. O elemento espacial de distância é dado por $e^{\lambda/2}dr$.

As componentes covariantes não-nulas do tensor métrico, com $x_0 = ct$ são:

$$g_{00} = e^{\nu} \quad g_{11} = -e^{\lambda} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2\text{sen}^2\theta$$

e os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}g_{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} \tag{23.440}$$

$$\Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2}g_{ii}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \tag{23.441}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}g_{ii}\left[\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i}\right] \tag{23.442}$$

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2} g_{ii} \left[\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} \right] \tag{23.443}$$

se reduzem a:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu - \lambda}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}$$

$$\Gamma^1_{22} = -r e^{-\lambda}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r \text{sen}^2 \theta e^{-\lambda}$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot \theta$$

$$\Gamma^2_{33} = -\text{sen}\, \theta \cos \theta$$

Os símbolos de Christoffel não são tensores. O tensor de Ricci é dado por:

$$R_{00} = \left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] e^{(\nu - \lambda)}$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}$$

$$R_{22} = \left(1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} - 1$$

$$R_{33} = R_{22} \text{sen}^2 \theta$$

e finalmente a curvatura de Riemann:

$$\begin{aligned} R &= e^{-\nu} R_{00} - e^{-\lambda} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} \\ &= e^{-\lambda} \left[-\nu'' + \frac{1}{2} \lambda' \nu' - \frac{1}{2} (\nu')^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{2\lambda'}{r} - \frac{2\nu'}{r} \right] + \frac{2}{r^2} \end{aligned} \tag{23.444}$$

23.29.1 Schwarzschild

Karl Schwarzschild estudou, em 1916, o espaço em volta da estrela, onde o tensor *momentum*-energia T_{ij} é nulo. Nesse caso, a equação de Einstein se reduz a:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{d\nu/dr}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0 \tag{23.445}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{d\lambda/dr}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0 \tag{23.446}$$

e

$$\frac{d\lambda}{dt}=0 \tag{23.447}$$

Das equações (23.445) e (23.446) obtemos:

$$\frac{d\lambda}{dr}+\frac{d\nu}{dr}=0 \tag{23.448}$$

Essa equação indica que podemos colocar $\lambda=-\nu$, e integrar, obtendo:

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{\text{constante}}{r} \tag{23.449}$$

Para que no limite no caso de campo gravitacional fraco a equação de campo de Einstein se reduza à equação de Poisson, a constante$/r$ da equação (23.449) deve ser identificada com $2\Phi/c^2$, onde $\Phi=-GM/r$ é o potencial gravitacional da mecânica clássica. Com esse valor, a métrica se reduz a:

$$ds^2=c^2d\tau^2=c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)}-r^2\left(\text{sen}^2\theta d\phi^2+d\theta^2\right) \tag{23.450}$$

conhecida como a métrica de Schwarzschild e que tem um horizonte de eventos no raio de Schwarzschild R_S

$$R_S=\frac{2GM}{c^2}$$

O raio de Schwarzschild não é uma singularidade, pois pode ser removido com uma transformação de coordenadas.

A distância propria nesta métrica pode ser estimada por:

$$\Delta s\simeq\frac{\Delta r}{\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{1/2}}$$

Para a massa do Sol, o raio de Schwarzschild é de 3 km, e a distância própria entre r=4 km e r=5 km é

$$\Delta s \simeq \frac{\Delta r}{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}} = \frac{1 \text{ km}}{\left(1-\frac{3}{4,5}\right)^{1/2}} = 1,7 \text{ km}$$

Deste modo, se construirmos uma barra rígida com comprimento de 1,7 km em uma estação espacial muito distante desta massa, veremos que esta barra caberá entre 4 e 5 km.

Pela equação (23.450), vemos que o intervalo de tempo da coordenada tempo dt e o intervalo de tempo próprio estão relacionados pela equação

$$d\tau = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

O intervalo de tempo próprio $d\tau$ representa o intervalo de tempo medido em um sistema em repouso na coordenada r. Para um observador estacionário ($dr = d\theta = d\phi = 0$) no infinito ($r \to \infty$), o tempo próprio coincide com t.

23.29.2 Avermelhamento Gravitacional

Utilizando a relação entre o tempo próprio (τ=tempo no sistema de repouso na coordenada r) e a coordenada temporal t,

$$d\tau = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

podemos calcular a diferença entre a freqüência emitida em r_1

$$\nu_1 = \frac{1}{d\tau_1}$$

e a freqüência recebida em um ponto qualquer r_2

$$\nu_2 = \frac{1}{d\tau_2}$$

que é dada por

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Podemos aproximar esta relação para um ponto $r_2 \gg r_1$ como

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e, se o campo gravitacional for fraco,

$$v_{\text{escape}}^2 \equiv \frac{2GM}{r_1} \ll c^2$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1}\right)$$

de modo que

$$\nu_2 \simeq \nu_1 - \nu_1 \frac{GM}{c^2 r_1}$$

e

$$\boxed{\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \simeq -\frac{GM}{c^2 r_1}}$$

É necessário identificar $r_1 = R$ como o raio da estrela, isto é, a posição em que a radiação foi emitida. Este avermelhamento gravitacional causa um deslocamento Doppler no centro das linhas espectrais equivalente a

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \equiv -\frac{v_{\text{gr}}}{c} = -\frac{GM}{c^2 R}$$

Multiplicando-se e dividindo-se pela massa e pelo raio do Sol, obtemos:

$$v_{\text{gr}} = 0,635 \frac{M}{M_\odot} \frac{R_\odot}{R} \text{ km/s}$$

Para Sírius B, com $M = (1,053 \pm 0,028) M_\odot$, obtém-se $v_{\text{gr}} = (89 \pm 16)$ km/s.

23.29.3 Tensores Covariantes e Contravariantes

Uma derivada contravariante é definida como

$$A^{\mathbf{i}} = \frac{\partial x_{\mathbf{i}}}{\partial x_k} A^k$$

enquanto que uma derivada covariante é definida como

$$A_{\mathbf{i}} = \frac{\partial x_k}{\partial x_{\mathbf{i}}} A_k$$

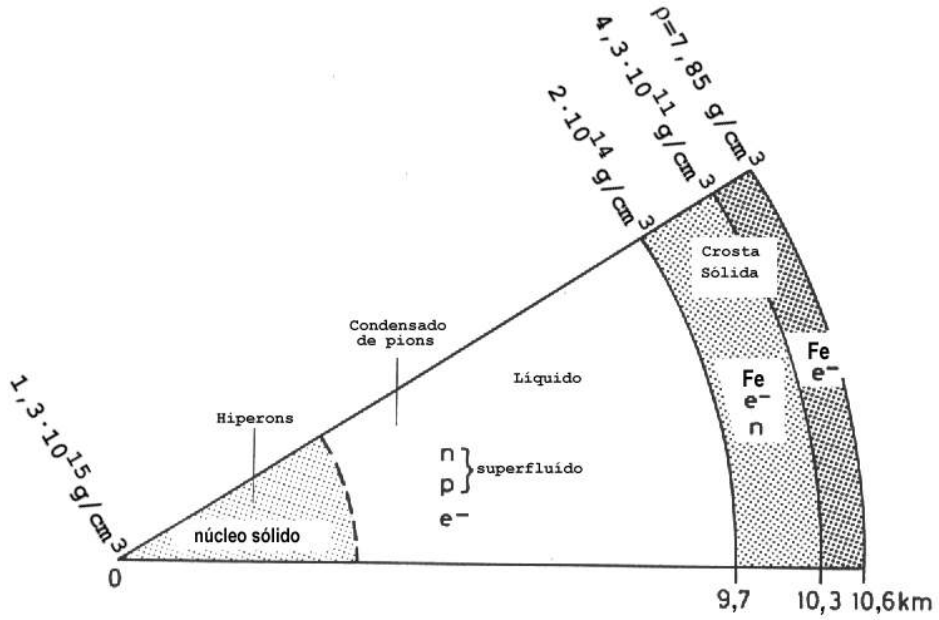


Figura 23.62: Estrutura de uma estrela de nêutrons calculada por David Pines (1980), utilizando uma equação de estado de rigidez média.

Portanto, um tensor contravariante é dado por

$$T^{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_l}{\partial x_j}T^{ij}$$

enquanto que um tensor covariante é dado por

$$T_{kl} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial x_l}T_{ij}$$

23.29.4 Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Para um gás ideal, as únicas componentes não nulas do tensor energia-*momentum* (23.436) são:

$$T_{00} = \rho c^2 \qquad T_{11} = T_{22} = T_{33} = P$$

A equação (23.437) se reduz, então, a três equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\kappa P}{c^2} = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{23.451}$$

$$\frac{\kappa P}{c^2} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) \tag{23.452}$$

$$\kappa\rho = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{23.453}$$

onde $'$ denota derivada em relação a r.

Eliminando-se P das equações (23.451) e (23.452) obtemos

$$\frac{e^{\lambda}}{r^2} = \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{1}{4}\left(\nu'\right)^2 - \frac{\nu''}{2r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \tag{23.454}$$

Adicionando-se as equações (23.453) e (23.451) obtemos

$$-\frac{8\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\nu' + \lambda'\right) \tag{23.455}$$

Diferenciando-se a equação (23.451) com relação a r, obtemos

$$\frac{8\pi G}{c^4}\frac{dP}{dr} = -\frac{2}{r^3} + e^{\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda'\nu'}{r} + \frac{2}{r^3} + \frac{\nu'}{r^2} - \frac{\nu''}{r}\right) \tag{23.456}$$

As equações (23.454) e (23.456) levam a

$$\frac{8\pi G}{c^4}\frac{dP}{dr} = e^{\lambda}\frac{1}{2r}\nu'\left(\lambda' + \nu'\right) \tag{23.457}$$

e comparando com a equação (23.455) obtemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\left[\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2}\right] \tag{23.458}$$

Podemos reescrever a equação (23.453) como

$$\frac{d\left(r\, e^{-\lambda}\right)}{dr} = 1 - \frac{8\pi r^2 G\rho}{c^2} \tag{23.459}$$

e integrá-la, resultando em:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - \frac{2G}{rc^2}\int_o^r 4\pi r^2 \rho dr \\ &= 1 - \frac{2GM_r}{rc^2} \end{aligned} \tag{23.460}$$

onde M_r denota a *massa gravitacional* dentro de r:

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \tag{23.461}$$

de modo que para $r = R$, $M_r = M$, a massa gravitacional da estrela. Essa é a massa que um observador distante mede por efeitos gravitacionais, como, por exemplo, efeitos orbitais. Ela não é, entretanto, a massa relacionada com o número de bárions simplesmente, pois contém também toda a energia, dividida por c^2. Dessa forma:

$$\rho = \rho_0 + \frac{U}{c^2}$$

onde ρ_0 é a densidade de massa em repouso, e U a densidade de energia total. Note que, embora a equação (23.461) tenha a forma usual da equação de continuidade de massa (23.98), nessa métrica (23.439), o elemento de volume esférico é dado por $e^{\lambda/2} 4\pi r^2 dr$, e não $4\pi r^2 dr$, que é o elemento sobre o qual a equação (23.461) está integrada.

Podemos agora resolver a equação (23.456) em termos de $d\nu/dr$, obtendo

$$\frac{d\nu}{dr} = -2\frac{dP}{dr}\frac{1}{(\rho c^2 + P)} \tag{23.462}$$

e usar as equações (23.451) e (23.462) para escrever

$$e^{-\lambda}\left[-\frac{2}{r}\frac{dP}{dr}\frac{1}{(\rho c^2 + P)} + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G P}{c^4} \tag{23.463}$$

e finalmente resolver as equações (23.460) e (23.463) para dP/dr chegando à equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para o equilíbrio hidrostático na relatividade geral:

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M_r c^2}\right)\left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1}} \tag{23.464}$$

Essa equação, derivada em 1939 por Richard Chase Tolman (1881-1948), Julius *Robert* Oppenheimer (1904-1967) e George Michael Volkoff, se reverte à forma usual da Equação do Equilíbrio Hidrostático (23.99) para $c^2 \to \infty$. A expressão relativística para o gradiente de pressão $\left(dP/e^{\lambda/2}dr\right)$ é maior do que no caso newtoniano (dP/dr), de modo que a pressão no interior da estrela aumenta mais rapidamente.

Seguindo George William Collins II (1937-) *The Fundamentals of Stellar Astrophysics*, 1989, (New York: Freeman), um modelo simples é $\rho(r) = \rho_0 = constante$. A equação da continuidade da massa

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

torna-se

$$M(r) = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3}$$

enquanto a Tolman-Oppenheimer-Volkoff

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{4\pi G r \rho_0^2 [1 + P/(\rho_0 c^2)][1 + 3P/(\rho_0 c^2)]}{3[1 - 8\pi G \rho_0 r^2/(3c^2)]}$$

que pode ser integrada. Seja

$$y \equiv \frac{P}{\rho_0}$$

$$\gamma \equiv \frac{8\pi G \rho}{3c^2} = \frac{2GM}{R^3 c^2}$$

Podemos reescrever a equação de equilíbrio hidrostático como

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{1}{2}\gamma c^2 \frac{(1 + y/c^2)(1 + 3y/c^2) r}{1 - \gamma r^2}$$

com a condição de contorno $y(R) = 0$. Com zero para a pressão na superfície, a solução desta equação é

$$y = c^2 \frac{(1 - \gamma r^2)^{1/2} - (1 - \gamma R^2)^{1/2}}{3(1 - \gamma R^2)^{1/2} - (1 - \gamma r^2)^{1/2}}$$

que em termo das variáveis físicas torna-se

$$P(r) = \rho_0 c^2 \frac{[1 - 2GMr^2/(R^3 c^2)]^{1/2} - [1 - 2GM/(Rc^2)]^{1/2}}{3[1 - 2GM/(Rc^2)]^{1/2} - [1 - 2GMr^2/(R^3 c^2)]^{1/2}}$$

De modo que a pressão central pode ser obtida para r=0

$$P_c = \rho_0 c^2 \frac{1 - [1 - 2GM/(Rc^2)]^{1/2}}{3[1 - 2GM/(Rc^2)]^{1/2} - 1}$$

Quando a pressão central aumenta, a estrela reduz o raio, refletindo o maior efeito da gravidade, de modo que

$$\lim_{P_c \to \infty} R = \frac{9}{8}\frac{2GM}{c^2} = \frac{9}{8} R_S$$

onde R_S é o raio de Schwarzschild. Deste modo, o menor raio estável de tal objeto é pouco maior que o raio de Schwarzschild. Entretanto, um limite também pode ser encontrado restringindo a velocidade do som

$$v_s = \sqrt{\frac{P}{\rho_0}} \leq c$$

que nos leva ao limite

$$\lim_{P_c \to c^2 \rho_0} R = \frac{4}{3} R_S$$

Como qualquer equação de estado requer que a densidade decresça para fora e como a causalidade requer que a velocidade do som seja sempre menor que a velocidade da luz, podemos concluir que uma estrela sempre terá $R \geq \frac{4}{3} R_S$. Embora as estrelas de nêutrons tenham raios de cerca de $3R_S$, nelas a relatividade geral é dominante.

A verdadeira equação de estado das estrelas de nêutrons ainda não é conhecida, mas Edwin Salpeter (1961, Astrophysical Journal, 134, 669) mostrou que, para um gás de el'etrons e núcleos atômicos de peso atômico A e carga Z, com $\mu_o = A/Z$, incluindo os efeitos Coulombianos da rede de íons, as correções de Thomas-Fermi para a não uniformidade da distribuição de elétrons [Llewellyn H. Thomas (1903-1992), *The calculation of atomic fields*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 23, 542-548, 1927; Enrico Fermi (1901-1954). *Un metodo statistice per la determinazione di alcune proprieta del l'atomo.* Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, 6, 602-607, 1927], energia de troca e interações spin-spin dos elétrons, podemos escrever a equação de forma paramétrica como

$$P = \frac{1}{3} K \left(\sinh t - 8 \sinh \frac{t}{2} + 3t \right)$$

$$\rho = K(\sinh t - t)$$

onde

$$K = \frac{\pi \mu_0^4 c^5}{4h^3}$$

$$t = 4 \log \left\{ \frac{\hat{p}}{\mu_0 c} + \left[1 + \left(\frac{\hat{p}}{\mu_0 c} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

e $\hat{p}$ é o momentum de Fermi máximo que pode depender fracamente da temperatura. Se incluímos a perda de energia por neutrinos devido ao decaimento β inverso, existe um máximo local em cerca de uma massa solar. Modificações mais recentes à equação de estado mostram um segundo

máximo logo acima de duas massas solares e considerações de causalidade colocam um máximo absoluto em cerca de 5 massas solares.

Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) e Robert F. Tooper (1964, ApJ, 183, 941) demontraram que as anãs brancas colapsam por efeitos da relatividade geral com 98% da massa de Chandrasekhar. Para as estrelas de nêutrons, a relatividade geral causa o colapso muito antes de toda a estrela tornar-se relativisticamente degenerada.

Nas estrelas de nêutrons, os elétrons degenerados têm energia suficiente para induzir o decaimento β inverso, isto é, colidir com um próton formando um nêutron. O subsequente decaimento β não é possível porque implicaria na emissão de um próton e um elétron de menor energia e, portanto, em um estado já completamente ocupado.

Desta maneira prótons são convertidos em nêutrons, formando núcleos ricos em nêutrons. Neste caso, a repulsão coulombiana é reduzida e núcleos mais pesados que o ^{56}Fe são formados. Podemos estimar a densidade média de uma estrela de nêutrons, considerando que a massa média é de 1,4 $M_\odot$ e raio de 10 km

$$\langle \rho_{\rm EN} \rangle = \frac{1,4 M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R^3} \simeq 7 \times 10^{14}\ {\rm g/cm^3} = \simeq 7 \times 10^{17}\ {\rm kg/m^3}$$

Para densidades até 10^{14} kg m^{-3}, ^{76}Fe e ^{78}Ni são os núcleos mais estáveis. Acima de 4×10^{14} kg m^{-3}, o fenômeno de escorrimento de nêutrons (*neutron drip*) acontece, de modo que nêutrons livres, núcleos e elétrons coexistem em equilíbrio. A equação de estado desta matéria é bem conhecida para densidades abaixo da densidade da matéria nuclear normal, $\rho_{\rm nuclear} \simeq 2,3 \times 10^{14}$ g cm^{-3} $= 2,3 \times 10^{17}$ kg m^{-3}. Para densidades superiores, os núcleos começam a se unir, formando um denso gás de elétrons, prótons e nêutrons. A equação de estado depende então fortemente da interação entre os núcleons, ainda incerta. Para densidades de 10^{18} kg m^{-3}, píons, múons e híperons são energeticamente possíveis, e acima disto, os quarks tornam-se importantes. A coexistência em equilíbrio de nêutrons, prótons e elétrons em temperatura zero é caracterizada por

$$\epsilon_F(n) = \epsilon_F(p) + \epsilon_F(e)$$

já que o potential químico de um gás de Fermi a temperatura zero é a energia de Fermi. Os neutrinos das reações

$$\boxed{n \to p + e^- + \bar{\nu_e}} \quad \text{e} \quad \boxed{e^- + p \to n + \nu_e}$$

não afetam o potencial químico porque escapam. Como a relação entre o momentum de Fermi e a densidade é dada por

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} h$$

e para densidades da ordem da nuclear os prótons e nêutrons são não relativísticos,

$$\epsilon_F(n) \simeq m_n c^2 + \frac{p_F(n)^2}{2m_n}$$

$$\epsilon_F(p) \simeq m_p c^2 + \frac{p_F(p)^2}{2m_p}$$

Entretanto, os elétrons, menos massivos, são ultra-relativísticos

$$\epsilon_F(e) \simeq p_F(e) c$$

Tendo em vista que a matéria é neutra, $n_e = n_p$, de modo que

$$\left(\frac{3n_p}{8\pi}\right)^{1/3} hc + \left(\frac{3n_p}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m_p} - \left(\frac{3n_n}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m_n} \simeq m_n c^2 - m_p c^2$$

Dado que a diferença de massa entre prótons e nêutrons é 1,3 MeV/c^2, podemos calcular o número relativo de nêutrons e prótons em qualquer densidade. Por exemplo, a uma densidade típica de uma estrela de nêutrons de $\rho = 2 \times 10^{17}$ kg m^{-3}, encontramos $n_n \simeq 10^{44}$ m^{-3}, $n_e \simeq n_p \simeq n_n/200$, isto é, 1 elétron para cada 200 nêutrons, ou seja, os nêutrons são dominantes. Para estrelas de nêutron, as densidades são comparáveis com as da matéria nuclear $\left(\rho \simeq 2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}\right)$. Nesse caso, a energia de Fermi é da ordem de $E_F \simeq 30$ MeV, correspondendo a $T = E_F/k \simeq 3 \times 10^{11}$ K. Portanto, a energia cinética, devido à degenerescência, é a principal contribuição à pressão, com correções substanciais devido às forças nucleares. A agitação térmica é desprezível, já que a emissão de neutrinos no colapso para estrela de nêutrons esfria o núcleo para $T \ll 3 \times 10^{11}$ K em poucos segundos. O processo mais eficiente de formação de neutrinos é o processo URCA ($n \to p + e + \nu$ e $p + e \to n + \nu$), e Urca modificado ($n + n \to n + p + e + \nu$ e $n + p + e \to n + n + \nu$), que é proporcial a T^8, esfriando a estrela rapidamente para $T < 10^9$ K. Após algo entre 10 a 10 000 anos, o processo URCA torna-se ineficiente, e esfriamento por ¡I¿bremsstrahlung¡/I¿ de pares de neutrinos e mais tarde por emissão térmica de fótons esfria a estrela e leva a uma temperatura superficial de alguns milhões de Kelvin. Mas se o

núcleo não for composto por matéria normal, o esfriamento pode ser mais complicado.

A escala de tempo da interação fraca é de $\tau_{\rm fraca} \simeq 10^{-10}$ s. Por causa da alta densidade de matéria nas estrelas de nêutrons e do fato dos bárions obedecer ao princípio de Pauli, é energeticamente favorável aos nucleons no topo do mar de Fermi em transformar-se em outros bárions, inclusive os estranhos (híperons) para baixar as energias de Fermi. A transformação não viola a conservação de estranheza das forças fortes porque esta conservação se dá somente nas escalas de tempo das interações fortes, não das fracas. Mesmo no colapso de uma supernova, a escala de tempo é muito longa em comparação com a escala da interação fraca, e a conservação de estranheza pode ser violada.

Desta forma, estrenheza não é conservada em objetos astrofísicos. Nos núcleos atômicos estáveis, a massa dos híperons é maior do que do que a energia de Fermi, de modo que não é energeticamente favorável a transformação em híperons. As reações nucleares são tão rápidas ($\tau \simeq 10^{-22}$ s, que a estranheza é conservada nesta escala de tempo. Desta forma, embora a matéria nuclear normal tenha estranheza líquida zero, as estrelas de nêutrons podem ter, e quase certamente têm, híperons e ter estranheza líquida não nula (Norman K. Glendenning, 1997, Compact Stars, Springer: New York.)

A primeira derivação do colapso de uma estrela para o estágio de buraco negro foi publicada por Julius *Robert* Oppenheimer (1904-1967) e Hartland Snyder em 1939, no *Physical Review*, 56, demonstrando que o último estágio do colapso é um buraco negro, e que a estrela corta qualquer comunicação com o exterior. Em 1974, o físico inglês Stephen William Hawking (1942-) demonstra que os efeitos de tunelamento quântico levam à evaporação de qualquer buraco negro, em escalas de tempo suficientemente grandes. Para um tratamento adequado do assunto, veja o livro *Compact Stars*, do físico Norman K. Glendenning, publicado pela Springer em 1997, ou as notas de Edward Lewis Robinson (1945-), Black Holes, em http://pisces.as.utexas.edu/GenRel/, que deduz o espaço-tempo de Kerr [Roy P. Kerr (1934-)] fora de um buraco negro em rotação, publicado em 1963 no artigo "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics", no Physics Review Letters, 11, 237, em coordenadas de Boyer-Lindquist [Robert H. Boyer e Richard W. Lindquist, "Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric", Journal Mathematical Physics, 8, 265, 1967], uma generalização da métrica de Schwarzschild para

um buraco negro de massa M e momentum angular J:

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2 d\tau^2 &= c^2 \left(1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4aGMr\text{sen}^2\theta}{c^2\Sigma} c\, dt\, d\phi - \\ &- \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \\ &- \left(r^2 + a^2 - \frac{2GMra^2\text{sen}^2\theta}{c^2\Sigma}\right) \text{sen}^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \tag{23.465}$$

onde

$$a \equiv \frac{J}{cM}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2GMr/c^2 + a^2$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

23.30 Formação estelar

As observações indicam que as estrelas nascem da matéria interestelar, provavelmente quando uma nuvem de gás se torna gravitacionalmente instável, possivelmente pela passagem de uma onda de choque causada pela explosão de uma supernova nas proximidades, ou pela passagem de uma onda de densidade, como aquelas teoricamente responsáveis pelos braços espiras das galáxias, e colapsa. A existência de nuvens moleculares densas, como a nuvem de Órion, na qual existem muitas estrelas jovens, dos glóbulos de Bok [Bart Jan Bok (1906-1983)], com sua emissão principalmente no infravermelho, dos envoltórios das estrelas T Tauri, que são estrelas recém-formadas, todos corroboram a idéia da relação entre nuvens de gás e a formação de estrelas. As estrelas T Tauri têm massa entre 0,2 e 2 $M_\odot$, idades entre 10^5 e 10^6 anos, e linhas de emissão em Hα, e H e K do Cálcio.

As propriedades médias da região central das nuvens moleculares são:

- densidade média $\overline{n} \simeq 10^4$ cm^{-3}, consistindo, principalmente, de hidrogênio molecular;
- temperatura média $\overline{T} \simeq 10 - 30$ K;
- campo magnético médio $\overline{B} \simeq 20 - 30\mu$G;
- razão de gás ionizado (por raios cósmicos) para gás neutro $n_i/n \simeq 10^{-7}$;
- tamanho $R \simeq 10^{17}$ cm $\simeq 0,05$ pc;

- velocidade angular de rotação $\Omega \simeq 10^{-14}$ rad/s,

enquanto que as propriedades das estrelas, por exemplo, o Sol, são:

- densidade média $\overline{n} \simeq 10^{24}$ cm^{-3}, consistindo, principalmente, de hidrogênio ionizado;
- temperatura média $\overline{T} \simeq 10^7$ K;
- campo magnético médio na atmosfera $\overline{B} \simeq 1$G;
- razão de gás ionizado para gás neutro $n_i/n \simeq 1$, exceto na atmosfera;
- tamanho $R \simeq 10^{11}$ cm;
- velocidade angular de rotação $\Omega \simeq 10^{-6}$ rad/s.

Portanto, para que haja a formação de uma estrela a partir da nuvem, é necessária uma contração de um fator 10^6 em raio, e 10^{20} em densidade, o que causa dois problemas imediatos:

1. problema do *Momentum* Angular de Rotação: $R^2\Omega \simeq$ constante $\longrightarrow \Omega$ aumenta por 10^{13} e
2. problema do Fluxo Magnético: $R^2B \simeq$ constante $\longrightarrow B$ aumenta por 10^{13}

e, portanto, a formação estelar tem de se dar com a formação de um disco de acresção; a viscosidade no disco permite a acresção de massa ao centro, enquanto parte da massa é acelerada para as partes externas, pela conservação do *momentum* angular; ao mesmo tempo, o disco é truncado no centro pelo campo magnético, e matéria ionizada tem de ser expelida por ejeção magneto-centrífuga, possivelmente na forma de jatos bipolares, por conservação do campo magnético.

Entretanto, como primeiro passo no cálculo, vamos derivar o critério de Jeans, calculado em 1902 por *Sir* James Hopwood Jeans (1877-1946), calculando o colapso gravitacional ignorando tanto o campo magnético quanto a rotação (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, Série A, 199,1).

Consideremos um gás homogêneo e infinito em repouso, com densidade e temperatura constante em todos os pontos. Primeiro, precisamos reconhecer que essa afirmação é inconsistente, pois, por razões de simetria, o potencial gravitacional Φ também deve ser constante, mas a equação de Poisson [Siméon Denis Poisson (1781-1840)]:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{23.466}$$

demandaria que a densidade fosse nula ($\rho = 0$). Mesmo reconhecendo a inconsistência, definimos um meio de densidade constante não-nula, pois estamos interessados em pequenas perturbações em uma esfera isotérmica em equilíbrio hidrostático, que é um estado inicial consistente.

O gás deve obedecer, além da equação de Poisson (23.466), à equação hidrodinâmica do movimento de Euler [Leonhard Euler (1707-1783)]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\Phi \tag{23.467}$$

à equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{23.468}$$

e, finalmente, à equação do gás ideal

$$P = \frac{\Re}{\mu}\rho T = v_s^2 \rho \tag{23.469}$$

onde v_s é a velocidade do som. Para o estado de equilíbrio, assumimos $\rho = \rho_0$ =constante, $T = T_0$ =constante, e $v_0 = 0$. O potencial gravitacional de equilíbrio Φ_0 pode ser encontrado usando a equação de Poisson $\nabla^2\Phi_0 = 4\pi G\rho_0$, e as condições de contorno no infinito.

Perturbamos, agora, o equilíbrio

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \qquad P = P_0 + P_1 \qquad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \qquad \vec{v} = \vec{v}_1 \tag{23.470}$$

onde as funções com subscrito 1 dependem do espaço o do tempo e já usamos $v_0 = 0$. Substituindo 23.470 em 23.466, 23.467, 23.468 e 23.469, e assumindo que as perturbações são isotérmicas, isto é, que a velocidade do som não é perturbada, obtemos as seguintes relações em primeira ordem:

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\rho_1 \tag{23.471}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\Phi_1 + v_s^2\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \tag{23.472}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{23.473}$$

Esse é um sistema de equações diferenciais lineares e homogêneo, com coeficientes constantes. Sem perda de generalidade, podemos considerar perturbações que se propagam apenas em uma dada direção, por exemplo x.

Podemos, portanto, assumir que existem soluções proporcionais a $\exp[i(kx + wt)]$, de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} = iw$$

e definindo $v_{1x} = v_1$, $v_{1y} = v_{1z} = 0$, obtemos:

$$wv_1 + \frac{kv_s^2}{\rho_0}\rho_1 + k\Phi_1 = 0 \tag{23.474}$$

$$k\rho_0 v_1 + w\rho_1 = 0 \tag{23.475}$$

$$4\pi G\rho_1 + k^2\Phi_1 = 0 \tag{23.476}$$

Esse conjunto de equações terá solução não-nula se o determinante

$$\begin{vmatrix} w & \frac{kv_s^2}{\rho_0} & k \\ k\rho_0 & w & 0 \\ 0 & 4\pi G & k^2 \end{vmatrix}$$

é nulo. Lembrando que se $\mathbf{A}$ é a matriz

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

obtemos, portanto, a relação de dispersão:

$$w^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{23.477}$$

Para números de onda k suficientemente grandes, o lado direito da relação de dispersão (23.477) é positivo, e w é real, e as perturbações variam periodicamente no tempo. Como a amplitude não aumenta, o equilíbrio é estável em relação a essas perturbações de número de onda grande. Nesse caso, não há colapso da nuvem.

No limite $k \to \infty$, a relação de dispersão (23.477) resulta em $w^2 = k^2 v_s^2$, que corresponde a ondas de som isotérmicas. Nesse caso, a gravidade não é importante, e qualquer compressão é restaurada pelo aumento de pressão, com a perturbação viajando pelo meio com a velocidade do som.

Se $k^2 < 4\pi G\rho_0/v_s^2$, o autovalor w é da forma $\pm i\zeta$, onde ζ é real. Portanto, existem perturbações proporcionais a $\exp(\pm\zeta t)$ que crescem exponencialmente com o tempo, de modo que não há equilíbrio, e a nuvem colapsa. Definimos, portanto, um número de onda característico

$$k_J^2 \equiv \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2}$$

ou o chamado comprimento de onda de Jeans

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J}$$

$$\boxed{\lambda_J = \left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} v_s} \tag{23.478}$$

de modo que quando $k < k_J \longrightarrow \lambda > \lambda_J$ as perturbações são instáveis.

A condição de instabilidade $\lambda > \lambda_J$ é chamada de critério de Jeans. Para escalas maiores do que o comprimento de Jeans, a gravidade sobrepassa a pressão, e a nuvem colapsa, ou seja, depois de uma pequena compressão externa, a atração gravitacional é maior do que a pressão do gás e a nuvem colapsa. Se estimarmos w na equação (23.477) somente pelo termo da gravidade, que é muito maior do que o termo da pressão ($k^2 v_s^2$), obtemos $iw \simeq (G\rho_0)^{1/2}$, correspondendo a uma escala de tempo $\tau_{\rm din} \simeq (G\rho_0)^{-\frac{1}{2}}$, o tempo de queda livre.

Para uma equação de gás ideal (23.469), $v_s^2 = \Re T/\mu$, e o comprimento de Jeans (23.478) se torna

$$\boxed{\lambda_J = \left(\frac{\Re T\pi}{G\mu\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{23.479}$$

A esse comprimento de onda de Jeans, corresponde uma massa de Jeans

$$M_J \equiv \lambda_J^3 \rho_0 \tag{23.480}$$

$$M_J = \left(\frac{\pi\Re}{G\mu}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \tag{23.481}$$

$$M_J = 1,2 \times 10^5 \; M_\odot \left(\frac{T}{100 \text{ K}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho}{10^{-24} \text{ g cm}^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{3}{2}} \tag{23.482}$$

onde escrevemos $\rho = \rho_0$. Massas maiores do que a massa de Jeans colapsam se comprimidas. Note que $\mu = 1$, $\rho = 10^{-24}$ g cm^{-3} e $T = 100$ K são

as condições típicas das nuvens interestelares de hidrogênio neutro. Dessa forma, obtemos que somente massas grandes, $M_J \simeq 10^5\ M_\odot$, podem colapsar pela instabilidade de Jeans. Para densidades da ordem de $\rho = 10^{-24}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$, o tempo de queda livre $\tau \simeq (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$ é da ordem de 10^8 anos.

Primeiro a formação de hidrogênio molecular e depois a emissão de radiação infravermelha oriunda da colisão do hidrogênio molecular com átomos de hidrogênio, faz com que a temperatura nas partes mais densas caia para 200 a 300K. Este é o momento da separação da matéria escura e da matéria comum. Como as partículas de matéria escura não emitem radiação, elas não se condensam e permanecem espalhadas na nuvem primordial. Nas estrelas de população I e II, os grãos de poeira e moléculas com elementos pesados resfriam as nuvens com eficiência, até temperaturas de cerca de 10K. Mas nas estrelas de população III este resfriamento por moléculas pesadas e poeira não ocorre. Como a massa de Jeans é proporcional ao quadrado da temperatura e inversamente proporcional à raiz quadrada da sua pressão, as primeiras nuvens formadoras de estrelas tiveram massa de Jeans quase 1000 vezes maior do que as atuais.

Acredita-se que as estrelas se formem por fragmentação da nuvem colapsante, com os fragmentos tornando-se instáveis após o início do colapso da nuvem, e colapsando mais rápido do que a nuvem como um todo. Mas será que a fragmentação continua até corpos como planetas? Se a nuvem colapsar isotermicamente, $M_J \propto \rho^{-1/2}$. Entretanto, se o colapso for adiabático, isto é, sem perda de energia,

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S \longrightarrow T \propto \rho^{2/3} \quad \text{se } \Gamma_3 = \gamma = 5/3$$

e a massa de Jeans $M_J \propto T^{3/2}\rho^{-1/2} \propto \rho^{1/2}$, isto é, a massa de Jeans aumenta durante um colapso adiabático, e a fragmentação não ocorre. A fragmentação, portanto, só ocorre se o colapso for aproximadamente isotérmico, isto é, se a nuvem irradiar a energia gravitacional do colapso.

O astrônomo inglês *Sir* Martin John Rees (1942-) publicou em 1976, o artigo *Opacity-limited hierarchical fragmentation and the masses of protostars*, no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 176, p. 483, uma demonstração de que a fragmentação de nuvens moleculares ocorre até uma massa mínima da ordem de 0,03 $M_\odot$, estudando o colapso aproximadamente, sem levar em conta os detalhes de como a energia é irradiada durante o colapso.

A menor anã marrom não binária encontrada nas Pleíades tem massa de 0,05 $M_\odot$, de acordo com Martin R. Cossburn, Simon T. Hodgkin, Richard

F. Jameson e David J. Pinfield no artigo *Discovery of the lowest mass brown dwarf in the Pleiades*, publicado em 1997 no Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 288, p. 23. Gilles Chabrier (2002), no artigo *The Galactic Disk Mass Budget. II. Brown Dwarf Mass Function and Density*, publicado em 2002 no Astrophysical Journal, 567, p. 304, estima que a densidade de massa das anãs marrons corresponde a aproximadamente 10% da densidade de massa das estrelas na nossa Galáxia.

As estrelas com massa inicial abaixo de 0,08 $M_\odot$ tornam-se degeneradas antes do início da ignição do hidrogênio e, portanto, nunca queimam o hidrogênio. Para as estrelas com massa maior do que 13 $M_{\text{Júpiter}}$, os elementos frágeis D e Li são destruídos. Abaixo de 13 $M_{\text{Júpiter}}$ nenhuma reação nuclear ocorre.

O tempo característico de queda livre do fragmento é $(G\rho)^{-1/2}$ e a energia total a ser irradiada é da ordem da energia gravitacional $E_G \simeq GM^2/R$ (ver seção 23.9), onde M e R são a massa e o raio do fragmento. A quantidade de energia por unidade de tempo a ser irradiada para manter o fragmento com a mesma temperatura é da ordem de

$$A \simeq \frac{GM^2}{R}(G\rho)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{G^{\frac{3}{2}} M^{\frac{5}{2}}}{R^{\frac{5}{2}}}$$

Entretanto, um fragmento de temperatura T não pode irradiar mais do que um corpo negro com a mesma temperatura. Se definirmos $f \leq 1$ como o fator que leva em conta que o fragmento irradia menos do que um corpo negro, a taxa de perda de energia do fragmento é dada por:

$$B = 4\pi f R^2 \sigma T^4$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann. A transição de colapso isotérmico para adiabático ocorre quando $A \simeq B$, isto é, quando

$$M^5 = \frac{64\pi^3}{3} \frac{\sigma^2 f^2 T^8 R^9}{G^3} \tag{23.483}$$

Assumindo que a fragmentação termina quando a massa de Jeans é igual a essa massa, substituimos 23.482 em 23.483, e R por

$$R = \left(\frac{3M_J}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$

obtendo a massa de Jeans no final da fragmentação:

$$M_J = \left(\frac{\pi^9}{9}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sigma G^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Re}{\mu}\right)^{\frac{9}{4}} f^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{4}} \quad (23.484)$$

$$M_J = 0,02\ M_\odot f^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{4}} \quad (23.485)$$

para T em K e usando $\mu \simeq 1$.

Para $T \simeq 1000$ K e $f \simeq 0,1$, obtemos $M_J \simeq 0,3\ M_\odot$, ou seja, a fragmentação termina para fragmentos da ordem da massa solar. As observações indicam que a Função Inicial de Massa (IMF) dada pela relação de Salpeter [Edwin Ernest Salpeter (1924-2008)]

$$IMF \equiv N(\mathcal{M}) \propto \mathcal{M}^{-2,35}$$

é basicamente a mesma nas diversas regiões de nossa Galáxia e mesmo nas galáxias próximas, até $z \simeq 2$, equivalente a 7 Ganos em relação ao tempo atual. A composição química do gás parece ser similar à da Via Láctea para a mesma idade (B. E. Pagel & G. Tautvaisiené, 1995, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 276, 505).

O esfriamento das nuvens interestelares se dá principalmente através da excitação colisional dos metais para níveis proibidos, isto é, que se desexcitam principalmente por emissão de fótons. Estes fótons portanto têm níveis de energia que não podem ser absorvidos normalmente, e a energia é perdida da nuvem. Nas regiões HII as linhas de O^{2+} dominam, no gás neutro as linhas de C^+ e Fe^+, e no gás molecular as linhas de H_2. A formação de moléculas torna o gás mais denso porque o número de partículas é reduzido. Mas a formação de H_2 se dá principalmente por catalização de grãos de poeira, produzidos pelas estrelas de População I e II e retornados ao meio interestelar por ventos e explosões. Quanto mais metálico o gás, mais rápido ele esfria.

Sem metais a fragmentação não ocorre porque o esfriamento é pequeno.

$$M_J \simeq 4000 \rightarrow 120\,000\ M_\odot \text{ para } T = 10 \rightarrow 100 \text{ K}$$

Se colapso isotérmico (nuvem transparente):

$$M_J \propto \rho^{-1/2} \longrightarrow \rho \uparrow 1000 \rightarrow M_J \downarrow 31 \text{ ocorre fragmentação}$$

Mas se colapso adiabático (nuvem opaca):

$$M_J \propto \rho^{1/2} \longrightarrow \rho \uparrow 1000 \rightarrow M_J \uparrow 31 \text{ não ocorre fragmentação}$$

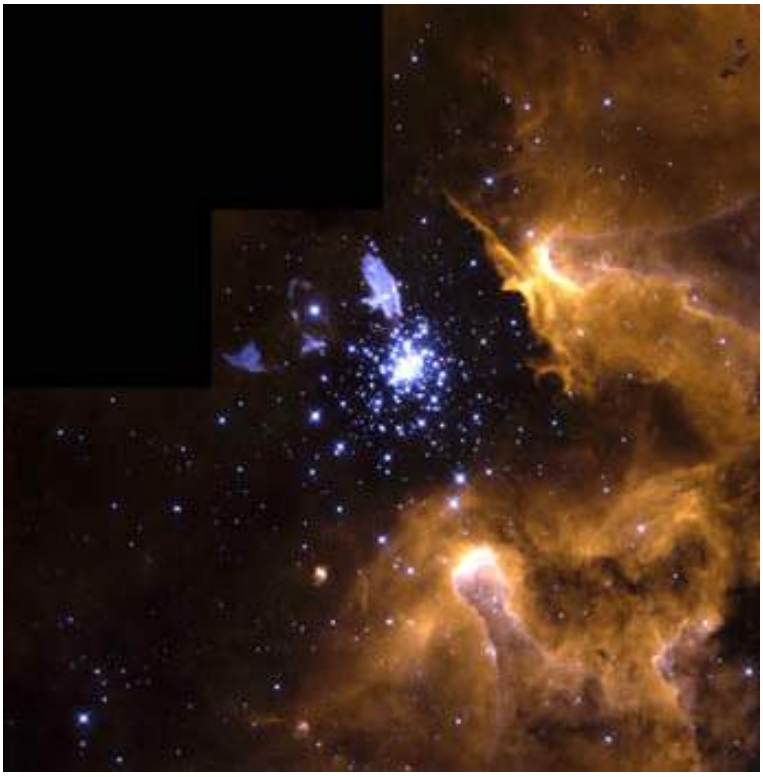


Figura 23.63: Imagem da nebulosa galática NGC3603, obtida com o Telescópio Espacial Hubble, mostrando desde estrelas supergigantes e Wolf-Rayet na esquerda, e glóbulos de Bok no canto superior direito.

A formação estelar ocorre nas nuvens moleculares massivas e densas encontradas próximas ao plano da nossa Galáxia. O Saco de Carvão, localizado a aproximadamente 150 pc é um exemplo de uma nebulosa escura. A região de ρ Ophiuchi, altamente obscurecida, é provavelmente a nuvem molecular e região de formação estelar mais próxima. No ótico tem um raio de cerca de 5 pc e contêm várias regiões HII. Outra nuvem molecular é Sagittarius B-2, localizada cerca de 200 pc do centro de nossa Galáxia e com uma massa estimada em 3–10 milhões de massas solares. Como a extinção visual é de cerca de 25 magnitudes, esta região só pode ser observada no rádio e infravermelho. A molécula de CO é particularmente importante no estudo das nuvens moleculares porque pode ser observada em 6 cm e acredita-se que a razão $CO/H_2 \simeq 10^{-4}$ seja a mesma em todas nuvens moleculares. Por

dificuldades instrumentais, a molécula H_2 só foi observada próximo do Sol, no ultravioleta e no infra-vermelho, enquanto a molécula de CO foi mapeada por toda a Via Láctea e mesmo em galáxias próximas.

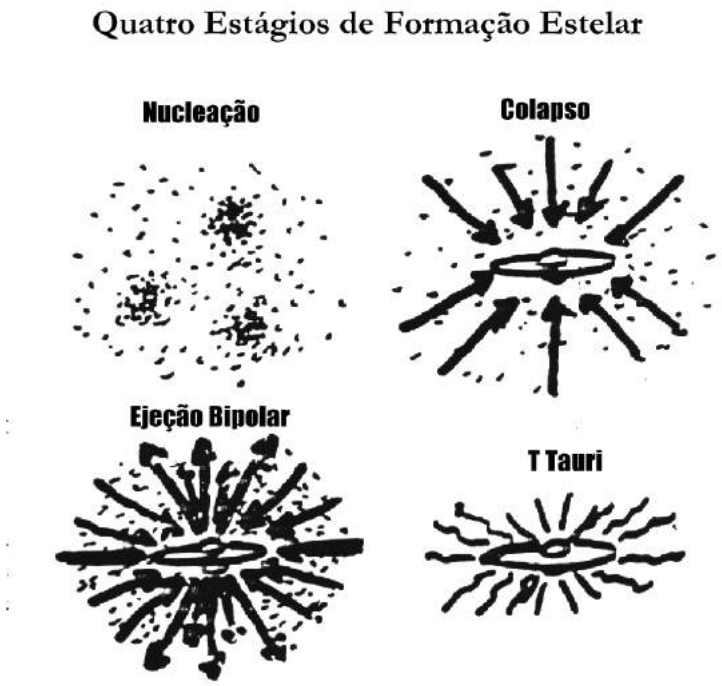


Figura 23.64: Esquema de formação estelar

Se levarmos em conta o campo magnético, a equação de movimento de Euler (2.377) torna-se

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}P-\rho\vec{\nabla}\Phi-\vec{F}_{\text{arrasto}}-\vec{F}_{\text{Lorentz}}$$

onde

$$\vec{F}_{\text{arrasto}}=n_i n\langle\sigma w\rangle\frac{m_i m_n}{m_i+m_n}\left(\vec{v}_i-\vec{v}\right)$$

e $n_i n\langle\sigma w\rangle$ é a taxa de colisões, w é a velocidade relativa entre as partículas, $\frac{m_i m_n}{m_i+m_n}\left(\vec{v}_i-\vec{v}\right)$ é o momentum transferido em uma colisão,

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}}=n_i e\left(\vec{E}+\frac{\vec{v_i}}{c}\times\vec{B}\right)-n_e e\left(\vec{E}+\frac{\vec{v_e}}{c}\times\vec{B}\right)=\frac{\vec{j_e}}{c}\times\vec{B}$$

onde podemos desprezar o campo elétrico $\vec{E}$,

$$\vec{j}_e = n_i e\,(\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \vec{B}$$

onde a última igualdade é pela Lei de Ampére, já que a corrente é a fonte do campo magnético.

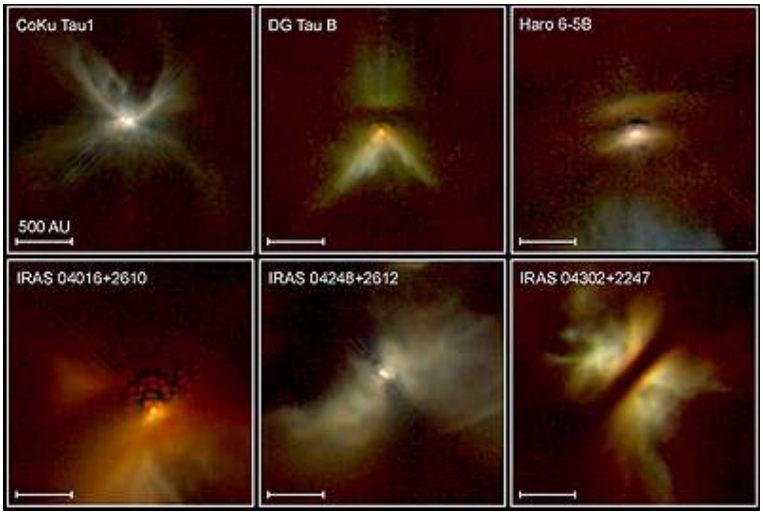


Figura 23.65: Imagens do Telescópio Espacial Hubble de discos proto-estrelares detectados pelo IRAS

As regiões de formação estelar também apresentam nebulosas caracterizadas por espectro de emissão, jatos e ejeção bipolar, chamados de objetos de Herbig-Haro, em honra aos descobridores George H. Herbig (1950, Astrophysical Journal, 111, 11) e Guillermo Haro (1952, Astrophysical Journal, 115, 572).

Richard B. Larson publicou, em 1969, no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 145, 271, cálculos do colapso de uma nuvem originalmente homogênea com uma massa solar. Na fase inicial, a nuvem colapsante é oticamente fina (transparente) e aproximadamente isotérmica, com $T \simeq 10$ K. Durante o colapso, a densidade central aumenta rapidamente, enquanto a densidade nas partes externas permanece praticamente constante. A região central se torna opaca quando a densidade central atinge cerca de $10^{-13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, e subseqüente aumento na densidade produz aumento adiabático na temperatura. Dessa forma, a pressão aumenta e o colapso

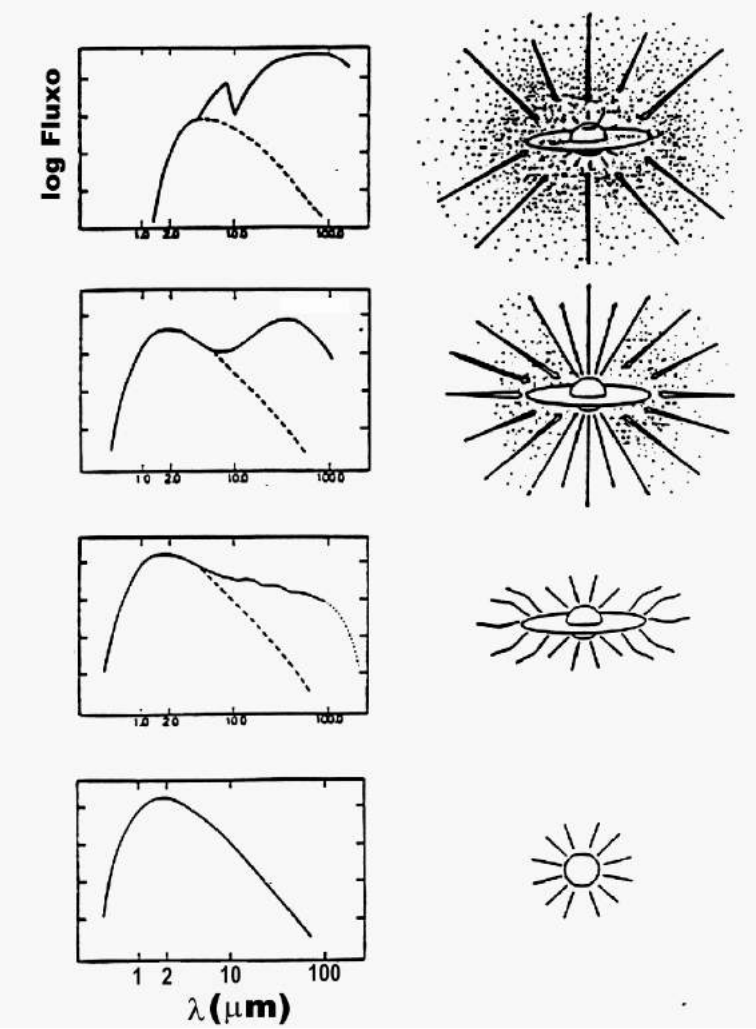


Figura 23.66: Espectro de uma proto-estrela de acordo com Bruce A. Wilking (1989), *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 101, 229

em queda livre chega ao fim, formando um núcleo central em equilíbrio hidrostático, com densidade central de cerca de 10^{-10} g cm^{-3}, e temperatura central $T_c \simeq 170$ K. As camadas externas continuam sendo acretadas ao núcleo. Esse núcleo é chamado de proto-estrela. Quando a temperatura central atinge cerca de 2000 K, o hidrogênio, que estava na forma molecular (H_2), se dissocia e como parte da energia de contração é utilizada na

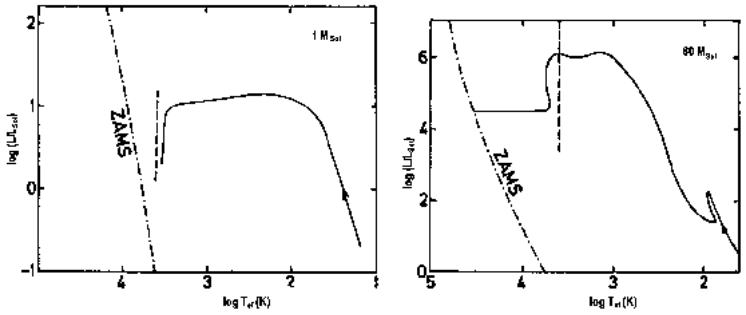


Figura 23.67: Diagrama Hertzsprung-Russel com o caminho evolucionário para proto-estrelas de 1 $M_\odot$ e 60 $M_\odot$. Os caminhos começam no canto inferior direito, onde a radiação emitida pelas nuvens é no infravermelho e, finalmente, aproximam-se da seqüência principal de idade zero (ZAMS), quando a proto-estrela finalmente atinge o equilíbrio térmico e hidrostático. A proto-estrela de 60 $M_\odot$ ejeta parte do envelope, chegando à seqüência principal com 17 $M_\odot$. A linha tracejada indica o limite de Hayashi (Immo Appenzeller e Walther M. Tscharnuter, 1974, *Astronomy & Astrophysics*, 30, 423).

dissociação, o equilíbrio hidrostático não é mais mantido, e a proto-estrela colapsa novamente. Quando praticamente todo o hidrogênio central está na forma atômica, o núcleo torna-se dinamicamente estável novamente, atingindo uma densidade de cerca de 2×10^{-2} g cm^{-3} e $T_c \simeq 2 \times 10^4$ K. Para um observador externo, a nuvem continua como um objeto infravermelho enquanto o envelope for opaco à radiação visível. Com o acréscimo de matéria ao núcleo, o envelope vai se tornando transparente, até a fotosfera atingir a superfície do núcleo em equilíbrio hidrostático. As reações nucleares iniciam, mas a luminosidade é, ainda, dominada pela contribuição da contração. A pro-estrela torna-se completamente convectiva, chegando ao limite de Hayashi, tornando-se uma estrela visível, em equilíbrio hidrostático, mas ainda contraindo-se, fora de equilíbrio térmico.

Descendo a trajetória de Hayashi, a contração ocorre em escala de tempo térmica, 10^4 a 10^5 anos. A transformação de deutério ^{2}D em ^{3}He ocorre por $^2\mathrm{D}\,(p,\gamma)\,^3\mathrm{He}$ durante esta descida, pois requer só 10^5 K, reduzindo a velocidade com que a estrela desce a trajetória. A maior parte do ^{3}He é primordial (do Big-Bang), já que a abundância de ^{2}D é muito pequena. A acresção se dá através de um disco.

Günther Wuchterl & Werner M. Tscharnuter, publicaram no Astronomy & Astrophysics, 398, 1081, de 2003, seus cálculos de colapso protoestelar e pré-seqüência principal, mostrando que seus modelos de estrelas de 2 $M_\odot$ estão próximos dos cálculos anteriores, quando os efeitos dinâmicos de acresção de massa tornam-se desprezíveis, mas que os modelos de 1 $M_\odot$ nunca tornam-se completamente convectivos e são aproximadamente 1 milhão de anos mais velhos que os modelos calculados assumindo equilíbrio hidrostático desde o início.

As observações indicam que existe uma grande variedade de condições iniciais na formação de estrelas, já que existe uma grande dispersão nas velocidades de rotação das estrelas pré-sequência principal (Anita Krishnamurthi, Marc H. Pinsonneault, Sydney Barnes, Sabatino Sofia, 1997, *Astrophysical Journal*, 480, 303).

23.31 Estrelas binárias

Um grande número de estrelas está em sistemas binários e múltiplos, e sua evolução depende não somente da massa da estrela mas também da separação entre elas. Se as estrelas estão separadas mais do que 10 vezes o raio que terão quando supergigantes, suas evoluções são como as de estrelas não binárias. Para distâncias menores, existe interação entre as estrelas que afeta sua evolução.

Consideremos duas estrelas de massa M_1 e M_2 separadas por uma distância a orbitando o centro de massa do sistema.

No sistema de referência em rotação com o sistema binário, o movimento de uma partícula de massa m é dado pela relação:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \vec{F_1} + \vec{F_2} - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - 2m\left(\vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \qquad (23.486)$$

onde $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ são as forças gravitacionais sobre m causadas pelas estrelas de massas M_1 e M_2, r é medido a partir do centro de massa e os dois últimos termos na equação (23.486) representam a força centrífuga e a força de Coriolis [Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843)]. A origem do sistema em rotação é o centro de massa do sistema e $\vec{w}$ é a velocidade orbital angular do sistema, apontando na direção do eixo z.

A força centrífuga pode ser derivada do potencial centrífugo V_c:

$$V_c = -\frac{1}{2}mw^2\left(x^2 + y^2\right) = -\frac{Gm\left(M_1 + M_2\right)\left(x^2 + y^2\right)}{2a^3}$$

Como a força de Coriolis é perpendicular à direção de movimento, ela não pode realizar trabalho sobre a massa pontual m.

Se m está no plano (x,y), sua energia é dada por

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + V(x, y, 0),$$

e

$$\begin{aligned} V(x,y,0) &= -\frac{GmM_1}{\left[\left(x - x_1^2\right)^2 + y^2\right]^{1/2}} - \frac{GmM_2}{\left[\left(x - x_2^2\right)^2 + y^2\right]^{1/2}} - \\ &\quad - \frac{Gm\left(M_1 + M_2\right)\left(x^2 + y^2\right)}{2a^3} \end{aligned}$$

O potencial V(x,y,0) tem máximos em três pontos críticos que são chamados de pontos lagrangianos no eixo x, e dois no eixo y. A teoria dos pontos lagrangianos foi desenvolvida, em 1772, pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813). O ponto Lagrangiano L_1, localizado no eixo x, entre as duas estrelas, é de particular importância porque, se uma das estrelas se expande suficientemente tal que parte de sua superfície atinge o ponto L_1, ocorrerá transferência de massa entre as estrelas. A curva equipotencial que inclui o ponto L_1 é chamada de *Lóbulo de Roche*. As equipotenciais próximas de M_1 e M_2 são quase esféricas em torno das estrelas individuais, enquanto que as equipotenciais externas ao Lóbulo de Roche envolvem as duas estrelas.

23.31.1 Binárias Próximas

As estrelas são consideradas binárias próximas quando ocorre transferência de massa, em alguma fase de sua evolução.

Se definirmos J como o *momentum* angular total em relação ao centro de massa:

$$J = M_1 w x_1^2 + M_2 w x_2^2 = \frac{M_1 M_2 \left(Ga\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(M_1 + M_2\right)^2} \tag{23.487}$$

e resolvermos para a:

$$a = \frac{MJ^2}{G\left(M_1 M_2\right)^2} = \frac{MJ^2}{GM_1^2\left(M - M_1\right)^2} \tag{23.488}$$

obtemos, se a massa total e o momentum angular forem conservados durante a transferência de massa,

$$\delta a = \frac{2MJ^2}{GM_1^3\left(M - M_1\right)^2}\left(\frac{-M + 2M_1}{M - M_1}\right)\delta M_1 \tag{23.489}$$

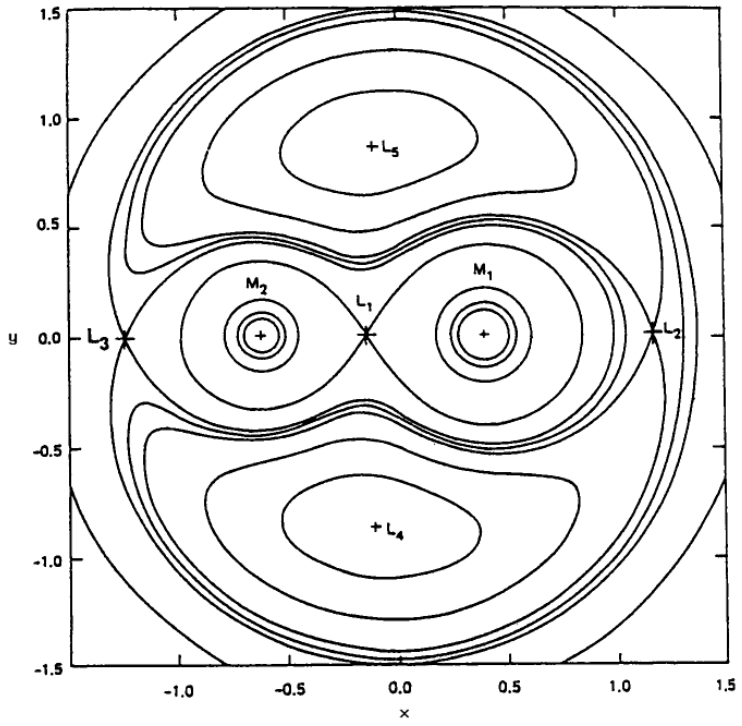


Figura 23.68: Equipotenciais de um sistema binário de massas similares, mostrando os 5 pontos lagrangianos: L_1 a L_5. A equipotencial que passa por L_1 chama-se Lóbulo de Roche e, quando uma estrela se expande até essa equipotencial, transfere massa para a companheira.

com $\delta M_1 + \delta M_2 \equiv 0$. Esta equação nos dá a relação entre a massa transferida e a mudança na separação entre as estrelas.

Para uma estimativa da ordem de grandeza, podemos expressar o raio da esfera com o mesmo volume que o Lóbulo de Roche da componente i como:

$$R_i^{\mathrm{L}} \simeq 0,52 \left(\frac{M_i}{M_{\mathrm{total}}} \right)^{0,44} a$$

Existem quatro maneiras de preencher o Lóbulo de Roche:

- crescimento de uma das componentes por evolução;

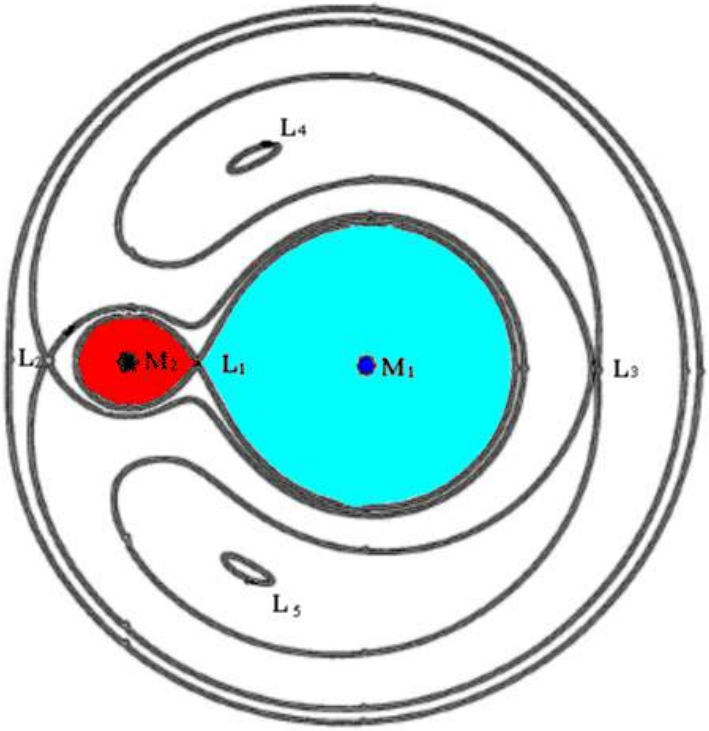


Figura 23.69: Equipotenciais de um sistema binário com estrelas de massas diferentes, mostrando os 5 pontos lagrangianos: L_1 a L_5. A equipotencial que passa por L_1 chama-se Lóbulo de Roche [Edouard Roche (1820-1883)].

- redução da separação entre as componentes, a, por emissão de vento magnético ou ondas gravitacionais;
- aumento de raio da receptora de massa por rejeição do material acretado ou ignição termonuclear na base da camada acretada;
- colisão da binária com outra estrela de um aglomerado denso, que reduza a separação entre as componentes.

Quando se inicia a transferência de massa, se a doadora já não tinha envelope convectivo, o Lóbulo de Roche continua cheio e, portanto, continua a transferência de massa até que a razão das massas se inverta: $M_1'/M_2' \approx M_2/M_1$. Se a doadora já possuia envelope convectivo, ela continua perdendo

massa até que a massa do envelope de hidrogênio $M_{\rm H} \leq 0,01\ M_{\odot}$, como nas estrelas sdO e sdB.

23.31.2 Discos de Acresção

O disco de acresção se forma porque o gás que passa pelo ponto lagrangiano L1 tem momentum angular muito alto para cair sobre a estrela. Se a matéria espiralando tem alta densidade, as colisões do gás no disco convertem energia cinética em calor, aquecem o gás, que irradia e perde energia, entrando em órbita da estrela receptora. Mas a viscosidade do disco continua a converter energia cinética em calor, levando o disco a irradiar energia e, portanto se deslocando para órbitas mais internas. A fricção no disco carrega gás para fora, há transporte de momentum angular permitindo que parte da matéria seja acretada na estrela.

Stuart Louis Shapiro (1947-) & Saul A. Teukolski (1947-) (1983, Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, New York: John Wiley & Sons) calcularam a luminosidade do disco. Se a borda externa do disco tiver um raio grande comparado com o raio R da estrela que está acretando a matéria, de massa M, a matéria acretada ganhou uma energia gravitacional GM/Rm por unidade de massa. Parte da energia é perdida aquecendo o disco, enquanto a outra parte está disponível para a estrela ou para a zona de transição. A taxa com que a energia é liberada deve ser proporcional à taxa de acresção de massa, $\dot{M}$. Se o sistema está em equilíbrio, então podemos igualar a taxa de aquecimento do disco com a luminosidade do disco. Se o campo magnético for desprezível, a luminosidade do disco será a metade da variação da energia gravitacional:

$$L_{\rm disco} \simeq \frac{1}{2}\frac{G\dot{M}M}{R} \simeq 10^{34}\frac{\dot{M}}{10^{-9}M_{\odot}/ano}{\rm ergs/s}$$

para anãs brancas (R=10 000 km), e

$$L_{\rm disco} \simeq \frac{1}{2}\frac{G\dot{M}M}{R} \simeq 10^{37}\frac{\dot{M}}{10^{-9}M_{\odot}/ano}{\rm ergs/s}$$

para estrelas de nêutrons e buracos negros (R=10 km). A outra metade da energia vai para a estrela ou para a camada de transição do disco. Note que para taxas de transferência da ordem de $10-9$ massas solares por ano, típica de sistemas interagentes, a luminosidade do disco é muito maior do que a luminosidade do Sol.

23.31.3 Envelope Comum

Os modelos que evoluíram além da base do ramo das gigantes possuem um envelope convectivo. Estes modelos se expandem, em resposta a perda de massa, desde que essa não seja muito grande. Para estrelas de massa intermediária, esse limite corresponde a, aproximadamente, $\dot{M} \simeq 10^{-4}$ a $10^{-2}\ M_\odot$/ano. Uma companheira típica de uma estrela de massa baixa, ou intermediária, que perde massa, é uma estrela de baixa massa, ou uma anã branca. Para acréscimo em estrelas de baixa massa, a massa acretada torna-se quente no disco de acresção, o que faz a anã branca se expandir, quando recebe massa. No caso de uma anã branca com cerca de $0,6\ M_\odot$, quando a camada acretada atinge cerca de $0,001\ M_\odot$, o hidrogênio queima-se termonuclearmente na camada acretada, e a estrela expande-se rapidamente, atingindo proporções de uma gigante vermelha. A companheira, portanto, preenche seu Lóbulo de Roche e, em vez de transferência de massa de uma estrela para a companheira, ocorre a fase de envelope comum, isto é, ambos Lóbulos de Roche são preenchidos e a matéria, expelida pela primária, preenche a região além dos lóbulos, formando um envelope comum em expansão. A fricção entre a matéria do envelope comum e as estrelas imersas no envelope, causa, ao mesmo tempo, a perda de massa do sistema e o espiralamentos das estrelas, uma em direção à outra. Quando a maior parte da matéria rica em hidrogênio do envelope da estrela doadora passa pelo envelope comum, e é perdida do sistema, o remanente compacto da primária e sua companheira estão em uma órbita mais próxima. O envelope comum foi proposto por Bohdan Paczyński (1940-2007), em seu artigo de 1976, no IAU Symposium 73, *Structure and Evolution of Close Binary Systems*, ed. P. Eggleton, S. Mitton e J. Whelan (Dordrecht: Reidel), p.75.

Um exemplo deste processo é a binária V471 Tau, consistindo de uma anã branca com uma companheira vermelha aproximadamente 0,6 magnitudes acima da seqüência principal. As estrelas têm massa similares, próximas de $0,7\ M_\odot$, e estão separadas por aproximadamente $3\ R_\odot$, cerca de cinco vezes o raio da estrela vermelha. Para produzir uma anã branca de $0,7\ M_\odot$, a precursora deveria ter uma massa entre $3,5\ M_\odot$ e $4,5\ M_\odot$ e, portanto, deve ter atingindo um raio maior do que o raio no final da seqüência principal, de $4\ R_\odot$, antes de preencher seu Lóbulo de Roche. Além disto, como a companheira também tem somente $0,7\ M_\odot$, a maior parte da massa do sistema foi perdida, e a distância entre as estrelas reduzida.

As estrelas R Coronae Borealis são variáveis irregulares, com atmosferas deficientes em hidrogênio, ricas em carbono e oxigênio, e com grande formação de grãos de poeira (grãos amorfos de carbono) que obscurecem

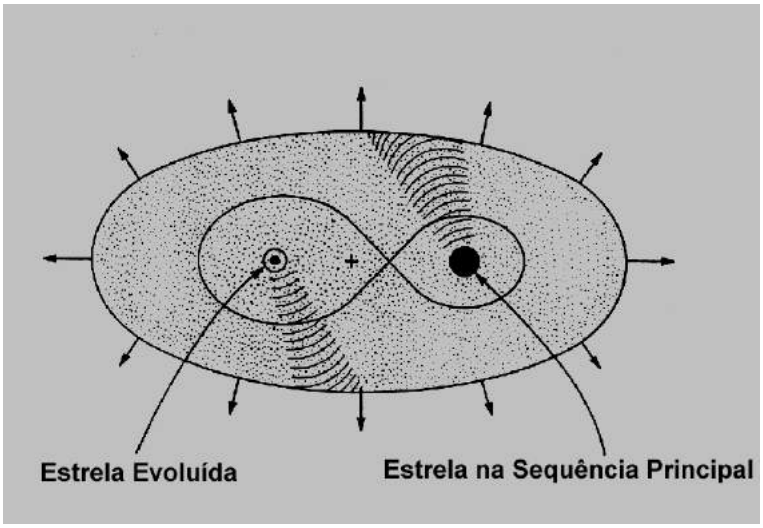


Figura 23.70: Esquema da fase de envelope comum.

temporariamente a estrela. Com o tempo a poeira sai da linha de visada e a estrela é visível novamente. R Cor Bor foi descoberta em 1796 por Edward Pigott (1753-1825). São provavelmente formadas em um flash de hélio ou na coalescência de um sistema binário de anãs brancas [Geoffrey C. Clayton (1996) "The R Coronae Borealis Stars", Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 108, 225.]

Uma classe de binárias interagentes é a das Variáveis Cataclísmicas, em que a estrela que recebe massa é uma anã branca. Em geral a doadora é uma estrela de baixa massa e fria, uma anã vermelha. O período orbital típico é de algumas horas e a separação em geral menor do que o raio do Sol. Merle F. Walker, nos anos 1950, propôs que as variáveis cataclísmicas eram binárias. Seus brilhos mudam drasticamente e constantemente. A maioria possui discos de acresção. As primeiras descobertas foram as novas, que variam de brilho de 6 a 19 magnitudes, em escalas de tempo de meses a anos. As de maior amplitude enfraquecem mais rapido. As variações são causadas pela queima explosiva do hidrogênio acretado na anã branca. Algumas são novas recorrentes e pelo menos uma, T Pyx, apresentou jatos colimados emanando do disco de acresção (Tariq Shahbaz, Mario Livio, Karen A. Southwell & Phil A. Charles. 1997, Astrophysical Journal, 484, 59). Os sistemas com jatos são conhecidos como microquasares.

Outro grupo de variáveis cataclísmicas não magnéticas é o das novas anãs.

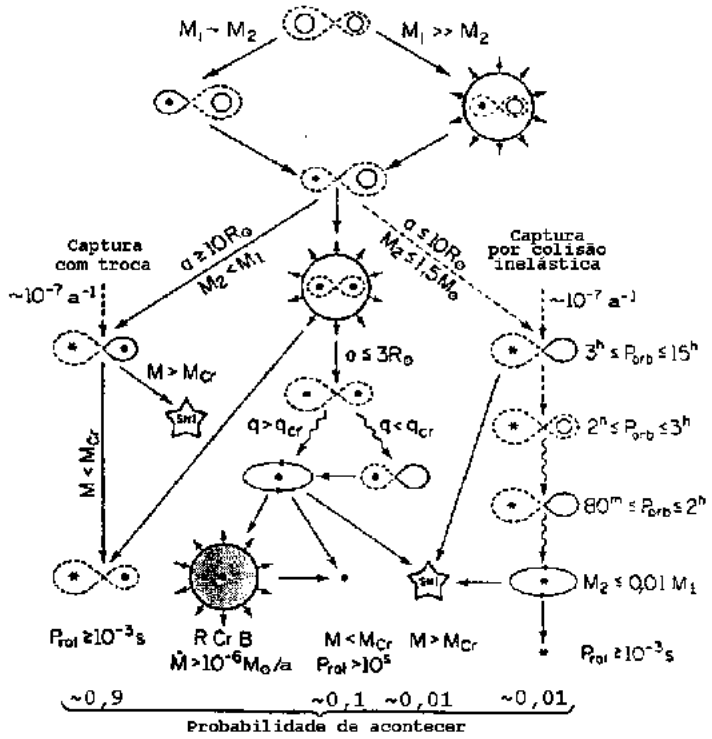


Figura 23.71: Cenários para a evolução de binárias, segundo Icko Iben Jr. (1991) Astrophysical Journal Supplement, 76, 55. Linhas onduladas indicam transições causadas por emissão de ondas gravitacionais. Os círculos pequenos abertos indicam estrelas não evoluídas, enquanto os círculos fechados representam os núcleos degenerados das gigantes. $M_{\rm cr}$ é a massa crítica de Chandrasekhar. Os asteriscos indicam anãs brancas, ou estrelas de nêutrons. Elipses girando no sentido anti-horário indicam discos de acresção. A probabilidade de ocorrência do produto final na base da figura foi calculada usando-se uma taxa de formação de binárias de 1 por ano.

Suas variações são de 2 a 5 magnitudes, mas ocorrem mais frequentemente do que nas novas, possivelmente causadas pela variação na taxa de acresção de massa pelo disco. Outro grupo é o das nova-like (parecidas com novas), que não sofrem variações extremas (*outbursts*) e, portanto, mantém o brilho

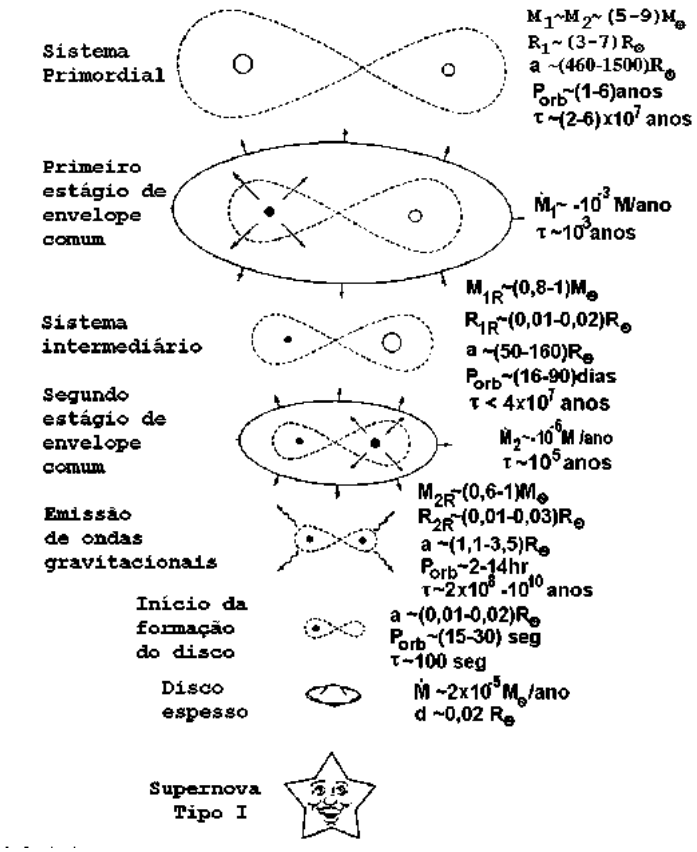


Figura 23.72: Cenário para a formação de uma supernova tipo Ia, a partir de uma binária inicialmente com duas estrelas relativamente massivas, que evoluem por duas fases de envelope comum em um par de anãs brancas com núcleos de C/O, e com massa combinada acima do limite de Chandrasekhar, segundo os cálculos de Icko Iben Jr. e Alexander V. Tutukov (1984) Astrophysical Journal, 259, L79.

médio. A maior parte da luz visível destes sistemas vem do disco de acresção, pois o plasma é aquecido ao espiralar no potencial da estrela primária. A mancha quente (*hot spot*), onde a matéria da secundária está impactando o disco, causa aumento do brilho quando passa pela linha de visada.

As cataclísmicas magnéticas têm campos magnéticos de milhões de Gauss,

o que impede a formação do disco e afunilam a acresção pelos pólos das estrelas, liberando intensamente em raio-X. Se o campo é tão forte que sincroniza o sistema, chamam-se polares. Uma classe similar de obtejos é a dos Transientes de Raio-X, em que a receptora é uma estrela de nêutrons ou um buraco negro.

Note que a acresção em objetos compactos é mais efetiva do que a fusão nuclear na liberação de energia, já que a fusão de H em He libera $E = 0,007Mc^2$, enquanto a acresção libera a energia cinética, da ordem de $E = 0,2Mv^2_{\rm queda}$, e $v_{\rm queda} \simeq v_{\rm escape} \simeq 0,5c$ para estrelas de nêutrons e buracos negros, resultando em $E \simeq 0,25Mc^2$

As estrelas em sistemas binários próximos com estrelas quentes (O ou Be) também são afetadas pelo vento estelar da estrela massiva e pelo própio aquecimento das camadas externas pela radiação da estrela massiva. Existem várias centenas de binárias que emitem raio X devido à incidência de vento da estrela massiva (HMXB = High Mass X-Ray Binaries).

23.32 Pulsações Radiais Adiabáticas

As estrelas intrinsicamente variáveis não estão em equilíbrio hidrostático porque as forças não são contrabalanceadas e acelerações locais causam o movimento dos fluidos. Usamos as variações de luminosidade para obter informações dos interiores estelares assim como os geólogos usam os movimentos das crostas terrestres para estudar o interior da Terra na sismologia. [6] Na Terra, as ondas de pressão, primárias, têm velocidade de 6 km/s na terra e nas rochas, mas somente 1/3 disto na água. As ondas "s", de cisalhamento, secundárias, têm velocidade de 3 km/s, mas maior amplitude e, portanto, maior poder de destruição.

[6] O geólogo e astrônomo inglês John Michell (1724-1793), professor de Cambridge, é considerado o fundador da sismologia. Ocorreram vários terremotos na Inglaterra em 1750: Londres, Porthsmouth, Ilha de Wight, Wales e Northamptonshire. Em 1755 Lisboa foi destruída por um dos maiores terremotos já registrados. Ele publicou em 1757 *The History and Philosophy of Earthquakes*, em que propunha que a causa eram a existência de grandes "fogos subterrâneos"que recebiam grande quantidade de água, gerando vapor e portanto força. Em 1783 o mesmo Michell propôs que a gravidade de uma estrela com a massa do Sol, mas com 1/500 do seu raio, faria a luz retornar a ela, o que hoje chamamos de buraco negro. No mesmo ano o suiço Élie Bertrand (1712-c.1790) publicou *Mémoires Historiques et Phisiques sur les Tremblemens de Terre*. Luigi Palmieri (1807-1896), italiano, estudou a passagem das ondas em areia, determinando a velocidade de 825 pés/segundo e em granito sólido, 1665 pés/segundo, além de outros materiais e propôs o uso da palavra sismologia, estudando a velocidade das ondas.

A derivação a seguir é fortemente baseada na de Carl John Hansen (1933-2011) e Steven Daniel Kawaler (1958-) em seu livro de 1994 "Stellar Interiors" (New York: Springer-Verlag).

A estrutura de uma estrela é fundamentalmente determinada pela mecânica. Relembramos que o tempo dinâmico, ou tempo de queda livre, ($t_{\rm din}$) é normalmente pequeno se comparado com o tempo de variação da energia dentro da estrela, por exemplo o tempo de Kelvin-Helmoltz ($t_{\rm KH}$). Isto não é estritamente válido para todas estrelas, ou mesmo para as partes externas da maioria das estrelas, mas forma a base da "aproximação adiabática" no estudo das pulsações estelares. Nesta aproximação, assumimos que todos os mecanismos de mudança de energia podem ser ignorados, de modo que o sistema é puramente mecânico. Por exemplo, o som de um sino depende muito mais de sua estrutura do que da energia dada por uma batida. O problema, nesta aproximação, se reduz a estudar os modos normais de um sistema equivalente a pêndulos e molas, ou mais corretamente, ao estudo de ondas sonoras em uma caixa. A aproximação adiabática é extremamente útil na teoria de estrelas variáveis porque simplifica a análise, mas produz resultados precisos da resposta dinâmica da maioria das estrelas. O preço pago é severo, entretanto, porque não nos diz nada sobre a causa real da pulsação das estrelas. Nesta seção trataremos dos movimentos radiais. Desta maneira assumimos que a estrela mantém a simetria esférica e podemos desprezar os efeitos de rotação, campo magnético, etc.

Como a transferência de calor é ignorada na aproximação adiabática, podemos descrever a estrutura mecânica somente com as equações de massa e de força

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \tag{23.490}$$

$$\ddot{r} = -4\pi r^2 \left(\frac{\partial P}{\partial M_r}\right) - \frac{GM_r}{r^2} \tag{23.491}$$

onde explicitamente introduzimos derivadas parciais para assegurar que derivadas temporais somente aparecem onde for apropriado. Se a estrela fosse totalmente estática, então a aceleração $\ddot{r}$ seria sempre nula. Imagine que este seja o caso inicial mas, de algum modo, a estrela é forçada a sair deste estado de equilíbrio hidrostático inicial, mas mantendo a simetria esférica. Ainda, para tornar o sistema tratável, supomos que as perturbações do estado estático são pequenas da seguinte maneira: as variáveis com subscrito zero no raio (r_0) ou densidade (ρ_0) denotam os valores locais das quantidades estáticas em um certo ponto de massa M_r. Quando se inicia o movimento, o raio e a densidade, em geral, se afastam dos valores estáticos neste mesmo

ponto, e serão funções do tempo e da posição. Essa descrição é uma descrição Lagrangiana do movimento, porque segue um elemento de massa particular onde, podemos imaginar, todas as partículas são pintadas de vermelho, para distingüí-las de outro elemento de massa. Podemos descrever o movimento

$$r(t, M_r) = r_0(M_r)\left[1 + \delta r(t, M_r)/r_0(M_r)\right] \tag{23.492}$$

$$\rho(t, M_r) = \rho_0(M_r)\left[1 + \delta\rho(t, M_r)/\rho_0(M_r)\right] \tag{23.493}$$

onde δr e $\delta\rho$ são as *perturbações Lagrangianas* de densidade e de raio. Essas duas quantidades são usadas para descrever o movimento com o tempo de um determinado elemento de massa. A restrição de que as perturbações sejam pequenas impõe $|\delta r/r_0| \ll 1$ e $|\delta\rho/\rho_0| \ll 1$.

Podemos agora linearizar as equações de força e de massa substituindo a posição (raio) e densidade deste elemento de massa pelos valores perturbados (3) e (4) e, no resultado, mantendo somente os termos de primeira ordem em $\delta r/r_0$ e $\delta\rho/\rho_0$. Consideremos a equação de massa

$$\frac{\partial M_r}{\partial\left[r_0(1 + \delta r/r_0)\right]} = 4\pi\left[r_0(1 + \delta r/r_0)\right]^2\left[\rho_0(1 + \delta\rho/\rho_0)\right] \tag{23.494}$$

Agora carregamos a derivada no denominador do lado esquerdo e expandimos os produtos no lado direito. A primeira operação resulta em um novo denominador $(1 + \delta r/r_0)\,\partial r_0 + r_0\,\partial(\delta r/r_0)$. A derivada ∂r_0 é então fatorada para fora de modo que o lado esquerdo contém o fator $\partial M_r/\partial r_0$. Os termos restantes do denominador são então expandidos em binômios, resultando em primeira ordem:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r_0}\left[1 - \frac{\delta r}{r_0} - r_0\frac{\partial\left(\delta r/r_0\right)}{\partial r_0}\right]$$

O lado direito da equação de massa pode ser expandido em primeira ordem

$$4\pi r_0^2\rho_0\left(1 + 2\frac{\delta r}{r_0} + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)$$

Quando os dois lados da equação de massa linearizada são igualados, encontramos que o resultado contém a equação de ordem zero

$$\frac{\partial M_r}{\partial r_0} = 4\pi r_0^2\rho_0$$

que é simplesmente a equação de continuidade de massa da configuração não perturbada. Como esta equação é automaticamente satisfeita, utilizamos a

igualdade para subtrair estes termos da equação linearizada. Este é um resultado típico de uma linearização em torno de um estado de equilíbrio. Podemos então rearranjar os termos, encontrando uma relação entre as perturbações Lagrangianas que precisa ser satisfeita para que a conservação de massa seja mantida na configuração dependente do tempo:

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -3\,\frac{\delta r}{r_0} - r_0\,\frac{\partial\,(\delta r/r_0)}{\partial r_0} \tag{23.495}$$

Note que parte desta equação é familiar porque, se ignorarmos o termo derivativo, trata-se da equação homóloga entre o raio e a densidade. Relações homólogas são definidas como

$$r_A = \frac{R_A}{R_B} r_B \quad e \quad M_A(r_A) = \frac{M_A}{M_B} M_B(r_B)$$

A equação de força é linearizada similarmente

$$\rho_0 r_0\,\frac{d^2\delta r/r_0}{dt^2} = \rho_0 r_0 \left(\frac{\ddot{\delta r}}{r_0}\right) = -\left(4\,\frac{\delta r}{r_0} + \frac{\delta P}{P_0}\right)\frac{\partial P_0}{\partial r_0} - P_0\frac{\partial\,\delta P/P_0}{\partial r_0} \tag{23.496}$$

Implícito na derivação desta equação estão as condições $\ddot{r}_0 = 0$ e $\dot{r}_0 = 0$, já que o estado de equilíbrio é completamente estático.

Neste ponto da análise tomamos o caminho tradicional em teoria de perturbação e assumimos que todos as perturbações prefixadas por δ pode ser decompostas nas componentes de Fourier com o elemento de tempo representado por exponenciais. Desta maneira, introduzimos a componente espacial do deslocamento relativo do fluido, $\zeta(r_0)$, como

$$\frac{\delta r}{r_0}(t, r_0) = \zeta(r_0)\, e^{i\sigma t} \tag{23.497}$$

onde a exponencial representa a descrição da evolução temporal do deslocamento e $\zeta(r_0)$, que depende somente de r_0 (isto é, do elemento de massa), pode ser considerado como a forma do deslocamente no instante zero de tempo. Note que σ e $\zeta(r_0)$ podem ser complexos. O lado esquerdo da equação de força se torna $-\rho_0 r_0 \sigma^2 \zeta(r_0)\, e^{i\sigma t}$. Esclarecemos que não estamos assumindo que as variáveis físicas são complexas; como

$$e^{i\sigma t} = \cos(i\sigma t) + i\mathrm{sen}\,(i\sigma t)$$

e σ pode ser complexa, as variáveis físicas são a parte real do produto, por exemplo

$$\frac{\delta r}{r_0}(t, r_0) = \Re\{\zeta(r_0)\, e^{i\sigma t}\}$$

Deve agora ficar claro que temos duas equações linearizadas, de força e de massa, mas três variáveis: $\zeta(r_0)$ e as partes espaciais das perturbações de pressão e de densidade. Isto ocorre porque desprezamos a energética do problema real e deste modo nossa descrição é incompleta. Para tornar o problema em puramente mecânico, relacionamos $\delta\rho$ e δP na aproximação adiabática, relembrando a relação Lagrangeana entre mudanças em pressão e mudanças em densidade

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_{\text{ad}} \tag{23.498}$$

Como isto é uma abreviação para $P \propto \rho^{\Gamma_1}$ e δ é o operador Lagrangiano diferencial, tomamos o logarítmo δ-derivadas para encontrar

$$\frac{\delta P}{P_0} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho_0} \tag{23.499}$$

Esta relação toma o lugar de qualquer equação de transporte de energia e calor que normalmente apareceriam e, agora, temos tantas variáveis quanto equações.

Dentre os vários caminhos que podemos tomar, escolhemos o seguinte: (1) substituímos todas as perturbações pelas suas componentes espaciais de Fourier, com os valores comuns de $e^{i\sigma t}$ cancelados; (2) substituímos todas ocorrências de $\delta\rho$ por δP usando a condição adiabática; (3) rearrangamos as duas equações linearizadas de modo que as derivadas espaciais aparecem no lado esquerdo; (4) substituímos as derivadas parciais por derivadas espaciais totais, mas lembrando que dependem somente de r_0; (5) retiramos todas referências aos subscritos zero já que todos os termos são perturbações e quantidades da configuração estática. O resultado é

$$\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{1}{r}\left(3\zeta + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\delta P}{P}\right) \tag{23.500}$$

$$\frac{d\left(\delta P/P\right)}{dr} = -\frac{d\ln P}{dr}\left(4\zeta + \frac{\sigma^2 r^3}{GM_r}\,\zeta + \frac{\delta P}{P}\right) \tag{23.501}$$

onde o fator r^3/GM_r aparece como resultado de usarmos a equação do equilíbrio hidrostático para eliminar os termos contendo dP/dr.

Obtemos portanto um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, mas precisamos de condições de contorno. A primeira é simples porque exigimos que δr seja zero no centro ($r = 0$). Para ver como isto ocorre, considere uma partícula de extensão infinitesimal exatamente no

centro de equilíbrio da estrela. Não existe qualquer lugar que a partícula pode se mover ($\delta r \neq 0$) sem violar a condição de simetria radial. A regularidade física também requer que ζ e $d\zeta/dr$ sejam finitos no centro. A única maneira disto ser verdadeiro é se o termo em parêntesis no lado direito da equação (11) se anular no centro. Isto produz a segunda condição de contorno

$$3\,\zeta + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\delta P}{P} = 0, \quad \text{em } r = 0 \tag{23.502}$$

A segunda condição de contorno é aplicada na superfície. Para nossos propósitos é adequado assumir a condição de contorno zero para o modelo estático. Especificamente, assumimos $P \to 0$ quando $r \to R$. Condições de contorno mais complicadas são possíveis — como as para a fotosfera — mas elas não adicionam nada de importante à nossa discussão. A primeira coisa a destacar é que o coeficiente do lado direito da equação de força linearizada é simplesmente

$$\frac{d\ln P}{dr} = \frac{1}{\lambda_{\rm P}}$$

onde $\lambda_{\rm P}$ é a escala de altura da pressão. Esta última quantidade vai a zero rapidamente próximo à superfície, de modo que, para a perturbação relativa na pressão $\delta P/P$, permanecer finita, precisamos

$$4\zeta + \frac{\sigma^2 R^3}{GM}\,\zeta + \frac{\delta P}{P} = 0, \quad \text{em } r = R \tag{23.503}$$

Embora não evidente imediatamente, esta condição é equivalente a requerer que todas as perturbações interiores sejam refletidas na superfície (que também se move) de volta para o interior; isto é, nenhuma energia de pulsação é perdida pela estrela, já que a pulsação é refletida para dentro da estrela. Esta aproximação não é boa quando a pulsação causa perda de massa, como no caso das estrelas Miras, mas neste caso também a aproximação de perturbações lineares (pequenas) não é válida.

Agora temos um número igual de equações diferenciais e de condições de contorno. Mas todas as equações que derivamos são lineares e homogêneas em ζ e $\delta P/P$ de modo que permanece a questão sobre como estas quantidades são linearizadas. Como estão, qualquer rescalonamento é permitido, para qualquer das duas perturbações, em um ponto qualquer da estrela, e a solução pode ser tão grande ou tão pequena quanto queiramos. Para restringir, precisamos escolher uma normalização não nula. Isto é completamente arbitrário, mas escolhemos

$$\zeta = \frac{\delta r}{r} = 1, \quad \text{em } r = R. \tag{23.504}$$

Vemos que isto coloca uma condição adicional ao problema e, de fato, excedemos o número permitido de condições de contorno. A saída é reconhecer que a freqüência (possivelmente complexa) σ não foi especificada. De fato, ela somente pode tomar alguns valores para os quais as condições de contorno se satisfaçam, incluíndo a condição de normalização. Note que σ não depende da condição de normalização porque essa última somente reescalona as soluções. Desta forma σ ou, mais precisamente, σ^2 — já que somente esta quantidade aparece em nossas equações — é um *autovalor* e as perturbações correspondentes são *autofunções* para esse σ^2 particular. Agora discutimos as propriedades dos autovalores desse problema adiabático.

23.32.1 A Equação de Onda Adiabática e Linear

Primeiro colapsamos as duas equações diferencias de primeira ordem para ζ e $\delta P/P$ em uma equação diferencial de segunda ordem em ζ, diferenciando (11) e eliminando todas referências a $\delta P/P$ e suas derivadas, usando (11) e (12). O resultado é

$$\mathbf{L}(\zeta) \equiv -\frac{1}{\rho r^4}\frac{d}{dr}\left(\Gamma_1 P r^4 \frac{d\zeta}{dr}\right) - \frac{1}{r\rho}\left\{\frac{d}{dr}\left[(3\Gamma_1 - 4)\,P\right]\right\}\zeta = \sigma^2\zeta \quad (23.505)$$

Aqui $\mathbf{L}$ é um operador diferencial de segunda ordem e é uma abreviação para a parte central da equação aqui, neste caso, ζ é o operado. Podemos escrever de forma simplificada como $\mathbf{L}(\zeta) = \sigma^2\zeta$. Esta é uma equação de onda e é chamada de *Equação de Onda Adiabática e Linear* ou LAWE (*Linear Adiabatic Wave Equation*).

Todas as quantidades em $\mathbf{L}$ são bem comportadas e $\mathbf{L}$ é um operador de Sturm–Liouville [Jacques Charles François Sturm (1803-1855), *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, 1829; Joseph Liouville (1809-1882)], que permite a expansão das funções em séries. Podemos também simbolicamente integrar sobre toda a estrela e mostrar que

$$\int_0^M \zeta^*(\mathbf{L}\zeta)\, r^2\, dM_r = \int_0^M \zeta(\mathbf{L}\zeta)^*\, r^2\, dM_r \quad (23.506)$$

onde ζ^* é o conjugado complexo de ζ. Esta igualidade implica que o operador de Sturm–Liouville $\mathbf{L}$ é Hermitiano [Charles Hermite (1822-1901)] e que as seguintes afirmações sobre σ^2 e suas autofunções são verdadeiras:

1. Todos autovalores σ^2 do sistema são reais assim como as autofunções correspondentes. Existem então duas alternativas. Se $\sigma^2 > 0$ então σ é

real e a autofunção completa $\zeta(r)\, e^{i\sigma t}$ é oscilatória no tempo, face o fator temporal $e^{i\sigma t}$. Caso contrário, se $\sigma^2 < 0$, então σ é puramente imaginário e as perturbações crescem ou decaem exponencialmente com o tempo. Vamos tratar somente da primeira possibilidade pois estamos interessados em pulsações e não em expansões ou colapsos. Deste modo, se $\sigma^2 > 0$, então σ é a freqüência angular da oscilação com período correspondente $\Pi = 2\pi/\sigma$.

2. Existe um valor mínimo para σ^2 que, se estivéssemos fazendo mecânica quântica, corresponderia ao estado fundamental.

3. Se ζ_j e ζ_k são duas autofunções, soluções dos autovalores σ_j^2 and σ_k^2, então
$$\int_0^M \zeta_j^* \zeta_k \, r^2 \, dM_r = 0 \quad \text{se } j \neq k \tag{23.507}$$
As autofunções são desta forma ortogonais.

O que temos são ondas estacionárias de freqüência $\sigma^2 > 0$ de modo que a estrela passa duas vezes pelo estado de equilíbrio durante o período correspondente.

23.32.2 Alguns Exemplos

Consideremos o caso irrealístico em que ζ e Γ_1 são assumidos constantes por toda a estrela. A equação LAWE se reduz a
$$-\frac{1}{r\rho}\,(3\Gamma_1 - 4)\,\frac{dP}{dr}\,\zeta = \sigma^2\zeta \tag{23.508}$$

No caso de um modelo de densidade constante, $[\rho(r) = \langle\rho\rangle]$, podemos substituir $-(1/\rho r)\, dP/dr$ por GM_r/r^3, que se torna $4\pi G\langle\rho\rangle/3$. O resultado é
$$(3\Gamma_1 - 4)\,\frac{4\pi G}{3}\,\langle\rho\rangle = \sigma^2 \tag{23.509}$$

Se $\Gamma_1 > 4/3$, então σ é real e o período correspondente é
$$\boxed{\Pi = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sqrt{(3\Gamma_1 - 4)\,\langle\rho\rangle\, 4\pi G/3}}} \tag{23.510}$$

Esta é a relação "período—densidade média". Com esta relação, para o Sol, com densidade média de $1,4\ \mathrm{g/cm^3}$, obtemos um período de 2,8 horas. Para a

estrela Delta Cephei, com 5 massas solares e raio de $1,5\times10^{12}$ cm $= 21,4\ R_\odot$, que resulta em uma densidade média de 7×10^{-4} g/cm^3, obtemos um período de 104,8 hr=4,4 dias, enquanto seu período observado é de 5,37 dias.

Se, $\Gamma_1 < 4/3$ sabemos que encontraremos problemas, pois neste caso a energia total é menor que a energia de ligação. Neste caso σ é imaginário e o tempo de crescimento por um fator de e para o crescimento e decaimento dos movimentos é

$$\boxed{\tau = \frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{|3\Gamma_1 - 4|\,\langle\rho\rangle\, 4\pi G/3}}} \tag{23.511}$$

Este é o tempo de queda livre $t_{\rm din}$, corrigido por vários fatores.

Para estrelas anãs-brancas, podemos usar a relação (23.337) para escrever $P \propto 1/M$.

23.33 Pulsações não-radiais

Vamos agora descrever movimentos que não preservam a simetria radial, chamados de modos não radiais. Dos tipos possíveis de modos não radiais, modos-g (gravitacionais), modos-p (de pressão), modos-r (toroidais), modos-s (de cisalhamento), ..., Também não descreveremos, por enquanto, as perdas e ganhos de energia, que são necessárias para determinar a estabilidade de um dado modo. Esta aproximação é chamada aproximação adiabática e é útil na determinação dos períodos de pulsação, que dependem essencialmente da estrutura mecânica da estrela.

As referências principais para a teoria de oscilações não radiais são Paul Ledoux (1914-1988) & Théodore Walraven (1916-2008), no artigo "Variable Star", no Handbuch der Physik [ed. S. Flügge, (Berlin: Springer-Verlag), 51, 353], publicado em 1958, John Paul Cox (1926-1984) em seu livro "Theory of Stellar Pulsation" (Princeton: Princeton University Press) publicado em 1980, e Wasaburo Unno (1926-), Yoji Osaki, Hiroyasu Ando, Hideyuki Saio (1948-) e Hiromoto Shibahashi, em duas edições do livro "Nonradial Oscillations of Stars" (Tokyo: University of Tokyo Press), publicadas em 1979 e em 1989. O estudo de oscilações gravitacionais começou com o artigo de 1883 pelo físico inglês John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), que já tinha publicado em 1870 no Treatise on Sound, e em 1871 sua teoria de espalhamento, explicando corretamente, pela primeira vez, por que o céu é azul. Em seu artigo de 1883, ele derivou a relação de dispersão para ondas lineares em um fluido incompressível com estratificação constante. Ele derivou que o crescimento da amplitude de ondas planas é proporcional a raiz

quadrada do inverso da densidade média. Em 1890 Lord Rayleigh publicou *On Vibrations of an Atmosphere*, Philosophical Magazine, 4, Vol. XXIX, p. 173.

As equações que descrevem o comportamento dinâmico do fluido são: a equação de Poisson para o potencial gravitacional, a equação da continuidade e a equação de movimento.

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{23.512}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = \mathbf{0} \tag{23.513}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} = -\nabla\mathbf{P} - \rho\nabla\mathbf{\Phi} \tag{23.514}$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ é a velocidade do fluido e Φ é o potencial gravitacional que está relacionado com o vetor de gravidade local por $\mathbf{g} = -\nabla\mathbf{\Phi}$. Estas equações produzem uma descrição *Euleriana* do movimento (denotada por $'$) [Leonhard Euler (1707-1783)] onde nos colocamos em um local particular, $\mathbf{r}$, na estrela e vemos o que se passa com $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$, etc., em função do tempo. Para uma estrela que não esteja em rotação,e esteja em equilíbrio hidrostático, a velocidade $\mathbf{v}$ é nula em todos os pontos.

Assumimos que conhecemos o valor das variáveis físicas da estrela não perturbada em função de $r = |\mathbf{r}|$. Imaginamos que cada elemento de fluido na estrela seja deslocado de sua posição de equilíbrio em $\mathbf{r}$ por uma distância vetorial arbitrária e infinitesimal, $\xi(\mathbf{r}, t)$. Este tipo de deslocamento — que toma um elemento de fluido identificável e o move a outro lugar — é um deslocamento Lagrangiano, que denotamos por δ. Quando $\mathbf{v} = 0$ em um modelo em equilíbrio, as perturbações Eulerianas e Lagrangianas de $\mathbf{v}$, descritas respectivamente por $\mathbf{v}'$ e $\delta\mathbf{v}$, são as mesmas e são dadas por:

$$\mathbf{v}' = \delta\mathbf{v} = \frac{d\xi}{dt} \tag{23.515}$$

onde d/dt é a derivada de Stokes (ou material)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla \tag{23.516}$$

Quando o fluido se desloca, as outras variáveis físicas são perturbadas em consonância. Por exemplo, a pressão $P(\mathbf{r})$ originalmente associada com a parcela de fluido em $\mathbf{r}$ torna-se $P(\mathbf{r})+\delta P(\mathbf{r}, t)$ quando a parcela se move para $\mathbf{r}+\xi(\mathbf{r}, t)$. O mesmo ocorre para as outras quantidades e suas perturbações.

Se o movimento é adiabático, a relação entre δP e $\delta\rho$ é a mesma que no caso radial:

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta\rho}{\rho} \tag{23.517}$$

Não podemos usar uma relação similar para as perturbações Eulerianas $P'(\mathbf{r}, t)$ e $\rho'(\mathbf{r})$, porque estas perturbações são utilizadas para encontrar as novas pressões e densidades em um *dado* ponto $\mathbf{r}$, sem dizer de onde vem o fluido. Entretanto, podemos relacionar as variações Eulerianas e Lagrangianas pela relação, válida em primeira ordem:

$$\delta\rho = \rho' + \xi \cdot \nabla\rho \tag{23.518}$$

Podemos derivar esta relação usando uma expansão de Taylor da perturbação em torno de $\mathbf{r}_0$.

Agora vamos substituir P, ρ, Φ e $\mathbf{v}$, por $P + P'$, $\rho + \rho'$, $\Phi + \Phi'$ e $\mathbf{v}'$ nas equações anteriores, multipicando todos os termos, e mantendo somente os termos de primeira ordem. Como um exemplo, a equação de força torna-se:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla \mathbf{P} - \rho\nabla\mathbf{\Phi} - \nabla\mathbf{P}' - \rho\nabla\mathbf{\Phi}' - \rho'\nabla\mathbf{\Phi} \tag{23.519}$$

Os dois primeiros termos do lado direito se cancelam, porque

$$-\nabla\mathbf{P} - \rho\nabla\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \tag{23.520}$$

devido ao equilíbrio hidrostático da estrela não perturbada. O que resulta é uma equação com somente as quantidades perturbadas como variáveis de primeira ordem. Similarmente, a equação de continuidade e a de Poisson, perturbadas, tornam-se:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho\xi) = \mathbf{0} \tag{23.521}$$

$$\nabla^2\Phi' = 4\pi G\rho' \tag{23.522}$$

Na equação de continuidade, integramos em relação ao tempo e eliminamos a constante de integração exigindo que $\rho' = 0$ quando $\xi = 0$.

Embora tenhamos linearizado as equações, o conjunto de equações diferenciais parciais que obtivemos é de segunda ordem no tempo e de quarta ordem no espaço. Com o objetivo de reduzir as equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias, assumimos que as pulsações são periódicas e podem ser analisadas por séries de Fourier [Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)]. Esta hipótese permite assumir que todas as variáveis

têm uma dependência temporal proporcional a $e^{i\sigma t}$, onde σ é a freqüência angular. Por examplo, assumimos para ξ:

$$\boxed{\xi(\mathbf{r},t) = \xi(\mathbf{r})\, e^{i\sigma t}} \tag{23.523}$$

Com esta substituição, separamos a variável de tempo das variáveis que são função da posição (r,θ,ϕ).

Como a energética das oscilações não radiais indica que a amplitude radial é pequena, podemos modelar a porção angular das pulsações através de esféricos harmônicos. Desta forma, a solução para $\xi(\mathbf{r})$ e $P'(\mathbf{r})/\rho$ é:

$$\begin{aligned}
\xi(r,\theta,\varphi) &= \xi_r(r,\theta,\varphi)\ \mathrm{e}_r + \xi_\theta(r,\theta,\varphi)\ \mathrm{e}_\theta + \xi_\varphi(r,\theta,\varphi)\ \mathrm{e}_\varphi \\
&= \left[\xi_r(r)\ \mathrm{e}_r + \xi_t(r)\ \mathrm{e}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \xi_t(r)\ \mathrm{e}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] Y_{\ell m}(\theta,\varphi)
\end{aligned}$$

onde

$$\xi_\theta(r,\theta,\varphi) = \xi_t(r)\frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta}$$

No livro de John David Jackson (1925-) [1975, Classical Electrodynamics, 2nd ed., (New York:Wiley & Sons)] e no livro de Eugene Merzbacher, [1970, Quantum Mechanics, 2nd ed., (New York: Wiley & Sons)] existe uma discussão compacta de esféricos harmônicos. Como a base de esféricos harmônicos é completa, podemos representar qualquer distribuição angular por uma soma de esféricos harmônicos, mas o que queremos aqui é atribuir um único ℓ e m a cada modo de pulsação. O índice ℓ é chamado de grau harmômico, m é chamado de número azimutal e n, o número de nodos entre o centro e a superfície da estrela, de ordem radial. Isto é possível no caso da inexistência de rotação ou de rotação lenta, mas não é válido para o caso de rotação rápida ou da existência de campos magnéticos fortes.

As funções esféricos harmônicos $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ são dadas por

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\ P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$

onde os $P_\ell^m(\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre associados [Adrien-Marie Legendre (1752-1833)], gerados por

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\ \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}\left(x^2-1\right)^\ell.$$

Aqui escrevemos x no lugar de $\cos\theta$. Os valores de ℓ e m para estas funções são $\ell = 0, 1, \ldots$ (um inteiro), e m é um inteiro com $|m| \leq \ell$ para assegurar soluções regulares e de valor único.

Antes de continuar, definimos algumas freqüências importantes. A primeira é a freqüência de Brunt-Väisälä N:

$$\boxed{N^2 = -Ag = -g\left[\frac{d\ln\rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln P}{dr}\right]} \tag{23.524}$$

onde g é a aceleração gravitacional local. N, em sua interpretação mais simples, é a freqüência de oscilação associada à perturbação de um elemento de fluido em um meio estável à convecção ($N^2 > 0$), isto é, associada com a flutuabilidade. Como um exemplo, se colocarmos uma rolha em um pote com água, a rolha oscilará para cima e para baixo com a freqüência de Brunt-Väisälä. O físico finlandês Vilho (Yrjö) Väisälä (1891-1971) em 1925, e o meteorologista inglês *Sir* David Brunt (1886-1965), em 1927, derivaram independentemente a fórmula para a freqüência de flutuabilidade (*buoyancy*) e que corresponde a maior freqüência de uma oscilação gravitacional em uma atmosfera completamente compressível. Esta freqüência é normalmente descrita como a freqüência de Brunt-Väisälä.

A segunda freqüência é a *freqüência de Lamb*, S_ℓ, definida em 1910 pelo matemático inglês *Sir* Horace Lamb (1849-1934), como:

$$\boxed{S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,\frac{\Gamma_1 P}{\rho} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,v_s^2} \tag{23.525}$$

Esta é a freqüência análoga à freqüência acústica para ondas não radiais.

Definimos também o *número de onda transversal*, k_t, (com unidades de cm^{-1})

$$k_t^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} = \frac{S_\ell^2}{v_s^2}$$

Se relacionamos o comprimento transversal $\lambda_t = 2\pi/k_t$ a k_t, então S_ℓ^{-1} é o tempo que leva uma onda sonora para viajar a distância $\lambda_t/2\pi$.

Em 1940, Carl-Gustaf Rossby (1898-1957) mostrou que os gradientes horizontais do potencial de vorticidade ($\nabla \times \mathbf{v}$) podem atuar como uma força restauradora para perturbações ondulatórias, atualmente chamadas de ondas de Rossby, ou modos-r. No Sol, as ondas de Rossby na fotosfera têm amplitude radial de cerca de 100 metros e deslocamentos horizontais de 45 000 km, e já foram medidas pelo satélite SOHO. Na atmosfera da Terra, os deslocamentos radiais são da ordem de 5 cm e os horizontais de cerca de 500 km.

Podemos aprender bastante das soluções da equação diferencial ordinária para ξ_r e ξ_t realizando uma análise local do sistema. Assumimos que ξ_r e ξ_t

têm variações espaciais mais rápidas do que as outras variáveis físicas que aparecem nas equações (por exemplo N^2); outras variáveis podem portando ser consideradas constantes dentro de uma região limitada de raio. Para quantificar, assumimos que tanto ξ_r quanto ξ_t variam espacialmente como $e^{ik_r r}$, onde o número de onda k_r é grande comparado a r. Quando inserimos esta exponencial complexa nas equações diferencias, obtemos um conjunto homogêneo de equações algébricas em ξ_r e ξ_t. O determinante dos coeficientes precisa ser nulo para obtermos soluções não triviais. Se mantermos os termos dominantes em k_r, obtemos a *relação de dispersão*:

$$\boxed{k_r^2 = \frac{k_t^2}{\sigma^2 S_\ell^2}\left(\sigma^2 - N^2\right)\left(\sigma^2 - S_\ell^2\right)} \tag{23.526}$$

onde, com antes, assumimos que σ^2 é positivo. Essa equação mostra que:

- 1. Se σ^2 é maior ou menor do que *tanto* N^2 quanto S_ℓ^2, então $k_r^2 > 0$ e soluções propagando-se sinusoidalmente estão presentes, já que k_r é real e as ondas são senos e cossenos.

- 2. Se σ^2 tem um valor intermediário entre N^2 e S_ℓ^2, então k_r é imaginário, e soluções realísticas decaem exponentialmente. Essas são ondas evanescentes.

Dessa forma, N^2 e S_ℓ^2 são freqüências críticas para a propagação das ondas. O conjunto de equações de oscilações não radiais não é do tipo de Sturm–Liouville porque torna-se bilinear em σ^2 devido à existência de duas forças restauradoras, de pressão e gravitacional.

Podemos resolver para σ^2 na relação de dispersão em dois limites de ondas propagantes. Para facilitar, definimos o número de onda total, K, como $K^2 = k_r^2 + k_t^2$. A onda pode viajar em uma combinação de direções radiais e transversais. Em uma análise local, K deve ser grande. Então, se σ^2 é muito maior do que tanto N^2 quanto S_ℓ^2, e $|N^2|$ é menor do que S_ℓ^2 (como é o caso usual) a raiz "grande" da equação (1) é:

$$\boxed{\sigma_p^2 \approx \frac{K^2}{k_t^2} S_\ell^2 = (k_r^2 + k_t^2) v_s^2 \quad (\sigma^2 \gg N^2, S_\ell^2)} \tag{23.527}$$

Colocamos o subscrito "p" em σ^2 para denotar "pressão" já que somente a velocidade do som está presente nessa expressão. Esses são modes de *pressão* ou *acústicos*, e normalmente são denominados como "modos-p" na literatura

de pulsação. Os modos são radiais quando ℓ é zero. A raiz pequena segue se σ^2 é muito menor que N^2 e S_ℓ^2 e é dada por:

$$\boxed{\sigma_g^2 \approx \frac{k_t^2}{k_r^2 + k_t^2}\, N^2 \quad (\sigma^2 \ll N^2, S_\ell^2)} \tag{23.528}$$

Esses são modos *gravitacionais* ou "modos-g" e flutuação no campo gravitacional é a força restauradora. Note que se N^2 é negativo, indicando a existência de convecção, então σ_g é puramente imaginário e a perturbação cresce ou decai exponencialmente com o tempo. Estes modos são chamados de modos-g$^-$. Estamos somente interessados no caso em que $N^2 > 0$, que são os modos-g$^+$. Sumarizando, os modos-p constituem-se nos modos de alta freqüência do espectro de oscilações não radiais, e nesse caso P'/P é maior do que ξ_r/λ_P, enquanto os modos-g são os modos de baixa freqüência, e nesse caso P'/P é menor do que ξ_r/λ_P.

Se cada modo é ortogonal em relação aos outros, então as autofunções correspondentes a cada autovalor σ^2 têm que diferir das outras em aspectos importantes. Seguindo nossa análise local como uma aproximação, k_r e ℓ devem medir esta diferença. Como k_r é um número de onda, o comprimento de onda correspondente é $\lambda_r = 2\pi/k_r$. O número total de nodos na direção radial (que chamamos de n) na autofunção é dado por $n \approx 2\int_0^R dr/\lambda_r$ onde o "2" conta os dois nodos por comprimento de onda. Logo $n \approx \int_0^R k_r\, dr/\pi$. Se integramos a equação (23.527) de modo que a integral de k_r aparece sozinha e então assumimos que ℓ é pequeno de modo que k_t^2 pode ser desprezado (por simplicidade), obtemos a estimativa

$$\sigma_p \approx n\pi \left[\int_0^R \frac{dr}{v_s}\right]^{-1} \tag{23.529}$$

Desta maneira, para valores grandes de n, as freqüências dos modos-p são igualmente espaçadas. Note que o espaçamento das freqüências depende somente da variação da velocidade do som que, para um gás ideal, depende principalmente da temperatura. Em estrelas como o Sol, os modos-p efetivamente amostram a estrutura de temperatura.

A estimativa correspondente para os *períodos* dos modos-g é

$$\boxed{\Pi_g = \frac{2\pi}{\sigma_g} \approx n\, \frac{2\pi^2}{[\ell(\ell+1)]^{1/2}} \left[\int_0^R \frac{N}{r}\, dr\right]^{-1}} \tag{23.530}$$

Aqui o período é igualmente espaçado em n, o que é muito útil para a análise das anãs brancas pulsantes, e é muito sensível ao valor de ℓ. Ainda, o período aumenta com n, em contraste com os modos-p.

Os mesmos limites em σ^2 em relação a N^2 e S_ℓ^2 também produzem as seguintes estimativas grosseiras para a razão das autofunções radiais para tangenciais:

$$\left|\frac{\xi_r}{\xi_t}\right| \sim \begin{cases} rk_r & \text{modos-p} \\ \ell(\ell+1)/rk_r & \text{modos-g} \end{cases}$$

Para números de ondas radiais grandes ($rk_r \gg 1$) o movimento do fluido para os modos-p são principalmente radiais, enquanto que para os modos-g são principalmente transversais.

Se representarmos por Ω a freqüência de rotação de uma estrela, e assumirmos que ela é muito menor do que a freqüência de pulsação, podemos representar a freqüência de pulsação de uma oscilação de modo-g com índices n,ℓ e m como:

$$\sigma_{n,l,m} \simeq \left\langle \frac{N^2\ell(\ell+1)}{K^2r^2} \right\rangle^{1/2} + \left[1 - \frac{C_n}{\ell(\ell+1)}\right] m\Omega$$

onde C_n é uma constante que depende do valor da autofunção no interior da estrela, mas é próxima de 1.

23.33.1 Aproximação Não Adiabática

Se retirarmos a aproximação adiabática, precisamos levar em conta que calor pode ser trocado entre os elementos em movimento por pulsação. O ponto de partida é a equação de equilíbrio térmico (23.143):

$$\boxed{\frac{\partial L_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \left[\varepsilon - \frac{3}{2}\rho^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}}\right)\right]} \tag{23.531}$$

que derivamos na secção de Equilíbrio Térmico e onde ε é a taxa de geração de energia termonuclear.

Para as variáveis clássicas, como as Cefeidas e RR Lyrae, o que causa a pulsação é a existência de zonas de ionização parcial do hidrogênio e do hélio. Uma zona de ionização parcial é muito opaca; os fótons são absorvidos causando a ionização do gás. Quando um gás se ioniza, o número de partículas aumenta, pois os elétrons tornam-se livres. Um aumento no número de partículas causa um aumento na pressão, que faz a camada se

expandir. Mas ao se expandir, a camada se esfria e portanto as partículas têm velocidade e energia menores e podem se ligar novamente, formando átomos nêutros. Quando o gás se desioniza, diminui a número de partículas, a pressão diminui e a camada contrai. Ao se contrair, aumentando a densidade, a camada fica opaca e o processo recomeça, oscilando entre o estado expandido e contraído.

Usando a equação de continuidade de massa e o fato de termos usado $(\Gamma_3 - 1) = 5/3$ na derivação dessa equação, pois assumimos lei dos gáses ideais, o que não é o caso de zonas de ionização parcial, podemos escrever

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon - \frac{P}{\rho\,(\Gamma_3 - 1)} \left[\frac{\partial \ln P}{\partial t} - \Gamma_1 \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \right] \tag{23.532}$$

Podemos substituir o multiplicador do termo da esquerda

$$\frac{P}{\rho\,(\Gamma_3 - 1)} = \frac{c_V T}{\chi_T}$$

de modo que a equação de energia torna-se

$$\frac{\partial \ln P}{\partial t} = \Gamma_1 \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \frac{\chi_T}{c_V T} \left[\varepsilon - \frac{\partial L_r}{\partial M_r} \right] \tag{23.533}$$

Note que o caso adiabático é recuperado se o último termo for sempre nulo. Utilizamos agora a igualdade

$$\frac{\Gamma_1}{\chi_T} = 1 + \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\Gamma_3 - 1)$$

e as definições de χ_T e χ_ρ para chegar em

$$\frac{\partial \ln T}{\partial t} = (\Gamma_3 - 1) \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \frac{1}{c_V T} \left[\varepsilon - \frac{\partial L_r}{\partial M_r} \right] \tag{23.534}$$

que podemos linearizar colocando

$$T \longrightarrow T_0 + \delta T$$

$$\rho \longrightarrow \rho_0 + \delta \rho$$

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0 + \delta \varepsilon$$

$$L_r \longrightarrow L_{r,0} + \delta L_r$$

onde, como usual, o subscrito zero refere-se ao estado de equilíbrio. Não precisamos incluir as variações de c_V e Γ_3 porque elas não aparecem na expressão final. Se usarmos o equilíbrio térmico e balanço de energia

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial L_{r,0}}{\partial M_r}$$

e derivadas parciais de T_0 e ρ_0 em relação ao tempo nulas, e deixarmos de explicitar o subscrito zero, obtemos:

$$\frac{\partial\left(\delta T/T\right)}{\partial t} = \left(\Gamma_3 - 1\right)\frac{\partial\left(\delta\rho/\rho\right)}{\partial t} + \frac{1}{c_v T}\left[\delta\varepsilon - \frac{\partial \delta L_r}{\partial M_r}\right] \tag{23.535}$$

Finalmente, se assumimos que as perturbações variam com o tempo da forma e^{iwt}, obtemos a forma final da equação de energia linearizada

$$\boxed{\delta\varepsilon - \frac{\partial \delta L_r}{\partial M_r} = iwc_V T\left[\frac{\delta T}{T} - \left(\Gamma_3 - 1\right)\frac{\delta\rho}{\rho}\right]} \tag{23.536}$$

onde os deltas se referem somente à variação espacial das perturbações. Note que esta equação contem a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ e, portanto, o problema não abiabático resulta em autofunções complexas. As soluções portanto automaticamente contém propriedades que crescem exponencialmente (instáveis) ou decaem (estáveis). Uma estrela variável intrínseca é aquela em que os efeitos não adiabáticos levem ao crescimento das perturbações, tornando-a instável.

Se a opacidade aumenta quando a temperatura aumenta, como ocorre em uma região de ionização parcial, a energia se acumula nesta camada, e o elemento de massa se aquece em relação à sua vizinhança, tornando-se instável à pulsação. Este mecanismo de instabilidade chama-se *mecanismo* κ, já que representamos a opacidade por κ.

O *mecanismo* γ de instabilidade ocorre quando a variação importante é no Γ_3, como ocorre no caso da segunda ionização do hélio, quando o segundo elétron do hélio está sendo removido ou recombinando, para temperaturas próximas de 40 000 K. Neste caso, a energia da compressão é absorvida parcialmente na ionização e a temperatura não aumenta tanto quanto no caso em que a ionização não ocorre. Desta forma a região de ionização tende a ser um pouco mais fria que a vizinhança quando comprimida e o calor flui para a região de ionização. Na maioria dos casos os mecanismos κ e γ aparecem em conjunto.

23.33.2 Heliosismologia

O Sol é variável com amplitudes de uma parte em um milhão. Em 1962, Robert Benjamin Leighton (1919-1997), Robert W. Noyes e George W. Simon (Astrophysical Journal, 135, 474) detectaram os deslocamentos Doppler induzidos nas linhas de absorção do Sol, com período de 5 minutos. Estes deslocamentos são interpretados como oscilações verticais de grandes regiões do fluido com velocidades de 1 km/s e tempo de coerência da ordem de 5 minutos. Somente em 1970 Roger K. Ulrich (1970, Astrophysical Journal, 162, 993) e independentemente John William Leibacher & Robert F. Stein (1972, Astrophysical Journal Letters, 7, 191) sugeriram que estes deslocamentos eram oscilações globais do Sol.

Em 1975 Franz L. Deubner (Astronomy & Astrophysics, 44, 371) conseguiu resolver as oscilações solares em modos discretos, que comparados com os modelos teóricos calculados por Hiroyasu Ando e Yoji Osaki (1975, Publications of the Astronomical Society of Japan, 27, 581), mostraram que as oscilações solares com períodos da ordem de 5 minutos eram oscilações não-radiais modo-p com ℓ entre 200 e 1000. Posteriormente, observações de disco inteiro do Sol mostraram modos-p com ℓ entre 1 e 200.

Para o Sol, os modos-p são superficiais enquanto que os modos-g são internos. Milhares de modos-p do Sol já foram observados, mas nenhum modo-g. Um modo-p com n=1 e $\ell = 2$, com período de 2500 s, propagando-se para dentro do Sol, torna-se evanescente quando atinge $r \simeq 0,44\ R_\odot$, onde $\sigma^2 \simeq S_\ell^2$.

23.33.3 Pulsações das Anãs Brancas

Em 1968, Arlo U. Landolt (1934-) que estuda estrelas padrões fotométricas, utilizando o telescópio de 2,1 m do Kitt Peak, descobriu acidentalmente que a estrela HL Tau 76, uma anã branca, apresentava variações de brilho com um período de 12 minutos e uma amplitude de 0,1 magnitudes (1968, Astrophysical Journal, 153, 151). Esta foi a primeira anã branca variável descoberta, e pertence a classe das DAV ou ZZ Cetis, com mais de 130 variáveis conhecidas em 2006.

Os períodos dos modos gravitacionais dependem da variação dentro da estrela da freqüência de Brunt-Väisälä, N^2. Não é possível estimar seu valor facilmente, mas existem características específicas nas estrelas anãs brancas. Por examplo, essa freqüência é *muito* pequena no interior onde os elétrons estão degenerados, e N é nula para um gás completamente degenerado. Esse não é normalmente o caso no envelope e as freqüências típicas no envelope

são de várias dezenas de s^{-1}. Ao contrário, o valor da freqüência de Lamb S_ℓ é grande no interior mas torna-se muito pequeno no envelope.

Das condições de propagação de onda, os modos-g se propagam no envelope das anãs brancas, enquanto que os modos-p, com períodos de poucos segundos e ainda não observados em anãs brancas, se propagam no interior. Este comportamento é oposto daquele para o Sol. Desta maneira, nas anãs brancas, os modos-g oscilam na superfície mas são excluídos do núcleo face ao baixo valor de N^2 no interior. Os cálculos detalhados produzem valores de períodos de cerca de 100 s a 1000 s, consistentes com os valores observados para as anãs brancas pulsantes, que têm períodos entre 100 e 1500 s. Os modos de pulsação com ordens radiais baixas têm amplitude significativa em todo o interior da estrela, enquanto modos com ordens radiais altas são formados mais para fora da estrela.

A causa da instabilidade foi determinada como a mesma que excita as variáveis clássicas: está associada com as zonas de ionização parcial do hidrogênio e do hélio e, possivelmente, de carbono e oxigênio para os objetos mais quentes [Wojciech Dziembowski & Detlev Koester (1981, Astronomy & Astrophysics, 97, 16), Noel Dolez & Gerard Vauclair (1981, Astronomy & Astrophysics, 102, 375), Sumner Starfield, Arthur Nelson Cox (1927-2013), S. Hodson, & Willian D. Pesnell (1982, Conference on Pulsations in Classical and Cataclysmic Variable Stars, Boulder CO, p. 78) e Donald Earl Winget, Hugh van Horn, Monique Tassoul, Gilles Fontaine, Carl John Hansen (1933-2011) & Bradley W. Carroll (1982, Astrophysical Journal, 252, L65)] O maior sucesso desta análise de excitaçãos dos modos gravitacionais em anãs brancas foi a predição seguida da descoberta das variáveis DBs por Donald Earl Winget, Edward L. Robinson, R. Edward Nather & Gilles Fontaine (1982, Astrophysical Journal, 262, L11). Este foi o primeiro caso da existência de uma classe de variáveis que foi predita *antes* de sua descoberta.

Os cálculos não adiabáticos que testam a estabilidade dos modos-g são muito exitosos para as estrelas DAV e DBV, já que os cálculos ajustam razoavelmente bem com as posições observacionais da faixa de instabilidade, com uma escolha apropriada da eficiência convectiva [Paul Andrew Bradley (1962-) & Donald Earl Winget 1994b; Gilles Fontaine et al. 1994]. Embora entendamos a causa básica da instabilidade pulsacional como resultado da zona de ionização parcial modulando o tamanho da zona de convecção durante um ciclo de pulsação, precisamos ainda de muito mais trabalho para entender os detalhes, já que a maioria dos cálculos não leva em conta a interação das pulsações com a convecção.

Para uma anã branca ser uma DA em 20 000 K e $\log g = 8$, somente

0,1 g cm^{-2} é necessário para atingir a profundidade ótica de Rosseland 100, ou seja, uma camada de somente 3×10^{-6} $M_{\odot}$ de hidrogênio.

Uma anã branca no disco velho ou no halo acretará cerca de $M_H \simeq 10^{-10}$ $M_{\odot}$ em 4×10^8 anos, para uma densidade de hidrogênio média de 0,01 cm^{-3}.

23.34 Efeitos não lineares

Quando a amplitude de pulsação cresce até atingir proporções não lineares, um modo normal deixa de ser descrito como um esférico harmônico. A descrição matemática das pulsações necessita de termos em combinações lineares de outros esféricos harmônicos, de modo que os termos em combinações lineares não são, neste caso, modos de pulsação independentes.

Pitágoras de Samos (c.572-497 a.C.) denominou de harmônicas as oscilações cujos comprimentos de ondas sejam razões entre números inteiros. Desta forma, o primeiro harmônico de uma oscilação de freqüência f tem freqüência 2f. Vincenzo Galilei (c.1520-1591), pai de Galileo Galilei, escreveu em seu livro sobre teoria musical *Dialogo della musica antica et della moderna*, que as notas devem ser harmônicas para que o tímpano não tenha que se flexionar em duas formas diferentes, incomensuráveis. A superfície da estrela também faz com os modos harmônicos, isto é, comensuráveis, tenham maior amplitude[7]. Vários processos podem gerar harmônicos e combinações lineares no espectro de Fourier de uma estrela variável:

- A resposta não linear do fluxo emergente a uma variação de temperatura, já que $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm ef}^4$.
- A resposta não linear da zona de convecção a uma perturbação oscilatória que a atravessa.
- Ressonância entre modos de pulsação.
- Excitação não linear dos modos.

[7] Vincenzo Galilei também foi o primeiro a demonstrar que para dobrar a freqüência é necessário quadruplicar a tensão. Em linguagem atual

$$\frac{\delta f}{f} = 2\frac{\delta F}{F} \longrightarrow F \propto f^2$$

onde f é a freqüência e F a força.

Os dois primeiros processos são normalmente chamados de "distorções da forma do pulso" e se originam na resposta não linear do meio estelar às pulsações.

J. Robert Buchler (1942-), Marie-Jo Goupil e Carl J. Hansen (1997, Astronomy & Astrophysics, 321, 159) derivaram as equações de amplitude relacionando as interações entre as pulsações multiperiódicas não radiais, mas ressaltam que o problema é sempre em relacionar os coeficientes com o problema hidrodinâmico e de transferência de calor que nos interessa. Em primeira ordem, uma pulsação real pode ser representada como uma soma de modos normais, com amplitudes dependentes do tempo. Estas amplitudes, que assumimos variar lentamente com o tempo em comparação com as pulsações, obedecem a equações de amplitude não lineares. Embora a soma seja teoricamente infinita, assumimos que a dinâmica essencial do problema possa ser tratada somente com os primeiros termos das séries. As amplitudes e fases podem então ser relacionadas diretamente com aquelas obtidas pela análise de Fourier das observações.

No caso de duas pulsações radiais:

$$\delta R(t) = \frac{a_1(t)}{2} \exp\left[i\phi_1(t)\right] + \frac{a_2(t)}{2} \exp\left[i\phi_2(t)\right]$$

as equações de amplitude são:

$$\frac{da_1}{dt} = k_0 a_1 + \Re\{q_0 a_1^3\} + \Re\{T_0 a_1 a_2^2\}$$

$$\frac{da_2}{dt} = k_1 a_2 + \Re\{q_1 a_2^3\} + \Re\{T_1 a_1^2 a_2\}$$

$$\frac{d\phi_1}{dt} = w_1 + \Im\{q_0 a_1^2\} + \Im\{T_0 a_2^2\}$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = w_2 + \Im\{q_1 a_2^2\} + \Im\{T_1 a_1^2\}$$

onde as fases $\phi(t)$ contêm uma parte rapidamente oscilante wt e uma parte que varia lentamente com o tempo. Temos portanto um conjunto acoplado de equações diferenciais de primeira ordem mas não linear, que governam o comportamento temporal das amplitudes e das fases. No caso de pulsações não radiais, temos várias pulsações simultâneas, e não somente duas, e as variáveis são vetoriais.

Os coeficientes de acoplamentos dependem da integral das autofunções dos modos sobre o interior da estrela. Os coeficientes serão grandes se as

regiões de alta amplitude das autofunções no interior da estrela forem similares.

No caso de pulsações não-radiais, o espectro de freqüências é muito mais denso, isto é, existe um número maior de freqüências possíveis e, portanto, maior possibilidade de ressonâncias. Entretanto, restrições de paridade e de momentum angular podem ser usadas para eliminar vários dos possíveis acoplamentos entre os modos. Ressonâncias podem causar chaveamento de freqüências, isto é, modos normais que têm freqüências aproximadamente ressonantes podem ser deslocados de modo que as freqüências observadas são exatamente ressonantes, acompanhados de amplitudes constantes. Estas ressonâncias podem causar o desvio do equi-espaçamento em períodos dos modos gravitacionais assintóticos (alto valor da ordem radial n). Acoplamentos ressonantes podem, portanto, ser determinantes nas amplitudes observadas, assim como nos espaçamentos entre os modos observados.

A presença de freqüências que são combinações lineares das freqüências normais decorre de correções de mais alta ordem. Nos dados de 2000 do Whole Earth Telescope da DBV pulsante GD358 (Kepler de Souza Oliveira Filho, R. Edward Nather, Don Earl Winget, Atsuko Nitta, Scot J. Kleinman, Travis Metcalfe, Kazuhiro Sekiguchi, Jiang Xiaojun, Denis Sullivan, Tiri Sullivan, Rimvydas Janulis, Edmund Meistas, Romualdas Kalytis, Jurek Krzesinski, Waldemar Ogłoza, Staszek Zola, Darragh O'Donoghue, Encarni Romero-Colmenero, Peter Martinez, Stefan Dreizler, Jochen Deetjen, Thorsten Nagel, Sonja L. Schuh, Gerard Vauclair, Fu Jian Ning, Michel Chevreton, Jan-Erik Solheim, Jose M. Gonzalez Perez, Frank Johannessen, Antonio Kanaan, José Eduardo Costa, Alex Fabiano Murillo Costa, Matt A. Wood, Nicole Silvestri, T.J. Ahrens, Aaron Kyle Jones, Ansley E. Collins, Martha Boyer, J. S. Shaw, Anjum Mukadam, Eric W. Klumpe, Jesse Larrison, Steve Kawaler, Reed Riddle, Ana Ulla & Paul Andrew Bradley. 2003, "The Everchanging Pulsating White Dwarf GD358", Astronomy & Astrophysics, 401, 639) encontramos termos de combinação linear de até quinta e sexta ordem. A variação temporal das amplitudes e fases resultantes pode ser periódica, multi-periódica ou caótica. Além das variações de amplitude e fase por acoplamento, os modos de pulsação sofrem alterações por mudanças evolucionárias nas estrelas, como evolução nuclear ou perda de energia térmica pela superfície. Estas mudanças entretanto ocorrem em escalas de tempo seculares.

A maior parte das estrelas variáveis multi-periódicas observadas apresenta variações de amplitude em longas escalas de tempo. Por exemplo, as transformadas de Fourier das observações com o WET em anos distintos da

DBV GD358 têm amplitudes diferentes, apesar da maioria das periodicidades principais estarem presentes em todos os anos. Entretanto, os dados de agosto de 1996 mostram somente uma periodicida dominante, em vez das 180 periodicidades normalmente detectadas. A energia (proporcional à amplitude ao quadrado) desta periodicidade entretanto é similar à soma das energias de todas as pulsações detectadas nos outros anos, sendo compatível portanto com a transferência de toda a energia de pulsação somente para aquele modo. Poucos meses depois a transformada de Fourier voltou ao estado anterior, com a presença de centenas de periodicidades.

O caso mais simples de ressonância ocorre quando duas freqüências inicialmente próximas de $n\omega_1 \approx m\omega_2$, com n e m inteiros. Existe uma solução com amplitudes e fases contantes, com as freqüências deslocadas exatamente para a igualdade $n\omega_1 = m\omega_2$. Desta maneira é possível que uma freqüência próxima da harmônica seja trazida para o valor da harmônica e que as amplitudes resultantes sejam constantes.

23.35 Pulsações das ZZ Cetis

J. Christopher Clemens, em sua tese de doutorado, encontrou que todas as DAVs na borda azul da faixa de instabilidade têm períodos de pulsação muito próximos de 220 segundos, que a amplitude, além de ser pequena aumenta com o esfriamento da estrela, $\langle A \rangle \propto T_{\rm ef}^{-1}$, e ainda que quanto menor o período de pulsação P, menor a temperatura da estrela, $P \propto T_{\rm ef}^{-1}$. Desta maneira é possível ordenar as estrelas por períodos e amplitudes. Finalmente, ele encontrou que o bloco seguinte de períodos, próximos de 270 s, tinha aproximadamente a mesma amplitude.

Podemos especular que com o esfriamento da estrela, ao chegar à borda azul da faixa de instabilidade, a escala de tempo térmica

$$\tau_{\rm term} \simeq \frac{c_V T \delta M}{L}$$

está se aproximando da escala de tempo dos modos-g, o primerio bloco de períodos, com $P \simeq 220$ s, deve ser o modo ordem radial $n \equiv k = 1$, $\ell = 1$, que não é "ressonante" (*trapped*), já que o primeiro modo "ressonante" nos modelos teóricos está próximo de $k = 3$, mas na borda azul este modo ainda não está excitado, pois sua escala de tempo é maior do que escala de tempo térmica.

Como a amplitude do primeiro bloco de períodos é aproximadamente a amplitude do segundo bloco de períodos, embora a energia cinética para o

modo $k = 1,\ \ell = 1$ seja muito alta, o mecanismo de limitação de amplitudes deve estar levando à saturação de energia, isto é, a energia no modo é toda energia que está disponível, e não um mecanismo de limitação, como campos magnéticos ou velocidades maiores do que a velocidade do som.

Como os modos "ressonantes" têm a mesma energia do modo não ressonante $k = 1,\ \ell = 1$, então não é relevante que é mais fácil excitar um modo ressonante, já que não existe energia disponível para excitá-los a amplitudes mais altas.

Da tese de doutorado de Donald Earl Winget em 1981, os primeiros modos excitados na borda azul estão próximos de 80 a 110 s, com $k = 1,\ \ell = 3$. Somente quando a estrela se esfria por mais $\Delta T_{\rm ef} \approx 200$ K, é que o modo $k = 1,\ \ell = 1$ é excitado.

Portanto, para as estrelas mais quentes, o período excitado deveria ser próximo de 100 s, como em G226-29, e nenhum outro deveria estar excitado. Tendo em vista que leva cerca de 10^7 anos para a estrela esfriar $\Delta T_{\rm ef} \approx 200$ K, e a escala de crescimento das pulsações é de semanas ou meses, a estrela não deveria ter o modo $k = 1,\ \ell = 1$ excitado.

Um modo com $\ell = 3$ tem um cancelamento geométrico muito maior, de acordo com os cálculos de Wojciech Dziembowski (1977, Acta Astronomica, 27, 203) e Edward Lewis Robinson, Kepler de Souza Oliveira Filho e R. Edward Nather (1982, Astrophysical Journal, 259, 219). O fator de diluição geométrica é da ordem de 0,26 para $\ell = 2$, 0,04 para $\ell = 3$ e 0,02 para $\ell = 4$, pois vemos o disco integrado e as várias regiões quentes e frias na superfície da estrela se cancelam.

Embora a estrela G226-29 tenha amplitude muito pequena, 6 mma, a análise das pulsações com o Hubble Space Telescope por Kepler de Souza Oliveira Filho, Edward Lewis Robinson, Detlev Koester, J. Christopher Clemens, R. Edward Nather e Xian Jian Jiang (2000, "Mode Identification of Pulsating White Dwarfs using the HST", Astrophysical Journal, 539, 379-391) em que compararam a amplitude no ótico com a amplitude de pulsação no ultravioleta, demonstrou que a pulsação com período de 109 s é na verdade um modo com $\ell = 1$.

A estrela G185-32 é ainda mais problemática, já que os dados do HST indicam que a periodicidade em 141 s não muda de amplitude significativamente do ultravioleta para o ótico e, portanto, não fita nenhum modelo teórico (Barbara Garcia Castanheira, Kepler de Souza Oliveira Filho, Pawel Moskalik, Scot J. Kleinman, A. E. Sansom, Jan-Erik Solheim, J. A. Belmonte, Steven D. Kawaler, Antonio Kanaan, Don Earl Winget, R. Edward Nather, Todd K. Watson, J. Christopher Clemens, Judith Provencal, Al-

bert D. Grauer, Paul Andrew Bradley, Matt A. Wood, N. Achilleos, Gerard Vauclair, Benoit Pfeiffer, Michael Chevreton, Noel Dolez, B. Serre, J. S. Yang, J. N. Fu, T. M. K. Marar, B. N. Ashoka, Edmund Meištas, A. V. Chernyshev, Tsevi Mazeh, Elia Leibowitz, Jerzy Krzesiński, Gabriel Pajdosz, Stachek Zoła & José Eduardo da Silveira Costa. 2004, "Observations of the Pulsating White Dwarf G 185-32", Astronomy & Astrophysics, 413, 623). Entretanto Jörg Ising e Detlev Koester (2001, Astronomy & Astrophysics, 374, 116) sugerem que efeitos não lineares na atmosfera transformam os modos normais descritos por harmônicos esféricos na base da zona de ionização parcial em modulações complexas, não descritas por harmônicos esféricos, na superfície, mas somente para amplitudes maiores que 5%, o que não é o caso.

Yanqin Wu e Peter Goldreich (1999, Astrophysical Journal, 519, 783) e Yanqin Wu (2001, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 323, 248) levam em conta a interação entre a pulsação e a convecção e propõem que as não linearidades causam a presença de harmônicos e combinações lineares na transformada de Fourier, mas que as amplitudes dos harmônicos são menores do que as amplitudes dos picos combinações lineares, se as componentes têm a mesma amplitude.

$$a_i = \frac{A_i}{\sqrt{1+(\omega_i \tau_{co})^2}}$$

$$a_{2i} = \frac{a_i^2}{4} \frac{|2\beta+\gamma|(2\omega_i \tau_{co})}{\sqrt{1+(2\omega_i \tau_{co})^2}}$$

$$a_{i+j} = \frac{n_{ij}}{2} \frac{a_i a_j}{2} \frac{|2\beta+\gamma|(\omega_i \pm \omega_j)\tau_{co}}{\sqrt{1+[(\omega_i \pm \omega_j)\tau_{co}]^2}}$$

$$\phi_i = \Psi_i - \arctan(\omega_i \tau_{co})$$

$$\phi_{2i} = 2\Psi_i + \arctan\left(\frac{1}{2\omega_i \tau_{co}}\right)$$

$$\phi_{i+j} = (\Psi_i \pm \Psi_j) + \arctan\left[\frac{1}{(\omega_i \pm \omega_j)\tau_{co}}\right]$$

com A_i – amplitude de uma sinusoidal, τ_{co} – constante térmica da zona convectiva e $|2\beta+\gamma|$ – taxa de aprofundamento da zona convectiva com o esfriamento da estrela.

Antony J. Brickhill (1992, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 259, 529) propõe uma forma de interação entre as pulsações e a convecção, também levando em conta que a escala de tempo de convecção é da

ordem de 1 s e, portanto, a convecção se ajusta instantaneamente à pulsação. Ele calcula que a variação de temperatura na superfície é não sinusoidal e, portanto, a variação de luminosidade também não é. Ele também deduz que a viscosidade turbulenta reduz a pulsação porque não permite grandes movimentos horizontais.

Pierre Brassard, Gilles Fontaine e François Wesemael (1995, Astrophysical Journal Supplement Series, 96, 545) calculam o fluxo emergente a partir de uma variação de temperaturas sinusoidal na base da zona de ionização parcial. Os efeitos não lineares aparecem somente devido ao transporte radiativo de energia. Eles calculam que o efeito de cancelamento geométrico (soma de zonas quentes e zonas frias sobre o disco visível) é de 0,43 para $\ell = 2$, 0,0639 para $\ell = 3$ e 0,0395 para $\ell = 4$ em luz branca.

A concentração de estrelas no primeiro bloco de períodos também indica que elas devem ter a mesma massa, ou os períodos teriam que ser diferentes. A massa da camada de hidrogênio também deve ser similar, mas os períodos não são muito dependentes desta massa. Todos os modos neste bloco de 220 s deveriam ser modos com $k = 1,\ \ell = 1$. Um projeto que precisa ser executado é procurar por modos com $\ell = 3$ e, portanto, de baixa amplitude, na borda azul da faixa de instabilidade. Antonio Kanaan, na sua tese de doutorado em 1996, demonstrou que não existem estrelas com baixa amplitude mais frias que a borda vermelha da faixa de instabilidade. Na verdade a amplitude dos modos cai pelo menos por um fator de 40, já que o limite de detecção alcançado por ele foi de 5 mma, e as estrelas variáveis na borda vermelha têm em média uma amplitude 40 vezes maior (Antonio Kanaan, Kepler de Souza Oliveira Filho e Don Earl Winget, 2002, "The ZZ Ceti red edge", Astronomy & Astrophysics, 389, 896).

Quando a estrela esfria e o modo com $k = 1,\ \ell = 1$ é excitado, o modo com menor período desaparece? Tanto L19-2 quanto G117-B15A têm modos excitados tanto próximos de 100 s quanto próximos de 220 s, de modo que aparentemente os modos com menor período permanecem excitados. Entretanto, os modos de curto período podem ser somente devido a ressonâncias do modo principal, já que em G117-B15A, G185-32, GD385,... os modos de período curto são harmônicos.

Como a zona de ionização parcial é a causa da pulsação (*driving zone*), as amplitudes devem crescer na escala de tempo evolucionária, já que, nesta escala de tempo, a zona de ionização parcial está se deslocando para dentro da estrela.

Como a energia térmica na zona de convecção cresce exponencialmente quando a zona de ionização parcial vai se aprofundando, a energia disponível

para pulsação cresce exponencialmente.

Ressonância entre modos não pode ser o efeito principal nas pulsações das anãs brancas porque, para os modos-g, o número de modos possíveis decresce com o aumento da freqüência (modos igualmente espaçados em período). Nos dados de 1994 de GD358, 62 combinações lineares foram identificadas por François Vuille et al. (2000, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 313, 185) que mostrou também que a maior parte das periodicidades com combinações lineares tem a mesma fase que os modos normais geradores. Estas fases são compatíveis com distorções de forma e estão em concordância com os modelos de Yanqin Wi & Peter Goldreich e de Antony J. Brickhill para a resposta não linear da zona de convecção.

Marten Henric van Kerkwijk (1966-), J. Christopher Clemens & Yanqin Wu (2000, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 314, 209) obtiveram espectros óticos com resolução temporal usando o telescópio de 10 metros do Keck e demonstraram que, para a DAV G29-38, as combinações lineares não apresentam velocidades horizontais, enquanto os modos normais apresentam. Isto indica que os modos normais e as combinações lineares não têm a mesma origem física e, portanto, excitação não linear não é a causa das periodicidades em combinações lineares.

Se escrevermos a freqüência de uma pulsação como

$$\sigma_i = \omega_i + i\gamma_i$$

estamos representando ω_i como a parte que oscila com o tempo e γ_i a taxa de crescimento da pulsação, isto é, uma pequena perturbação cresce (ou decai) por um fator de e em uma escala de tempo

$$\tau^i_{\text{crescimento}} = \frac{1}{\gamma_i}$$

e a taxa de crescimento ou decaimento se adiciona à largura natural do modo de oscilação. Quando ocorre ressonância de dois ou mais modos de oscilação, pode haver chaveamento de freqüências exatas ou com uma pequena diferença de freqüência. Note que a maior interação entre os modos ocorre para modos com valores de ordem radial k e índice angular ℓ similares face a sobreposição das autofunções.

Nos modelos não adiabáticos de Brickhill e de Goldreich & Wu de anãs brancas, modos com valores intermediários de k e ℓ são os que mais são excitados, porque suas autofunções têm um gradiente espacial muito pequeno na base da zona de convecção, de modo que têm um bloqueio convectivo muito pequeno. Nestes modelos, se τ for a escala de tempo térmica da

zona de excitação (*driving*) das pulsações, somente pulsações com períodos $P \leq 2\pi\tau$ são excitadas e, portanto, o máximo período das pulsações das anãs brancas DAVs é da ordem de 1000 segundos (Antony J. Brickhill 1991, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 252, 334).

Nas teorias lineares de ressonâncias, as combinações de três ou mais freqüências devem ter amplitudes muito menores do que as combinações de duas freqüências, porque envolvem coeficientes de mais alta ordem.

Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) em seus artigos de 1964, *Dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity*, publicados no *Physical Review Letters*, 12, 114 e *Astrophysical Journal*, 140, 417, desenvolveu a teoria de pulsações estelares na relatividade geral.

Cancelamento Geométrico

A fórmula para a amplitude de uma pulsação modo-g, em uma anã branca DAV, obtida em Edward L. Robinson, Kepler de Souza Oliveira Filho & R. Edward Nather (1982), é:

$$A_x = -660 Y_{\ell,m}(\Theta_0, 0) \frac{\partial m_x}{\partial T} \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2} \mathcal{I}^\ell$$

onde σ é a freqüência de pulsação:

$$\delta\zeta = \zeta_0 K_{\ell,m}(r) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) e^{i\sigma t}$$

ℓ	$\mathcal{I}^\ell$	cancelamento
0	5/6	0,833
1	7/12	0,583
2	31/120	0,258
3	1/24	0,042
4	-1/48	-0,021

de modo que cancelamento ($\ell = 1$)/cancelamento ($\ell = 2$)=2,258. O termo $\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2}$ é constante com ℓ, pois este termo vem diretamente da condição de contorno na superfície, $\delta r/r = 1$ proposto por Yoji Osaki & Carl John Hansen (1933-2011), no artigo *Nonradial Oscillations of Cooling White Dwarfs*, publicado em 1973 no *Astrophysical Journal*, **185**, 273.

Note que embora para uma DAV a deslocamento radial de uma pulsação seja somente da ordem de um metro, o termo $\delta r/r = 1$ garante que a pulsação cubra a superfície da estrela e, por isso, o termo $\ell(\ell+1)/\sigma^2$ é constante com ℓ, pois corresponde ao número inteiro de comprimentos de onda em $2\pi r$.

Mode Trapping

O mecanismo de filtro que seleciona que modos são excitados para amplitudes observáveis, dentro todos os autovalores possíveis, *mode trapping*, foi estudado por Don Earl Winget, Hugh M. van Horn & Carl John Hansen (1981, Astrophysical Journal, 245, L33) e Alejandro Hugo Córsico, Leandro G. Althaus, Omar G. Benvenuto, & Aldo M. Serenelli (2002, Astronomy & Astrophysics, 387, 531).

Das observações, vemos que para as pré-anãs brancas DOVs, com $T_{\rm eff} \simeq 170\,000$ K a 75 000K e $\log g = 5,7$ a 7,5, têm centenas de modos excitados, as anãs brancas DBVs, com $T_{\rm eff} \simeq 22\,000$K a 29 000K têm dezenas de modos excitados, e as DAVs, com $T_{\rm eff} \simeq 10\,850$K a 12 270K têm poucos modos excitados.

Nas pré-anãs brancas, as camadas superiores ainda são de composição química homogênea, pois estas estrelas recém saíram do Ramo Assintótico das Supergigantes, com extensas camadas de convecção. As zonas de transição de composição química ocorrem principalmente entre o núcleo de C/O e as camadas mais externas. É interessante notar que mesmo a estrela quente PG 1159-035, entretanto, já apresenta *mode trapping*, como detectado por José Eduardo da Silveira Costa em sua tese de doutorado (Costa et al. 2006). Como a estrela é bem quente, a energia disponível para pulsação é alta, e os modos de pulsação detectados têm $k \simeq 30$–50. Como as zonas de transição são ainda bastante inclinadas, já que a difusão gravitacional ainda está no início ($\tau_{\rm dif} \simeq 10^6 - 10^8$ anos), centenas de modos de pulsação têm comprimentos de onda efetivos similares às cavidades equivalentes descritas pelas zonas de transição. Por isto muitos modos são observados.

Para as DBVs, as camadas de transição já têm gradientes mais fortes, pois a difusão ainda está em curso mas já passou por várias escalas de tempo de difusão, e já separaram as camadas de He razoavelmente, levando os elementos mais pesados para o interior. Como as pulsações têm $k \simeq 10$–20 face à temperatura mais baixa, somente dezenas de modos de pulsação têm comprimentos de onda efetivos similares às cavidades equivalentes descritas pelas zonas de transição.

Já para as DAVs, a energia disponível para pulsação é baixa face à reduzida energia térmica disponível nas camadas externas, e somente os modos com $k \leq 6$ são excitados e, portanto, os comprimentos de onda efetivos são longos. Como a difusão já separou completamente as camadas de composição química diferentes, existem pelo menos três zonas de transição: C/O, He e H, que amarram os modos de pulsação. Estas transições abruptas também explicam o fenômeno de cruzamentos proibidos (*avoided crossings*), pois os

modos não conseguem ultrapassar as barreiras das transições até que suas energias sejam altas o suficientes, e aí já têm energia suficiente para chegar até a outra barreira, com períodos similares aos daquele que correspondem a esta outra cavidade.

23.36 Bibliografia

Structure and Evolution of the Stars, Martin Schwarzschild (1912-1997), 1958, Dover Publications.

Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution, Carl John Hansen (1933-2011) e Steven Daniel Kawaler (1958-), 1994, Springer-Verlag

Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, Donald Delbert Clayton, 1968, McGraw-Hill.

Principles of Stellar Structure, John Paul Cox (1926-1984) e R. Thomas Giuli, 1968, Gordon and Breach Science Publishers.

Advanced Stellar Astrophysics, William Kenneth Rose(1935-), 1998, Cambridge University Press.

Stellar Structure and Evolution, Rudolf Kippenhahn e Alfred Weigert, 1994, Springer-Verlag.

Compact Stars, Norman K. Glendenning, 1996, Springer.

Supernovae and Nucleosynthesis, David Arnett (1940-), 1996, Princeton University Press.

Introdução à Estrutura e Evolução Estelar, Walter J. Maciel, 1999, Edusp.

Capítulo 24

A escala do universo

A astronomia, apesar de exercer um certo fascínio sobre a maioria das pessoas, apresenta alguma dificuldade para quem toma contato pela primeira vez, porque seu assunto é remoto e não-familiar, envolvendo idéias novas e utilizando uma nomenclatura específica.

O simples fato de pensar sobre o Universo exige imaginar distâncias que parecem inimagináveis frente ao tamanho das coisas com que estamos acostumados em nossa vida diária.

Queremos, aqui, procurar uma noção da escala do Universo, partindo de tamanhos familiares e passando, gradativamente, a tamanhos maiores, cada um 10 vezes maior que o anterior.

- 10 m = um edifício comum
- 10^2 m = uma quadra de uma cidade
- 10^3 m = 1 km, uma rua
- 10^4 m = 10 km, uma cidade pequena
- 10^5 m = 100 km, uma cidade grande
- 10^6 m = 1000 km, um estado
- 10^7 m = 10 mil km, $\simeq$ o diâmetro da Terra (=12 700 km)
- 10^8 m = 100 mil km; cabem 10 Terras nesse comprimento, mas a Lua está mais distante. A Terra percorre essa distância em 1 h na sua órbita em redor do Sol.

- 10^9 m = 1 milhão de km, comparável com o diâmetro da órbita da Lua (= 764 000 km); o diâmetro do Sol é 1,3 milhões de km.

- 10^{10} m = 10 milhões de km, é a distância percorrida pela Terra em 4 dias na sua órbita em redor do Sol.

- 10^{11} m = 100 milhões de km, é quase 1 UA (unidade astronômica) =150 000 000 km, que é distância entre a Terra e o Sol.

- 10^{12} m = 1 bilhão de km = 7 UA, ultrapassa o raio da órbita de Júpiter, que é de 5,2 UA.

- 10^{13} m = 10 bilhões de km = 70 UA, é, aproximadamente, o diâmetro do sistema planetário do Sol inteiro. O raio médio da órbita de Plutão é de 39,5 UA, mas sua máxima distância atinge 49,3 UA.

- 10^{14} m = 100 bilhões de km = 700 UA. O sistema planetário do Sol ocupa apenas uma pequena porção desse espaço, mas ainda é o domínio do Sol. O cinturão de asteróides de Kuiper se estende até 150 UA.

- 10^{15} m = 1 trilhão de km. A nuvem de cometas (Nuvem de Oort), ainda do Sistema Solar, ocupa aproximadamente esta região do espaço.

- 10^{16} m = 10 trilhões de km = 1 (AL) ano-luz. É o limite do Sistema Solar (Nuvem de Oort). A estrela mais próxima, chamada Próxima Centauri, está a 4 AL do Sol, ainda 3 vezes mais distante.

- 10^{17} m = 10 AL = 3,4 pc (parsecs) é o tamanho de uma pequena nuvem molecular, ou de uma região HII.

- 10^{18} m = 100 AL é o tamanho da região central de um aglomerado globular, ou de uma região HII grande.

- 10^{19} m = 1000 AL, é uma parte do disco da nossa galáxia.

- 10^{20} m = 10 000 AL, é 1/10 do tamanho da nossa galáxia. O Sol está a 30 000 AL do centro da nossa galáxia.

- 10^{21} m = 100 mil AL, é o tamanho da nossa galáxia, a Via Láctea. As Nuvens de Magalhães, galáxias satélites da Via Láctea estão a cerca de 150 mil AL.

- 10^{22} m = 1 milhão de AL; a galáxia de Andrômeda, a galáxia normal mais próxima da Via Láctea, está a 2 milhões de anos-luz; o diâmetro do Grupo Local de galáxias, que contém apenas 25 galáxias é de 3 milhões de anos-luz.
- 10^{23} m = é o tamanho de um aglomerado de galáxias.
- 10^{24} m = é o tamanho de um superaglomerado de galáxias, como o Superaglomerado de Virgem, que inclui o Grupo Local.
- 10^{25} m = distância dos quasares observados (z=5 $\rightarrow d \simeq 4000$ Mpc).
- 10^{26} m = é, aproximadamente, o tamanho do nosso Universo, pois ele se formou há 13 bilhões de anos atrás, no Big Bang, e 13 bilhões de anos-luz correspondem a, aproximadamente, 10^{26} m.

Capítulo 25

Nossa galáxia: a Via Láctea

Em noites límpidas e sem lua, longe das luzes artificiais das áreas urbanas, pode-se ver claramente no céu uma faixa nebulosa atravessando o hemisfério celeste de um horizonte a outro. Chamamos a essa faixa "Via Láctea", devido à sua aparência, que lembrava aos povos antigos um caminho esbranquiçado como leite[1]. Sua parte mais brilhante fica na direção da constelação de Sagitário, sendo melhor observável no Hemisfério Sul durante as noites de inverno, como pode ser visto na foto da figura 25.1.

No início do século XVII, Galileo Galilei (1564-1642), ao apontar seu telescópio para a Via Láctea, descobriu que ela consistia de uma multitude de estrelas. No final do século XVIII, o astrônomo alemão William Herschel (1738-1822), que já era famoso por ter descoberto o planeta Urano, mapeou a Via Láctea e descobriu tratar-se de um sistema achatado. Segundo seu modelo, o Sol ocupava uma posição central na Galáxia[2], mas hoje sabemos que essa conclusão estava errada. A primeira estimativa do tamanho da Via Láctea foi feita no início do século XX, pelo astrônomo holandês Jacobus Kapteyn (1851-1922). No modelo de Kapteyn a Via Láctea tinha uma forma de disco com 18 kpc de diâmetro e 3 kpc de espessura, com o Sol perto do centro. Em 1917, Harlow Shapley (1885-1972), estudando a distribuição de sistemas esféricos de estrelas chamados aglomerados globulares, descobriu que esses objetos, estavam todos concentrados em uma direção do céu, e que nenhum deles era visto na direção oposta. Supondo que o centro da distribuição dos aglomerados globulares coincide com o centro de nossa galáxia, ele deduziu que o Sol estava a 16 kpc do centro, e que o diâmetro do

[1] A palavra *galáxia* vem do grego *galaktikos*, que significa "branco leitoso".

[2] Sempre que a palavra "galáxia" se referir à Via Láctea, deverá ser escrita com letra maiúscula.

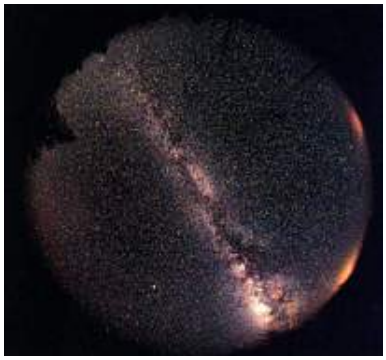
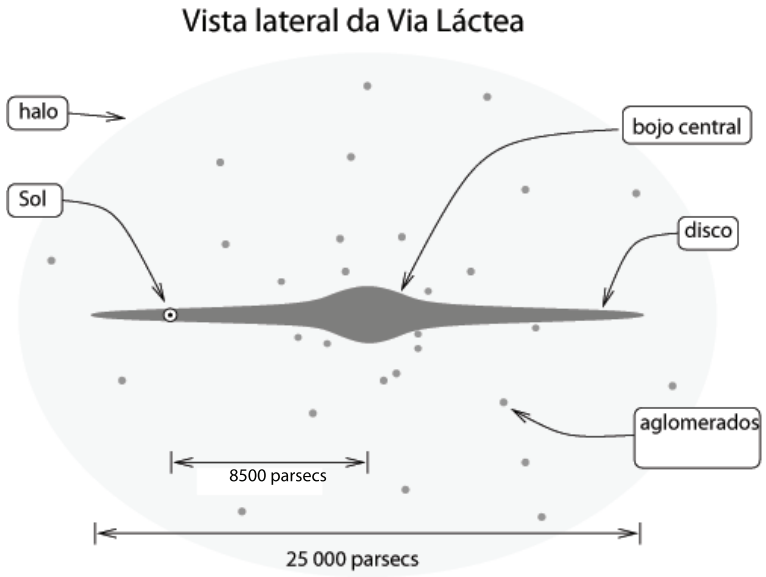


Figura 25.1: Via Láctea no céu do hemisfério sul. A região central da Galáxia é a e mais alargada que aparece no canto inferior esquerdo da foto.

disco da Via Láctea seria 100 kpc. Embora superestimados[3] por um fator de 2, esses valores deram uma dimensão da Galáxia muito mais próxima da realidade do que o modelo de Kapteyn.



[3]Shapley superestimou o tamanho da Galáxia por não levar em conta a extinção da luz pelo meio interestelar.

25.1 Sistema de coordenadas galácticas

O sistema de coordenadas galácticas tem por plano fundamental o plano galáctico, que é o círculo máximo que contém o centro galáctico e as partes mais densas da Via Láctea. É inclinado 63° em relação ao Equador celeste, como mostrado na figura 25.2.

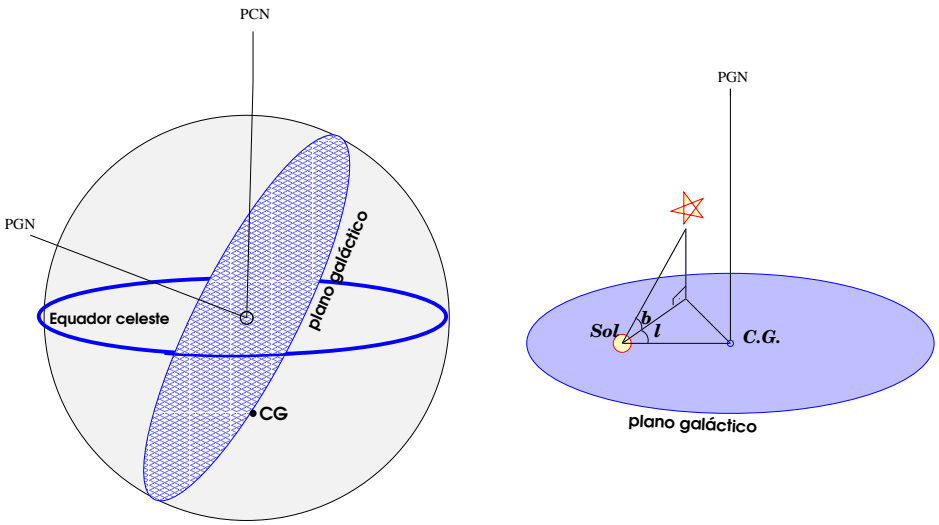


Figura 25.2: A figura da esquerda ilustra a inclinação de 63°o do plano galáctico em relação ao equador celeste e a a localização do centro galáctico (CG) no hemisfério sul da esfera celeste. PCN e PGN significam polo celeste norte e polo galáctico norte, respectivamente. A figura da direita ilustra as coordenadas latitude galáctica (b) e longitude galáctica (l), de uma estrela ao norte do plano galáctico.

As coordenadas do sistema galáctico são:

- **latitude galáctica (b):** distância angular medida perpendicularmente ao plano galáctico, variando de 0° a 90° para o norte e de 0° a −90° para o sul.
- **longitude galáctica (l):** distância angular medida ao longo do plano galáctico, variando de 0° a 360°, no sentido anti-horário, a partir da direção do centro galáctico, que fica em Sagitário.

As coordenadas do centro galáctico são:

- no sistema galáctico: $l = 0$, $b = 0$;
- no sistema equatorial celeste: $\alpha = 17\text{h } 42\text{min}$, $\delta = -28^\circ\, 55'$.

$$b = \text{sen}^{-1}\left[\cos\delta\cos\delta_{\text{PG}}\cos(\alpha - \alpha_{\text{PG}}) + \text{sen}\,\delta\text{sen}\,\delta_{\text{PG}}\right]$$

$$l = \tan^{-1}\left[\frac{\text{sen}\,\delta - \text{sen}\,b\,\text{sen}\,\delta_{\text{PG}}}{\cos\delta\,\text{sen}(\alpha - \alpha_{\text{PG}})\cos\delta_{\text{PG}}}\right] + l_{\text{na}}$$

onde α_{PG} e δ_{PG} são as coordenadas do polo galático, e l_{na} a longitude galáctica do nodo ascendente do plano galático no equador.

25.2 Distâncias dentro da Galáxia

Em capítulos anteriores, já vimos como se determinam distâncias de objetos astronômicos usando técnicas como radar, no caso de planetas internos e outros objetos próximos da Terra, paralaxe heliocêntrica, usada para detectar distâncias dos planetas externos do nosso sistema solar e de estrelas próximas, e a paralaxe espectroscópica[4], que utiliza as propriedades espectrais das estrelas para determinar sua magnitude absoluta pela sua posição no diagrama HR. Através da paralaxe espectroscópica, podemos medir distâncias de estrelas até aproximadamente 10 000 pc, alcance maior do que o obtido através da paralaxe heliocêntrica (100 pc), mas ainda insuficiente para cobrir o tamanho de nossa galáxia, que tem 30 000 pc de diâmetro. É necessário, portanto, incluir um novo método de determinação de distâncias, que tenha um alcance maior. As estrelas variáveis cumprem o papel de indicadores de distância nesta escala.

25.2.1 A relação Período-Luminosidade de estrelas variáveis pulsantes

As estrelas variáveis pulsantes são estrelas cuja luminosidade varia com o tempo, devido a variações no seu tamanho. Elas podem ser reconhecidas facilmente, observando a sua variação em luminosidade, que se dá de maneira muito regular. Dois tipos de variáveis são importantes como indicadores de distância: as RR Lyrae e as Cefeidas. Esses dois tipos de estrelas ocupam

[4] A paralaxe espectroscópica não tem nada a ver com o da paralaxe geocêntrica ou heliocêntrica, que são paralaxes trigonométricas, a não ser o fato de que é utilizado para determinar distâncias. O nome continua sendo usado por razões históricas.

Tabela 25.1: Métodos para estimar distâncias astronômicas

Distância de alcance	**Método**
1 UA	radar
1000 pc	paralaxe heliocêntrica
10 000 pc	paralaxe espectroscópica
4 Mpc	estrelas variáveis

uma região do diagrama HR chamada faixa de instabilidade (figura 25.3), onde as estrelas estão começando a queimar He no núcleo.

- RR Lyrae: são estrelas evoluídas com massa entre 0,5 e 0,7 $M_\odot$, muito comuns em aglomerados globulares. Todas têm tipo espectral entre B8 e F2 e magnitude absoluta em torno de $M_V = 0,6 \pm 0,3$. Seus períodos de pulsação são pequenos, entre 0,5 e 1 dia, com variações em magnitude menores do que 1 magnitude. O fato de terem luminosidade conhecida permite que sejam usadas como indicadores de distância para aglomerados globulares.

- Cefeidas: são supergigantes com massa entre 3 e 18 $M_\odot$ e tipo espectral entre F e K. Também pulsam de forma regular, mas podem apresentar períodos de pulsação entre 1 e 100 dias, com amplitudes de pulsação entre 0,3 e 3,5 magnitudes. Elas diferem mais em luminosidade do que as RR Lyrae, podendo ter magnitudes absolutas entre -2 e -6, mas apresentam uma relação muito estreita entre o período de pulsação e a luminosidade, o que permite conhecer sua luminosidade, uma vez conhecido seu período de pulsação. As Cefeidas mais brilhantes têm períodos maiores, por terem raios maiores.

  As observações indicam que a relação entre a magnitude bolométrica absoluta M_{bol} e o período P, *em dias*, é:

  $$M_{bol} = -3,125 \log P - 1,525$$

  As variáveis Cefeidas são usadas para determinar distâncias de estrelas longínqüas da nossa galáxia, e distâncias de outras galáxias.

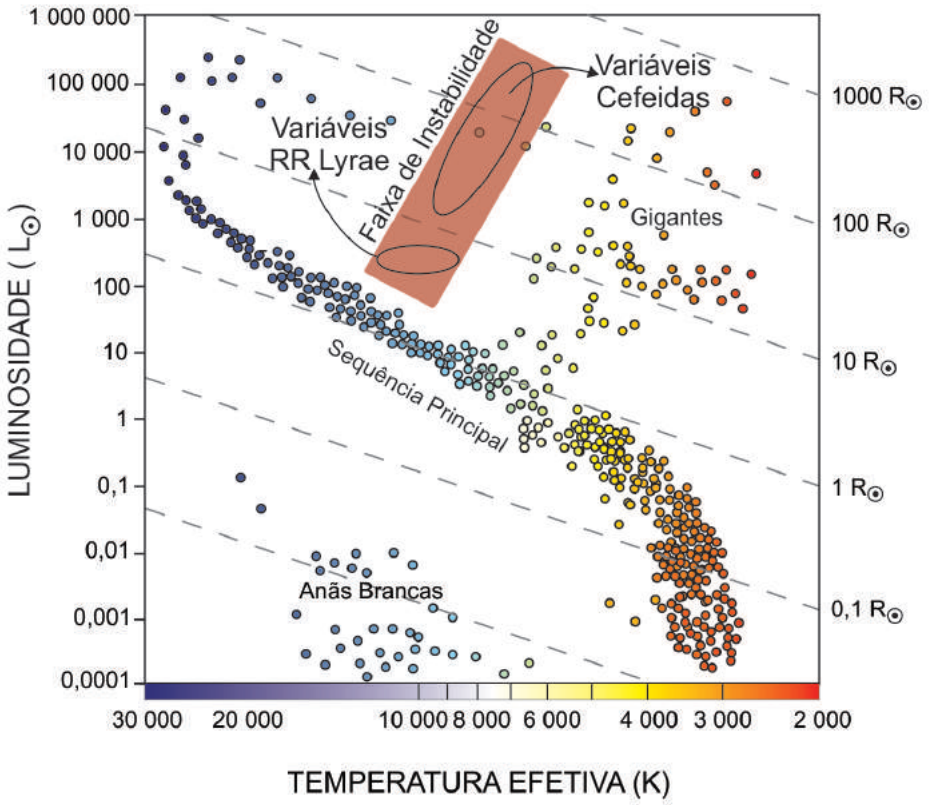


Figura 25.3: Faixa de instabilidade do diagrama HR (retângulo acima da sequência principal), com a localização das estrelas variáveis pulsantes tipo Cefeidas e RR Lyrae.

25.3 Forma e tamanho da Via Láctea

A forma da Via Láctea foi determinada através de observações em comprimentos de onda longos, como rádio e infravermelho, que podem penetrar a poeira presente no plano da Galáxia. Com base nessas observações, e comparando-as com outras galáxias, os astrônomos chegaram à conclusão de que a Via Láctea é uma galáxia espiral, um tipo de galáxia na qual a matéria parece estar concentrada em estruturas estreitas e enroladas, chamadas **braços espirais**. Os braços espirais e a matéria entre os braços constituem o **disco**, que tem forma circular e achatada,com diâmetro de

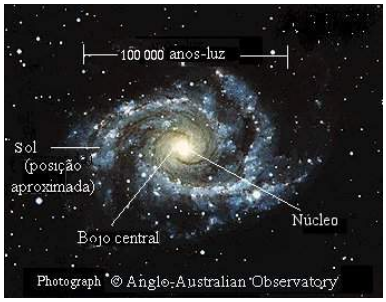


Figura 25.4: A galáxia NGC 2997 como uma representação da Via Láctea.

30 000 pc (100 000 anos-luz) e espessura de 300 pc aproximadamente. O disco está embebido no **halo**, uma região esférica formada pelos aglomerados globulares e aparentemente grande quantidade de matéria não-luminosa, que se estende por no mínimo 100 000 pc em torno do centro galáctico. No centro galáctico fica o **núcleo**, uma complexa região com grande quantidade de gás, poeira, estrelas e possivelmente um imenso buraco negro confinados em 3 pc de diâmetro. O núcleo é envolvido pelo **bojo nuclear**, uma região com cerca de 2 000 pc de raio, constituída de estrelas velhas. Até há pouco tempo acreditava-se que o bojo tinha forma esférica, mas estudos recentes, em comprimentos de onda longos, indicam que ele tem tem forma de **barra**, uma estrutura comumente presente em outras galáxias. O Sol, localizado em um dos braços espirais, orbita o centro da Galáxia, a uma distância de aproximadamente 8500 pc.

Se pudéssemos ver a Via Láctea de frente, provávelmente ela se pareceria como a galáxia NGC 2997, mostrada na figura 25.4. Da nossa posição, junto ao Sol, a parte da Galáxia interna ao Sol é vista de perfil, tendo portanto a forma de uma faixa luminosa.

25.4 O movimento das estrelas na Galáxia

Em 1718, *Sir* Edmond Halley (1656-1742) observou que a posição da estrela Arcturus no céu havia mudado um grau em relação à posição medida por Ptolomeu. Sírius também havia mudado, meio grau. Desde então, os astrônomos têm medido o movimento das estrelas no céu, perpendicularmente à linha de visada, chamado de *movimento próprio*. Esse movimento chega a $10''$ por ano para a estrela de Barnard, descoberta em 1916 por Edward Emerson Barnard (1857-1923). A Estrela de Barnard está a 1,8 pc

de distância e tem um centésimo da luminosidade intrínseca do Sol. A partir de 1842, com a descoberta do efeito Doppler, foi possível, também, medir a *velocidade radial* das estrelas, isto é, a velocidade na linha de visada. Combinando o movimento radial e o movimento tangencial (próprio), podemos medir a velocidade espacial da estrela em relação ao Sol.

25.4.1 Componentes dos movimentos estelares

As estrelas têm dois tipos de movimentos que são observáveis da nossa posição na Galáxia: o movimento próprio (perpendicularmente à linha de visada) e a velocidade radial (movimento ao longo da linha de visada). Combinando-os, e conhecendo a distância da estrela, obtém-se o movimento real da estrela.

- velocidade radial [v_r (km/s)]:

  é a velocidade de aproximação ou afastamento da estrela na direção da linha de visada. É obtida a partir do deslocamento Doppler das linhas espectrais:

  $$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

  Para o caso não relativístico:

  $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V\,\cos\theta}{c} = \frac{v_r}{c}$$

  onde θ é o ângulo entre a velocidade V da estrela e a linha de visada entre a estrela e o Sol.

  $$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\,c$$

- movimento próprio [$\mu\,(\frac{''}{ano})$]:

  é o movimento próprio da estrela no plano da esfera celeste, ou seja, perpendicular à linha de visada, medido em $\frac{''}{ano}$. Estrelas cujo movimento se dá ao longo da linha de visada não apresentam movimento próprio, apenas velocidade radial. Por outro lado, estrelas cujo movimento é perpendicular à linha de visada não apresentam velocidade radial, apenas movimento próprio.

  Não se deve confundir o movimento próprio com a paralaxe, pois a paralaxe se deve ao movimento da Terra em torno do Sol, e é cíclica em um ano, ao passo que o movimento próprio se deve aos movimentos relativos entre a estrela e o Sol, e é cumulativo ao longo de anos. Ao se calcular o movimento próprio, deve-se fazer a correção pela paralaxe;

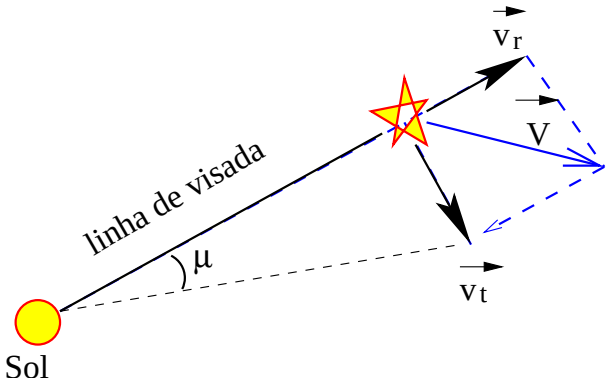


Figura 25.5: Componentes dos movimentos estelares.

- velocidade tangencial [v_t (km/s)]:

  é a componente da velocidade V perpendicular à linha de visada, e é obtido a partir do movimento próprio e da distância da estrela, que por sua vez é obtida a partir da paralaxe.

  Como $d(pc) = \frac{1}{p''}$, temos:

$$v_t = \frac{\mu(\text{rad})}{p(")} \text{ pc/ano}$$

  onde se usou sen $\mu \simeq \mu$, porque μ é muito pequeno (em geral menor do que 5×10^{-5} rad/ano). Fazendo as devidas transformações de parsec para km e de ano para segundos temos:

$$v_t = 4,74 \frac{\mu''}{p''} \text{km/s;}$$

- velocidade espacial [V (km/s)]:

  é obtida a partir de v_t e v_r:

$$V^2 = {v_t}^2 + {v_r}^2$$

25.4.2 O sistema local de repouso (SLR)

É um sistema de referência instantaneamente centrado no Sol, que se move em órbita circular em torno do centro galático, com velocidade igual à média

das velocidades estelares nas vizinhanças do Sol, de maneira que as estrelas, nas proximidades do Sol, em média, estão em repouso em relação ao SLR. Como os movimentos das estrelas individuais são diferentes do movimento médio, as estrelas, consideradas individualmente, apresentam movimentos em relação ao SLR, que são detectados como *movimentos peculiares*.

O Sol não tem uma órbita perfeitamente circular, apresentando um movimento em relação ao SLR de 16,5 km/s, numa direção chamada *ápex*, que fica na constelação de Hércules e tem coordenadas: $l = 53°$, $b = +25°$, $\alpha =$ 18h, $\delta = +30°$.

25.5 A rotação e a massa da Galáxia

O movimento do Sol em torno do centro da Galáxia pode ser determinado observando o movimento aparente de objetos muito distantes, como aglomerados globulares ou galáxias distantes, que possam ser considerados estacionários. Dessa forma foi possível determinar a velocidade orbital do Sol em torno do centro da Via Láctea. Daí, conhecendo a distância do Sol ao centro galáctico, podemos determinar quanto tempo o Sol leva para dar uma volta completa em torno do centro galáctico, o "ano galáctico". Jan Heindrik Oort (1900-1992), deduziu que a velocidade orbital do Sol é de 220 km/s, e o ano galáctico tem duração de 250 milhões de anos. As estrela mais próximas do centro da Galáxia se movem mais rápido do que o Sol e as estrelas mais distantes se movem mais devagar. Isso evidencia que o disco da Galáxia não gira como um corpo rígido, mas tem uma rotação diferencial, como a dos planetas em torno do Sol.

25.5.1 Massa da Galáxia

O Sol, as outras estrelas, as nebulosas gasosas, e tudo o que faz parte da Galáxia, gira em torno do centro galáctico movido pela atração gravitacional da grande quantidade de estrelas ali concentradas, da mesma forma que os planetas giram em torno do Sol. Observando o movimento de rotação de uma estrela na periferia da Galáxia, podemos determinar aproximadamente a massa da Galáxia, M_G, desde que saibamos a distância dessa estrela ao centro galáctico. Tomemos, como exemplo, o próprio Sol e vamos assumir que ele está em uma órbita circular em torno do centro galático com veloci-

dade V_0. A força centrípeta do Sol é

$$F_C = \frac{M_\odot {V_0}^2}{R_0}$$

que é produzida pela atração gravitacional entre o Sol e Galáxia, dada por

$$F_G = \frac{GM_\odot M_G}{{R_0}^2}$$

A distância do Sol ao centro galáctico e sua velocidade são $V_0 = 220$ km/s e $R_0 = 8500$ pc $= 2{,}6 \times 10^{20}$ m, logo a massa da Galáxia, M_G, pode ser calculada igualando as duas equações e isolando M_G:

$$M_G = \frac{V_0^2 R_0}{G} = \frac{(2,20 \times 10^5\,\mathrm{m/s})^2 (2,6 \times 10^{20}\,\mathrm{m})}{6,7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}}$$

$$M_G = 1,9 \times 10^{41}\,\mathrm{kg} \simeq 10^{11} M_\odot. \tag{25.1}$$

Portanto, considerando o Sol como uma estrela de massa típica, a Via Láctea teria, aproximadamente, 100 bilhões de estrelas. Esse é um limite inferior, pois estamos considerando apenas a massa interna à orbita do Sol.

25.5.2 A curva de rotação da Galáxia

A massa da Galáxia, calculada na equação (25.1), é apenas a massa contida dentro da órbita do Sol em torno do centro galáctico. Para conhecer a massa existente além da órbita do Sol, é necessário medir o movimento de estrelas e do gás localizados a distâncias maiores do centro Galáctico do que o Sol.

Através de observações em rádio, os astrônomos mediram o movimento do gás no disco, até distâncias além do limite visível da Galáxia, e determinaram, assim, a curva de rotação da Galáxia - um gráfico da velocidade orbital dos objetos na Galáxia em função de suas distâncias ao centro.

Essa curva mostra que a massa contida dentro do raio de 15 kpc – duas vezes a distância do Sol ao centro galáctico – é de $2 \times 10^{11}\,M_\odot$, ou seja, o dobro da massa contida dentro da órbita do Sol. A distância de 15 kpc corresponde ao limite da estrutura espiral visível da Galáxia (onde "visível", aqui, significa o que pode ser detectado em qualquer comprimento de onda). Portanto, era de se esperar que, a partir desse ponto, a curva de rotação passasse a decrescer, pois se a maior parte da massa da Galáxia estivesse contida até esse raio, o movimento das estrelas e do gás situados mais distantes deveria ser cada vez mais lento, da mesma forma que a velocidade

dos planetas diminui à medida que aumenta sua distância ao Sol. Surpreendentemente, não é isso o que se observa. Pelo contrário, a curva de rotação *aumenta* ligeiramente para distâncias maiores, o que implica que a quantidade de massa continua a crescer. A velocidade de rotação, à distância de 40 kpc, corresponde a uma massa de $6 \times 10^{11}\, M_{\odot}$, o que só pode ser explicado assumindo que nossa galáxia contém matéria não-visível que se estende muito além da matéria visível, e que constitui, no mínimo, dois terços da massa total da Galáxia. Esta foi a primeira indicação de um problema muito maior, chamado inicialmente de massa faltante (*missing mass*), ou matéria escura (invisível, que não emite luz), externa à órbita do Sol. Atualmente o termo massa faltante não é mais usado, pois sabe-se que a massa está lá, apenas não é vista. A natureza da matéria escura constitui um dos pontos mais perplexantes da astronomia moderna.

Obtenção da curva de rotação

A estrutura da Via Láctea é obtida a partir da distribuição da radiação rádio emitida pelo gás interestelar, uma vez que a radiação visível, emitida pelas estrelas, é bloqueada pela poeira que existe em abundância no plano galáctico. As ondas de rádio atravessam a poeira, de forma que podem ser detectadas mesmo se suas fontes se encontram no lado oposto do disco. A distância da fonte emissora é obtida pelo método do **ponto tangencial**, que se aplica às partes mais internas da Galáxia em relação à órbita do Sol.

Vamos considerar a figura 25.6, onde os quatro círculos concêntricos representam quatro órbitas estelares no disco da Galáxia, supostas circulares por simplicidade. A órbita mais externa é ocupada pelo Sol. Devido à rotação diferencial, as velocidades das estrelas em órbitas mais internas são maiores do que as das estrelas em órbitas mais externas (movimento kepleriano). Assim, a velocidade do Sol (V_o) é menor do que a velocidade da estrela A, que é menor do que a velocidade da estrela B, que é menor do que a velocidade da estrela C.

Para uma certa longitude galáctica l, a componente radial da velocidade de cada estrela, medida a partir do Sol, aumenta à medida que diminui a distância galactocêntrica da estrela, de forma que quando a velocidade radial for máxima a distância galactocêntrica é mínima para as estrelas a essa longitude.

Nessa situação, temos que R, a distância da estrela ao centro, é dada por

$$R = R_0 \operatorname{sen} l$$

onde R_0 é a distância do Sol ao centro galáctico.

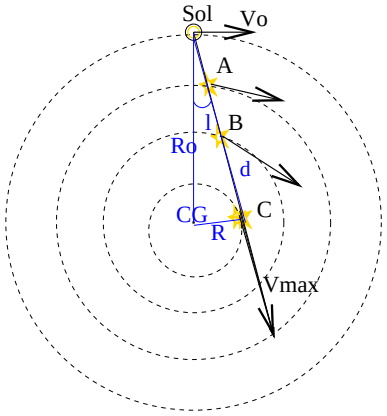


Figura 25.6: Velocidades estelares a diferentes distâncias do centro galáctico.

A velocidade radial da estrela nesse ponto, relativa ao Sol, será

$$V = V_{\max} - V_0 \operatorname{sen} l$$

Supondo que V_0 e R_0 são conhecidos, podemos medir a curva $V(R) \times R$, sempre medindo os pontos de máxima velocidade radial ao longo de linhas de visada a diferentes longitudes galácticas. Na verdade, as curvas de rotação da Galáxia não são obtidas a partir de observações de estrelas, e sim a partir de observações do gás hidrogênio neutro (HI), na na região espectral de rádio, ou da emissão de moléculas de óxido de carbono (CO), mas o raciocínio seguido é o mesmo descrito para o caso de estrelas. A curva de rotação assim construída, além de ser crucial para a determinação da massa da Galáxia, também permite mapear a sua estrutura, pois permite conhecer as distâncias às nuvens de gás que estão emitindo a radiação, desde que essas nuvens estejam na parte interna do disco.

A velocidade de rotação nas partes externas é obtida através de associações de estrelas jovens: primeiro determina-se suas distâncias por paralaxe espectroscópica ou fotométrica, e depois mede-se a velocidade radial pelas linhas de emissão do gás em torno das estrelas. Apesar das imprecisões nas distâncias assim determinadas, a curva de rotação deixa evidente que a velocidade de rotação não declina muito nas partes externas da Galáxia, podendo até mesmo aumentar um pouco.

As velocidades medidas para diferentes distâncias galactocêntricas indicam que, na região interna ($r \leq 1\,\mathrm{kpc}$) a Galáxia gira como um corpo rígido.

Depois a velocidade decai e em seguida passa a aumentar novamente, chegando ao valor máximo em r$\sim$ 8 kpc. Nas proximidades do Sol, a velocidade é em torno de 220 km/s. Se a maioria da massa estivesse contida dentro do raio do Sol, a velocidade continuaria decaindo sempre, e a curva de rotação teria uma forma kepleriana $V \propto R^{-1/2}$.

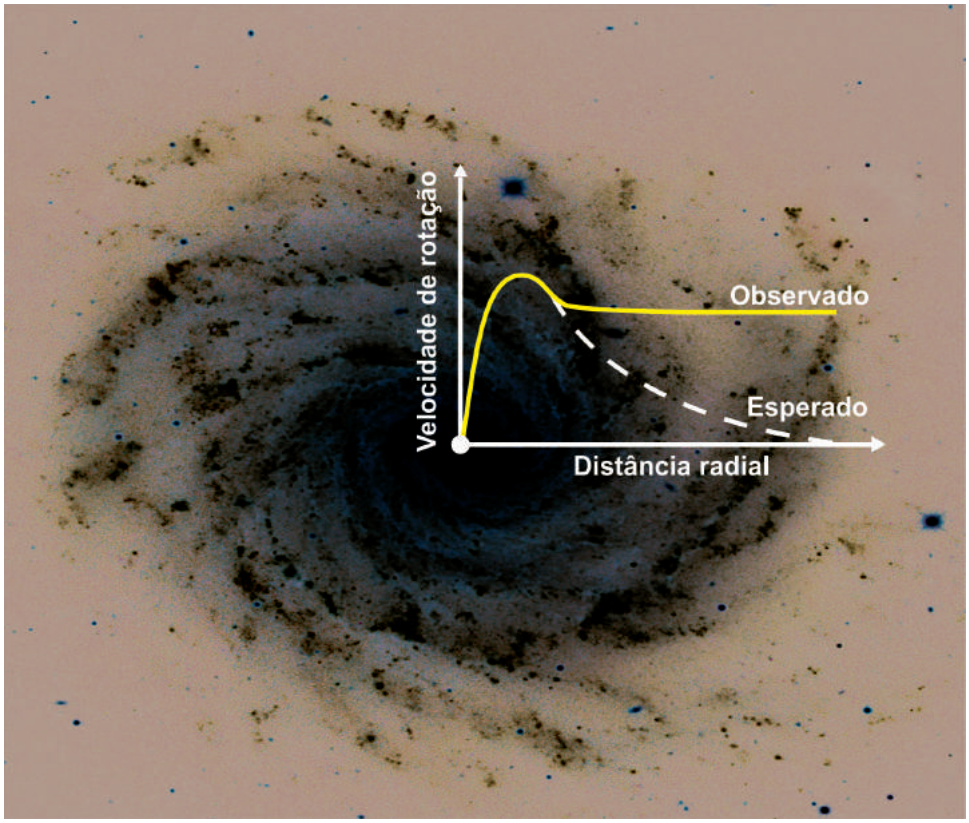


Figura 25.7: Representação esquemática da curva de rotação de uma galáxia como a Via Láctea.A linha pontilhada indica a forma esperada da curva para a quantidade de matéria luminosa que a galáxia contém. A curva contínua indica a forma da curva obtida pelas medidas das velocidades. A diferença entre as duas curvas é atribuída à existência da matéria escura.

25.5.3 Velocidade e distância galactocêntrica do Sol - fórmulas de Oort.

A figura 25.8 esquematiza a posição e velocidade do Sol e de outra estrela em uma órbita mais interna. As órbitas são supostas circulares. Os elementos mostrados são:

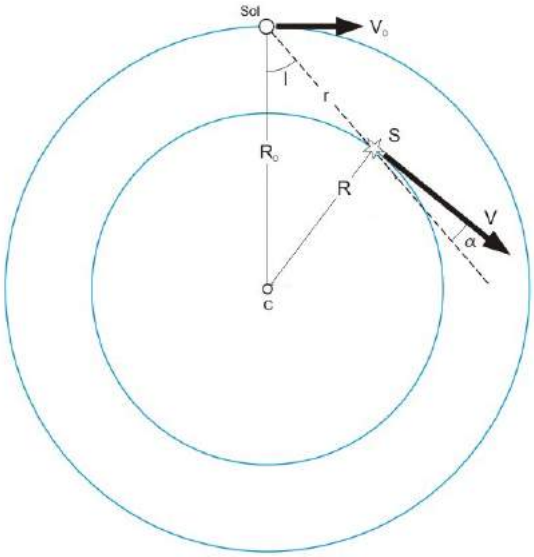


Figura 25.8: Velocidade do Sol e de uma estrela em uma órbita interna próxima ao Sol.

- V = velocidade linear da estrela
- V_0 = velocidade linear do Sol
- R = distância da estrela ao centro galáctico
- R_0 = distância do Sol ao centro galáctico
- l = longitude galáctica
- r = distância da estrela ao Sol

Sendo a velocidade observada da estrela dada por $V - V_0$, as componentes radial e tangencial dessa velocidade observada são:

$$v_r = V\ \cos\alpha - V_0 \operatorname{sen} l$$

$$v_T = V \operatorname{sen}\alpha - V_0\ \cos l$$

Usando as relações trigonométricas adequadas[5], pode-se mostrar que, nas proximidades do Sol (r $\ll$ R_0), onde o gradiente de velocidade angular é pequeno, as componentes de velocidade podem ser descritas como:

$$v_r = A\, r \operatorname{sen} 2\, l$$

$$v_T = A\, r\ \cos 2\, l + B\, r$$

onde A e B são as *constantes de Oort*, definidas como:

$$A \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{V_0}{R_0} - \left(\frac{d\,V}{d\,R}\right)_{R_0}\right]$$

$$B \equiv -\frac{1}{2}\left[\frac{V_0}{R_0} + \left(\frac{d\,V}{dR}\right)_{R_0}\right] = A - \frac{V_0}{R_0}$$

As constantes A e B medem, respectivamente, o cisalhamento local (variação de velocidade) e a vorticidade local (variação de momentum angular). Os valores de A e B foram determinados a partir de um grande número de observações, que indicaram:

$$A = (14,5 \pm 1,5)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$$

$$B = -(12,0 \pm 3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$$

O gráfico de $v_r \times l$, para uma distância determinada, é uma função seno com período de 360^o, cuja amplitude dá o valor da constante A. O gráfico do movimento próprio $\mu = \frac{v_T}{d} = A\cos 2l + B$ em função da longitude galáctica é uma função cosseno com período de 360^o, cuja amplitude tem o valor A e o valor médio é igual a B.

[5]Uma dedução pormenorizada pode ser vista, por exemplo, no livro "Fundamental Astronomy", de H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen e K. J. Donner (Editores)

Relação entre as constantes de Oort

Pelas definições de A e de B vemos que, subtraindo A e B, obtemos

$$A - B = \frac{V_0}{R_0} = \omega_0$$

e somando A e B obtemos

$$A + B = -\left(\frac{dV}{dR}\right)_{R_0}$$

Uma vez que A e B têm valores conhecidos, obtemos assim o valor de ω_0, a velocidade angular do Sol:

$$\omega_0 = 0,0055\,''/\text{ano}.$$

A velocidade circular do Sol, V_0, medida usando como referência fontes extragalácticas, é

$$\mathrm{V}_0 \simeq 220\,\mathrm{km/s}.$$

Uma vez conhecidos os valores de V_0 e de ω_0, obtemos a distância ao centro galáctico:

$$\mathrm{R}_0 = \frac{\mathrm{V}_0}{\omega_0} \simeq 8,5\,\mathrm{kpc}.$$

Esse resultado é compatível com a distância ao centro galáctico determinado pela distribuição dos aglomerados globulares.

25.6 Meio interestelar

Embora a maior parte da massa da Galáxia esteja concentrada em estrelas, o meio interestelar não é completamente vazio. Principalmente no disco da Galáxia, o meio interestelar contém *gás* e *poeira*, distribuídos na forma de nuvens individuais, e também em um meio difuso. A densidade típica do meio interestelar é de um átomo de hidrogênio por centímetro cúbico e, aproximadamente, 100 grãos de poeira por quilômetro cúbico. O gás interestelar constitui, aproximadamente, 10% da massa da Via Láctea, ao passo que a poeira agrupa menos de 1% da massa em gás. Raios cósmicos, que são partículas altamente energéticas, estão misturados com o gás e a poeira, e existe ainda um campo magnético galático, fraco ($\simeq 10\ \mu G$).



Figura 25.9: Nebulosa de Órion

25.6.1 Gás interestelar

O gás interestelar é constituído, na maior parte, por hidrogênio neutro, que não é luminoso. Mas, perto de estrelas muito quentes e massivas, o hidrogênio é ionizado pela radiação ultravioleta provinda das estrelas e brilha por fluorescência. Se existe suficiente hidrogênio ao redor dessas estrelas, ele será visível como uma nebulosa gasosa de emissão, brilhante, chamada região HII, ou nebulosa de emissão. Um exemplo desse tipo de nebulosa é a Nebulosa de Órion, que se encontra a 1 500 anos-luz da Terra.

O hidrogênio neutro (HI) emite uma linha espectral no comprimento de onda de 21 cm, que é usada para mapear a distribuição desse gás e que teve um papel chave na determinação da estrutura espiral da Galáxia. Especificamente, os spins (sentido de rotação) do elétron e do próton, no hidrogênio neutro em seu estado fundamental, podem ser paralelos (mesmo sentido de rotação) ou, com ainda menor energia, opostos. Associado ao spin existe um momento magnético dipolar, já que trata-se de uma carga elétrica em movimento. A diferença de energia entre esses dois níveis corresponde a uma freqüência ($E = 6 \times 10^{-6}$ eV $= h\nu$) de 1420,4 MHz. Portanto, a transição entre esses dois níveis de estrutura hiperfina dá origem a uma linha de comprimento de onda $\lambda = c/\nu = 21,049\,\mathrm{cm}$. A existência dessa linha foi predita, teoricamente, pelo dinamarquês Hendrick Christoffel van de Hulst (1918-), em 1944, e observada pelos americanos Harold Ewen e Edward Mills Purcell (1912-1997) em 1951. Apesar de levar em média 10 milhões de anos

para o átomo de hidrogênio emitir essa linha, como o hidrogênio é muito abundante na Galáxia, ela é observada em todas as direções do céu.[6]

A quantidade de gás do meio interestelar diminui continuamente com o tempo, pois novas gerações de estrelas se formam a partir do colapso de nuvens moleculares gigantes. O colapso e fragmentação dessas nuvens dão origem a aglomerados estelares, que são agrupamentos de estrelas nos quais todas têm, aproximadamente, a mesma idade e estão, aproximadamente, à mesma distância de nós. Existem aglomerados galácticos, ou abertos, com centenas a milhares de estrelas, e aglomerados globulares, com milhares a centenas de milhares de estrelas. Os aglomerados abertos encontram-se principalmente no disco da Galáxia, enquanto que os aglomerados globulares localizam-se principalmente no halo da Galáxia.

Como a função inicial de massa de formação estelar favorece fortemente a formação de estrelas de baixa massa (para cada estrela de massa entre 20 e 30 massas solares, centenas de estrelas de massa entre 0,5 e 1 massa solar são formadas), e as estrelas de baixa massa perdem muito pouco de sua massa em sua evolução, cada nova geração de estrelas aprisiona o gás do meio interestelar.

25.6.2 A poeira interestelar

A poeira interestelar é composta principalmente de grafite, silicatos e gelo de água, em grãos de vários tamanhos, mas muito menores ($\simeq 1\mu m$) do que a poeira aqui na Terra. A poeira circundando estrelas reflete a luz formando uma *nebulosa de reflexão*, de cor azulada. O espectro dessas nebulosas é o mesmo da estrela que a ilumina.

As partículas de poeira, com tamanhos de 0,1 a 1 mícron, são suficientemente pequenas para espalharem (desviar a direção, sem absorver) a luz de menor comprimento de onda (luz azul, $\lambda \leq 0,4\,\mu$m) mais eficientemente

[6] Se fôssemos observar uma amostra de átomos de hidrogênio no estado fundamental de maior energia (spins do elétron e do próton paralelos), levaria 10 milhões de anos para metade da amostra decair espontaneamente para o estado de spins anti-paralelos, ou seja, a *vida média* do estado é 10 milhões de anos. Esse parâmetro é conseqüência direta do princípio da incerteza de Heisenberg, que em termos de energia é escrito como

$$\Delta E \Delta t \leq \hbar$$

Definindo: vida média do estado $= \tau \equiv \Delta t$; largura natural do estado $= \Gamma \equiv \Delta E/\hbar$
Resulta:

$$\Gamma = 3 \times 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1} \longrightarrow \tau = 10^7\ \text{anos}$$

do que as de maior comprimento de onda (luz vermelha, $\lambda \geq 0,7\,\mu$m). De fato, fótons azuis são desviados cerca de 10 vezes mais eficientemente do que os fótons vermelhos. Quando um fóton é desviado, sua direção muda aleatoriamente. Dessa maneira, o espalhamento reduz o número de fótons azuis em relação ao número de fótons vermelhos do feixe de luz que vem em nossa direção.

Para fótons no óptico, o espalhamento é proporcional ao comprimento de onda na potência -4:

$$A(\lambda) \simeq I_o \lambda^{-4}$$

Como resultado, a poeira interestelar faz as estrelas parecerem mais vermelhas do que realmente são. Esse efeito, chamado avermelhamento interestelar, é similar ao que ocorre na atmosfera da Terra, onde as moléculas de oxigênio, de poluição e a poeira desviam preferencialmente a luz azul do Sol, tornando-o vermelho ao pôr-do-sol.

A poeira tem uma temperatura da ordem de 10 a 20K no meio interestelar, e chega a 600K em uma Região HII.

25.6.3 Moléculas interestelares

As primeiras *moléculas interestelares* foram descobertas em 1937-1938, na forma de *metilidina* CH, CH^+, e cianogênio CN, aparentes nos espectros de algumas estrelas, mas causadas por absorção interestelar. Hidrogênio molecular H_2 foi descoberto no início dos anos 1970, junto com monóxido de carbono CO. Muitos outros tipos de moléculas têm sido encontradas desde então, desde amônia NH_3, até as mais complexas como etanol C_2H_5OH.

25.7 Populações estelares

Walter Baade (1893-1960), nascido Wilhelm Heinrich Baade e contemporâneo de Edwin Hubble (1889-1953) no observatório de Mount Wilson, estudando a galáxia Andrômeda, notou que podia distinguir claramente as estrelas azuis nos braços espirais da galáxia, e propôs o termo População I para estas estrelas dos braços, e População II para as estrelas vermelhas visíveis no núcleo da galáxia. Atualmente, utilizamos essa nomenclatura mesmo para estrelas da nossa galáxia e sabemos que as estrelas de População I são estrelas jovens, como o Sol, com menos de 5 bilhões de anos, ricas em metais, isto é, com conteúdo metálico (qualquer elemento mais pesado que o He) de cerca de 3%, enquanto que a População II corresponde a estrelas velhas, com

cerca de 10 bilhões de anos, e pobres em metais, isto é, com menos de 1% em metais.

Tabela 25.2: Sumário das propriedades das populações estelares

	População I	População II
Localização	disco e braços espirais	bojo e halo
Movimento	confinado ao plano	se afastando do plano
	órbitas quase circulares	órbitas excêntricas
Idade	$\leq 6 \times 10^9$ anos	$\geq 7 \times 10^9$ anos
Abundância de elementos pesados	1 - 2 %	0,1 - 0,01%
Cor	azul	vermelha
Exemplos	estrelas O,B	estrelas RR Lyrae
	aglomerados abertos	aglomerados globulares
	regiões HII	nebulosas planetárias

Estrelas de população III são, por definição, as primeiras estrelas formadas na galáxia. Nos modelos homogêneos de Universo, a nucleosíntese do Big Bang só formou 10^{-13} a 10^{-16} de carbono, lítio e berílio, além do hidrogênio, deutério e hélio. Portanto as estrelas de população III deveriam ter [Fe/H]<-10, onde a nomenclatura $[X] \equiv \log X - \log X_\odot$.

A formação das estrelas de baixa metalicidade ocorre porque as moléculas H_2 e HD produzem o esfriamento necessário à fragmentação e colapso das primeiras estruturas no Universo. O gás colapsa em filamentos, mas nas nuvens sem metais, o limite inferior do colapso é maior de 1 $M_\odot$, de modo que todas as estrelas de Pop. III já tiveram tempo suficiente para evoluir e tornarem-se pouco luminosas. Com baixa metalicidade, a massa máxima das estrelas formadas pode chegar a cerca de 1000 $M_\odot$ que, após consumir seu combustível nuclear, colapsam em buracos negros sem perder massa significativamente. Esses buracos negros podem passar por *mergers* sucessivos, formando os buracos negros supermassivos nos centros das galáxias ativas. A descoberta de buracos negros com 4000 $M_\odot$ no aglomerado globular M15 e de 20 000 $M_\odot$ em G1, um aglomerado mais massivo, através de observações com o Telescópio Espacial Hubble em 2002, é coerente com esta hipótese.

25.8 Estrutura espiral

As observações de nossa própria Galáxia podem ser comparadas com observações de outras galáxias que também têm matéria interestelar. Nessas

galáxias, se vê que as nebulosas gasosas geralmente se encontram distribuídas em uma estrutura espiral. Parece, então, razoável supor que nossa galáxia também tem uma estrutura espiral, mas fica muito difícil para nós visualizá-la, pois estamos dentro do próprio disco galáctico cercados de poeira interestelar, que bloqueia a luz.

No entanto, podemos ter alguma idéia sobre a localização dos braços espirais usando objetos que sejam *mapeadores* da estrutura espiral. Existem dois tipos básicos de mapeadores: os mapeadores óticos, que são objetos brilhantes, como estrelas OB, regiões HII e Cefeidas variáveis, e os mapeadores em *rádio*. O principal traçador em rádio é a linha de 21cm do hidrogênio neutro. Como o hidrogênio neutro existe em grande abundância na Galáxia, essa linha é observada em todas as direções.

As observações, tanto no óptico como no rádio, indicam que nossa Galáxia tem quatro braços espirais principais. O Sol está na borda interna de um braço pequeno chamado "braço de Órion", que contém, entre outros aspectos marcantes, a Nebulosa de Órion. Internamente ao braço de Órion, encontra-se o braço de Sagitário e, externam ente, o braço de Persei. O quarto braço, que não tem um nome, parece estar entre o braço de Sagitário e o centro galáctico, mas é muito difícil de detectar por ter sua emissão misturada à emissão do centro da Galáxia.

A causa da estrutura espiral ainda não está bem definida. A idéia inicial a respeito disso era de que os braços espirais seriam braços materiais formados pela rotação diferencial. Como o material mais distante do centro tem menor velocidade de rotação do que o mais próximo do centro (movimento kepleriano), uma pequena perturbação no disco naturalmente se espalharia em forma espiral(ver figura 25.10).

Acontece que as observações de estrelas velhas indicam que a Via Láctea deve ter, no mínimo, 10 bilhões de anos. Nesse tempo, o material nas vizinhanças do Sol já deve ter executado cerca de 20 rotações em torno do centro galáctico e, após 20 rotações, esperar-se-ia que os braços espirais estivessem muito mais enrolados do que as observações indicam.

Um passo importante no estudo da estrutura espiral foi a teoria de ondas de densidade, desenvolvida por Chia-Chiao Lin (1916-2013) e Frank Hsia-San Shu (1943-) nos anos 1960. A estrutura espiral é suposta como uma variação da densidade do disco em forma de onda. Ela gira como um corpo sólido, com uma velocidade angular fixa em todo o raio (ver figura 25.11). Na parte interna do disco, as estrelas e o meio interestelar têm uma velocidade maior do que a da onda, e a ultrapassam; na parte externa, as estrelas e o meio interestelar se movem mais lentamente do que a onda espiral, e são

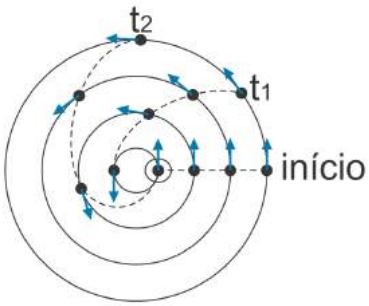


Figura 25.10: Formação de um braço espiral material: em um disco não rígido, mesmo que a velocidade *linear* seja constante ao longo do raio (setas azuis), os pontos mais externos têm velocidades *angulares* menores do que os mais internos, pois percorrem órbitas maiores. Como conseqüência, um braço material que em um tempo inicial seja reto, em um tempo t_1 terá adquirido uma forma curva e em um tempo t_2 estará mais enrolado ainda.

ultrapassados por ela.

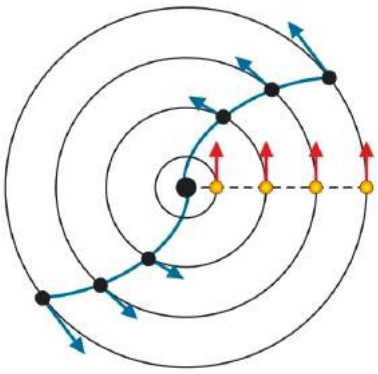


Figura 25.11: Braço espiral como onda de densidade: enquanto o material do disco percorre suas órbitas com velocidade *linear* constante ao longo do raio (bolinhas amarelas com setas vermelhas na figura), a onda (espiral azul na figura) viaja como um corpo rígido, com velocidades *lineares* crescentes para fora, de modo a manter a velocidade *angular* constante em todo o raio.

Essa teoria explica, de maneira natural, porque estrelas jovens, nuvens moleculares e regiões HII são encontradas nos braços espirais. Quando o gás

passa pela onda, ele é comprimido fortemente até que a gravidade interna cause o colapso e a formação de estrelas. Durante os 10^7 anos que leva para o material passar pelo braço espiral, as estrelas mais quentes e massivas já terminaram sua evolução, e as regiões HII já desapareceram. Mas, à medida que o braço se move, novas estrelas vão se formando pela compressão do material, de forma que sempre existem estrelas jovens sobre os braços espirais, embora não sejam sempre as mesmas estrelas.

Apesar do relativo sucesso da teoria das ondas de densidade em explicar a estrutura espiral, ela ainda ela não tem explicação certa para a origem da onda de densidade, nem o que a mantém. Entre as possíveis explicações que os astrônomos têm apresentado para a origem da estrutura espiral estão (a) efeitos gravitacionais das galáxias satélites da Via Láctea, a Pequena Nuvem de Magalhães e a Grande Nuvem de Magalhães e (b) assimetrias no disco gerados no processo de formação da Galáxia.

25.9 O Centro da Galáxia

O centro da Galáxia fica na direção da constelação de Sagitário, numa região com alta concentração de material interestelar que impede sua visualização a olho nú ou usando detectores óticos. A melhor maneira de estudar o bojo central é usando comprimentos de onda mais longos, como infravermelho e radio, que atravessam mais livremente a poeira e o gás do disco.

Observações em rádio indicam que no centro da Galáxia existe um um anel molecular de 3 kpc de diâmetro, envolvendo uma fonte brilhante de rádio, Sagitário A, que marca o centro.

Estudos no infravermelho indicam a existência de um grande aglomerado estelar, com uma densidade de estrelas de $10^6\,M_\odot/pc^3$, um milhão de vezes mais densa do que nas proximidades do Sol. O movimento do gás e das estrelas no núcleo indica que ali existe um objeto compacto, provavelmente um buraco negro com massa de 4,3 milhões de massas solares [4,3±0,2(estatístico)±0,3(sistemático)] milhões de massas solares, 2009, Stefan Gillessen, Frank Eisenhauer, Tobias K. Fritz, Hendrik Bartko, Katie Dodds-Eden, Oliver Pfuhl, Thomas Ott & Reinhard Genzel, "The orbit of the star S2 around SgrA* from VLT and Keck data", Astrophysical Journal, 707, 114.

Observações desde 2001 em raio-X confirmam que o núcleo da Galáxia é um lugar violento onde, além do buraco negro central supermassivo, existe grande quantidade de gás ionizado, e centenas de anã brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros. O buraco negro possivelmente está dentro de

uma bolha, criada por uma explosão de uma supernova próxima a ele cerca de 10 a 50 mil anos atrás, detectada por Frederick K. Baganoff et al. (2003, Astrophysical Journal, 591, 891) como dois lobos de gás quente [Robert Irion (2003, Science, 300, 1356)].

Capítulo 26

Galáxias

26.1 A descoberta das galáxias

Por volta do século XVIII, vários astrônomos já haviam observado, entre as estrelas, a presença de corpos extensos e difusos, aos quais denominaram "nebulosas". Hoje, sabemos que diferentes tipos de objetos estavam agrupados sob esse termo, a maioria pertencendo à nossa própria Galáxia: nuvens de gás iluminadas por estrelas dentro delas, cascas de gás ejetadas por estrelas em estágio final de evolução estelar, aglomerados de estrelas. Mas algumas daquelas nebulosas eram galáxias individuais, como a nossa Via Láctea.

As primeiras especulações a respeito da existência de outras galáxias além da Via Láctea são creditadas ao astrônomo amador inglês Thomas Wright (1711-1786) e ao filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804). Em 1750, Wright escreveu um livro chamado "An Original Theory of the Universe' ', em que expõe um modelo para explicar a Via Láctea como um efeito de estarmos imersos em uma camada de estrelas localmente plana e cogita sobre a existência de outras "vias lácteas". Inspirado nessas idéias, em 1755 Kant publicou seu "História Natural e Teoria do Céu", no qual propõe, entre outras idéias, que algumas das nebulosas que vemos no céu são sistemas estelares totalmente comparáveis à nossa Galáxia.

Até o início do século passado, cerca de 15 000 nebulosas já haviam sido catalogadas e descritas. Algumas haviam sido corretamente identificadas como aglomerados estelares, e outras como nebulosas gasosas. A maioria, porém, permanecia com natureza inexplicada. O problema maior era que a distância até elas não era conhecida, portanto, não era possível saber se pertenciam, ou não, à nossa Galáxia.

Dois dos maiores protagonistas nessa controvérsia foram os norte-ameri-

canos Harlow Shapley (1885-1972), do Mount Wilson Observatory, e Heber Doust Curtis (1872-1942), do Lick Observatory. Shapley, que já havia demonstrado a posição do Sol na Via Láctea, e calculado a melhor medida até então para seu tamanho, tinha bons argumentos a favor de que as nebulosas espirais eram objetos da nossa Galáxia[1] e Curtis defendia a idéia oposta.[2] A discussão culminou num famoso debate em abril de 1920, frente à Academia Nacional de Ciências, nos Estados Unidos, em que nenhum foi vitorioso. Mas três anos depois ficou provado que Curtis estava certo.

Em 1923, Edwin Powell Hubble (1889-1953), usando o novo telescópio de 100 polegadas (2,5 m) de Mount Wilson, foi capaz de identificar estrelas variáveis Cefeidas na "nebulosa" de Andrômeda (M31). Ele verificou que o brilho dessas estrelas seguia o mesmo padrão de variabilidade das Cefeidas da nossa Galáxia. Assumindo que todas elas seguiam a relação conhecida entre período e luminosidade, Hubble foi capaz de calcular a distância de Andrômeda, obtendo um valor de 1 milhão de anos-luz (hoje sabemos que essa distância é de 2,2 milhões de anos-luz). Isso situava Andrômeda bem além dos limites da nossa Galáxia, que tem 100 mil anos-luz de diâmetro. Ficou, assim, provado que Andrômeda era um sistema estelar independente (1926, *Extra-galactic nebulae.* Astrophysical Journal, 64, 321).

26.2 Classificação morfológica

As galáxias diferem bastante entre si, mas a grande maioria têm formas mais ou menos regulares quando observadas em projeção contra o céu e se enquadram em duas classes gerais: espirais e elípticas. Algumas galáxias não têm forma definida e são chamadas irregulares.

Um dos primeiros e mais simples esquemas de classificação de galáxias, que é usado até hoje, foi inventado por Edwin Powell Hubble (1899-1953) nos anos 1920, e aparece no seu livro *The Realm of the Nebulae*, de 1936,

[1] Os principais argumentos de Shapley eram suas próprias medidas do tamanho da Via Láctea (que estavam suficientemente corretas) e as medidas (equivocadas) do movimento próprio de estrelas em algumas nebulosas espirais pelo astrônomo holandês Adriaan Van Maanen. Van Mannen dizia que os movimentos medidos por ele correspondiam a períodos de rotação da ordem de 100 mil anos. Acreditando nessas medidas, Shapley argumentou que se essas nebulosas fossem grandes como a Via Láctea a velocidade em suas bordas seria maior que a velocidade da luz; portanto, elas deveriam ser pequenas e próximas.

[2] Curtis apresentou vários argumentos, um dos quais era que as novas observadas nas nebulosas espirais deveriam ser similares às novas observadas em nossa própria Galáxia, e portanto essas nebulosas deveriam estar muito distantes e ser sistemas estelares como a Via Láctea.

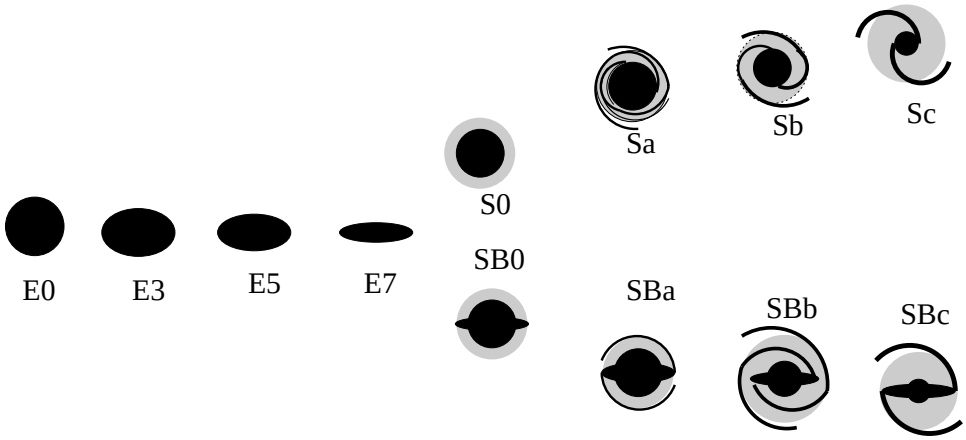


Figura 26.1: Esquema de Hubble para a classificação de galáxias.

baseado no esquema proposto por John Henry Reynolds (1874-1949) em 1920 (*Photometric measures of the nuclei of some typical spiral nebulae, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 80, 746*). O esquema de Hubble consiste de três seqüências principais de classificação: elípticas, espirais e espirais barradas. Nesse esquema, as galáxias irregulares formam uma quarta classe de objetos.

26.2.1 Espirais (S)

As galáxias espirais, quando vistas de frente, apresentam uma clara estrutura espiral. M31 e a nossa própria Galáxia são espirais típicas. Elas possuem um núcleo, um disco, um halo, e braços espirais. As galáxias espirais apresentam diferenças entre si, principalmente quanto ao tamanho do núcleo e ao grau de desenvolvimento dos braços espirais. Assim, elas são subdivididas nas categorias *Sa*, *Sb* e *Sc*, de acordo com o grau de desenvolvimento e enrolamento dos braços espirais (*a*, braços pequenos e bem enrolados, *c*, braços grandes e mais abertos), e com o tamanho do núcleo comparado com o do disco (*a*, núcleo maior, *c*, núcleo menor). Por exemplo, uma galáxia Sa é uma espiral com núcleo grande e braços espirais pequenos e bem enrolados.

Existem algumas galáxias que têm núcleo, disco e halo, mas não têm traços de estrutura espiral. Hubble classificou essas galáxias como *S0*, e elas são às vezes chamadas *lenticulares*. As galáxias espirais e lenticulares juntas formam o conjunto das galáxias *discoidais*.



Figura 26.2: Exemplos de galáxias espirais barradas: M83 e NGC1365.

Mais ou menos metade de todas as galáxias discoidais apresentam uma estrutura em forma de barra atravessando o núcleo. Elas são chamadas barradas e, na classificação de Hubble elas são identificadas pelas iniciais **SB**. As galáxias barradas também se subdividem nas categoria *SB0*, *SBa*, *SBb*, e *SBc*. Nas espirais barradas, os braços, normalmente, partem das extremidades da barra.

Normalmente, se observa, nos braços das galáxias espirais, o material interestelar. Ali também estão presentes as nebulosas gasosas, a poeira e estrelas jovens, incluindo as supergigantes luminosas. Os aglomerados estelares abertos podem ser vistos nos braços das espirais mais próximas e os aglomerados globulares no halo. A população estelar típica das galáxias espirais está formada por estrelas jovens e velhas.

As galáxias espirais têm diâmetros que variam de 20 mil anos-luz até mais de 100 mil anos-luz. Estima-se que suas massas variam de 10 bilhões a 10 trilhões de vezes a massa do Sol. Nossa Galáxia e M31 são ambas espirais grandes e massivas.

26.2.2 Elípticas (E)

As galáxias elípticas apresentam forma esférica ou elipsoidal e não têm estrutura espiral. Têm pouco gás, pouca poeira e poucas estrelas jovens. Elas

se parecem ao núcleo e halo das galáxias espirais.

Hubble subdividiu as elípticas em classes de E0 a E7, de acordo com o seu grau de achatamento. O número n ao lado do E é definido como $n = 10\left(1 - \frac{b}{a}\right)$, onde a é o diâmetro aparente maior da galáxia e b o seu diâmetro aparente menor. Imagine-se olhando um prato circular de frente: essa é a aparência de uma galáxia E0. Agora, vá inclinando o prato de forma que ele pareça cada vez mais elíptico e menos circular: esse achatamento gradativo representa a seqüência de E0 a E7. Note que Hubble baseou sua classificação na aparência da galáxia, não na sua verdadeira forma. Por exemplo, uma galáxia E0 tanto pode ser uma elíptica realmente esférica quanto pode ser uma elíptica mais achatada vista de frente, já uma E7 tem de ser uma elíptica achatada vista de perfil. Porém nenhuma elíptica jamais vai aparecer tão achatada quanto uma espiral vista de perfil.

As galáxias elípticas variam muito de tamanho, desde supergigantes até anãs. As maiores elípticas têm diâmetros de milhões de anos-luz, ao passo que as menores têm somente poucos milhares de anos-luz em diâmetro. As elípticas gigantes, que têm massas de até 10 trilhões de massas solares, são raras, mas as elípticas anãs são o tipo mais comum de galáxias.

A denominação M das galáxias vem de Charles **M**essier (1730-1817), um buscador de cometas, que, em 1781, registrou a posição de 103 objetos extensos (nebulosas) para não confundi-los com cometas.

26.2.3 Irregulares (I)

Hubble classificou como galáxias irregulares aquelas que eram privadas de qualquer simetria circular ou rotacional, apresentando uma estrutura caótica ou irregular. Muitas irregulares parecem estar sofrendo atividade de formação estelar relativamente intensa, sua aparência sendo dominada por estrelas jovens brilhantes e nuvens de gás ionizado distribuídas irregularmente. Em contraste, observações na linha de 21 cm, que revela a distribuição do gás hidrogênio, mostra a existência de um disco de gás similar ao das galáxias espirais. As galáxias irregulares também lembram as espirais no seu conteúdo estelar, que inclui estrelas de população I e II (jovens e velhas).

Os dois exemplos mais conhecidos de galáxias irregulares são a Grande e a Pequena Nuvens de Magalhães, as galáxias vizinhas mais próximas da Via Láctea, visíveis a olho nu no Hemisfério Sul, identificadas pelo navegador português Fernão de Magalhães (1480-1521), em 1520. A Grande Nuvem tem uma barra, embora não tenha braços espirais. Aparentemente, ela orbita a Via Láctea. Nela, está presente o complexo 30 Doradus, um dos maiores e mais luminosos agrupamentos de gás e estrelas supergigantes conhecido em

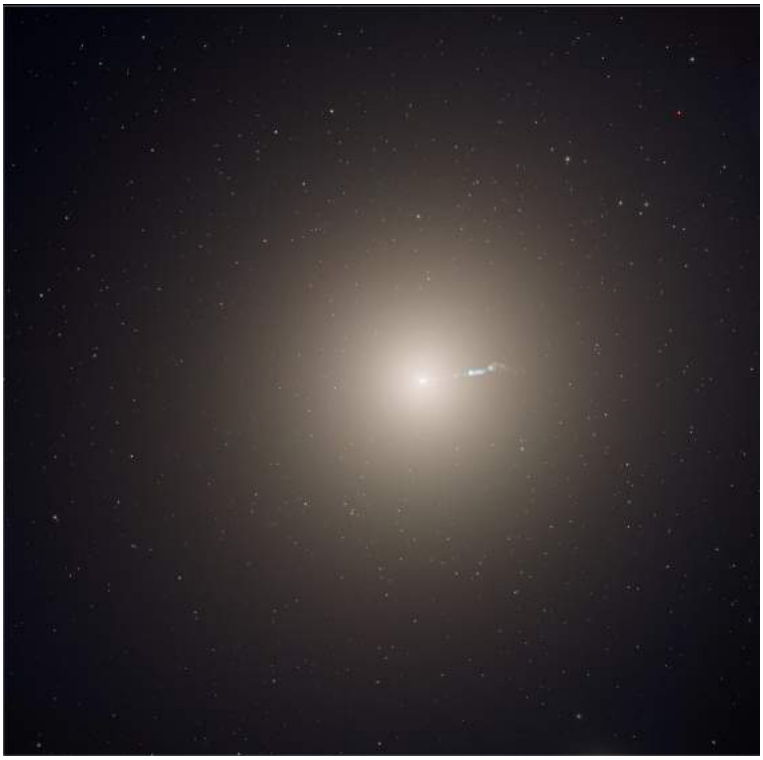


Figura 26.3: A galáxia elíptica gigante M87 em imagem obtida com o Telescópio Espacial Hubble.

qualquer galáxia. A Supernova 1987A ocorreu perto de 30 Doradus.

A Pequena Nuvem é bastante alongada e menos massiva do que a Grande Nuvem. Aparentemente é o resultado de uma colisão com a Grande Nuvem, que ocorreu há cerca de 200 milhões de anos.

26.3 Massas

Assim como a massa de uma estrela é a sua característica física mais importante, também nas galáxias a massa tem um papel crucial, não apenas em sua evolução como sistemas individuais, mas na evolução do próprio Universo. Por exemplo, da quantidade de massa das galáxias depende a densidade de matéria visível do Universo.

A melhor maneira de medir a massa é a partir das velocidades das estrelas

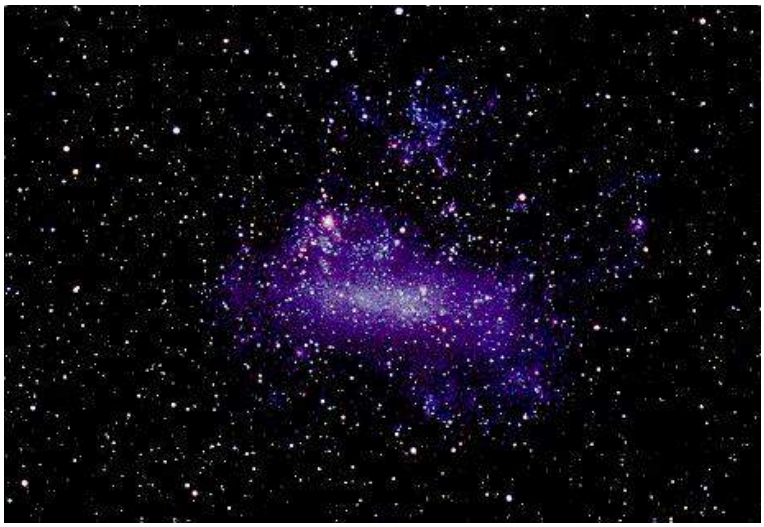


Figura 26.4: A Grande Nuvem de Magalhães, uma galáxia irregular.

Principais características dos diferentes tipos de galáxias

Propriedade	Espirais	Elípticas	Irregulares
Massa ($M_\odot$)	10^9 a 10^{12}	10^5 a 10^{13}	10^8 a 10^{11}
Diâmetro (10^3 parsecs)	5 - 30	1 - 1000	1 - 10
Luminosidade ($L_\odot$)	10^8 a 10^{11}	10^6 a 10^{12}	10^7 a 2×10^9
População estelar	velha e jovem	velha	velha e jovem
Tipo espectral	A a K	G a K	A a F
Gás	bastante	muito pouco	bastante
Poeira	bastante	muito pouca	varia
Cor	azulada no disco amarelada no bojo	amarelada	azulada
Estrelas mais velhas	10^{10} anos	10^{10} anos	10^{10} anos
Estrelas mais jovens	recentes	10^{10} anos	recentes

devido à atração gravitacional entre elas. Em galáxias elípticas, as velocidades medidas são velocidades médias (V), pois os movimentos das estrelas nesses sistemas têm componentes de mesma magnitude nas três direções, e todas seguem órbitas bastante elípticas (figura 26.5). Essas velocidades randômicas causam efeito Doppler tanto para o azul quanto para o vermelho, alargando as linhas: quanto mais alargada a linha, maior a velocidade média.

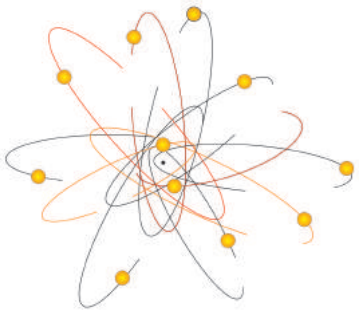


Figura 26.5: Movimentos das estrelas em uma galáxia elíptica. As órbitas são bastante elípticas e aleatórias, sem direção preferencial.

As galáxias espirais têm grande parte das estrelas confinadas ao plano do disco, com órbitas quase circulares (figura 26.6), e velocidades que dependem da distância ao centro ($V(R)$).

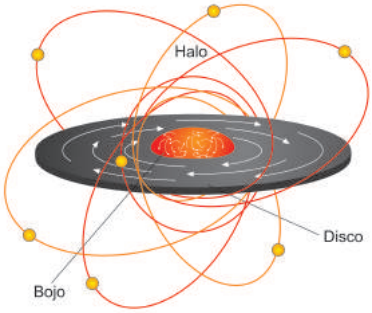


Figura 26.6: Movimentos das estrelas em uma galáxia espiral. As estrelas do disco se movem em órbitas coplanares e quase circulares; as estrelas do bojo e do halo têm órbitas com orientações e excentricidades variadas.

Para uma galáxia que é vista com o disco inclinado, as estrelas e o gás de um lado estarão se movendo no sentido contrário ao do observador, causando deslocamento Doppler para o vermelho; o material do outro lado estará se movendo no sentido de se aproximar, e a luz vinda dele estará deslocada para o azul. As velocidades de rotação em cada ponto são obtidas medindo o os deslocamentos Doppler das linhas espectrais. Observações em 21 cm mostram as linhas com forma parecida à da letra M, com dois picos nas extremidades: um pico com efeito Doppler para o azul, e o outro com efeito Doppler para o vermelho. O afastamento entre os dois picos dá a largura da linha, e é tanto maior quanto maior a velocidade de rotação.

26.3.1 Determinação de massa em galáxias elípticas

As massas das galáxias elípticas podem ser determinadas a partir do *Teorema do Virial*, segundo o qual num sistema estacionário (cujas propriedades não variam no tempo), a soma da energia potencial gravitacional das partículas com o dobro de sua energia cinética, é nula, ou seja:

$$E_G + 2E_C = 0$$

onde E_G é a energia potencial gravitacional e E_C é a energia cinética.

Podemos considerar uma galáxia como um sistema estacionário (pois ela não está nem se contraindo nem se expandindo), cujas partículas são as estrelas.

A energia cinética das estrelas na galáxia pode ser escrita como:

$$E_C = \frac{M\,V^2}{2}$$

onde M é a massa total da galáxia e V é a velocidade média das estrelas, medida pelo alargamento das linhas espectrais.

A energia potencial gravitacional é

$$E_G = -\frac{G\,M^2}{2R}$$

onde R é um raio médio da galáxia que pode ser estimado a partir da distribuição de luz. Combinando as três equações anteriores achamos que

$$\boxed{M^{\text{elípticas}} = \frac{2\,V^2\,R}{G}}$$

Esse mesmo método pode ser usado também para calcular as massas de aglomerados de galáxias, assumindo que eles são estacionários. Nesse caso, consideraremos cada galáxia como uma partícula do sistema. A energia cinética pode ser calculada pelos alargamentos das linhas espectrais, e a energia potencial gravitacional pela separação média das galáxias do aglomerado.

26.3.2 Determinação de massa em galáxias espirais

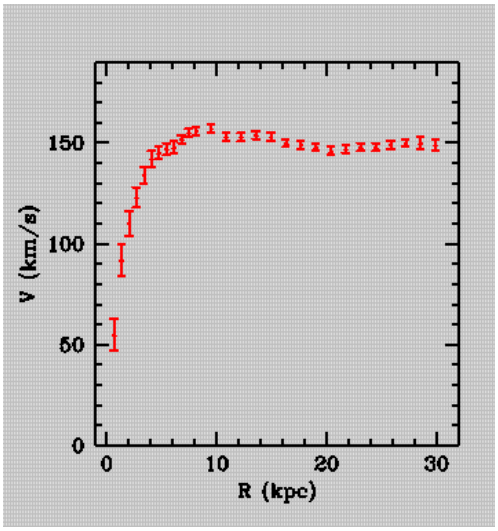


Figura 26.7: Curva de rotação para a galáxia espiral NGC3198.

Em galáxias espirais, nas quais o movimento circular das estrelas no disco é dominante sobre o movimento desordenado das estrelas do bojo, a massa pode ser determinada através da *curva de rotação*, V(R) vs. R, tal como foi visto no capítulo anterior para o caso da Via Láctea.

Assumindo que a maior parte da massa da galáxia está no bojo interno e que, portanto, o movimento rotacional das estrelas no disco é determinado pela massa do bojo, podemos determinar essa massa através da terceira lei de Kepler. Chamando $M(R)$ a massa interna ao raio R, temos que

$$\boxed{M(R)^{\text{espirais}} = \frac{R\,[V(R)]^2}{G}}$$

Nas partes externas de muitas espirais $V(R)$ não depende mais de R, permanecendo constante, de forma que, quanto maior o raio R, maior a massa

$M(R)$ interna a ele. Como as partes externas das galáxias são muito fracas, a partir de um certo valor de R a luminosidade não aumenta mais, mas a velocidade de rotação do gás continua constante, de maneira que a massa medida pela curva de rotação continua crescendo. Isso significa que uma grande parte da massa das galáxias deve ser não-luminosa, como na nossa Galáxia.

26.4 Luminosidade

A luminosidade de uma galáxia proporciona informações sobre a quantidade e tipo de estrelas nela presentes. A luminosidade total se refere ao fluxo integrado de toda a galáxia, e é muito difícil de medir com precisão, pois as bordas das galáxias não são bem definidas, e se fundem com o brilho do céu. Em geral se mede o fluxo integrado dentro de uma área estabelecida, que pode ser um círculo de determinado raio, ou uma determinada isofota (curvas de brilho superficial constante). Se a isofota for suficientemente fraca, a magnitude integrada assim obtida se aproxima bastante da magnitude total, e se a distância da galáxia for conhecida pode-se estimar sua magnitude total absoluta. Tipicamente, galáxias elípticas têm magnitudes totais absolutas, na banda V, -10 $\leq$ M_V $\leq$ -22, espirais e lenticulares têm -15 $\leq$ M_V $\leq$ -22, e irregulares têm -12 $\leq$ M_V $\leq$ -18.

26.5 Brilho superficial

O brilho superficial é o fluxo por unidade de área que sai da galáxia. Na Terra, o medimos como fluxo por unidade de ângulo sólido que chega ao observador. Geralmente é representado pela letra I, e a magnitude superficial correspondente (mag/segarc^2) pela letra μ:

$$\mu = -2.5 \log I + \text{constante}$$

O brilho superficial tem as mesmas dimensões de intensidade específica, e portanto não varia com a distância: o fluxo por unidade de área que sai da galáxia é igual ao fluxo por unidade de ângulo sólido que chega à Terra, independentemente da distância, pois se o fluxo diminui com o inverso do quadrado da distância, o ângulo sólido diminui seguindo a mesma lei, de maneira que a razão entre eles permanece constante. A distribuição de brilho superficial dá informações importante sobre a estrutura interna da galáxia.

26.5.1 Distribuição de brilho superficial

A distribuição de brilho superficial mostra como varia o fluxo por unidade de área ao longo da galáxia. Geralmente ele é medido em uma determinada banda fotométrica (B, V, R, etc). Os perfis radiais mostram como o brilho superficial varia desde o centro até as bordas, e sua forma depende do tipo de galáxia.

26.5.2 Elípticas

Os perfis de brilho das galáxias elípticas caem rapidamente do centro em direção às bordas, refletindo a concentração da luz no centro da galáxia, o que é típico da distribuição esferoidal. A figura 26.8 ilustra a variação do brilho superficial ao longo do raio em uma elíptica. Em geral a distribuição de brilho superficial é bem descrita por uma lei proposta por José Luis Sérsic (1933-1993) em 1968:

$$I(r) = I_e \, 10^{-(0{,}868\, n - 0{,}142)\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n} - 1\right]}$$

onde r_e é o raio efetivo, que contém metade da luminosidade total da galáxia, I_e é o brilho superficial isofota efetiva, correspondente ao raio r_e, e n é um número inteiro geralmente menor que 10. Para $n = 4$, a lei de Sérsic se reduz à lei $R^{1/4}$, que havia sido proposta 20 anos antes por Gerard de Vaucouleurs (1918-1995):

$$I(r) = I_e 10^{-3{,}33\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/4} - 1\right]}$$

26.5.3 Espirais

As galáxias espirais apresentam duas componente, o bojo e o disco, com distribuições de brilho superficial diferentes. Os bojos são muito parecidos com galáxias elípticas, e seus perfis radiais geralmente seguem a lei $r^{1/4}$ (lei de $deVaucouleurs$) ou $r^{1/n}$ (lei de Sérsic).

Os discos geralmente têm um perfil radial exponencial:

$$I(r) = I_0 \, e^{-\frac{r}{r_s}}$$

onde I_0 é o brilho superficial central extrapolado, e r_s é a escala de distância, que significa a distância entre o centro e o ponto do disco onde o brilho decai

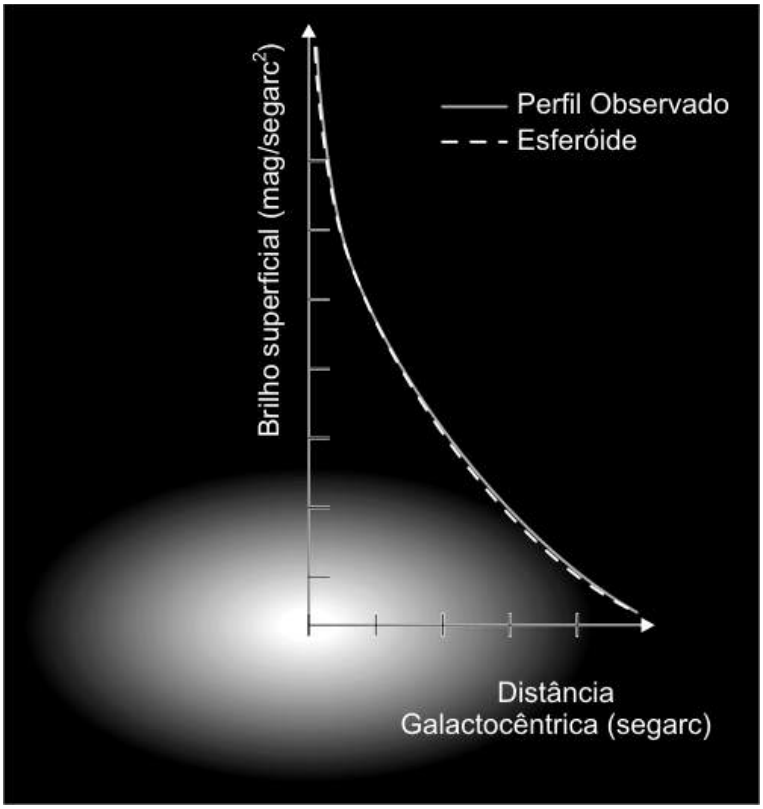


Figura 26.8: Perfil de brilho superficial de uma galáxia elíptica.

por um fator de $1/e$. Quanto maior for a escala de distância, mais lentamente decai o brilho.

Expressando o brilho superficial em μ, a função $\mu(r)$ para o disco fica uma reta:

$$\mu(r) = I_0\, e^{-\frac{r}{r_s}}$$

Para a maioria das galáxias próximas, 1 kpc $\leq r_s \leq$ 10 kpc, e $\mu_0 \simeq 21{,}7$ mag/segarc^2. A constância do brilho superficial central é conhecida como "lei de Freeman" (Kenneth Freeman), mas não se mantém para galáxias com baixo brilho superficial, que têm $\mu_0 \leq 23\, mag/segarc^2$.

O perfil de brilho das galáxias espirais é descrito pela soma da distribuição do bojo ($r^{1/n}$ ou $r^{1/4}$) com a do disco (exponencial), como ilustra a Figura 26.9.

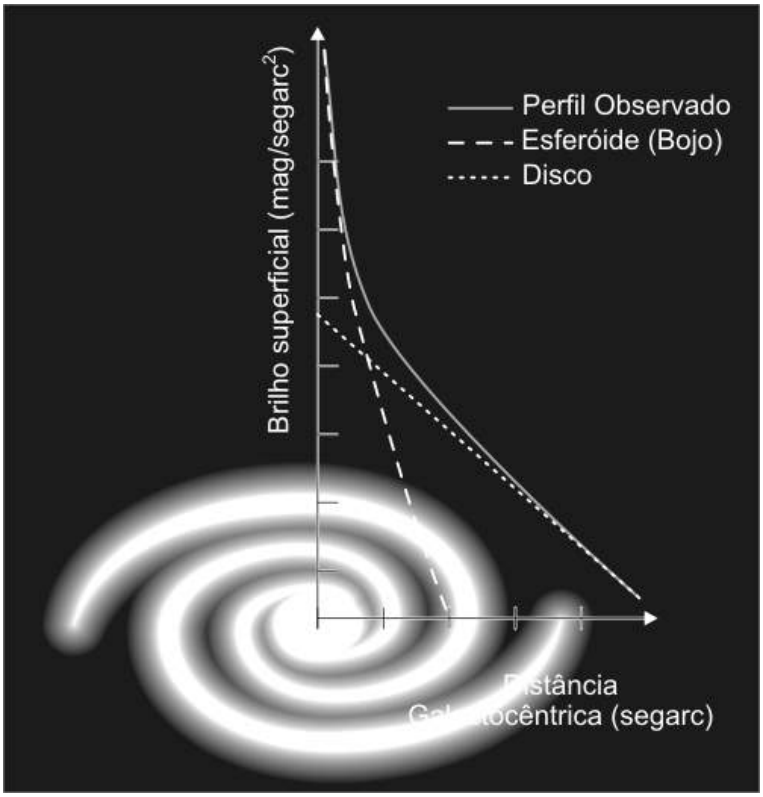


Figura 26.9: Perfil de brilho superficial (em magnitudes/segarc^2), para uma galáxia espiral. O perfil observado (linha contínua) é descrito pela soma de uma função $r^{1/n}$ (linha tracejada), dominante na parte interna, e uma função exponencial (linha pontilhada), que domina na parte externa.

26.6 A relação entre a luminosidade e a velocidade para galáxias elípticas e espirais

Sandra Moore Faber (1944-) e Robert E. Jackson (1949-), em 1976, mostraram que a luminosidade das galáxias elípticas é proporcional à velocidade média (V) das estrelas elevada na quarta potência:

$$L \propto V^4$$

ou seja, se uma galáxia tem o dobro da velocidade da outra, ela tende a ser 16 vezes mais luminosa.

Richard Brent Tully (1943-) e J. Richard Fisher encontraram uma relação similar para as espirais: galáxias mais luminosas têm, em média, maiores velocidades de rotação, significando que são mais massivas. A velocidade de rotação cresce com a luminosidade na mesma proporção $L \propto V^4$ encontrada para as elípticas. A proporcionalidade entre a luminosidade e a velocidade na quarta potência é chamada relação de Faber-Jackson, no caso das elípticas, e relação de Tully-Fisher, no caso das espirais. Como a velocidade de rotação das espirais pode ser obtida de maneira relativamente fácil através de observações em 21 cm, a relação de Tully-Fisher pode ser usada para estimar as distâncias de galáxias espirais remotas. Primeiro, calibra-se a relação usando-se galáxias espirais próximas o suficiente para se medir suas distâncias usando Cefeidas variáveis. Depois mede-se a velocidade de rotação da galáxia distante através da linha em 21 cm, e usa-se a relação $L \propto v^4$ para inferir sua luminosidade. Comparando-se a luminosidade com a magnitude aparente da galáxia obtém-se sua distância.

26.7 Aglomerados de galáxias



Figura 26.10: O aglomerado de galáxias de Coma, em imagem obtida com o Telescópio Espacial Hubble.

Olhando-se fotografias do céu, nota-se facilmente que as galáxias ten-

dem a existir em grupos. Jan Hendrik Oort (1900-1992) demonstrou que as galáxias não estão distribuídas aleatoriamente no espaço, mas concentram-se em grupos, como o Grupo Local, que contém 54 galáxias, e grande cúmulos, como o grande cúmulo de Virgem, que contém 2500 galáxias. Oort demonstrou, também, que as 2500 galáxias do cúmulo de Virgem, movendo-se a 750 km/s, são insuficientes por um fator de 100 para manter o cúmulo gravitacionalmente estável, indicando, novamente, que a matéria escura deve ser dominante. Recentemente a detecção pela emissão de raio-X dos gás quente no meio entre as galáxias dos cúmulos indica que um terço da matéria originalmente chamada de escura é na verdade gás quente. Mas pelo menos dois terços da matéria escura não pode ser bariônica, ou a quantidade de hélio e deutério do Universo teria que ser diferente da observada, como explicitado no capítulo de Cosmologia.

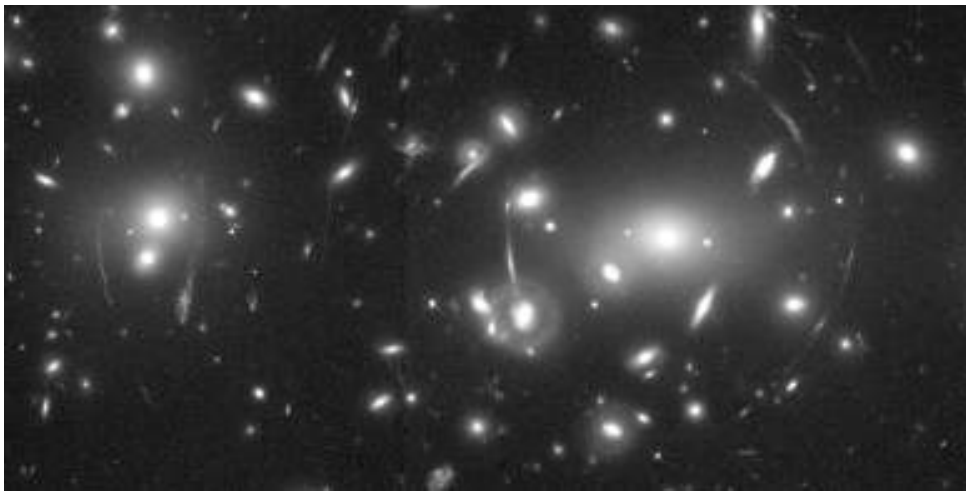


Figura 26.11: Imagem de lentes gravitacionais no aglomerado de galáxias Abell 2218, obtida com o Telescópio Espacial Hubble, da NASA.

26.7.1 O Grupo Local

O grupo de galáxias ao qual a Via Láctea pertence chama-se Grupo Local. É um aglomerado pequeno, com cerca de 54 membros, que ocupa um volume de 3 milhões de anos-luz na sua dimensão maior. A Via Láctea e Andrômeda (M31) são de longe os dois membros mais massivos, estando um em cada borda do aglomerado. A terceira galáxia mais luminosa do grupo é outra

espiral, M33, que tem 20% da luminosidade da Via Láctea e 13% da luminosidade de Andrômeda. Entre os demais membros tem apenas uma elíptica, M32, satélite de M31, e várias irregulares e galáxias anãs.

As Nuvens de Magalhães (Grande Nuvem de Magalhães e Pequena Nuvem de Magalhães), galáxias irregulares satélites da nossa Galáxia , também fazem parte desse grupo. A Grande Nuvem de Magalhães, localizada a 150 mil anos-luz (46 kpc) da Via Láctea, era até 1994 considerada a galáxia mais próxima[3]. Em 2004 foram descobertas várias galáxias anãs na região do Grupo Local, entre as quais uma localizada a apenas 24 kpc de distãncia, na direção do centro galáctico, em Sagitário. Essa é atualmente a galáxia mais próxima, e só não foi detectada antes devido a estar numa região de grande extinção e ter brilho superficial muito baixo.

No total, o grupo local contém 3 galáxias espirais, 1 elíptica, 14 galáxias irregulares de diferentes tamanhos, 27 anãs elípticas ou esferoidais, e 5 ainda sem classificação. A maioria das galáxias se encontram orbitando a Via Láctea ou Andrômeda, dando uma aparência binária ao Grupo Local.

26.7.2 Outros aglomerados de galáxias

Outros aglomerados de galáxias variam de grupos pequenos a aglomerados compactos. O aglomerado de *Fornax*, relativamente próximo, apresenta um conjunto variado de tipos de galáxias, embora tenha poucos membros. O grande aglomerado de *Coma* cobre 20 milhões de anos-luz no espaço (2 graus de diâmetro) e contém milhares de membros. O aglomerado de *Virgem* tem, no centro, as galáxias elípticas gigantes M84 e M86, situadas a uma distância de 34 milhões de anos-luz. Ele também cobre 20 milhões de anos-luz no espaço e é um dos mais espetaculares do céu. Suas quatro galáxias mais brilhantes são galáxias elípticas gigantes, embora a maior parte das galáxias membros visíveis sejam espirais. O aglomerado de Virgem é tão massivo e tão próximo que influencia gravitacionalmente o Grupo Local, fazendo com que nos movamos na sua direção. A galáxia elíptica gigante M87, também do aglomerado, está a uma distância de 50 milhões de anos-luz da Terra, e contém um buraco-negro massivo em seu centro, com massa de $1,3 \times 10^9\, M_\odot$.

[3]Considerando apenas as galáxias grandes e luminosas como a Via Láctea, Andrômeda é a mais próxima, mas incluindo todos os tipos de galáxias, galáxias anãs com as Nuvens de Magalhães são mais próximas

26.8 Superaglomerados

Depois de descobrir que as galáxias faziam partes de aglomerados – ou cúmulos – de galáxias, os astrônomos se perguntaram se existiam estruturas ainda maiores no Universo. Em 1953, o astrônomo francês Gérard de Vaucouleurs (1918-1995) demonstrou que os aglomerados de galáxias também formam superaglomerados.

O superaglomerado mais bem estudado é o Supercúmulo Local, porque fazemos parte dele. Ele tem um diâmetro de, aproximadamente, 100 milhões de anos-luz e uma massa de aproximadamente 10^{15} massas solares, contendo o Grupo Local de galáxias, e o cúmulo de Virgem.

Entre esses superaglomerados, observam-se grandes regiões sem galáxias, mas onde foram detectadas nuvens de hidrogênio neutro. Margaret J. Geller (1947-) e John Peter Huchra (1948-), do Center for Astrophysics da Universidade de Harvard, e os brasileiros Luiz Alberto Nicolaci da Costa (1950-) e Paulo Sérgio de Souza Pellegrini (1949-), do Observatório Nacional, têm estudado a distribuição de galáxias em grande escala, mostrando que as galáxias não estão distribuídas uniformemente, mas formam filamentos no espaço. Um exemplo desses filamentos é a Grande Parede (*Great Wall*), um concentração de galáxias que se estende por cerca de 500 milhões de anos-luz de comprimento, 200 milhões de anos-luz de altura, mas somente 15 milhões de anos-luz de espessura. Essa estrutura está a uma distância média de 250 milhões de anos-luz da nossa Galáxia, e tem uma massa da ordem de $2 \times 10^{16}\ M_{\odot}$. Entre esses filamentos estão regiões, de diâmetros de 150 milhões de anos-luz, sem galáxias. A estrutura lembra um esponja.

26.9 Colisões entre galáxias

Galáxias em aglomerados estão relativamente próximas umas das outras, isto é, as separações entre elas não são grandes comparadas com seus tamanhos (o espaçamento entre as galáxias é da ordem de apenas cem vezes o seu tamanho)[4]. Isso significa que, provavelmente, essas galáxias estão em freqüentes interações umas com as outras.

Nos catálogos existentes de galáxias peculiares há muitos exemplos de pares de galáxias com aparências estranhas que parecem estar interagindo uma com a outra. Podemos entender muitos desses casos em termos de efeitos de maré gravitacional. Os efeitos de marés entre pares de galáxias que casualmente passam perto uma da outra foram estudados pelos irmãos

[4] A distância média entre as estrelas é da ordem de 1 pc=$44 \times 10^6 R_{\odot}$

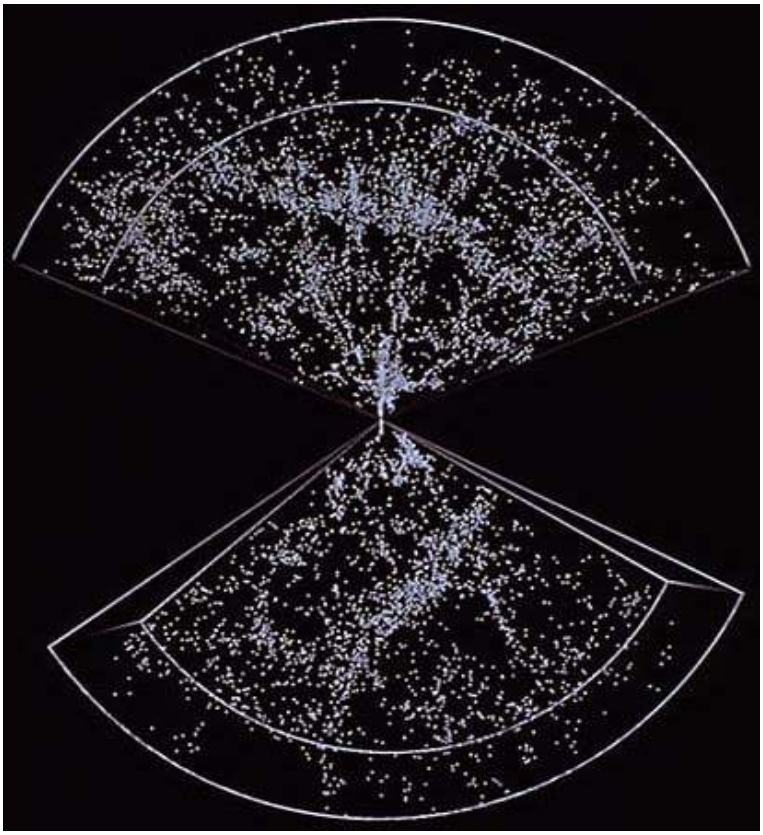


Figura 26.12: Distribuição de galáxias no espaço, conforme observações de Margaret Geller e John Huchra. Cada ponto nessa figura representa uma das 9325 galáxias, na direção do pólos sul e norte da nossa galáxia. Nossa galáxia está no centro da figura, onde as duas partes se unem; as regiões não mapeadas são obscurecidas pelo disco da nossa galáxia. A Grande Parede é a banda de galáxias que se estende de lado a lado quase no meio da parte superior da figura.

Alar e Juri Toomre, que assinalaram três propriedades fundamentais nas interações por maré: (1) a força de maré é proporcional ao inverso do cubo da separação entre as galáxias; (2) as forças de maré sobre um objeto tende a alongá-lo; assim, os bojos de maré se formam no lado mais próximo e no lado mais distante de cada galáxia em relação à outra; (3) as galáxias perturbadas geralmente giravam antes do encontro de maré e a distribuição posterior de seu material deve, portanto, refletir a conservação de seu *momentum angular*.

Como um primeiro resultado, é de se esperar que uma interação de maré entre duas galáxias puxe matéria de uma em direção à outra. Essas "pontes" de matéria realmente se formam entre as galáxias interagentes, mas também se formam caudas de matéria que saem de cada galáxia na direção oposta à outra. Devido à rotação das galáxias, as caudas e pontes podem assumir formas esquisitas, especialmente se levarmos em conta o fato de que os movimentos orbitais das galáxias estarão em um plano que forma um ângulo qualquer com a nossa linha de visada. Os astrônomos têm conseguido calcular modelos de galáxias interagentes que simulam a aparência de diversos pares de galáxias com formas estranhas, vistas, realmente, no céu.

26.9.1 Fusão de galáxias e canibalismo galático

Se as galáxias colidem com velocidade relativamente baixa, elas podem evitar a disrupção por maré. Os cálculos mostram que algumas partes das galáxias que colidem podem ser ejetadas, enquanto as massas principais se convertem em sistemas binários (ou múltiplos) com pequenas órbitas ao redor uma da outra. O sistema binário formado recentemente, encontra-se envolto em um envelope de estrelas e possivelmente matéria interestelar, e, com o passar do tempo, pode se fundir, formando uma única galáxia. Esse processo é especialmente provável nas colisões entre os membros mais massivos de um aglomerado de galáxias, que tendem a ter velocidades relativamente mais baixas.

O termo fusão de galáxias é usado em referência à interação entre galáxias de tamanhos semelhantes. Quando uma galáxia muito grande interage com outra muito menor, as forças de maré da galáxia maior podem ser tão fortes a ponto de destruir a estrutura da galáxia menor, cujos pedaços serão então incorporados pela maior. Astrônomos chamam este processo de canibalismo galático.

Observações recentes mostram que galáxias elípticas gigantes, conhecidas como galáxias *cD*, têm propriedades peculiares, tais como: halos muito extensos (até 3 milhões de anos luz em diâmetro), núcleos múltiplos, e localização em centros de aglomerados. Essas propriedades sugerem que essas

galáxias se formaram por canibalismo galático.

Muitas vezes, o encontro entre as galáxias não é forte o suficiente para resultar em fusão. Numa interação mais fraca, ambas as galáxias sobrevivem, mas o efeito de maré pode fazer surgirem caudas de matéria, em um ou ambos os lados das duas galáxias. Muitas galáxias com aparências estranhas, que não se enquadram em nenhuma das categorias de Hubble, mostram evidências de interações recentes. Simulações por computador mostram que sua forma pode ser reproduzida por interação de maré, em colisões. Um resultado recente de simulações em computador é a possibilidade de que colisões possam transformar galáxias espirais em elípticas: a interação pode retirar gás, estrelas e poeira das duas galáxias, transformando-as em uma elíptica. A colisão pode também direcionar grande quantidade de gás ao centro da elíptica resultante, propiciando a criação de um buraco negro.

26.10 A formação e evolução das galáxias

Qual a causa de existirem diferentes tipos de galáxia? Quando os primeiros estudos sobre galáxias iniciaram, o fato de as galáxia elípticas terem estrelas, em geral, mais velhas do que as galáxias espirais, levou alguns astrônomos a pensarem que as diferenças se deviam à evolução, ou seja, as galáxias espirais seriam jovens e as a elípticas seriam mais velhas. Mas essa idéia teve de ser abandonada pela constatação de que as estrelas mais velhas das galáxias espirais são tão velhas quanto as estrelas mais velhas das galáxias elípticas, e portanto os dois tipos devem ter sido formados à mesma época, quando o Universo tinha cerca de 1 bilhão de anos.

Na segunda metade do século passado surgiram as duas teorias principais sobre formação e evolução de galáxias: o *modelo monolítico* propõe que as galáxias se formaram e evoluíram isoladamente pelo colapso de grandes nuvens de gás; o *modelo hierárquico* propõe que as galáxias se formaram e evoluiram através de encontros sucessivos de nuvens menores. Ambas as teorias supõem que as nuvens de gás que deram origem às galaxias se formaram pela condensação de matéria em certas regiões do espaço devido às flutuações de densidade existentes no Universo primordial.

No modelo monolítico, a forma das galáxias seria determinada pela rapidez com que aconteceu a formação estelar (taxa de formação estelar) na nuvem em contração, e pela quantidade de rotação (*momentum* angular) da nuvem. Em nuvens de baixa rotação e com alta taxa de formação estelar, praticamente todo o gás seria consumido rapidamente e a galáxia resultante seria uma elíptica, de forma ovalada e com pouco gás para dar origem a

novas estrelas. Em nuvens com alta rotação e baixa taxa de formação estelar, parte do gás se depositaria em um disco, como conseqüência da rotação da nuvem. A galáxia resultante seria uma espiral, com gás suficiente para manter formação estelar até a época atual.

No modelo hierárquico, as pequenas nuvens de gás em contração dariam origem preferencialmente a sistemas puramente discoidais, que evoluiriam a galáxias espirais, se sofressem poucas interações entre si, ou a elípticas, no caso de os encontros e fusões serem muito freqüentes. Neste modelo, o o fator determinante para a evolução da galáxia é o meio em que ela se encontra.

Nos últimos 20 anos, o uso de telescópios modernos, que permitem estudar galáxias a grandes distâncias, têm fornecido vários vínculos observacionais para o estudo da evolução das galáxias. Observando galáxias remotas, os astrônomos constataram que que no passado havia um grande número de galáxias pequenas, irregulares e com uma taxa muito alta de formação estelar, que não existem no Universo atual, sugerindo que elas se fundiram posteriormente dando origem a galáxias maiores.

Outra observação importante é a de que galáxias espirais são raras em aglomerados densos de galáxias, onde as galáxias elípticas predominam. Essas observações em geral favorecem o modelo hierárquico, pois evidenciam que as estruturas menores se formaram antes das maiores, e que o meio tem influência sobre a evolução das galáxias, pois interações e colisões podem alterar suas morfologias.

No momento não existe uma teoria que dê conta de todos os aspectos observacionais para explicar como as galáxias se formaram e evoluíram até o presente, muito menos uma teoria que possa prever sua evolução futura. Ainda existe muito trabalho a fazer nesse campo.

26.11 Galáxias ativas

Existem algumas galáxias que emitem uma excepcional quantidade de energia, com espectro não térmico, ou seja, cuja fonte não são as estrelas. Essas galáxias são classificadas como galáxias ativas, e recebem diferentes nomes de acordo com sua aparência e a natureza da radiação que emitem. Entre elas estão as galáxias Seyfert, as rádio-galáxias, e os objetos mais luminosos do Universo — os quasares[5]. Acredita-se que todas as galáxias ativas tenham

[5]Os quasares são os objetos mais luminosos que emitem energia de uma forma estável. Existem outros objetos, conhecidos como *fontes explosivas de raios gama*, que, durante a explosão, são ainda mais luminosos do que os quasares.



Figura 26.13: Imagem no ótico do quasar 3C 279, obtida com o Canada-France-Hawaii Telescope de 3,6 m de diâmetro. O quasar tem magnitude aparente V=17,75 e magnitude absoluta estimada de $M_V = -24,6$.

um buraco negro central, que proporciona, por interação, as quantidades enormes de energia que elas emitem.

26.11.1 Quasares

Os quasares, cujo nome vem de *Quasi Stellar Radio Sources*, foram descobertos em 1961, como intensas fontes de rádio, com aparência ótica aproximadamente estelar, azuladas. Mais provavelmente, são galáxias com buracos negros fortemente ativos no centro, como foi proposto, em 1964, por Edwin Ernest Salpeter (1925-2008) e Yakov Borisovich Zel'dovich (1914-1989). São objetos extremamente compactos e luminosos, emitindo mais energia do que centenas de galáxias juntas, isto é, até um trilhão de vezes mais do que o Sol. São fortes fontes de rádio, variáveis, e seus espectros apresentam linhas largas com efeito Doppler indicando que eles estão se afastando a velocidades muito altas, de até alguns décimos da velocidade da luz. O primeiro a ter seu espectro identificado foi 3C 273, por Maarten Schmidt (1929-), em 1963. Esse quasar tem magnitude aparente V = 12,85, mas magnitude absoluta estimada de M_V = -26,9. No modelo mais aceito, o buraco negro central acreta gás e estrelas da sua vizinhança, emitindo intensa radiação enquanto a matéria se acelera, espiralando no disco de acreção, e parte da matéria é ejetada por conservação de *momentum* angular. Quando o buraco negro consumir toda matéria circundante, ele cessará de emitir.

O mais distante quasar até junho de 2007, com z=6,43, representa o

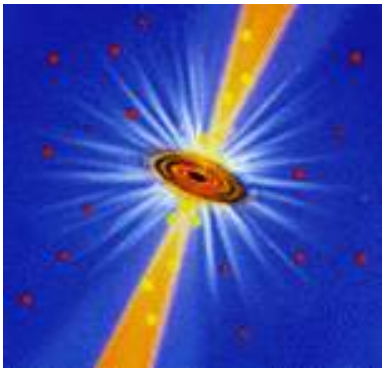


Figura 26.14: Modelo de um quasar, com um buraco negro no centro, um disco de acreção em volta deste, e jatos polares.

Universo quando este tinha somente 800 milhões de anos.

O recorde em 2011 é da galáxia UDFj-39546284, uma galáxia compacta de estrelas azuis, a uma distância de 13,2 bilhões de anos-luz, formada 480 milhões de anos depois do Big Bang, detectada pelo Telescópio Espacial Hubble, com $z \simeq 10$, no Campo Ultra Profundo.

Como os deslocamentos para o vermelho (*redshifts*) dos quasares são em geral grandes, $z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, precisamos utilizar a fórmula do deslocamento Doppler relativístico para calcular sua velocidade. Por exemplo, um quasar que tem deslocamento Doppler $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 5$ indicaria uma velocidade de 5 vezes a velocidade da luz, se utilizarmos a fórmula do deslocamento Doppler não relativístico, $\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Mas o deslocamento Doppler relativístico é dado por:

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{(1+v/c)}{(1-v/c)}} - 1$$

de modo que a velocidade é dada por:

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

As distâncias dos quasares e das galáxias distantes em geral, são obtidas diretamente a partir do *redshift* relativístico z, aplicando a lei de Hubble (v=H d) na equação acima, que fica:

$$d = \frac{c}{H} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

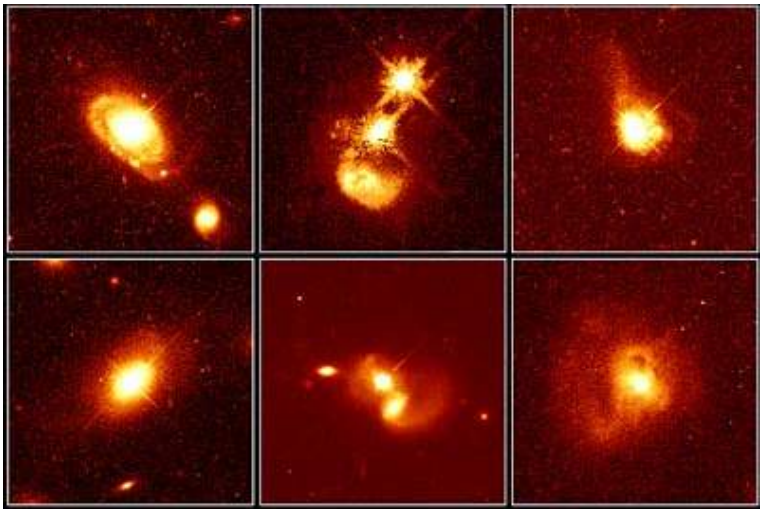


Figura 26.15: Imagens obtidas por John Norris Bahcall (1934-2005) e Mike Disney com o Telescópio Espacial Hubble, da NASA, mostrando que os quasares ocorrem tanto em galáxias normais quanto em galáxias perturbadas. Por exemplo, PG 0052+251 (canto esquerdo superior), a 1,4 bilhões de anos-luz da Terra, reside em uma galáxia espiral normal; PHL 909, a 1,5 bilhões de anos-luz (canto inferior esquerdo), em uma galáxia elíptica; IRAS04505-2958, PG 1212+008, Q0316-346 e IRAS13218+0552, em vários tipos de galáxias em interação.

Para H = 75 km/s/Mpc, $\frac{c}{H} = 4$ Gpc = 13 bilhões de anos-luz, resultando

$$d = 4\,\mathrm{Gpc}\left[\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}\right] = 13\,\mathrm{Gal}\left[\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}\right]$$

26.11.2 Movimentos superluminais

O movimento dos jatos em galáxias ativas e quasares parece se dar a uma velocidade acima da velocidade da luz e por isto são chamados de movimentos superluminais. Na verdade trata-se da projeção do movimento que vemos a um ângulo θ em relação à linha de visada. Considere que para t=0, no sistema de referência do núcleo, o material está na posição do núcleo. Para um tempo t_o o material se deslocou em uma direção fazendo um ângulo θ em relação à linha de visada do núcleo. O observador vê o material coincidindo

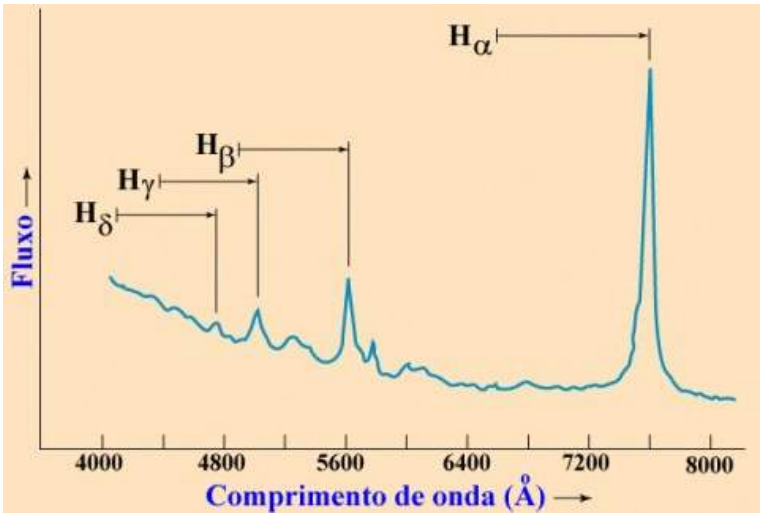


Figura 26.16: O espectro do quasar 3C 273 no ótico e infravermelho próximo é dominado pelas linhas do hidrogênio em emissão e deslocadas para o vermelho (*redshifted*) por efeito Doppler. Por exemplo, a linha Hβ está deslocada de 4861 Å para 5630 Å.

com o núcleo para um tempo $t_1 = r_0/c$. No instante t_1 temos:

$$t_1 = \frac{r_o}{c}$$

No instante t_2:

$$t_2 = t_o + \frac{r_o}{c} - \frac{vt_o \cos\theta}{c}$$

o observador vê o material deslocado no céu uma distância $\Delta y = vt_o \operatorname{sen}\theta$. Logo

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_o \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

ou seja, a velocidade aparente de deslocamento no plano do céu é dada por:

$$v_{\text{aparente}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{vt_o \operatorname{sen}\theta}{t_o\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}$$

ou

$$\boxed{v_{\text{aparente}} = \frac{v \operatorname{sen}\theta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}}$$

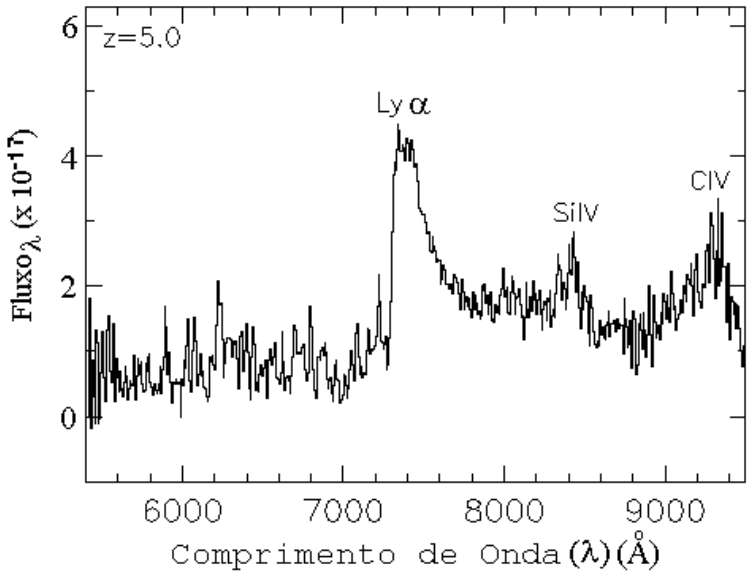


Figura 26.17: Espectro de um dos quasares mais distantes conhecidos, com deslocamento para o vermelho (*redshift*) $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 5$, descoberto pelo Sloan Digital Sky Survey em 1998.

Por exemplo, consideremos o caso de $v/c = 0,9$ e $\theta = 10°$. Neste caso, $v_{\text{aparente}} = 1,37$ c.

A velocidade aparente é máxima para $v/c = \cos\theta$, pois como

$$\operatorname{sen}\theta = \left(1 - \cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{\text{aparente}} = \frac{v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ou seja, para $v/c = 0,9$, $v_{\text{aparente}} = 2,06$ c.

26.11.3 Radio-galáxias

São galáxias que têm uma emissão em rádio muito intensa, em torno de 10^{33} a 10^{38} W. Observadas no ótico, geralmente têm a aparência de uma galáxia elíptica grande, mas, observadas em rádio, apresentam uma estrutura

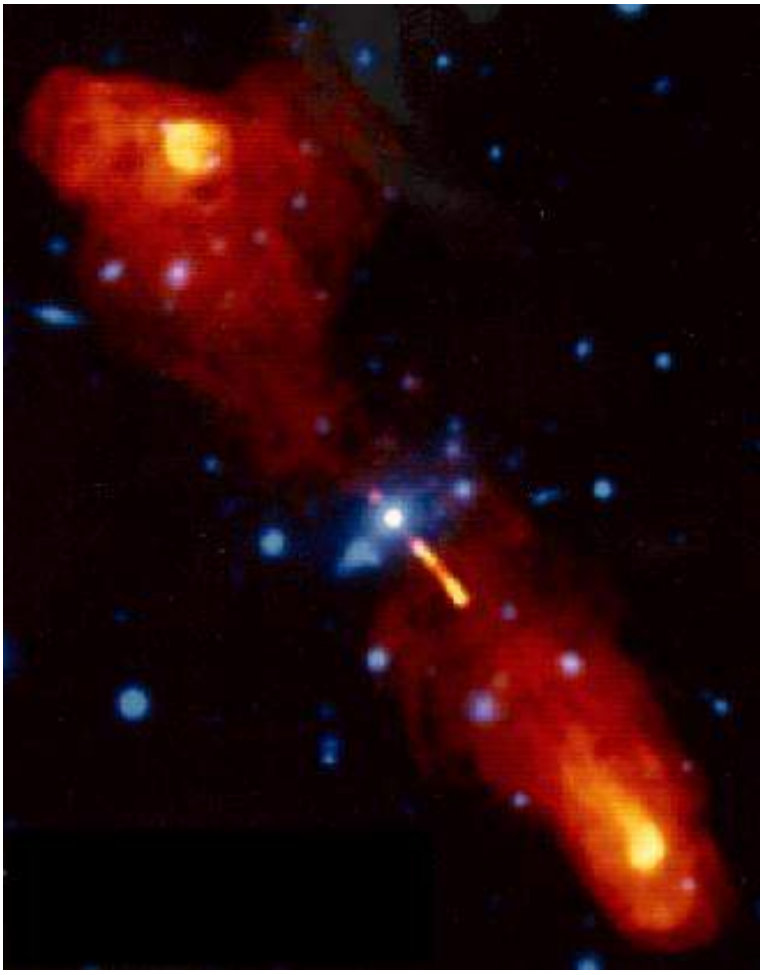


Figura 26.18: Superposição da imagem ótica (em azul) com a imagem em rádio (em vermelho) do quasar 3C219, que está a 500 Mpc. Enquanto a galáxia tem 100 mil anos-luz de diâmetro, os jatos cobrem 1 milhão de anos-luz (National Radio Astronomy Observatory 1994).

dupla, com dois lóbulos emissores em rádio, localizados um em cada lado da galáxia elíptica, e a distâncias que chegam a 6 Mpc de seu centro. Outra característica das rádio-galáxias é a presença de um jato de matéria saindo da fonte central, localizada no núcleo da galáxia. A explicação mais plausível para os jatos é a mesma dos quasares: partículas carregadas se movendo

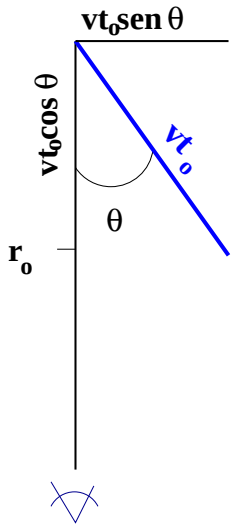


Figura 26.19: Geometria de um movimento aparentemente superluminal.

em um campo magnético. Como a trajetória seguida pelas partículas é helicoidal, seu movimento é acelerado e elas irradiam energia. Uma das radio-galáxias mais brilhantes é Centauro A, localizada na constelação do Centauro, no Hemisfério Sul celeste.

26.11.4 Galáxias Seyfert

As galáxias Seyfert, descobertas por Carl Keenan Seyfert (1911 - 1960), em 1943, são galáxias espirais com núcleos pontuais muito luminosos, em torno de 10^{36} a 10^{38} W, contribuindo com aproximadamente metade da luminosidade total da galáxia no ótico. O espectro nuclear apresenta linhas de emissão alargadas, de elementos pesados altamente ionizados, e um contínuo não-térmico muito intenso no ultravioleta, cuja estrutura é explicada como devida a movimentos internos muito rápidos no núcleo. Geralmente, a emissão dessas galáxias sofre variabilidade em períodos relativamente curtos, o que leva a concluir que a fonte emissora deve ser compacta, como um buraco negro. Estima-se que aproximadamente 1% de todas as galáxias espirais são Seyfert.

Comparação entre diferentes tipos de galáxias ativas

Propriedade	Radio-galáxias	Galáxias Seyfert	Objetos BL Lac	Quasares
Espectro contínuo	não-estelar	não-estelar	não-estelar	não-estelar
Linhas de emissão	largas e estreitas	largas e estreitas	nenhuma ou fracas	largas e estreitas
Forma no ótico	elíptica	espiral	incerta	estelar
Forma em rádio	jatos e lóbulos	emissão fraca	emissão fraca	jatos e lóbulos

26.11.5 Objetos BL Lacertae (BL Lac)

Os objetos BL Lacertae, também chamados *blazares*, constituem uma outra classe de objetos exóticos, que apresentam um núcleo muito brilhante e compacto. Têm como principais características a extraordinária variabilidade em curtos períodos de tempo, luz polarizada, e um espectro não-térmico sem linhas de emissão ou absorção. O primeiro objeto desse tipo, e que deu nome à classe, foi BL Lacertae, observado em 1929, na constelação do Lagarto. No princípio, foi confundido com uma estrela, por seu brilho poder variar por um fator de 15, em poucos meses. Muitos desses objetos são também fontes de rádio, e acredita-se que eles sejam rádio-galáxias, orientadas de forma que a linha de visada fica na direção do jato.

Atualmente a maioria dos astrônomos aceita que as diversas formas de galáxias com núcleo ativo, como galáxias Seyfert, quasares e blazares, tenham sua fonte de energia originada no mesmo processo básico: gás sendo sugado por um buraco negro central, liberando energia potencial na forma de radiação.

O catálogo de galáxias ativas dos franceses Marie-Paule Véron-Cetty e Philippe Véron, *Quasars and Active Galactic Nuclei (12th Ed.)*, publicado em 2006, contém 85 221 quasares (definidos como objetos mais brilhantes que magnitude absoluta B=-23), 21 737 AGNs (*Active Galactic Nuclei*, definidos como objetos mais fracos que magnitude absoluta B=-23) e 1122 blazares. O Catálogo de Galáxias do *Data Release 4 do Sloan Digital Sky Survey* contém 88 178 galáxias com linhas de emissão. Em 2004 Scott M. Croom e colaboradores (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 349, 1397) publicaram o catálogo de espectros de 40 220 quasares observados no hemisfério sul pelo *2dF Galaxy Redshift Survey*. O Décimo Catálogo de Quasares do Sloan Digital Sky Survey de Isabelle Pâris e colaboradores publicado em 2013, contém 166 583 quasares. O *Data Release 7 do Sloan Digital*

Sky Survey, publicado em 2008, contém espectros de 929 124 galáxias.

As maiores dúvidas sobre as galáxias concentram-se em como elas se formaram, qual é a composição de sua massa escura – que pode corresponder a 90% de sua massa total, e porque algumas galáxias parecem conter um buraco negro central que libera uma quantidade colossal de energia.

26.12 A lei de Hubble

Em 1912, o astrônomo americano Vesto Melvin Slipher (1875-1969), do Observatório Lowell, descobriu que as linhas espectrais da galáxia Andrômeda (M31) mostravam um enorme deslocamento para o azul, indicando que essa galáxia estava se aproximando do Sol, a uma velocidade de 300 km/s. Slipher iniciou, então, um trabalho sistemático que levou duas décadas, demonstrando que, das 41 galáxias que ele estudou, a maioria apresentava deslocamento espectral para o vermelho, indicando que as galáxias estavam se afastando de nós. Slipher notou que, quanto mais fraca a galáxia, maior era o deslocamento para o vermelho de seu espectro.

As implicações mais importantes do trabalho de Slipher ficaram mais claras durante os anos 20, quando Edwin Hubble conseguiu estimar as distâncias de Andrômeda e outras galáxias, observando o brilho aparente e os períodos de pulsação de estrelas Cefeidas nessas galáxias. Hubble e seu colaborador, Milton Humason, fotografaram os espectros de várias galáxias, usando o telescópio de 2,50 m de Monte Wilson. Quando compararam as distâncias das galáxias com as suas velocidades de afastamento, determinadas a partir dos desvios para o vermelho de suas linhas espectrais, Hubble e Humason verificaram que as galáxias mais distantes estavam se afastando com velocidades maiores. Plotando os dados em um gráfico de velocidade em função da distância, Hubble encontrou que os pontos se distribuíam ao longo de uma linha reta. Em 1929, Hubble publicou sua descoberta, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae* (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 15, 168) que agora é conhecida como Lei de Hubble (figura 26.20), e que pode ser representada pela fórmula

$$v = H_0\, d$$

sendo:

- v = velocidade de recessão da galáxia;
- H_0 = constante de Hubble;

- d = distância da galáxia.

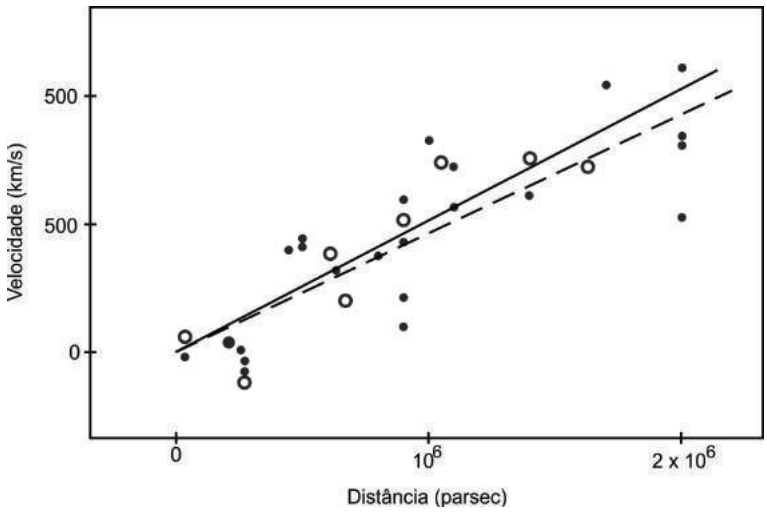


Figura 26.20: Diagrama original de Hubble, publicado em 1929. A linha contínua é a reta que melhor ajusta os círculos pretos cheios, correspondentes a medidas de velocidades e distâncias de galáxias individuais; a linha tracejada é o ajuste dos círculos brancos vazados, correspondentes às combinações de galáxias em grupos.

Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966), em seu artigo de 1927, *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, publicado no *Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Sèrie A, 47, 49*, já tinha chegado à mesma conclusão.

Veremos as implicações cosmológicas da lei de Hubble no próximo capítulo.

Capítulo 27

Cosmologia: O Universo como um todo

Apesar de fortes restrições interiores, o homem teve, aos poucos, de abandonar a noção de que tinha qualquer posição central no Universo e, no começo do século XX, reconheceu que vivemos num planeta nada excepcional, a Terra, que gira em torno de uma estrela comum, o Sol, localizada quase na extremidade de uma galáxia normal, a Via Láctea. Essa galáxia faz parte de um grupo de galáxias, o Grupo Local, localizado na periferia de um grande aglomerado de galáxias. Mesmo esse aglomerado, o aglomerado de Virgem, é pequeno em comparação aos grandes aglomerados de galáxias que podemos observar em outras partes do Universo. Nossa localização no Universo é, portanto, insignificante.

27.1 O Paradoxo de Olbers: a escuridão da noite



Uma das constatações mais simples que podemos fazer é que o céu é escuro à noite. É estranho que esse fato, sobre o qual ninguém, em sã consciência, colocará qualquer dúvida e que, à primeira vista, parece tão compreensível para qualquer pessoa, tenha dado tanto o que pensar durante tanto tempo.

Aparentemente, a primeira pessoa que reconheceu as implicações cosmológicas da escuridão noturna foi Johannes Kepler (1571-1630), em 1610. Kepler rejeitava veementemente a idéia de um universo infinito recoberto de estrelas, que, nessa época, estava ganhando vários adeptos, principalmente depois da comprovação por Galileu Galilei de que a Via Láctea era composta de uma miríade de estrelas e usou o fato de que o céu é escuro à noite como argumento para provar que o Universo era finito, como que encerrado por uma parede cósmica escura.

A questão foi retomada por Edmond Halley (1656-1742) no século XVIII e pelo médico e astrônomo Heinrich Wilhelm Mattäus Olbers (1758-1840) em 1826, quando passou a ser conhecida como paradoxo de Olbers. Olbers já havia descoberto os dois asteróides (planetas menores) Palas, em 1802, e Vesta, em 1807.

O problema é o seguinte: suponha que as estrelas estejam distribuídas de maneira uniforme em um espaço infinito. Para um observador em qualquer lugar, o volume de uma esfera com centro nele aumentará com o quadrado do raio dessa esfera ($dV = 4\pi R^2 dr$). Portanto, à medida que ele olha mais longe, vê um número de estrelas que cresce com o quadrado da distância. Como resultado, sua linha de visada sempre interceptará uma estrela, seja lá qual for a direção em que ele olhe.

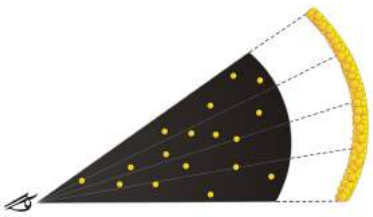


Figura 27.1: Paradoxo de Olbers. Em um universo *infinito* e com uma distribuição uniforme de estrelas, a linha de visada em qualquer direção acabará sempre interceptando uma estrela, e o céu aparecerá totalmente coberto delas.

Uma analogia simples de fazer é com uma floresta de árvores. Se estamos no meio da floresta, a nosso redor vemos as árvores bem espaçadas entre si,

mas quanto mais longe olhamos, mais diminui o espaçamento entre as árvores de forma que no limite da nossa linha de visada as árvores estão todas juntas e nada podemos ver além delas.

Como o brilho das estrelas cai com o quadrado da distância, enquanto o número de estrelas aumenta com o quadrado da distância, o céu em média deveria ser tão brilhante quanto a superfície de uma estrela média, pois estaria completamente coberto delas. Mas, obviamente, não é isso que vemos e, portanto, o raciocínio está errado. Por quê?

Algumas propostas de solução:

1. a poeira interestelar absorve a luz das estrelas;

Foi a solução proposta por Olbers, mas tem um problema. Com o passar do tempo, à medida que fosse absorvendo radiação, a poeira entraria em equilíbrio térmico com as estrelas e passaria a brilhar tanto quanto elas. Não ajuda, portanto, na solução.

2. a expansão do universo degrada a energia, de forma que a luz de objetos muito distantes chega muito desviada para o vermelho e, portanto, muito fraca.

O desvio para o vermelho *ajuda* na solução, pois o desvio é proporcional ao raio do Universo, mas os cálculos mostram que a degradação da energia pela expansão do universo não é suficiente para *resolver* o paradoxo.

3. o universo não existiu por todo o sempre.

Essa é a solução atualmente aceita para o paradoxo. Como o universo tem uma idade finita, e a luz tem uma velocidade finita, a luz das estrelas mais distantes ainda não teve tempo de chegar até nós. Portanto, o universo que enxergamos é limitado no espaço, por ser finito no tempo. A escuridão da noite é uma prova de que o universo teve um início.

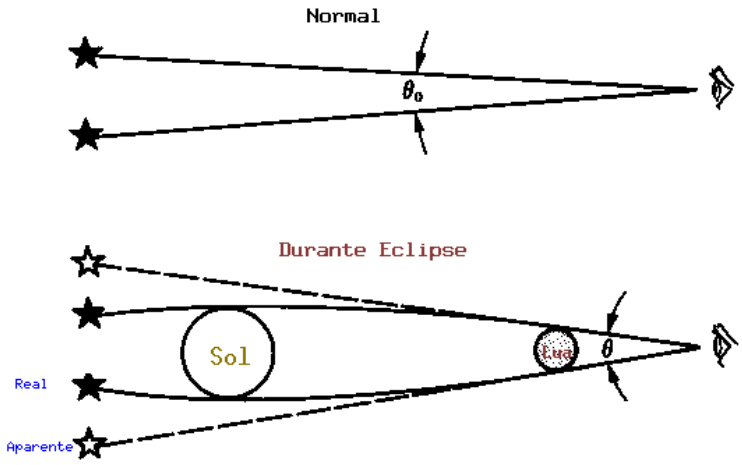
Usando-se a separação média entre as estrelas de 1 parsec, obtém-se que o céu seria tão luminoso quanto a superfície do Sol se o Universo tivesse um raio de 2×10^{15} parsecs, equivalente a $6,6 \times 10^{15}$ anos-luz. Como o Universo só tem 13,7 bilhões de anos, sua idade finita é a principal explicação ao Paradoxo de Olbers.

27.2 Relatividade Geral

Em 1905, Albert Einstein (1879-1955) havia proposto a teoria da relatividade especial. Essa teoria propunha que a velocidade da luz no vácuo é constante, independente da velocidade da fonte, que a massa depende da velocidade, que há dilatação do tempo durante movimento em alta velocidade, que massa e energia são equivalentes, e que nenhuma informação ou matéria

pode se mover mais rápido do que a luz. A teoria é especial somente porque estava restrita ao caso em que os campos gravitacionais são pequenos, ou desprezíveis. Embora a teoria de relatividade geral, proposta por Einstein em 1916, só difira da teoria da gravitação de Isaac Newton (1643-1726) em poucas partes em um milhão na Terra, em grandes dimensões e grandes massas, como o Universo, ela resulta bastante diferente. A teoria da relatividade geral é universal no sentido de ser válida mesmo nos casos em que os campos gravitacionais não são desprezíveis. Trata-se, na verdade, da teoria da gravidade, descrevendo a gravitação como a ação das massas nas propriedades do espaço e do tempo, que afetam, por sua vez, o movimento dos corpos e outras propriedades físicas. Enquanto na teoria de Newton o espaço é rígido, descrito pela geometria Euclidiana [Euclides de Alexandria (c.365-300 a.C.)], na relatividade geral o espaço-tempo é distorcido pela presença da matéria que ele contém. Um ano depois de propor a relatividade geral, em 1917, Einstein publicou seu artigo histórico sobre cosmologia, *Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade*, construindo um modelo esférico do Universo. Como as equações da Relatividade Geral não levavam diretamente a um Universo estático de raio finito, mesma dificuldade encontrada com a teoria de Newton, Einstein modificou suas equações, introduzindo a famosa *constante cosmológica*, para obter um Universo estático, já que ele não tinha, naquela época, nenhuma razão para supor que o Universo estivesse se expandindo ou contraindo. A constante cosmológica age como uma força repulsiva que previne o colapso do Universo pela atração gravitacional. A solução de Einstein é *homogênea*, isto é, tem a mesma forma de qualquer ponto do espaço, e *isotrópica*, isto é, o modelo é o mesmo em qualquer direção. A hipótese que o Universo seja homogêneo e isotrópico é chamada de *Princípio Cosmológico*. O holandês Willem de Sitter (1872-1934) demonstrou em 1917 que a constante cosmológica permite um Universo em expansão mesmo se ele não contiver qualquer matéria e, portanto, ela é também chamada de energia do vácuo. As observações mostram que o Universo é homogêneo em escalas de 10 a 100 milhões de anos-luz e maiores. Para escalas menores, podemos ver estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, mas em larga escala os elementos de volume são homogêneos.

27.2.1 Lentes Gravitacionais



A previsão da relatividade geral de que um raio de luz é desviado ao passar por um corpo massivo foi confirmada, em 1919, por uma expedição dupla chefiada pelo astrônomo inglês *Sir* Arthur Stanley Eddington (1882-1944), a Sobral, no Ceará, e à ilha de Príncipe, na África, para medir a posição das estrelas durante o eclipse total do Sol de 29 de maio de 1919. A expedição ao Brasil foi coordenada pelo inglês Andrew Claude de la Cherois Crommelin (1865-1939) e retornou com 7 fotografias de boa qualidade. Medindo a distância entre as estrelas à esquerda do Sol e as estrelas à direita do Sol durante o eclipse, quando as estrelas estão visíveis pelo curto espaço de tempo do eclipse, e comparando com medidas das mesmas estrelas obtidas 2 meses depois, quando elas eram visíveis à noite, Eddington verificou que as estrelas pareciam mais distantes umas das outras durante o eclipse. Isso implica que os raios de luz dessas estrelas foram desviados pelo campo gravitacional do Sol, como predito por Einstein. O desvio previsto era de

$$\theta - \theta_0 = \frac{\text{1,7 segundos de arco}}{\Delta},$$

a uma distância de Δ raios do Sol do centro do Sol. As duas expedições obtiveram $1,98" \pm 0,30"$ e $1,61" \pm 0,30"$, confirmando a teoria. A única razão de realizar essas medidas durante um eclipse é que, durante um eclipse, podemos enxergar e medir as estrelas próximas ao disco do Sol. Outra comprovação importante da Teoria da Relatividade Geral foi a observação do deslocamento do periélio do planeta Mercúrio, de 43"por século, já detectado pelo francês Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) em 1859, que

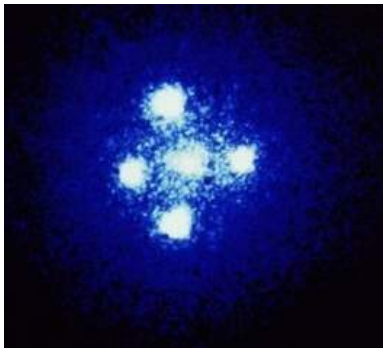


Figura 27.2: Imagem do Cruz de Einstein, a lente gravitacional G2237+0305, fotografada com a Faint Object Camera, da European Space Agency, instalada no Telescópio Espacial Hubble, da NASA. A luz de um quasar distante forma quatro imagens ao passar pelo campo gravitacional de uma galáxia entre o quasar e a Terra. O quasar está a, aproximadamente, 8 bilhões de anos-luz de nós, enquanto que a galáxia está a 400 milhões de anos-luz. O número de imagens produzidas depende da distribuição de massa da galáxia, e dos detalhes do alinhamento.

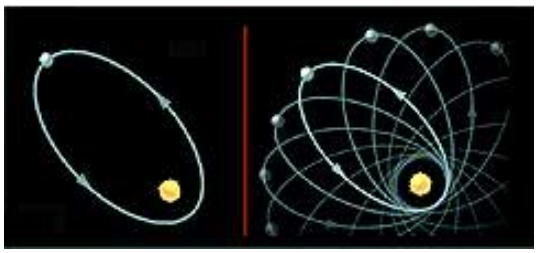


Figura 27.3: Representação do deslocamento do periélio de Mercúrio com o tempo. O espaço-tempo é perturbado pela presença da massa do Sol, exatamente como predito pela Teoria da Relatividade Geral.

não pode ser explicado pela teoria Newtoniana, mas é perfeitamente descrito pela teoria da relatividade. Enquanto na teoria de Newton somente a massa contribui para a gravidade, na teoria de Einstein a energia cinética do movimento dos planetas também contribui. O periélio de Vênus também se desloca, mas de 8,6"por século, e o da Terra de 3,8"por século, ambos já medidos. Mas a observação mais crucial, ainda, é a da medida da taxa de

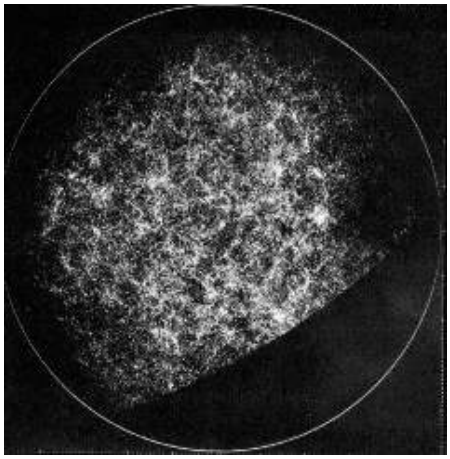




Figura 27.4: Distribuição de galáxias em grande escala, e foto de Edwin Hubble

redução do período orbital do pulsar binário PSR 1913+16 — duas estrelas de nêutrons — descoberto por Russell Alan Hulse (1950-) e Joseph Hooton Taylor Jr. (1941-) em 1974, utilizando a antena de 305 m de diâmetro do rádio-telescópio de Arecibo. O período orbital é de 7,75 horas, e o período de rotação do pulsar de 59 milissegundos. A taxa de redução do período orbital, de $(75,8 \pm 0,0004)$ milionésimos de segundos por ano, concorda com precisão melhor do que 1% com o cálculo de perda de energia devido à emissão de ondas gravitacionais, previstas pela teoria de Einstein[1]. Essa descoberta lhes valeu o prêmio Nobel de física de 1993.

27.3 Expansão do Universo

Em 1923, o astrônomo americano Edwin Powell Hubble (1889-1953), usando o recém-instalado telescópio de 2,5 m de diâmetro do Monte Wilson, na Califórnia, conseguiu enxergar e medir as estrelas individuais na galáxia de Andrômeda, muito mais distante que o tamanho de nossa galáxia, demonstrando conclusivamente que nossa galáxia não é a única no Universo.

[1] A Teoria da Relatividade Geral prediz que massas aceleradas emitem ondas gravitacionais, da mesma maneira que cargas elétricas aceleradas produzem ondas eletromagnéticas. As ondas gravitacionais são perturbações na curvatura do espaço-tempo e se propagam à velocidade da luz. Um onda gravitacional proveniente de uma fonte intensa, como um pulsar binário próximo, altera as distâncias, mas por fatores da ordem de 10^{-21}.



Figura 27.5: Alexander Friedmann e Georges Lemaître

Em 1929, Hubble demonstrou, observando o deslocamento para o vermelho nas linhas espectrais das galáxias observadas por Milton La Salle Humason (1891-1972) e medindo, ele próprio, suas distâncias, que as galáxias estavam se afastando de nós, com velocidades proporcionais às suas distâncias, isto é, quanto mais distante a galáxia, maior sua velocidade de afastamento. Hubble publicou seus resultados para 24 galáxias em 1929, no *Proceedings of the National Academy of Science* e, dois anos mais tarde, junto com Humason, estendeu seus resultados por um fator de 18 em distância.

Isso constituiu a primeira evidência para a expansão do Universo, já predita pelo russo Alexander Alexandrovitch Friedmann (1888-1925) em dois artigos publicados no *Zeitschrift für Physik* em 1922 e 1924, e pelo belga Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966) em 1927, no *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*.

Apesar da descoberta da expansão do Universo, muitos pesquisadores acreditavam na Teoria do Estado Estacionário [2], isto é, que o Universo era

[2]Fred Hoyle (1915-2001), Geoffrey Burbidge (1925-2010) e Jayant Vishnu Narlikar (1938-) propuseram em 1993 a Teoria do Estado Quasi Estacionário, em um Universo eterno e infinito, alternando expansões que duram cerca de 40 bilhões de anos, com contrações. No modelo Quasi Estacionário, a massa seria eternamente criada em buracos

similar em todas as direções e imutável no tempo, com produção contínua de matéria para contrabalançar a expansão observada, mantendo a densidade média constante. Essa teoria foi proposta por *Sir* Herman Bondi (1919-2005), Thomas Gold (1920-2004) e *Sir* Fred Hoyle (1915-2001).

Em 1950, Fred Hoyle sugeriu, pejorativamente, o nome "Big Bang", ou Grande Expansão, para o evento de início do Universo, quando se iniciou a expansão. Edward P. Tryon propôs, em 1973 (Nature, 246, 396), que o Big Bang ocorreu por uma flutuação quântica do vácuo.[3] Já em relação ao destino do Universo, há duas possibilidades: 1) o Universo se expandirá para sempre, ou 2) a expansão parará e haverá novo colapso ao estado denso (*Big Crunch*). O Universo colapsará novamente somente se a atração gravitacional da matéria (e energia) contida nele for grande o suficiente para parar a expansão. Como a matéria e energia escura[4] do Universo pode chegar a 96% da energia total, aparentemente o Universo está se expandindo com velocidade igual à velocidade de escape, isto é, o Universo continuará se expandindo para sempre. Podemos expressar a massa em termos da densidade, isto é, da massa por unidade de volume. A densidade crítica é de 100 milésimos de trilionésimos de trilionésimos de um grama por centímetro cúbico.

$$\boxed{\rho_{\text{crítica}} \simeq 10^{-29}\,\text{g/cm}^3 = 10^{-26}\,\text{kg/m}^3}$$

brancos com massa de Planck $\sqrt{\frac{ch}{G}} = 10^{19}$ bárions. A mini-criação causa uma expansão do Universo, que reduz o valor médio do campo de criação, reservatório de energia negativa. Após a expansão, o valor do campo se reduz, tornando-se difícil uma nova mini-criação. A gravidade então supera a expansão e o Universo se contrai, aumentando o campo até que nova criação ocorra.

[3] Se a energia total do Universo for nula, isto é, Universo plano na forma mais simples, então pelo princípio da incerteza de Heisenberg $\Delta t \geq \hbar/\Delta E$ pode ser muito grande, permitindo que o Universo alcance sua idade atual. Mas por que a flutuação, que é um buraco negro por conter toda a massa do Universo em um raio muito pequeno, não colapsa? Porque a liberação de energia do calor latente da transição de fase do Teoria da Grande Unificação, separando a força gravitacional das outras forças no tempo de Planck, faz o Universo se expandir exponencialmente. Em 1948, os físicos holandêses Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000) e Dirk Polder (1919-2001) do Philips Research Laboratories, propuseram a existência de uma força (energia) no vácuo, devido a flutuações quânticas do vácuo. Essa força foi primeiro medida por Marcus Spaarnay, também da Philips, em 1958, mas mais precisamente em 1997, por Steve K. Lamoreaux, do Los Alamos National Laboratory, e por Umar Mohideen, da University of California em Riverside, e seu colaborador Anushree Roy.

[4] Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) propôs que a matéria na Terra era composta por quatro elementos básicos: terra, ar, fogo e água. Propôs também que a matéria celeste era composta por um tipo de matéria especial, a quinta-essência, ou quintessência. Nos últimos anos se tem usado o termo quintessência para descrever a matéria (energia) dominante no Universo, seja ela matéria escura ou energia do vácuo (constante cosmológica).

Essa densidade crítica corresponde a 5 átomos de hidrogênio por metro cúbico, dez milhões de vezes menor do que o melhor vácuo que pode ser obtido em um laboratório na Terra. A matéria visível do Universo é, ainda, em média, 100 vezes menor.[5]

$$\boxed{\rho_{\text{observada em matéria luminosa}} \simeq 10^{-31}\ \text{g/cm}^3 \simeq 10^{-28}\ \text{kg/m}^3}$$

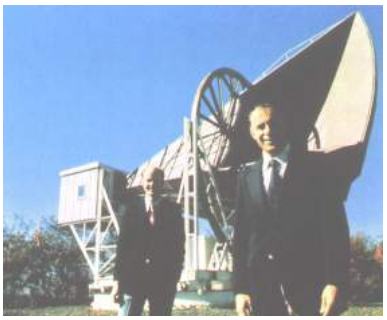


Figura 27.6: Arno Penzias e Robert Wilson com sua antena corneta de Holmdel, com a qual descobriram o excesso de energia devido à radiação cósmica do fundo do Universo, utilizando o amplificador maser de baixíssimo ruído que haviam desenvolvido no Bell Labs.

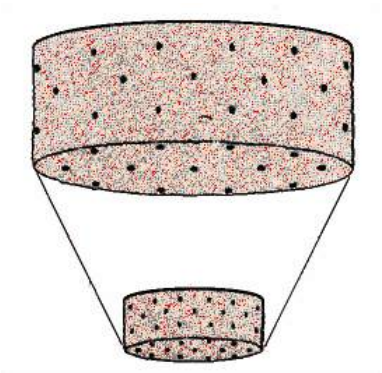
Em 1964, a descoberta acidental da radiação de microondas do fundo do Universo pelos radioastrônomos Arno Allan Penzias (1933-) e Robert Woodrow Wilson (1936-), do Bell Laboratories, reforçou a teoria do Big Bang. Penzias e Wilson, que receberam o prêmio Nobel em 1978, publicaram seus resultados do excesso de emissão observado no *Astrophysical Journal* em 1965 e, no mesmo volume, Robert Henry Dicke (1916-1997), Philip *James* Edward *Peebles* (1935-), Peter G. Roll, e David T. Wilkinson (1935-2002), que estavam construindo uma antena para procurar por essa emissão, publicaram a interpretação do excesso como a detecção da radiação remanescente

[5] A densidade de matéria luminosa no Grupo Local pode ser estimada considerando que a Via Láctea e Andrômeda, as duas maiores galáxias do Grupo têm cerca de $2 \times 10^{11}\ M_\odot$ cada, as outras 52 galáxias anãs têm massa similar à da Grande Nuvem de Magalhães, cerca de $6 \times 10^9\ M_\odot$ cada, a massa total do aglomerado é $6 \times 10^{12}\ M_\odot$. O volume total do é o de uma esfera de 1000 kpc de raio, que dá $4 \times 10^9\ \text{kpc}^3$, ou seja $\rho_{\text{lum}} \simeq 150\, M_\odot/\text{kpc}^3 \simeq 1 \times 10^{-26}\ \text{kg/m}^3$, superestimada porque a distância dos cúmulos de galáxias é muito maior do que a distância entre as galáxias.

do Big Bang. A radiação do fundo do Universo é o sinal eletromagnético proveniente das regiões mais distantes do Universo (a cerca de 13,7 bilhões de anos-luz); ela havia sido predita, em 1948, pelos americanos Ralph Asher Alpher (1921-2007) e Robert Herman (1922-1997), associados de George Antonovich Gamow (1904-1968), como a radiação remanescente do estado quente em que o Universo se encontrava quando se formou (na verdade, quando ele ficou transparente, 300 000 anos após o início, há 13,7 bilhões de anos). Ralph Alpher e Robert Herman publicaram a previsão da radiação do fundo do Universo, 5K, em 1948, na Nature, 162, 774.

27.4 Big Bang

A teoria do Big Bang leva em conta que, se as galáxias estão se afastando umas das outras, como observado por Edwin Hubble em 1929, no passado, elas deveriam estar cada vez mais próximas e, num passado remoto, 10 a 15 bilhões de anos atrás, deveriam estar todas num mesmo ponto, muito quente, uma singularidade espaço-tempo, que se expandiu no Big Bang. O Big Bang, ou Grande Expansão, criou não somente a matéria e a radiação, mas também o próprio espaço e o tempo. Esse seria o início do Universo observável. A expansão do Universo não influi no tamanho das galáxias e cúmulos de galáxias, que são mantidos coesos pela gravidade; o espaço entre eles simplesmente aumenta, como num bolo com passas, crescendo com fermento no forno.

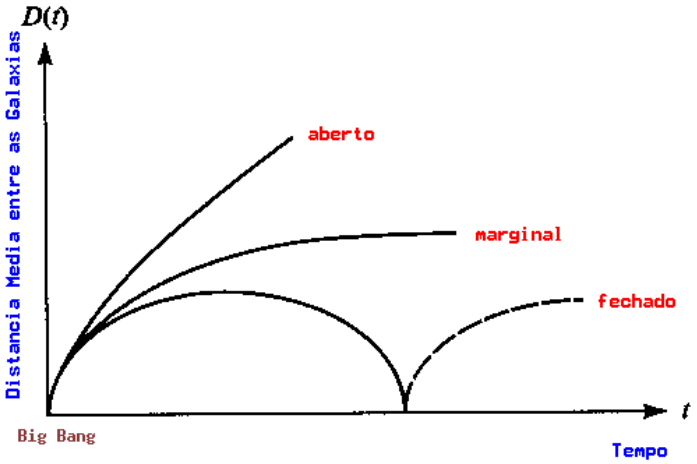


O padre, engenheiro civil e cosmólogo belga Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966) foi, provavelmente, o primeiro a propor um modelo específico para o Big Bang, em 1927. Ele imaginou que toda a matéria estivesse concentrada no que ele chamou de átomo primordial e que esse átomo se partiu em incontáveis pedaços, cada um se fragmentando cada vez mais,

até formar os átomos presentes no Universo, numa enorme fissão nuclear. Sabemos que esse modelo não pode ser correto, pois não obedece às leis da relatividade e estrutura da matéria (quântica), mas ele inspirou os modelos modernos.

Independentemente de Lemaître, o matemático e meteorologista russo Alexander Alexandrovitch Friedmann (1888-1925) já tinha descoberto toda uma família de soluções das equações da Teoria da Relatividade Geral.

A família de soluções para a relatividade geral encontrada por Friedmann e Lemaître descreve um Universo em expansão, e eles são chamados os pais da Cosmologia. As soluções possíveis das equações da relatividade geral incluem expansão eterna ou com recolapso. Se a constante cosmológica é nula, os modelos se dividem em três classes. Se a densidade de matéria for alta suficiente para reverter a expansão, o Universo é fechado, como a superfície de uma esfera, mas em três dimensões, de modo que, se uma nave viajasse por um tempo extremamente longo em linha reta, voltaria ao mesmo ponto. Se a densidade for muito baixa, o Universo é aberto e continuará se expandindo para sempre. O terceiro caso, chamado de Universo plano, é o limite entre o Universo aberto e o fechado. O Universo, nesse caso, se expande para sempre, mas a velocidade das galáxias será cada vez menor, chegando a zero no infinito. Nesse caso, o Universo é euclidiano. Qual desses modelos representa o Universo real continua como um dos cernes da cosmologia moderna, mas as observações nas últimas décadas testam estas hipóteses. Em abril de 2001, o projeto Boomerang publicou nova analise dos dados de microondas por balão, com resolução de $0,3^o$ (comparados com 7^o do COBE) que mediram 1,8% do céu, e concluíram que a matéria bariônica só representa 3% da energia total, que a energia total está entre 0,98 e 1,03 da energia crítica e que a energia de repulsão está entre 0,52 e 0,68 da energia crítica. Com estes resultados, a idade do Universo está entre 14 e 16,2 Ganos. O satélite WMAP (Microwave Anisotropy Probe) foi lançado em 30 de junho de 2001 e, com uma resolução de $0,21^o$ e uma sensibilidade de 20 micro Kelvins, fez uma medida muito mais detalhada de todo o céu, como discutiremos. A radiação do fundo do Universo mostra as condições do Universo 380 mil anos após o Big Bang, quando o Universo era dominado por radiação. Aproximadamente 380 mil anos depois do Big Bang, a temperatura do Universo caiu para cerca de 3000 K, suficiente para que os prótons e as partículas-α, formadas nos três primeiros minutos do Universo, começassem a capturar elétrons, e formar átomos de hidrogênio e hélio neutros. Peebles chamou essa fase de recombinação, ou fase de desacoplamento, passando para Universo dominado por matéria.



Em 1940, o físico russo-americano George Gamow, que fora estudante de Friedmann antes da morte deste aos 37 anos, sugeriu um modelo com início oposto ao de Lemaître: fusão nuclear. Ele publicou os resultados em 1948, com Ralph Alpher [e Hans Bethe (1906-2005)]. Esse modelo iniciou com partículas fundamentais que se aglomeraram em elementos mais pesados, por fusão, após o Big Bang. Suas idéias estão corretas, exceto que as condições iniciais do Universo não eram apropriadas para fundir o carbono e elementos mais pesados, formando somente H e He em abundância significativa. Os elementos mais pesados foram produzidos, mais tarde, no interior das estrelas.

27.5 A questão da matéria escura

Outro ítem importante na cosmologia é a chamada matéria escura, postulada pela primeira vez por Fritz Zwicky (1898-1974) e Walter Baade (1893-1960) em 1937 (Astrophysical Journal, 86, 217). Essa é a matéria extra necessária para explicar as curvas de rotação das galáxias e as velocidades observadas das galáxias em aglomerados, maiores que as explicáveis através da matéria observada, chamada matéria luminosa. Zwicky, um astrônomo suíço trabalhando nos Estados Unidos, observando que as velocidades das galáxias em aglomerados eram muito maiores do que deveriam ser, calculou que a massa do aglomerado deveria ser, pelo menos, dez vezes maior do que a

massa da matéria visível no aglomerado, isto é, da massa em estrelas e gás pertencentes às galáxias. Em 1980 Vera Cooper Rubin (1928-) determinou, pelas velocidades de rotação das galáxias, que a matéria escura também está presente em galáxias individuais (Astrophysical Journal, 238, 808).

A matéria escura tem implicações importantes nos modelos de Big Bang, como o do Universo Inflacionário. Esse modelo de Universo, proposto em 1979 por Alan Harvey Guth (1947-), do Massachussets Institute of Technology (MIT), nos Estados Unidos, e modificado em 1981 pelo russo Andrei Dmitrvitch Linde (1948-), e pelo americano Paul J. Steinhardt (1952-), é consistente com algumas das formas das Teorias da Grande Unificação (GUT) das forças forte e eletrofraca, que prevêem uma quebra de simetria espontânea 10^{-37} s depois do Big Bang. Essa quebra de simetria, ou transição de fase, é causada por um falso vácuo, um estado metaestável do campo de energia que, tendo pressão negativa, faz a gravitação agir repulsivamente, expandindo o Universo um fator de 10^{75}. Depois de 10^{-36} s, a teoria é idêntica ao Big Bang padrão. Outra interpretação da mesma transição de fase é que a liberação do calor latente é que faz o Universo se expandir inflacionariamente. Quando publicada, em 1979, a transição de fase (superesfriamento) era prevista ter ocorrido em 10^{-35}s, mas o valor moderno da energia de Higgs [Peter Ware Higgs (1929-)] é de 10^{16} GeV, correspondente a 10^{-37} s pelo princípio da incerteza. O bóson de Higgs é a partícula que dá massa a todas as outras partículas, no Modelo Padrão das forças nucleares e o Large Hadron Collider, do CERN, encontrou fortes evidências da existência de uma partícula deste tipo.

Enquanto no modelo inicial de Guth nosso Universo seria composto de muitas bolhas que se expandem exponencialmente, o que é inconsistente com a uniformidade da radiação do fundo do Universo, nos novos modelos inflacionários de Linde e Steinhardt nosso Universo é apenas uma bolha de um possível megauniverso de bolhas.

A teoria inflacionária prevê que a matéria escura não pode ser totalmente bariônica, mas é consistente com matéria escura fria, isto é, partículas com velocidade muito menor do que a velocidade da luz (neutrinos devem ter velocidade próxima a da luz). O modelo inflacionário prevê, ainda, que o Universo contém cem vezes mais matéria ou energia escura que a matéria que brilha nas estrelas e, portanto, que o Universo é plano. Este modelo explicaria as grandes paredes e buracos observados na estrutura de grande escala do Universo, e que não estão casualmente conectadas atualmente, mais o seriam antes da expansão inflacionária. Diz-se que duas regiões não estão casualmente conectadas se, quando a radiação foi emitida por elas, as regiões

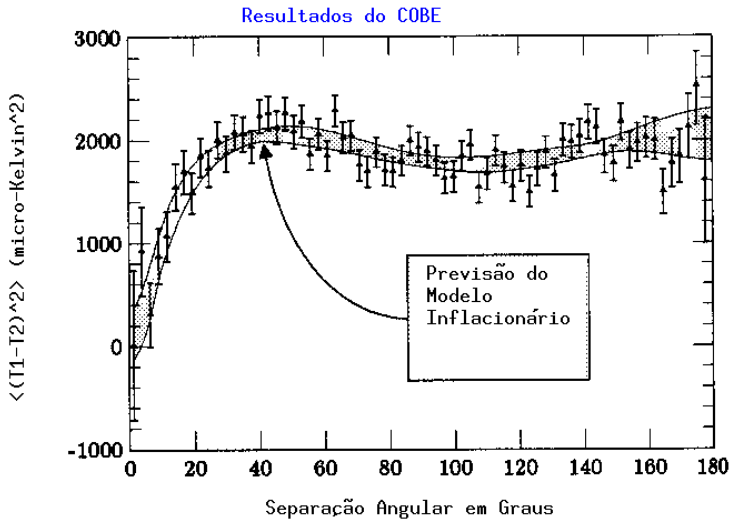


Figura 27.7: Comparação das medidas de flutuação na temperatura da radiação do fundo do Universo obtidas pelo satélite COBE, com as previsões do modelo inflacionário. Os observadores do COBE mediram a diferença de temperatura entre duas regiões do céu, separadas por um certo ângulo, e calcularam o quadrado desta diferença: $(T_1 - T_2)^2$, medida em microkelvins (10^{-6}) K. Calculando-se a média dessa quantidade para diferentes pares de direções, obtém-se uma medida estatisticamente significativa. Os modelos inflacionários podem calcular a forma desse espectro, mas não sua magnitude, de modo que a magnitude foi ajustada aos dados. Mas a forma, invariante de escala, isto é, que tem aproximadamente o mesmo valor para pequenas separações e grandes separações, é um dos maiores sucessos da teoria inflacionária, já que os modelos tradicionais do Big-Bang não têm qualquer forma de calcular esse espectro.

no espaço estavam mais distantes do que a distância que a luz poderia ter atravessado desde o Big Bang. Entretanto, a mesma Teoria de Grande Unificação, que prediz o Universo inflacionário, também prediz que os prótons deveriam decair em 10^{30} anos, o que não é observado ($\tau_{obs} > 10^{33}$ anos), de modo que as teorias mais simples da GUT já foram eliminadas. Teorias de grande unificação que permitem a quebra de simetria que formou a assimetria de matéria-antimatéria antes de 10^{-32} segundos, ainda são consistentes com o tempo de decaimento observado do próton.

A Teoria de Tudo precisa combinar a teoria de relatividade geral (gravitação) com a teoria quântica. A mais promissora teoria no momento é a de supercordas (*superstrings*), proposta originalmente pelo físico inglês Thomas Walter Bannerman Kibble (1933-). De acordo com essa teoria, as "partículas" fundamentais são cordas que vibram. As ressonâncias nestas cordas criam as partículas diferentes. Cada corda é extremamente pequena, cerca de 10^{20}, ou 100 bilhões de bilhões de vezes menor do que um próton, e vibra em um espaço com 10 dimensões. Como o espaço-tempo tem 4 dimensões, as outras 6 dimensões seriam colapsadas e, portanto, não-observáveis. Na teoria, o Universo com 10 dimensões é instável e a energia liberada no colapso das 6 dimensões é que provoca o Big Bang. Essa teoria ainda precisa ser testada.

A matéria escura não emite radiação electromagnética e, portanto, somente podemos detectá-la através da força gravitacional que ela exerce sobre os objetos. A detecção da existência de matéria escura vem do estudo do movimento: movimento de estrelas individuais em galáxias, e o movimento de galáxias em aglomerados de galáxias. Quando aplicamos a lei da gravitação a esses movimentos, detectamos que a massa é muito maior que a massa visível em estrelas e gás.

O que é essa matéria escura? Se sua quantidade for de 5 a 10 vezes maior do que a de matéria luminosa, ela poderia se constituir de partículas normais (bárions); prótons e nêutrons, não condensados em estrelas, poeira ou gás, senão deveríamos detectá-los. Poderia, porém, ser composta de buracos negros (objetos colapsados gravitacionalmente), anãs marrons (objetos degenerados, mas de massa inferior a estrelas e maiores que Júpiter), e planetas (que não geram sua própria luz). As observações de microlentes gravitacionais na nossa Galáxia indicam que somente cerca de 2% da matéria está na forma de estrelas colapsadas. A matéria escura deve ser composta de partículas exóticas ainda não detectadas na Terra, como áxions, ou monopolos magnéticos. Se existirem, essas partículas podem compor mais de 90% da massa do Universo, sem participar da formação de estrelas, planetas e seres humanos.

27.6 A idade do Universo

Qual é a idade do Universo? A matéria total do Universo gera atração gravitacional, em que objetos atraem outros objetos (inclusive a luz, pela relatividade geral). Assumindo-se que a constante cosmológica (Λ) é nula, ou seja, que a energia do vácuo (repulsão) é nula, essa atração deve diminuir

a expansão, o que implica que, no passado, a expansão era mais rápida. A idade do Universo pode ser calculada no limite superior, assumindo que a quantidade de matéria é pequena e que, portanto, não reduziu a velocidade de expansão significativamente. Podemos, então, estimar a idade máxima do Universo, t_0, calculando o tempo que as galáxias distantes, movendo-se à mesma velocidade de hoje, levaram para chegar aonde estão. Como a lei de Hubble, que relaciona a velocidade de expansão da galáxia, v, com a distância a esta, d, é dada por $v = H \times d$, e $v = d/t_0$, então $t_0 = H^{-1}$. Atualmente, o valor da constante de Hubble, H, está medido entre 57 e 78 km/(s Mpc), resultando em $t_0 \leq 12$ a 17 bilhões de anos (1 Mpc = mega parsec = $3,086 \times 10^{19}$ km). Levando-se em conta a possível desaceleração causada pela atração gravitacional, a idade seria $t \geq \frac{2}{3}t_0$, isto é, entre 9 e 14 bilhões de anos. Por outro lado, calculando-se a idade das estrelas mais velhas conhecidas, as estrelas dos cúmulos globulares e as anãs brancas, obtém-se entre 12 e 14 bilhões de anos, ainda consistente com essa idade. Mas se a energia escura — constante cosmolgica — não é nula, como indicam as observações das supernovas mais distantes desde 1998, e as medidas da radiação do fundo Universo tanto pelo WMAP quanto pelo satélite Planck, o Universo está acelerando e sua idade é maior do que H^{-1}, pois ele estava se expandindo mais lentamente no passado e, portanto, levou mais tempo para chegar ao presente. O valor de 13,78 Giga-anos leva em conta esta correção.

O Teorema de Singularidade, demonstrando que não existe definição de tempo antes do Big-Bang ou dentro de um buraco negro, foi provado por Stephen W. Hawking e Roger Penrose, no artigo *The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology*, publicado no Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, volume 314, número 1519, p. 529, em 1970.

Qual é a evolução química do Universo? O Universo se esfria enquanto se expande. Depois de 0,01 s do Big Bang, a temperatura do Universo era de $T = 10^{11}$ K. Depois de 3 minutos, a temperatura já tinha baixado a um bilhão de Kelvin, ainda 70 vezes mais quente que o interior do Sol. Depois de 300 000 anos, a temperatura se reduzira a meros 3 000 K. A uma temperatura de $T \geq 6 \times 10^9$ K ($t \leq 1$s), a colisão de 2 fótons pode gerar um par elétron-pósitron, por conversão de energia em massa ($E = mc^2$). Para gerar prótons, a temperatura tem de ser maior que 10^{14} K ($t \leq 1$ milissegundo). A época até uma idade de um milissegundo é chamada de era hadrônica, pois podia formar hádrons (prótons e nêutrons). Note que, para tempo menor que 10^{-44} s ($T \simeq 10^{32}$ K), o chamado tempo de Planck [Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)], as teorias físicas conhecidas não se aplicam mais, pelo princípio

da incerteza: $\Delta E \times \Delta t \geq \hbar$ ($\hbar = 1,05 \times 10^{-34} J\,s$). No tempo de Planck, o raio do horizonte do Universo (raio visível) era $R_U \simeq 10^{-33}$ cm. O raio do Universo que contém toda a energia que se transformou na matéria hoje observada era menor que um centésimo de centímetro. O raio do horizonte é derivado usando-se a relatividade geral, enquanto que o raio do Universo que contém toda a energia é derivado usando-se a mecânica quântica (princípio da incerteza de Heisenberg [Werner Karl Heisenberg (1901-1976)]), e essas duas teorias não são compatíveis entre si. As teorias físicas se aplicam para tempos maiores que o tempo de Planck. No modelo padrão do Big Bang, logo após o tempo de Planck, o Universo estava em rápida expansão, com temperaturas colossais e altíssima densidade, uma situação lembrando muito uma explosão. Gamow calculou a quantidade de deutério (p+n) que se formaria nesse caso. Era possível obter-se a percentagem observada de deutério, muito maior do que poderia ser formado no interior das estrelas. Se essa matéria não estivesse banhada por uma radiação de certa intensidade, formar-se-ia muito mais deutério do que o observado. Gamow, em 1948, previu que restos desta radiação deveriam ainda estar banhando todos os corpos celestes. Tal radiação foi detectada, em 1964, como a radiação do fundo do Universo. O deutério é um hidrogênio pesado, pois seu núcleo contém um próton e um nêutron. Embora observado no gás interestelar, no sistema solar e mesmo nos espectros de quasares, o deutério não pode ser formado nas estrelas. Quando uma estrela se forma por colapso de uma nuvem de gás interestelar, qualquer deutério nesta nuvem é destruído (convertido em hélio) mesmo antes da estrela se tornar quente o suficiente para iniciar a fusão do hidrogênio. Portanto o deutério, como a maior parte do hélio, é um fóssil do Big Bang. Quando o Universo está esfriando, quanto maior o número de átomos em um volume no espaço (densidade), menor a quantidade de deutério que sobrevive, porque a maior parte se converte em hélio.

Como a secção de choque dos neutrinos é extremamente pequena, quando o Universo tinha 1 s, $T \simeq 10^{10}$ K, os neutrinos, relíquias da época dominada por interações fracas, não interagiam mais com a matéria e evoluíram desacopladamente. Esses neutrinos, supostamente sem massa, por terem muito baixa energia, ($T \simeq 2$ K), não podem ser observados. Somente se forem massivos, poderemos observá-los por seus efeitos gravitacionais, como massa escura.

A teoria do Big Bang prevê que houve um pequeno excesso de matéria sobre antimatéria (1 parte em 100 milhões), ou toda a massa seria aniquilada. Quando o Universo tinha $t = 10^{-39}$ s, sua temperatura era da ordem de

$T \simeq 10^{29}$ K. A essa temperatura, a energia média por partícula é da ordem de 10^{16} GeV (1 GeV = 1 bilhão de elétron volts), a energia em que as teorias de Grande Unificação prevêem efeitos importantes, como a violação da conservação de número bariônico, e a possibilidade da formação de partículas super-massivas, o bóson de Higgs, predito por Peter Ware Higgs (1929-) em 1964. Estas partículas são instáveis mas de longa vida, e podem, teoricamente, dar origem a esse pequeno excesso de matéria sobre a antimatéria. Em 1964, James H. Christenson, James Watson Cronin (1931-), Val Logsdon Fitch (1923-) e René Turlay (1932-2002)conseguiram observar que no decaimento da partícula neutra kaon, ou méson K, existe uma pequena diferença (0,2%) a favor da matéria, em relação à antimatéria produzida. Cronin e Fitch receberam o prêmio Nobel em 1980 pela descoberta, demonstrando, experimentalmente, que existe assimetria matéria-antimatéria no Universo.[6] Prótons e nêutrons começam a ficar ligados em núcleos quando o Universo tinha 3^m46^s, $T \simeq 900$ milhões K, formando deutério (p+n), e hélio (2p+2n), até uma idade de 4 minutos. O hélio formado é de, aproximadamente, 25% em massa, próximo do observado. Nesse modelo, após 4 minutos, a temperatura já é muito fria para formação de outros núcleos mais pesados. Depois de 300 000 anos, $T \simeq 3000$ K, os elétrons combinam com os núcleos, formando átomos neutros. Como não existem, então, mais elétrons livres para espalhar os fótons, o Universo passa de opaco para transparente e, a partir de então, a matéria e a radiação evoluem independentemente. Essa radiação de 3 000 K, viajando a uma velocidade de 2 milionésimos abaixo da velocidade da luz é o que detectamos como radiação do fundo do Universo a aproximadamente 3 K. Somente milhões de anos depois as estrelas e as galáxias começam a se formar. Desde a formação das estrelas mais velhas, somente 10% da massa de hidrogênio inicial pode ter sido convertida em hélio, por fusão nuclear no centro das estrelas. A maior parte desse hélio ainda está no interior das estrelas. Portanto, a grande parte dos 25% de hélio observados no gás interestelar e na atmosfera das estrelas foram formados no Big Bang.

27.7 COBE

Em 18 de Novembro de 1989, a NASA lançou um satélite chamado Cosmic Background Explorer (COBE), para analisar detalhadamente a *radiação do fundo do Universo*, operando na faixa de microondas. Como planetas, estrelas, galáxias e nuvens de gás emitem muito pouco em microondas, o satélite

[6] Chen Ning Yang (1922-) e Tsung-Dao Lee (1926-) receberam o prêmio Nobel em 1957 por suas investigações da paridade.

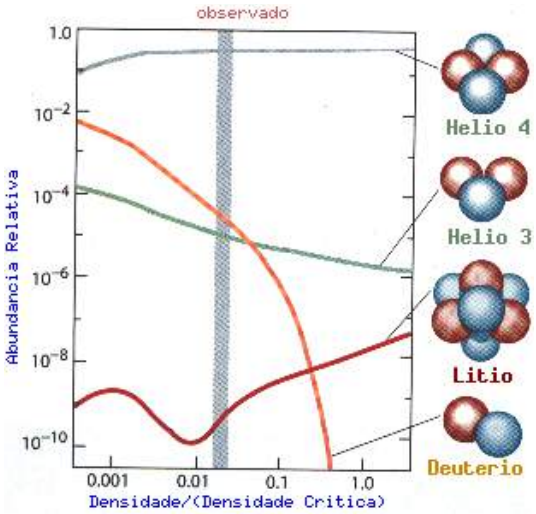


Figura 27.8: Essa figura mostra como a abundâncias dos elementos formados depende da densidade de prótons e nêutrons, no modelo padrão de Big Bang, em termos da densidade crítica (densidade necessária para parar a expansão do Universo). Se o número de prótons e nêutrons for alto, mais freqüentemente eles colidem e mais hélio-4 é produzido. As abundâncias de deutério e hélio-3 decrescem quando aumenta a densidade porque esses núcleons são formados por uma seqüência de reações incompleta. Dado tempo suficiente, o deutério e o hélio-3 se transformam em hélio-4. Já o lítio-7 é produzido por várias reações e, portanto, depende da densidade de forma mais complexa. A nucleossíntese no Big Bang só formou os elementos leves: hidrogênio, deutério, hélio e lítio. Todos os elementos químicos mais pesados foram produzidos mais tarde, no interior das estrelas.

pode enxergar diretamente a luz que o Universo emitiu quando passou de opaco para transparente, na chamada época da recombinação, cerca de 380 mil anos depois do Big Bang. Os dados obtidos pelo COBE, mostrados na figura (27.6) e divulgados por John Cromwell Mather (1946-), cientista coordenador do projeto COBE, se ajustam perfeitamente a um corpo negro com temperatura de 2,726 K, com uma incerteza menor que 0,01 K. Essa é a temperatura predita para a radiação do gás quente de quando o Universo se formou, visto com um desvio para o vermelho correspondente, pois a expansão do Universo estica o comprimento de onda pelo mesmo fator que o Universo se expande entre a emissão e a observação. Se o Big Bang tivesse

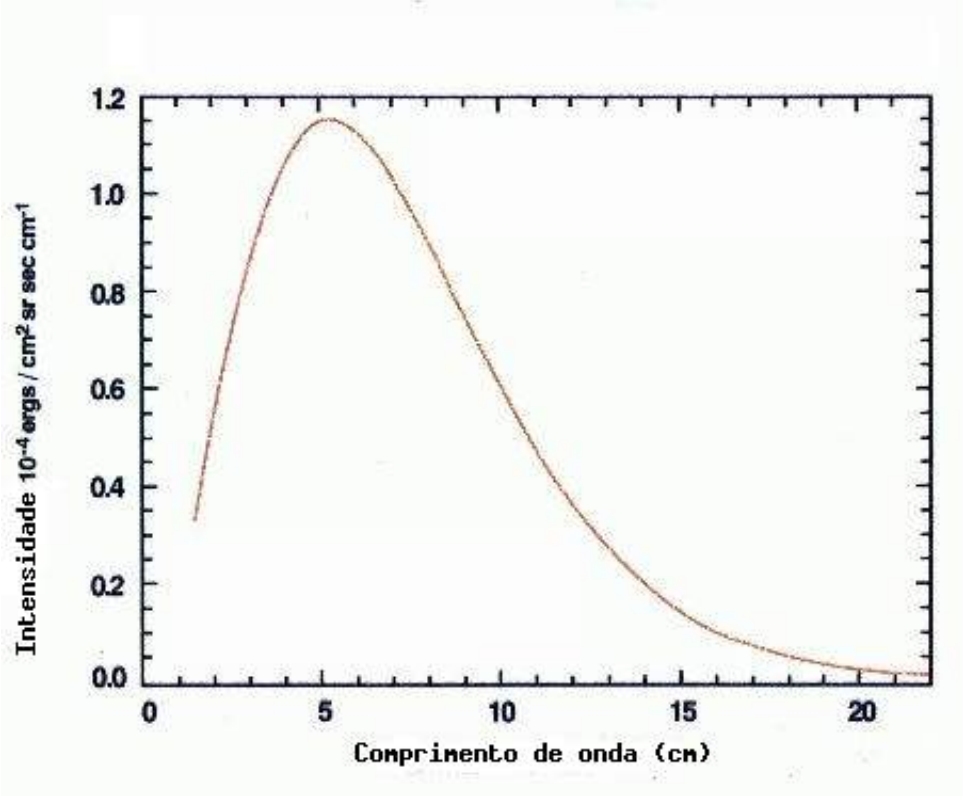


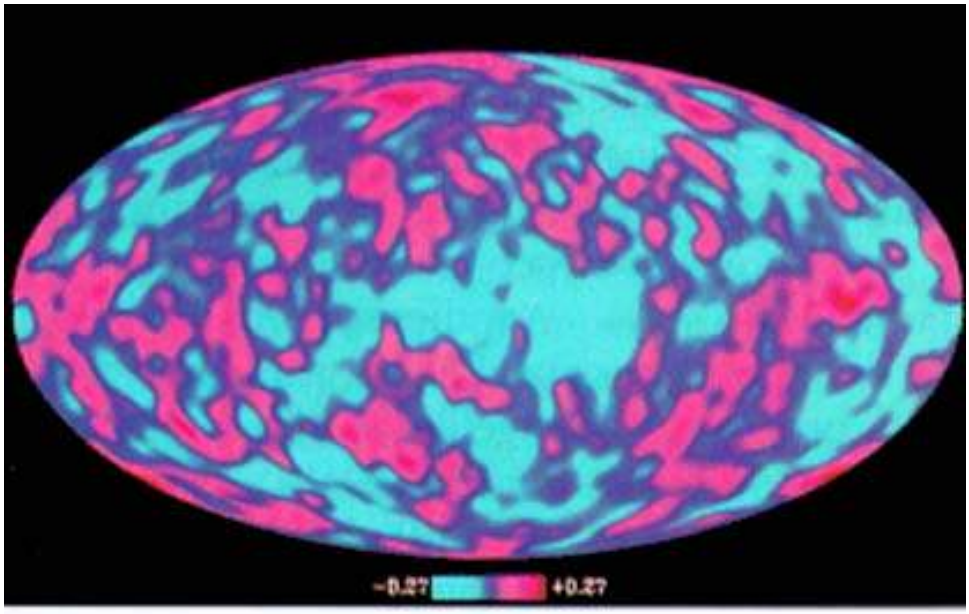
Figura 27.9: Resultados do experimento FIRAS do satélite COBE, mostrando que a radiação do fundo do Universo segue mesmo a lei da radiação de Planck.

sido caótico, por exemplo, o espectro observado não seria perfeitamente o de um corpo negro, mas seria distorcido para o azul, pelo decaimento das estruturas caóticas.

Cada metro cúbico do Universo contém, em média, 400 milhões de fótons e somente 0,1 átomos.

Em outro experimento do satélite COBE, divulgado em abril de 1992 por George Fitzgerald Smoot III (1945-), da Universidade da Califórnia em Berkeley, também foram detectadas pequeníssimas variações da temperatura nessa radiação (seis partes por milhão). Nos modelos de formação de galáxias, essas flutuações são necessárias para permitir que a matéria

formada posteriormente se aglomerasse gravitacionalmente para formar estrelas e galáxias, distribuídas em grupos, bolhas, paredes e vazios, como observamos.



No modelo padrão, as estruturas do Universo são formadas a partir da amplificação gravitacional de pequenas perturbações na distribuição de massa inicial. Seria praticamente impossível haver a formação das estruturas observadas, como galáxias, estrelas, planetas e portanto, da Terra e de nós mesmos, sem que houvessem variações de temperatura na radiação do fundo do Universo. Isso porque a radiação e a matéria estiveram em equilíbrio térmico no Universo primordial e então qualquer irregularidade na distribuição inicial de matéria seria refletida na distribuição angular desta radiação. A detecção dessas flutuações até então era o principal ponto faltante na consistência da teoria do Big Bang e da formação e evolução do Universo. As flutuações de densidade observadas pelo COBE poderiam ser oriundas de cordas cósmicas geradas nas transições de fase, ou poderiam ser simples flutuações normais de uma distribuição gaussiana de densidade. Com o esfriamento do Universo, eventualmente a matéria se condensa em galáxias, estrelas se formam, evoluem e morrem, e elementos mais pesados, como carbono, oxigênio, silício e ferro vão gradualmente sendo sintetizados nas estrelas, e espalhados no meio interestelar por explosões de supernovas. Esse gás é depois concentrado em outras estrelas, e em planetas e, possivelmente, em corpos de seres humanos, em alguns desses planetas!

O Universo tornou-se transparente quando a temperatura caiu para T=3000 K e os elétrons se combinaram com os prótons, formando átomos de hidrogênio e hélio.

Este evento chama-se época da recombinação, ou superfície de último espalhamento. Ela ocorre em deslocamento para o vermelho (*redshift*) z=1000 já que a temperatura da radiação atualmente é de 3 K, e

$$z = \frac{T_{\text{inicial}}}{T_{\text{atual}}} = \frac{3000\ \text{K}}{3\ \text{K}} = \frac{R_{\text{atual}}}{R_{\text{inicial}}}$$

onde R é o raio do Universo.

A energia gravitacional das estrelas, galáxias e cúmulos de galáxias, dividida por mc^2, a energia de repouso, corresponde a 10^{-5} e, portanto, a dinâmica destes objetos é não relativística. Esta razão também é a razão entre a temperatura média da radiação do fundo do Universo (*Cosmic Microwave Background*) e a temperatura das flutuações que deram origem às estrelas, galáxias e cúmulos de galáxias, já que representam o avermelhamento gravitacional (redução de energia) necessário para os fótons escapem do campo gravitacional.

A abundância observada de deutério, e também a de hélio, indicam que a densidade bariônica (de matéria normal) não pode ser maior do que 0,1 da densidade crítica. Entretanto o movimento das galáxias em cúmulos de galáxias requer que a densidade total seja pelo menos 0,2 da densidade crítica. Grande parte da matéria escura precisa ser exótica. Portanto sabemos que a densidade de matéria atualmente é próxima da densidade crítica, mas não existe evidência observacional de que a densidade total seja igual à densidade crítica.

Entretanto, temos o problema da planicidade. Suponha que em um certo momento do Universo a densidade de matéria seja 0,5 da densidade crítica. Quando o Universo se expande por um fator de 2, a densidade crítica diminui por um fator de 4, pois depende de H^2, e $H \propto 1/R$ para energia total não nula [7], mas a densidade de matéria diminui por um fator de 8, pois depende

[7] A energia total E de uma galáxia de massa m, a uma distância R, deslocando-se com velocidade v em um campo gravitacional dado por uma massa M, é dada por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

Usando-se a Lei de Hubble $v = H\,R$ e escrevendo a massa M em função da densidade de massa:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

de $\rho \propto R^{-3}$. Logo

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crítica}}}$$

diminui de 0,5 para 0,25 quando o Universo se expande por um fator de 2. Como o Universo se expandiu por um fator de 1000 desde que sua temperatura era de 3000 K, a época da recombinação (captura dos elétrons formando átomos), o fato da densidade atual ser próxima da densidade crítica indica que era igual a 1 mais próximo do que uma parte em 1000 naquela época, e muito mais próximo de 1 ainda para épocas anteriores. Por exemplo, quando o Universo tinha 1 segundo, época do início das reações nucleares, a igualdade é de uma parte em 10^{15}, e para o tempo de Planck, 10^{-43} segundos, a igualdade é de uma parte em 10^{58}. Portanto nosso Universo iniciou com a energia cinética muito próximo da energia gravitacional, levando à suspeita de que a densidade deve ser *exatamente* igual à densidade crítica, isto é, $\Omega \equiv 1$, que é um Universo plano. Neste caso a densidade crítica também depende de R^{-3}. De outra maneira seria apenas uma mera coincidência que nós estejamos observando justamente quando a diferença da planicidade começa a ser significativa.

A constante cosmológica pode ser escrita como uma densidade de energia,

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

A escala natural de densidade de energia, segundo a Física de Partículas Elementares conhecida, deveria ser várias dezenas de ordens de magnitude maior do que a da densidade de energia crítica (Steven Weinberg 1989, Review of Modern Physics, 69, 1), diferente do que as medidas indicam.

Se a matéria escura e energia escura podem ser unificadas num só modelo, ela teria duas fases: uma, aglomerada em halos, com pressão nula, contribuiria positivamente para o crescimento das estruturas observadas; outra, homogeneamente distribuída, com pressão negativa, contribuiria somente para a aceleração do universo e não teria efeitos dinâmicos sobre as estruturas em pequena escala. Ela é conhecida como quartessência, como no

---

podemos derivar a equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{2E}{mR^2}$$

para o caso geral de energia E. Para matéria não relativística, como assumimos acima, $\rho \propto R^{-3}$ e o primeiro termo decresce mais rapidamente que o segundo termo (termo de curvatura), que eventualmente domina. Se a densidade é igual à densidade crítica, o primeiro termo domina sobre o termo de curvatura, que torna-se nulo.

modelo do Gás de Chaplygin (A. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier. 2001, Phys. Lett. B 511, 265 e Bento M. C., Bertolami O., Sen A.A. 2002, Physical Review D, 66, 043507).

27.8 Viagem no tempo

Na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, o tempo se acelera e desacelera quando passa por corpos massivos, como estrelas e galáxias. Um segundo na Terra *não* é um segundo em Marte. Relógios espalhados pelo Universo se movem com velocidades diferentes.

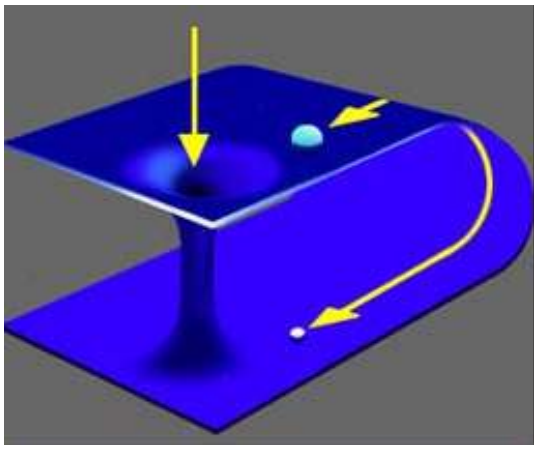
Em 1935, Einstein e Nathan Rosen (1909-1995) deduziram que as soluções das equações da relatividade geral permitiam a existência de pontes, originalmente chamadas de pontes de Einstein-Rosen, mas agora chamadas de redemoinhos (*wormholes - buracos de minhoca*). Essas pontes unem regiões do espaço-tempo distantes. Viajando pela ponte, pode-se mover mais rápido do que a luz, se esta viaja pelo espaço-tempo normal.

Antes da morte de Einstein, o matemático Kurt Gödel (1906-1978), trabalhando na Universidade de Princeton, como Einstein, encontrou uma solução para as equações da relatividade geral que permitem a viagem no tempo. Essa solução mostrava que o tempo poderia ser distorcido por rotação do Universo, gerando redemoinhos que permitiam que alguém, movendo-se na direção da rotação, chegasse ao mesmo ponto no espaço, mas atrás no tempo. Einstein concluiu que, como o Universo não está em rotação, a solução de Gödel não se aplicava.

Em 1955 o físico americano John Archibald Wheeler (1911-2008), que cunhou o termo buraco negro, escreveu um artigo sobre "geometrodinâmica"mostrando que as pontes de Einstein-Rosen poderiam ligar não somente universos paralelos, mas regiões do mesmo Universo, formando um túnel no espaço-tempo.

Em 1963, o matemático Roy Patrick Kerr (1934-), da Nova Zelândia, encontrou uma solução das equações de Einstein para um buraco negro em rotação. Nesta solução, o buraco negro não colapsa para um ponto, ou singularidade, como previsto pelas equações para um buraco negro não rotante, mas em um anel de nêutrons em rotação. Nesse anel, a força centrífuga previne o colapso gravitacional. Esse anel é um *wormhole* que conecta não somente regiões do espaço, mas também regiões do tempo, e poderia ser usado como máquina do tempo. A maior dificuldade é a energia: uma máquina do tempo necessita de uma quantidade fabulosa de energia. Seria preciso usar-se a energia nuclear de uma estrela, ou antimatéria. O segundo

problema é de estabilidade; um buraco negro em rotação pode ser instável, se acreta massa. Efeitos quânticos também podem acumular-se e destruir o redemoinho. Portanto, embora possível, uma viagem no tempo não é praticável.



27.9 Quarks

Em 1964, o americano Murray Gell-Mann (1929-), do CALTECH, e George Zweig (1937-) independentemente sugeriram que a complexidade da interação forte poderia ser explicada assumindo-se que os mais de cem bárions e mésons conhecidos, inclusive os prótons e nêutrons, eram compostos de três partículas fundamentais, chamadas de quarks por Gell-Mann. O nome foi proposto a partir da frase do escritor irlandês James Joyce (1882-1941), na página 383 do romance *Finnegans Wake*, *Three quarks for Muster Mark.* Na proposta, um quark tinha carga elétrica 2/3 da carga do próton, e os outros dois -1/3. Entre 1967 e 1973, usando o Acelerador Linear de Stanford, Jerome Isaac Friedman (1930-), Henri W. Kendall (1926-), e Richard E. Taylor (1929-) notaram que o espalhamento de elétrons por prótons e nêutrons indicava que estes eram compostos por partículas menores, com cargas consistentes com a teoria dos quarks. Os três receberam o prêmio Nobel de física, em 1990, pela descoberta.

Embora a teoria original propusesse somente três quarks, os quarks, que compõem os hádrons, são em número total de 6: *up, down, charm, strange, top* e *bottom.* Eles interagem pela troca de glúons, dentro da teoria da interação forte chamada de Cromodinâmica Quântica (QCD). A QCD é uma teoria de gauge, que tem a propriedade da liberdade assintótica, isto é, a

interação entre as partículas diminui com o aumento de energia. Como o próton tem baixa energia, os quarks dentro do próton estão fortemente ligados uns aos outros, e os físicos teóricos estão convencidos que a teoria levará ao confinamento, que diz que os quarks não podem existir independentemente, pois estão confinados pela interação forte. O quark *charm*, predito por James D. Bjorken e Sheldon Lee Glashow (1932-) em 1964, foi descoberto, em 1974, independentemente por Samuel Chao Chung Ting (1936-) e Burton Richer (1931-), com a descoberta da partícula J/ψ, com 3,105 GeV, que é um *charmônio*, isto é, composto por um quark e um antiquark *charm*. Em 1976 Ting e Richer receberam o prêmio Nobel pela descoberta.

A teoria de gauge prevê que, para que não haja infinidades, os hádrons devem ter pares com os léptons. Os léptons são o elétron, o múon e o táon (τ). O elétron foi descoberto pelo inglês *Sir* Joseph John Thomson em 1895. O próton foi descoberto pelo físico alemão Eugen Goldstein (1850-1930) em 1908, nas suas experiências com raios catódicos, mas o nome foi dado por Ernest Rutherford (1871-1937), do grego *protos*, primeiro, depois de suas experiências em 1918 demonstrando que os núcleos de nitrogênio se desintegravam quando bombardeados com partículas α. O pósitron, antipartícula do elétron, foi descoberto, por Carl David Anderson (1905-1991) em 1932, quando ele analisava os raios cósmicos e descobriu em uma das placas fotográficas uma partícula parecida com um elétron, mas se movendo na direção oposta em relação ao campo magnético e, portanto, com carga positiva. O múon foi descoberto em 1937, pelo americano Seth Henry Neddermeyer (1907-1988), de CALTECH Carl David Anderson (1905-1991), Jabez Curry Street (1906-1989) e Edward C. Stevenson, de Harvard, e é 207 vezes mais massivo que o elétron. O táon (τ) foi descoberto em 1975 por Martin Lewis Perl (1927-), com 1,784 GeV, ou seja, 3500 vezes mais massivo que o elétron. Os outros três léptons são os neutrinos correspondentes, ν_e, ν_μ e ν_τ. Em 1977, Leon M. Lederman (1922-) descobriu o upsilon (υ), com 9,46 GeV, interpretado como o estado ligado do quinto quark, *bottom*, e em 1995 dois grupos do Fermilab descobriram o sexto e último quark, o *top*, com 175 GeV, medindo o estado quark-antiquark $t\bar{t}$.

O decaimento da partícula Z^0, bem como a abundância cósmica do hélio, e a meia vida do nêutron, demonstra que não pode haver outro tipo de neutrino além dos três observados e, portanto, não deve haver outro tipo de quark, pela paridade dos léptons e hádrons.

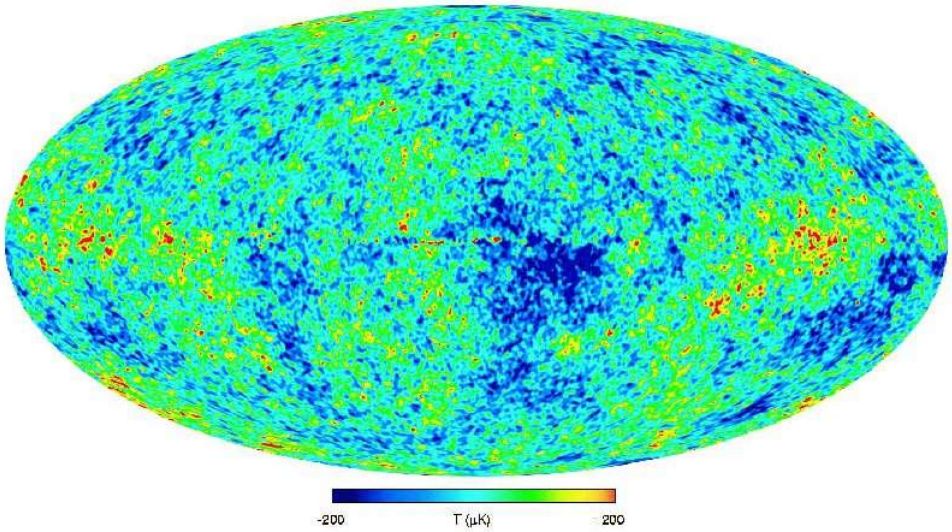


Figura 27.10: Mapa do céu obtido pelo satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) da NASA, lançado em 2001, com resolução angular de $0,22^o$ em 93 GHz, divulgado por Charles L. Bennett (1956-) e colaboradores em 2003, 2008 e 2010. As regiões vermelhas são mais quentes (200 μK, do que a média) e as azuis mais frias (-200 μK). Os resultados após sete anos de dados, analisados por Gary F. Hinshaw (1961-), David Nathaniel Spergel (1961-), e colaboradores, indicam que a idade do Universo é de $(13,78 \pm 0,11)$ bilhões de anos (o primeiro pico no espectro de distribuição angular, em $263,8^o \pm 0,1^o$, é proporcional à distância à superfície de desacoplamento), que a matéria normal corresponde a $(4,61 \pm 0,15)\%$ da energia total (a amplitude do pico acústico é proporcional à densidade bariônica), $(23,2 \pm 0,13)\%$ de matéria escura e $(72,2 \pm 0,15)\%$ de energia escura (constante cosmológica) ou quintessencia (energia com pressão negativa), completando a massa crítica prevista pelo modelo inflacionário ($\Omega = \frac{\rho_{\text{observado}}}{\rho_{\text{crítico}}} = 1,022 \pm 0,043$). As observações indicam ainda que as primeiras estrelas se formaram (377 ± 3) milhões de anos (dada pela detecção de reionização em $z = 10,4 \pm 1,2$) depois do Big Bang o que indica que os neutrinos não dominam a evolução da estrutura, ou eles teriam dificultado a aglomeração do gás, retardando o nascimento das primeiras estrelas. A reionização pode ser detectada pela polarização causada pelo espalhamento dos fótons da radiação de fundo pelos elétrons livres ionizados pela formação estelar.

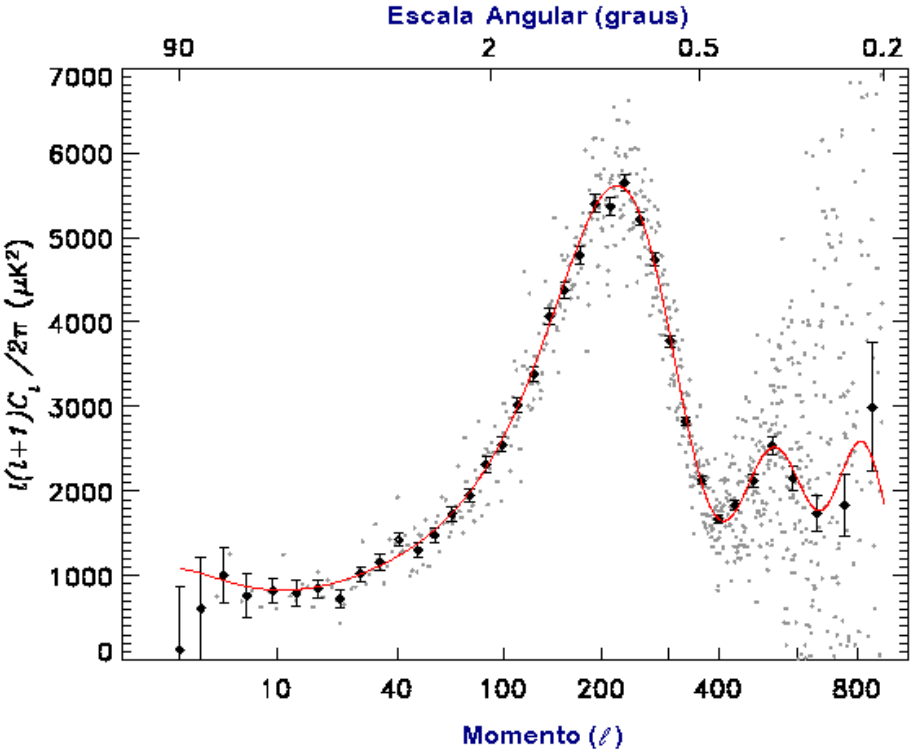


Figura 27.11: Decomposição em esféricos harmônicos das flutuações observadas pelo WMAP. Se o Universo é aberto, as flutuações devem ser máximas em escalas de $0,5^o$. Se o Universo é plano, as flutuações devem ser máximas em escalas de 1^o ($\ell \simeq 220$). Se o Universo é fechado, as flutuações devem ser máximas em escalas maiores que 1^o. A separação angular é dada por $\theta = \frac{180^o}{\ell}$.

27.10 Superstrings - Cordas Cósmicas

A teoria de cordas descreve as partículas elementares como modos de vibração de cordas unidimensionais fechadas (*loops*).

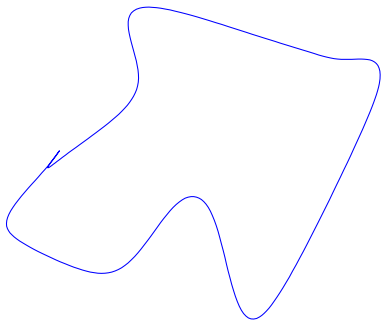


Figura 27.12: Representação esquemática de uma corda cósmica.

Desde os anos 1930, quando foram propostas a teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica, ficou claro que as duas teorias não eram compatíveis entre si, já que a gravitação descrita pela teoria da Relatividade Geral é determinística e contínua, propriedades não aceitáveis pela Mecânica Quântica. Portanto desde o início do século XX, busca-se uma nova teoria que unifique estas teorias, formando uma Teoria de Tudo.



Theodor Kaluza

Em 1919, o matemático alemão-polonês Theodor Franz Edward Kaluza (1885-1945) propôs que o Universo poderia ter mais do que 4 dimensões,

dando início à popular 5^a dimensão. Em 1926 o matemático sueco Oskar Klein (1894-1977) propôs que o tecido do nosso Universo poderia ter dimensões estendidas e enroladas (dobradas sobre si mesmo).

Adicionando uma dimensão extra à Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, Kaluza mostrou que as equações extra eram similares às de James Clerk Maxwell (1831-1879), unificando a teoria gravitacional de Einstein com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, mas mais tarde a constante de acoplamento entre as teorias, isto é, a razão entre a massa e a cargo do eléctron, entraram em conflito com os dados experimentais, demonstrando que um espaço com cinco dimensões não satisfaz às observações.

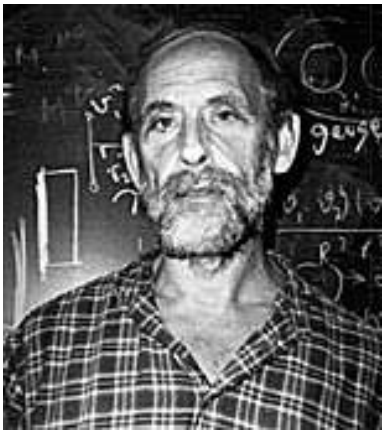
Em 1968 Gabriele Veneziano, atualmente no CERN, descobriu que as funções β de Leonhard Euler (1707-1783) descreviam várias propriedades da interação forte.

Em 1970, o japonês Yoichiro Nambu (1921-2015), da Universidade de Chicago,

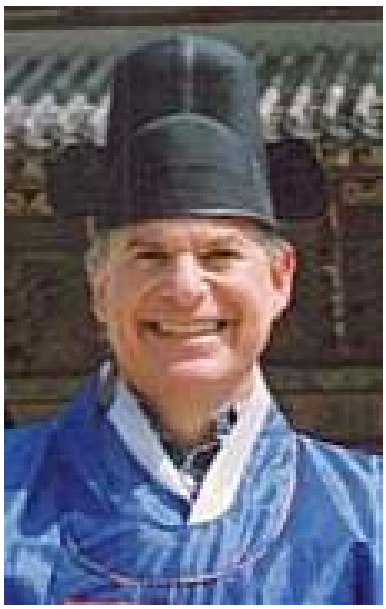

Yoichiro Nambu


Holger Nielsen

o dinamarquês Holger Bech Nielsen, do Niels Bohr Institute e

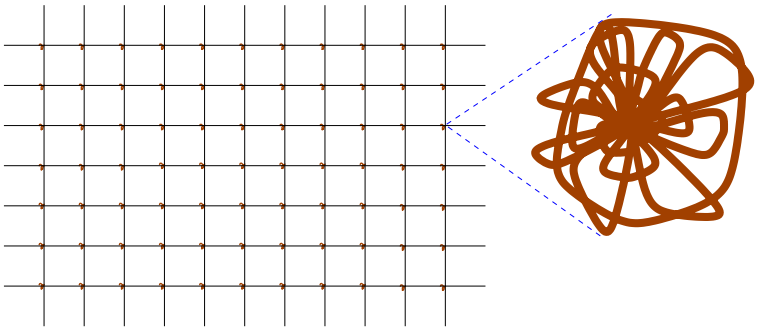

Leonard Susskind

Leonard Susskind, da Universidade de Stanford, propuseram que cordas unidimensionais em vibração podiam ser descritas pelas funções β de Euler, dando início à teoria de cordas.

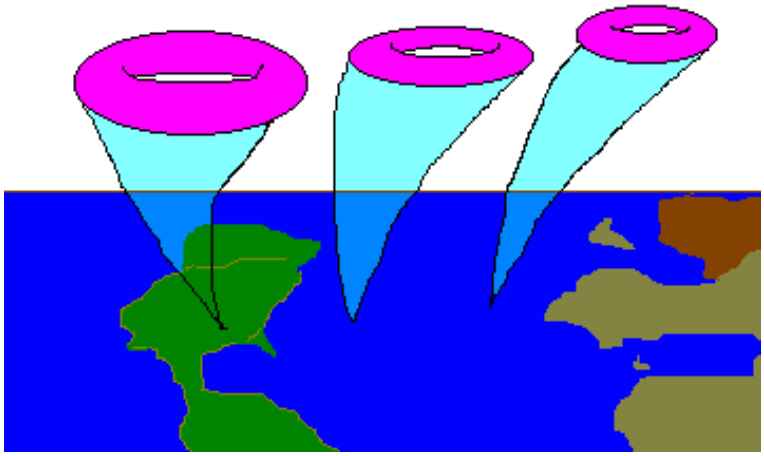


Em 1974, John H. Schwarz (1941-), do Caltech e Joël Scherk (-1980), da Ecole Normale Superior, mostraram que as partículas mensageiras de spin 2 existentes na teoria de cordas tinhas as propriedades do gráviton - o quantum da gravitação, demonstrando que a teoria de cordas descrevia não somente a interação forte, mas também a força gravitacional, sem introduzir infinitos.

A teoria das cordas cósmicas — *superstrings* — na forma atual, foi proposta em 1984 por Michael B. Green, do Queen Mary College, em Londres, e por John H. Schwarz, unificando a teoria de cordas com a supersimetria. Ela leva a um espectro de excitação com um número idêntico de férmions e bósons, e resolvendo o conflito quântico da teoria de cordas, pois mostrava que as anomalias anteriores se cancelavam. Nesta teoria, padrões vibracionais distintos de uma mesma corda fundamental (um *loop*), com comprimento de Planck (10^{-33} cm), dão origem a diferentes massas e diferentes cargas de força. Para que as anomalias sejam canceladas, a teoria requer a existência de 9 dimensões espaciais e uma dimensão temporal, com um total de 10 dimensões. As outras dimensões estão enroladas sobre si mesmo, com distâncias menores que o comprimento de Planck, e portanto não podem ser detectadas.



Cada ponto do espaço tem estas dimensões extras, mas tão enroladas que não podem ser detectadas diretamente. Se as dimensões extras são associadas a espaços compactados — para cada ponto do espaço-tempo quadridimensional — seu tamanho reduzido é compatível com as observações.



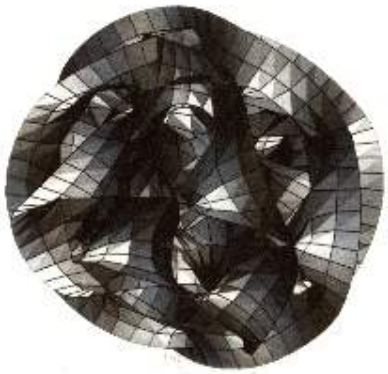
Na teoria atual, as dimensões extras se compactaram 10^{-43} segundos após a formação do Universo atual.

Michael James Duff (1949-), da Texas A&M University, Chris M. Hull e Paul K. Townsend, ambos da Universidade de Cambridge, calculam que a teoria precisa de 11 dimensões, e não somente 10. Se uma das dimensões enroladas é de fato uma outra dimensão temporal, e não somente espacial, uma viagem no tempo pode ser possível.


Shing-Tung Yau

As dimensões extras não estão enroladas de maneira aleatória, mas em formas de Calabi-Yau, de Eugenio Calabi, da Universidade da Pennsylvania, e do chinês Shing-Tung Yau (1949-), da Universidade de Harvard, de acordo

com o inglês-americano Philip Candelas (1951-), da Universidade do Texas em Austin, Gary T. Horowitz, da Universidade da Califórnia Santa Barbara, Andrew Strominger, de Harvard, e do americano Edward Witten (1951-), de Princeton.



27.11 Cosmologia newtoniana

Embora precisemos da Teoria da Relatividade Geral para deduzir a expansão do Universo, a teoria de Newton produz os mesmos resultados para a densidade crítica e a idade do Universo e vamos usá-la para derivar essas relações.

27.11.1 Densidade crítica

Consideremos uma galáxia de massa m movendo-se com velocidade v, a uma distância r de um sistema de coordenadas qualquer, em um sistema de massa total M contida no volume de raio r. A energia total do sistema, na ausência de cargas elétricas, é a soma da energia cinética com a energia potencial gravitacional:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

Dependendo do valor da energia total do Universo, que é uma constante do sistema, o Universo será aberto ou fechado.

$$E \begin{cases} > 0, & \text{Universo aberto;} \\ = 0, & \text{Universo plano;} \\ < 0, & \text{Universo fechado.} \end{cases}$$

Usando a *lei de Hubble*:

$$v = H_0 r$$

onde H_0 é a constante de Hubble no presente, e

$$M = \rho_c \frac{4\pi}{3} r^3$$

onde ρ_c é a densidade crítica, isto é, a densidade necessária para parar a expansão do Universo, $E = 0$, obtemos:

$$\frac{1}{2} H_0^2 m r^2 - \frac{4G\pi}{3} \rho_c m r^2 = 0$$

$$\boxed{\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}}$$

Usando $H_0 = 75$ km/s/Mpc, obtemos

$$\rho_c \simeq 1,1 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3} = 1,1 \times 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}$$

que pode ser comparado com a densidade de matéria visível observada, que é da ordem de $10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3}$, ou seja, cerca de 100 vezes menor do que a densidade crítica.

Vamos escrever a distância entre dois pontos quaisquer no espaço como:

$$r(t) = a(t)\ r_0 \tag{27.1}$$

onde $a(t)$ é um fator de escala crescente com o tempo para um Universo em expansão e r_0 é a distância entre os dois pontos no instante t_0 em que $a_0 = a(t_0) = 1$.

A velocidade de recessão entre os dois pontos pode ser obtida derivando-se (27.1) no tempo:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt}\ r_0 = \frac{1}{a}\ \frac{da}{dt}\ r(t)$$

Se escrevermos:

$$v(t) = H(t)\ r(t) \tag{27.2}$$

como na lei de Hubble, identificamos

$$H(t) = a(t)^{-1}\ da/dt = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{27.3}$$

27.11.2 Idade do Universo

Podemos, também, derivar a idade do Universo para o caso do Universo plano (E=0), escrevendo $v = dr/dt$ na equação da energia total:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{GMm}{r} \longrightarrow \frac{dr}{dt} = \left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27.4}$$

ou

$$r^{\frac{1}{2}}dr = (2GM)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

Integrando-se os dois lados, e usando r=0 para t=0, obtemos:

$$\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} = (2GM)^{\frac{1}{2}}\,t \tag{27.5}$$

Como a lei de Hubble pode ser escrita como:

$$\frac{dr}{dt} = H_0 r \quad \text{para } t = t_0$$

podemos usar a equação (27.4) para escrever o termo $(2GM)^{\frac{1}{2}}$ em função da constante de Hubble:

$$\frac{dr}{dt} = H_0\, r = \left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow (2GM)^{\frac{1}{2}} = H_0\, r^{\frac{3}{2}}$$

que, substituindo na equação (27.5), nos dá:

$$\frac{2}{3} = H_0 t_0$$

$$\boxed{t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}, \quad \text{para E=0}}$$

27.11.3 Parâmetro de densidade

Consideremos, agora, a força gravitacional resultante sobre uma partícula pertencente a um Universo de massa M, homogêneo e isotrópico, em expansão. Consideraremos uma partícula na superfície da esfera de raio $r(t)$:

Em um dado instante, a partícula sofrerá uma aceleração gravitacional dada por:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \tag{27.6}$$

Essa aceleração é de frenagem, ou seja, tenderá a reduzir a expansão do Universo.

A energia mecânica da partícula, E, assumindo-se $\Lambda = 0$, será:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r} \tag{27.7}$$

Note que, no caso em que apenas a gravidade atua no Universo, $E =$ constante. Nesse caso, sabemos que o sinal de ε determina se as partículas poderão se afastar indefinidamente umas das outras – ou não:

$E > 0 \rightarrow$ expansão indefinida: Universo aberto.

$E < 0 \rightarrow$ expansão contida: Universo fechado.

Omitiremos a coordenada t para r(t) e H(t) na derivação a seguir. Como a massa M é dada por

$$M = \frac{4\pi r^3}{3}\rho(t) \tag{27.8}$$

podemos reescrever a equação (27.7) como:

$$2E = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - m\frac{8\pi G r^2}{3}\rho(t) \tag{27.9}$$

Seja agora a densidade crítica, ρ_c, definida como aquela para a qual a gravidade está no limite de conter a expansão (ou seja, $E = 0$):

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{27.10}$$

Inserindo $\rho_c(t)$ na equação (27.9), temos:

$$\frac{2E}{mr^2} = H^2 - \frac{H^2\,\rho(t)}{\rho_c(t)} = H^2\left[1 - \Omega(t)\right] \tag{27.11}$$

onde

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}}$$

é chamado parâmetro de densidade.

Como r^2 e H^2 são sempre positivos, os sinais de E e $\Omega(t)$ estão anti-correlacionados:

$\Omega(t) > 1 \;\rightarrow\; \rho(t) > \rho_c(t),\; E < 0$: Universo fechado.

$\Omega(t) < 1 \;\rightarrow\; \rho(t) < \rho_c(t),\; E > 0$: Universo aberto.

$\Omega(t) = 1 \;\rightarrow\; \rho(t) = \rho_c(t),\; E = 0$: Universo plano.

Vamos escrever a energia E em termos das propriedades no presente, usando-se a lei de Hubble:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mH_0^2 r_0^2 - Gm\frac{4\pi}{3}r_o^2\rho_0 \\ &= m\left(\frac{H_0^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}\rho_0\right)r_0^2 \end{aligned}$$

Substituindo

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$$

obtemos:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = m\left(\frac{H_0^2}{2} - \frac{1}{2}\Omega_0 H_0^2\right)r_0^2$$

Escrevendo-se a massa M em termos da densidade atual:

$$\frac{\dot{r}^2}{r_0^2} - \frac{2G}{r}\frac{4\pi}{3}\frac{r_0^3}{r_0^2}\rho_0 = H_0^2\left[1 - \Omega_0\right]$$

ou

$$\frac{\dot{r}^2}{r_0^2} - H_0^2\Omega_0\frac{r_0}{r} = H_0^2\left[1 - \Omega_0\right] \tag{27.12}$$

Definindo-se dois parâmetros de escala:

$$t \equiv \frac{\tau_*}{H_0}$$

$$D_* \equiv \frac{r}{r_0}$$

podemos escrever a equação (27.12) como:

$$\left(\frac{dD_*}{d\tau_*}\right)^2 - \frac{\Omega_0}{D_*} = 1 - \Omega_0 \tag{27.13}$$

Na seção 27.11.2 nós resolvemos o caso de $\Omega = 0$. Para $\Omega \neq 1$, vamos reescalar mais uma vez, definindo:

$$\xi \equiv \frac{|1 - \Omega_0|}{\Omega_0}D_*$$

e

$$\tau \equiv \frac{|1 - \Omega_0|^{3/2}}{\Omega_0}\tau_*$$

para transformar a equação (27.13) em:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\xi} = \pm 1 \tag{27.14}$$

onde o lado direito é +1 se $\Omega_0 < 1$, isto é, Universo aberto, e -1 se $\Omega_0 > 1$, isto é, Universo fechado.

A solução da equação (27.14) pode ser obtida de:

$$\tau = \int_0^{\xi} \left(\frac{\xi}{1 \pm \xi}\right)^{1/2} d\xi$$

assumindo $\xi = 0$ para $\tau = 0$.

A solução, para o caso do denominador $1-\xi$, em que o Universo é fechado e $\xi \leq 1$, pode ser encontrada fazendo-se a substituição $\xi = \text{sen}^2(\eta/2)$, pois obtemos a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(\eta/2) = (1 - \cos\eta)/2$. Para o caso do denominador $1 + \xi$, em que o Universo é aberto e $\xi > 1$, a substituição é $\xi = \text{senh}^2(\eta/2)$, pois obtemos a identidade trigonométrica $\text{senh}^2(\eta/2) = (\cosh\eta - 1)/2$. Por definição:

$$\text{senh}\,\eta \equiv \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} \tag{27.15}$$

e

$$\cosh\eta \equiv \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} \tag{27.16}$$

Portanto, a solução de forma paramétrica é:

$$\text{Universo fechado} \quad \xi = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\eta), \quad \tau = \frac{1}{2}(\eta - \text{sen}\,\eta);$$

$$\text{Universo aberto} \quad \xi = \tfrac{1}{2}(\cosh\eta - 1), \quad \tau = \frac{1}{2}(\text{senh}\,\eta - \eta).$$

Substituindo as definições de τ e τ_*, obtemos:

Para $\Omega_0 > 1$:

Para simplificar as equações, vamos definir a variável b:

$$b = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} > 0$$

escrevemos

$$\tau_*^{\text{Fechado}} = \Omega_0^{-\frac{1}{2}} \int_0^{D_*} \sqrt{\frac{x}{1 - bx}}\, dx$$

$$bx = \text{sen}^2(\eta/2) = \frac{1-\cos\eta}{2}$$

logo

$$bdx = \text{sen}\,(\eta/2)\cos(\eta/2)d\eta$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_*^{\text{Fechado}} &= \Omega_0^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}} \int \text{sen}^2(\eta/2)d\eta \\
&= \Omega_0^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}} \int \frac{1-\cos\eta}{2} d\eta \\
&= \frac{\Omega_0^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}}}{2}(\eta - \text{sen}\,\eta) \\
&= \frac{1}{2}\Omega_0\left(\Omega_0 - 1\right)^{-\frac{3}{2}}(\eta - \text{sen}\,\eta)
\end{aligned}$$

ou seja

$$t = \frac{1}{2}H_0^{-1}\Omega_0\left(\Omega_0 - 1\right)^{-\frac{3}{2}}(\eta - \text{sen}\,\eta) \tag{27.17}$$

e

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}\frac{1-\cos\eta}{2} \tag{27.18}$$

Para $t = t_0$, $r = r_0$:

$$\cos\eta_0 = \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}, \quad \text{para } \Omega_0 > 1$$

Para $\Omega_0 \to \infty$, com $\cos\eta_0 \to -1$ e $\eta_0 \to \pi$:

$$t_0 \to \frac{1}{2H_0}\Omega_0^{-\frac{1}{2}}\pi \to 0$$

Para $\Omega_0 \to +1$, com $\cos\eta_0 \to 1$ e $\eta_0 \ll 1$:

$$\cos\eta_0 \simeq 1 - \frac{\eta_0^2}{2} = \frac{2}{\Omega_0} - 1$$

ou

$$-\frac{\eta_0^2}{2} \simeq \frac{2}{\Omega_0} - 2 \longrightarrow \eta_0 \simeq 2\left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}\right)^{1/2}$$

e

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}\Omega_0\left(\Omega_0 - 1\right)^{-\frac{3}{2}}(\eta_0 - \text{sen}\,\eta_0)$$

Como

$$\eta_0 - \operatorname{sen}\eta_0 \simeq \eta_0 - \left(\eta_0 - \frac{\eta_0^3}{6}\right) \simeq \frac{\eta_0^3}{6} = \frac{4}{3}\left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}\right)^{3/2}$$

$$t_0 \to \frac{2}{3H_0}\Omega_0^{-\frac{1}{2}}$$

e, finalmente, como $\Omega_0 \to +1$

$$t_0 \to \frac{2}{3}H_0^{-1}$$

Para $\Omega < 1$:

$$\tau_*^{\text{Aberto}} = \Omega_0^{-\frac{1}{2}} \int_0^{D_*} \sqrt{\frac{x}{1+ax}}dx, \qquad a = \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0} > 0$$

$$ax = \operatorname{senh}(\eta/2) = \frac{\cosh\eta - 1}{2}$$

logo

$$\begin{aligned} \tau_*^{\text{Aberto}} &= \Omega_0^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \int \operatorname{senh}^2(\eta/2)d\eta \\ &= \frac{1}{2}\Omega_0^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}(\operatorname{senh}\eta - \eta) \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{2}H_0^{-1}\Omega_0(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{senh}\eta - \eta) \tag{27.19}$$

e

$$\left(\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}\right)\frac{r}{r_0} = \frac{\cosh\eta - 1}{2}$$

ou

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0}\frac{\cosh\eta - 1}{2}$$

e para $t = t_0$, $r = r_0$:

$$\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\cosh\eta_0 - 1}{2}$$

logo

$$\cosh\eta_0 = \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}$$

Para $\Omega_0 \to 1$, $\cosh\eta_0 \to 1$ e $\eta_0 \to 0$:

$$\cosh\eta_0 \simeq 1 + \frac{\eta_0^2}{2} \simeq \frac{2}{\Omega_0} - 1$$

logo

$$\eta_0 \simeq 2\left(\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}\right)^{1/2}$$

e

$$\operatorname{senh}\eta_0 - \eta_0 \to \eta_0 + \frac{\eta_0^3}{6} - \eta_0 \simeq \frac{\eta_0^3}{6} = \frac{4}{3}\left(\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}\right)^{3/2}$$

e

$$t_0 \to \frac{2}{3H_0}\Omega_0^{-\frac{1}{2}} \to \frac{2}{3}H_0^{-1}$$

e para $\Omega_0 \to 0$, $\cosh\eta_0 \to \infty$ e $\eta_0 \to \infty$:

$$\cosh\eta_0 \simeq \frac{e^{\eta_0}}{2} \simeq \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}$$

e pelas definições das funções trigonométricas hiperbólicas (27.15 e 27.16):

$$\operatorname{senh}\eta_0 \simeq \frac{e^{\eta_0}}{2} \longrightarrow \operatorname{senh}\eta_0 - \eta_0 \simeq \operatorname{senh}\eta_0 = \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}$$

logo

$$t_0 \to \frac{\Omega_0}{2H_0}\frac{1}{(1-\Omega_0)^{3/2}}\operatorname{senh}\eta_0 = \frac{1}{2H_0}\frac{2-\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}}$$

e para $\Omega_0 \to 0$,

$$t_0 \to H_0^{-1}$$

Ou seja, os limites são:

$$\Omega_0 \to 1 \quad \text{Universo marginalmente fechado} \quad t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1};$$

$$\Omega_0 \to \infty \quad \text{Universo completamente fechado} \quad t_0 = 0;$$

$$\Omega_0 \to 0 \quad \text{Universo completamente aberto} \quad t_0 = H_0^{-1}.$$

Desse modo, a relação entre a idade do Universo e a constante de Hubble no presente, torna-se:

$$\frac{2}{3}H_0^{-1} \leq t_0 \leq H_0^{-1}, \quad \text{Universo aberto,}$$

$$0 < t_0 < \frac{2}{3}H_0^{-1}, \quad \text{Universo fechado.}$$

27.11.4 Parâmetro de desaceleração

Um outro parâmetro importante, que auxilia o entendimento do processo de expansão é o parâmetro de desaceleração, $q(t)$:

$$q(t) \equiv -\frac{1}{r}\frac{1}{H^2}\,\frac{d^2r}{dt^2} \tag{27.20}$$

que descreve a *mudança* na taxa de expansão.

Usando as equações (27.4), (27.8) e (27.10) obtemos:

$$q(t) = \frac{GM}{r^3H^2} = \frac{4\pi G\rho_c(t)\Omega(t)}{3H^2} = \frac{\Omega(t)}{2} \tag{27.21}$$

Logo, o valor de q, assim como o de Ω determinam o futuro da expansão do Universo. Note que H, Ω e q são funções do tempo. Mas o fato de ε ser constante, juntamente com as equações (27.11) e (27.21), garante que se $\Omega(t) > 1$ (ou analogamente $q(t) > 0.5$) em um dado instante, essa condição continua satisfeita ao longo do tempo, ainda que o valor do parâmetro varie. A determinação do parâmetro de densidade (ou do parâmetro de desaceleração) do Universo em seu estágio atual contém informação sobre o desenlace da competição entre a expansão do Universo e a gravitação que tende a contê-la.

27.11.5 Big Bang quente

Levando-se em conta que a densidade de energia de um campo de radiação é dada por:

$$\varepsilon_{\rm rad} = aT_{\rm rad}^4$$

a densidade de massa equivalente ($E = mc^2$) é dada por:

$$\rho_{\rm rad} = \frac{aT_{\rm rad}^4}{c^2}$$

Para comparação, se assumirmos $T_{\rm rad} = 3\,{\rm K}$, obtemos $\rho_{\rm rad} \simeq 6\times10^{-34}\,{\rm g/cm^3}$ Usando-se a lei de Wien [Wilhelm Wien (1864-1928)],

$$\lambda_{\rm max}T_{\rm max} = \text{constante}$$

e usando-se a relação de desvio para o vermelho devido à expansão do Universo:

$$\lambda_{\rm max} \propto r(t)$$

onde $r(t)$ é a escala do Universo, representada pela distância média entre as galáxias, obtemos:

$$T_{\max} \propto r(t)^{-1}$$

ou seja, a densidade de radiação

$$\rho_{\rm rad} \propto r(t)^{-4}$$

enquanto que a densidade de matéria é inversamente proporcional ao volume do Universo:

$$\rho_{\rm mat} \propto r(t)^{-3}$$

Desse modo, obtemos que

$$\frac{\rho_{\rm rad}}{\rho_{\rm mat}} \propto r(t)^{-1}$$

indicando que, quando o Universo era muito mais jovem, para

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\rm observado}}{\lambda_{\rm emitido}} = \frac{r_0}{r} = 10^3 \longrightarrow \rho_{\rm rad} = \rho_{\rm mat}$$

isto é, quando o Universo era muito jovem ($z \geq 1$) ele era dominado pela radiação. Nessa definição, z é chamado de deslocamento para o vermelho, *redshift*, devido ao efeito Doppler.

27.11.6 Avermelhamento gravitacional

Em 1907, Albert Einstein (Jahrbuch der Radioaktivitat und Elektronik 4, 411) demonstrou que, empregando a conservação da energia e mesmo a física newtoniana, o campo gravitacional age sobre os fótons. Consideremos um fóton emitido no campo gravitacional da Terra, a uma altura a_2, com freqüência $\nu(a_2)$, para baixo. Como a energia do fóton é $E(a_2) = h\nu(a_2)$, sua massa equivalente é $m = E/c^2$. Assumamos por simplicidade que o campo gravitacional da Terra é constante, dado pela aceleração $g = GM/R$. Após descer uma distância a até a_1, a energia potencial do fóton terá aumentado de mga. Sua energia total será

$$E(a_1) = h\nu(a_2) + \frac{h\nu(a_2)}{c^2} ga = h\nu(a_1)$$

Logo

$$\nu(a_1) = \nu(a_2)\left(1 + \frac{ga}{c^2}\right)$$

e portanto um fóton muda de energia, e conseqüentemente de comprimento de onda em um campo gravitacional.

Este avermelhamento foi comprovado em 1960 por Robert V. Pound e Glen A. Rebka, demonstrando que um um feixe de raios γ mudava de energia em 2 partes em 10^{15} ao mover-se os 20 metros da torre do Laboratório Jefferson, em Harvard. Em 1964, utilizando a absorção resonante do raio γ de 14,4 Kev pelo ^{57}Fe, Robert V. Pound e J.L. Snider reduziram a incerteza para menos de 1%, conforme publicaram no *Physical Review B*, (1965) 140, 788.

27.11.7 Massa de Planck

A energia gravitacional é dada por:

$$E_G \simeq \frac{GM^2}{r}$$

desprezando-se o fator de integração, da ordem de 3/5 para distribuições esféricas. Assumindo que a massa seja constante, podemos escrever em primeira ordem:

$$\Delta E = \frac{GM^2}{\Delta r}$$

O princípio da incerteza pode ser escrito como

$$\Delta r \times \Delta p \geq h \tag{27.22}$$

Note que usamos h e não $\hbar$ porque estamos usando r e p em módulo, e não somente em uma direção. Mas

$$\Delta E = c\Delta p$$

Logo

$$\begin{aligned} \Delta E &\geq \frac{hc}{\Delta r} \\ &= \frac{GM^2}{\Delta r} \end{aligned}$$

e podemos escrever:

$$GM^2 \geq hc$$

Definimos a massa de Planck como:

$$\boxed{M_{\text{Planck}} \equiv \sqrt{\frac{hc}{G}}}$$

Nosso valor difere do valor na literatura

$$M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

devido ao uso de h e não $\hbar$ na equação 27.22

27.12 Cosmologia Relativística

27.12.1 Espaço-tempo de Minkowski

Um ponto no espaço-tempo pode ser caracterizado por um *evento*, que aconteceu em um lugar do espaço, em um certo momento. Podemos caracterizar o espaço-tempo, e as transformações de Lorentz, propostas pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), em 1904, e utilizadas por Einstein na Teoria da Relatividade Especial em 1905:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

introduzindo a coordenada imaginária $-ict$ no lugar da coordenada temporal t. Dessa maneira, para um espaço cartesiano [René Descartes (1596-1650), em latim Renatus Cartesius], temos:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

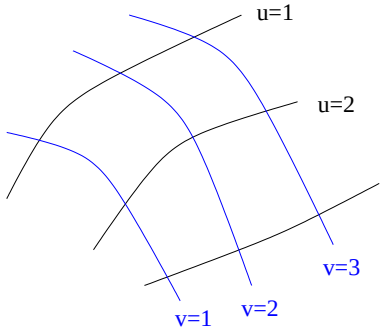
$$x_4 = -ict$$

Com essas definições, podemos transformar de um sistema de coordenadas para outro mantendo a relação:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^2 = x_1^{'2} + x_2^{'2} + x_3^{'2} + x_4^{'2}$$

Um sistema de coordenadas descrito pelas coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) anteriores é chamado de um sistema de Minkowski, pois foi proposto pelo matemático russo Hermann Minkowski (1864-1909). Esse sistema é um espaço euclidiano de quatro dimensões, e a transformação de Lorentz corresponde a uma *rotação* nesse espaço quadridimensional.

27.12.2 Coordenadas gaussianas



Em um sistema de coordenadas euclidiano, a unidade de distância não varia com a posição. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) propôs um sistema de coordenadas geral, não-euclidiano; imaginemos um sistema de coordenadas de curvas arbitrárias, não-justapostas, em uma superfície qualquer. Em uma direção designemos as curvas por u, designando-as $u = 1$, $u = 2$, ... Entre as curvas $u = 1$ e $u = 2$ podemos imaginar um número infinito de curvas, correspondendo aos números naturais entre 1 e 2. As curvas não se intersectam e somente uma curva passa por cada ponto da superfície, de modo que um valor perfeitamente definido de u pode ser estabelecido para cada ponto. Podemos estabelecer um sistema v de coordenadas sobre a superfície, de modo que um valor de u e v possam ser estabelecidos para cada ponto da superfície. Chamamos esses pontos de coordenadas gaussianas da superfície. Dois pontos próximos terão coordenadas P e P', com coordenadas:

$$P: \quad u, v$$

$$P': \quad u + du, v + dv$$

onde du e dv são pequenos. A distância entre esses pontos ds será dada por:

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2$$

onde g_{11}, g_{12} e g_{22} dependem de u e v, e representam a variação da unidade de distância em relação a elas. Somente para o caso especial em que a superfície seja euclidiana e as coordenadas cartesianas, isto é, independentes, podemos escrever:

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

Podemos generalizar as coordenadas de Gauss para um contínuo de três ou mais dimensões. Para um contínuo de quatro dimensões, como o espaço

de Minkowski, podemos escrever que dois pontos adjacentes estão separados por uma distância:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1\,dx_2 + \cdots + g_{44}dx_4^2$$

onde os valores de g_{ik} variam com a posição.

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

onde está implícita a soma sobre todos os valores de i e k.

Por exemplo, para um sistema de coordenadas esféricas no espaço plano:

$$ds^2 = d(ct)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

enquanto, em coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = d(ct)^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2$$

27.12.3 Relatividade Geral

Na Relatividade Geral, a velocidade da luz não é mais mantida constante, mas depende do sistema de coordenadas quando um campo gravitacional está presente. A idéia fundamental da relatividade geral é que *todos sistemas de coordenadas gaussianos são equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza,* de modo que as equações não devem mudar de forma ao serem submetidas a substituições arbitrárias das variáveis gaussianas. As transformações de Lorentz não satisfazem essa condição.

A equação de campo de Einstein [Albert Einstein, *Sitzungsberichte der Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin), 844 (1915)] modificada para incluir a constante cosmológica Λ [Albert Einstein, *Sitzungsberichte der Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin), 142 (1917)], pode ser escrita como:

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{\kappa}{c^2}T_{ik}} \tag{27.23}$$

onde R_{ik} é o tensor espaço-tempo, g_{ik} são as componentes do tensor métrico e dependem do sistema de coordenadas usado e da unidade da coordenada temporal, T_{ik} é o tensor *momentum*-energia, que depende da distribuição e movimento das massas e do campo eletromagnético, Λ é a constante cosmológica, que pode ser nula, e

$$\boxed{\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^2}}$$

é a *constante gravitacional de Einstein*. Na equação (27.23), onde os dois índices i e k variam de 0 a 3 e $R = g^{ik} > R^{ik}$ é o traço, necessário para que o divergente covariante do lado esquerdo seja nulo, já que a divergência covariante do tensor energia-momentum é nula pela conservação de energia-momentum no limite da relatividade especial. Os dois primeiros termos à esquerda do sinal de igualdade representam a curvatura do espaço-tempo, o termo à direita as forças que atuam neste sistema e o terceiro termo à esquerda, da constante cosmológica Λ, representa a energia do vácuo, que, normalmente, é assumida nula.

Tendo em vista que corpos massivos curvam o espaço e as estrelas e galáxias estão em movimento, a curvatura do espaço está sempre em mutação e, portanto, não existe um sistema de referência estável em que todos os eventos podem ser descritos. Para pequenas regiões do espaço-tempo, o espaço pode ser considerado plano e as coordenadas lorentzianas. Nesse caso,

$$g_{ik} = \frac{dx^i}{dx^k}$$

Para um gás, o tensor energia-*momentum* em coordenadas curvilíneas pode ser escrito como:

$$T^{ik} = (\varepsilon + P)u^i u^k - Pg^{ik} \tag{27.24}$$

onde

$$\varepsilon = \rho c^2$$

é a densidade de energia da matéria, incluindo a energia de repouso, medida no sistema em repouso com a matéria, P é a pressão isotrópica, e

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

é a quadrivelocidade do gás.

Por construção, o tensor energia-*momentum* tem divergente covariante nulo. Esta é uma lei fundamental de geometria:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

Na relatividade especial, esse fato leva à conservação de energia e *momentum*, mas na relatividade geral esta condição somente assegura que a matéria e os campos gravitacionais (curvatura do espaço) trocam energia.

A equação (27.23) pode ser escrita como:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \Lambda g_{ik} + \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)T_{ik} \tag{27.25}$$

Embora simples em aparência, a equação de campo de Einstein é extremamente complexa pelo carácter não-linear com que o espaço e a matéria atuam um sobre o outro.

A equação da geodésica (*world line*) de uma partícula pode ser definida em termos do seu *tempo próprio* τ e da sua quadrivelocidade $\mathbf{u}$ como:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\,\mathbf{u} = 0 \tag{27.26}$$

Escolhendo-se um sistema de coordenadas tal que:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

podemos escrever os componentes da equação (27.26) como:

$$0 = \frac{D(dx^i)/d\tau}{d\tau} = \frac{d(dx^i)/d\tau}{d\tau} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0 \tag{27.27}$$

onde Γ^i_{kl} são os símbolos de Christoffel [Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)], se as coordenadas formam uma base:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right)$$

Note que, na equação (27.27), as componentes da "derivada" $(D/d\tau)$ precisam ser corrigidas pelos termos proporcionais aos símbolos de Christoffel porque as coordenadas generalizadas de Gauss podem variar rapidamente, levando a mudanças nas componentes de um vetor mesmo que o vetor não varie.

Ou seja, a equação em coordenadas curvilíneas que define a linha geodésica (linha que seguirá uma partícula livre) conectando dois pontos no espaço-tempo é dada por:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

que pode ser resolvida especificando-se os valores iniciais de x^i e $dx^i/d\tau$ para $\tau = \tau_0$.

Para descrever completamente um espaço-tempo curvo, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que obteve seu doutorado sob a supervisão de Gauss, demonstrou que é preciso de um tensor de ordem 4:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

chamado de tensor de curvatura de Riemann. Com esse tensor de quarta ordem, podemos construir um tensor de segunda ordem por contração:

$$R_{km} = R^i_{klm} g^l_i = R^i_{kim}$$

onde índices repetidos significam soma, pela convenção da soma de Einstein. Esse tensor de segunda ordem é chamado de tensor Ricci [Georgorio Ricci-Curbastro (1853-1925)], que, contraído, nos dá a curvatura escalar do espaço-tempo:

$$R = R_{km} g^{km}$$

A densidade de massa-energia, medida por um observador de quadrivelocidade $\mathbf{u}$ é dada por:

$$\varepsilon = \rho c^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = u^i T_{ij} u^j$$

27.12.4 Levantando e baixando índices

Da mesma forma que os componentes de um vetor mudam quando mudamos a base do espaço vetorial, os componentes de um tensor também mudam sob transformações de base. Os índices de um tensor, superiores (contravariante) ou inferiores (covariantes) descrevem como ele se transforma com uma mudança de base. Se um índice de um tensor se transforma como um vetor com o inverso da transformação de base (por exemplo, a posição e a velocidade variam de forma oposta ao da nova base) ele é dito contravariante e é denotado com um índice superior. Um índice que se transforma com a transformação própria base é chamado covariante e é indicado com um índice inferior.

Nas equações anteriores, algumas vezes aparece a componente *covariante* de Lorentz x_i e, outras vezes, a componente *contravariante* x^i. A relação entre elas é:

$$x^i = g^{ij} x_j$$

sendo que

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

e

$$g^{ij} = g_{ij}$$

27.12.5 Cosmologia na Relatividade Geral

A observação de que o Universo é homogêneo e isotrópico, e que está em expansão segundo a lei de Hubble, produz condições suficientes para que a Teoria da Relatividade Geral prediga concretamente a topologia e a evolução do Universo.

Para um sistema isotrópico e homogêneo, podemos escrever as coordenadas em um sistema esférico e considerar somente a coordenada radial, que chamaremos de r, distância média entre as galáxias, e a coordenada temporal, t. Pode-se demonstrar que a componente i=0, k=0 ou i=t, k=t do tensor de Einstein G_{ij}:

$$\boxed{G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R}$$

é dada por:

$$G_{00} \equiv R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = - \left(R_{12}^{12} + R_{23}^{23} + R_{31}^{31} \right)$$

A condição de homogeneidade implica que a métrica deve ser homogênea. Para uma esfera de raio r, em três dimensões, uma geodésica é dada por:

$$ds^2 = r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\phi^2 \right)$$

Para uma métrica de Friedmann [Aleksandr Aleksandrovich Friedmann (1888-1925)], onde para cada valor de t o espaço-tempo representa um hiperesfera quadridimensional de circunferência própria C, e o *locus* $r \operatorname{sen} \chi =$ constante define esferas de área A, temos:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - r(t) \left[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi \, \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right]$$

A circunferência própria (C) é dada por:

$$C \equiv \int_0^{2\pi} r(t) d\phi = 2\pi r(t)$$

a área da superfície (A):

$$A \equiv \int_0^{\pi} r(t) d\theta \int_0^{2\pi} r(t) \operatorname{sen} \theta \, d\phi = 4\pi r^2(t)$$

e o volume (V) da quadriesfera:

$$V \equiv \int_0^{\pi} r(t) d\chi \int_0^{\pi} r(t) \operatorname{sen} \chi \, d\theta \int_0^{2\pi} r(t) \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \, d\phi = 2\pi r^3(t)$$

Nesse caso,

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3r^{-2} \left(c^2 + \dot{r}^2 \right)$$

A equação (27.25), com $\Lambda = 0$, se reduz a:

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho = -\frac{c^2}{r^2} \tag{27.28}$$

já que, pela equação (27.24):

$$T_{00} = \left(\rho c^2 + P \right) u_0 u_0 - P g_{00} = \rho c^2$$

Como o volume total desse Universo fechado é $2\pi r^3$, identificando M como a massa total em prótons, nêutrons, elétrons, etc.,

$$\rho_m = \frac{M}{2\pi r^3}$$

e a equação (27.28) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{GM}{\pi r} = -\frac{1}{2} c^2 \tag{27.29}$$

Fazendo a mudança para variáveis adimensionais

$$\xi = \frac{3\pi c^2}{4GM} r$$

$$\tau = \frac{3\pi c^3}{4GM} t$$

a equação (27.29) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{\xi} = -1$$

que nós já resolvemos com a solução da equação (27.14) para o caso do Universo fechado. A densidade total é dada por:

$$\rho = \rho_{\mathrm{mat},0} \frac{r_0^3}{r^3} + \rho_{\mathrm{rad},0} \frac{r_0^4}{r^4}$$

Quando o Universo está dominado por matéria,

$$r = \frac{r_{\max}}{2} \left(1 - \cos \eta \right)$$

$$t = \frac{r_{\max}}{2c}\left(\eta - \operatorname{sen}\eta\right)$$

onde

$$r_{\max} = \frac{8\pi}{3c^2} r_0^3 \rho_{\mathrm{mat},0}$$

e como:

$$H^{-1} \equiv \frac{a}{da/dt} = \frac{a^2}{da/d\eta}$$

$$H^{-1} = \frac{r_{\max}}{2}\frac{(1-\cos\eta)^2}{\operatorname{sen}\eta}$$

Quando o Universo era dominado pela radiação:

$$r = r_* \operatorname{sen}\eta$$

$$t = \frac{r_*}{c}\left(1 - \cos\eta\right)$$

onde

$$r_* = \sqrt{\frac{8\pi}{3c^2} r_0^4 \rho_{\mathrm{rad},0}}$$

e

$$H^{-1} = r_* \frac{\operatorname{sen}^2\eta}{\cos\eta}$$

Podemos expandir a equação (27.28) para r pequeno em:

$$r\dot{r} = \left(\frac{8\pi G\rho_{rad,0}}{3}\right)^{1/2} r_0^2$$

e integrar, assumindo $r = 0$ para $t = 0$,

$$\frac{r^2}{2} = \left(\frac{8\pi G\rho_{rad,0}}{3}\right)^{1/2} r_0^2 t$$

ou seja,

$$r \propto t^{1/2}, \quad \text{para } \rho \simeq \rho_{\mathrm{rad}}$$

27.12.6 Evolução Térmica após o Big Bang

Consideremos a conservação de energia para um volume V; a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$dE + PdV = 0$$

onde P é a pressão e E é a densidade de matéria–energia no volume V, $E = \rho c^2$. Considerando $V \propto r^3(t)$,

$$\frac{dE}{dt} + P\frac{dV}{dt} = 0$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho c^2 r^3\right) + P\frac{dr^3}{dt} = 0$$
$$c^2 r^3 \dot{\rho} + 3\rho c^2 r^2 \dot{r} + 3Pr^2\dot{r} = 0$$

de modo que

$$\dot{\rho} = -3\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\frac{\dot{r}}{r}$$

Identificando $\dot{r}/r$ como a constante de Hubble, obtemos

$$\dot{\rho} = -3\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)H$$

Se assumirmos um Universo dominado por matéria mas que as partículas de matéria não interagem entre si, $P = 0$,

$$\dot{\rho} = -3\rho H$$

Para uma geometria plana e constante cosmológica $\Lambda = 0$, já deduzimos que a constante de Hubble será dada por

$$H = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

de modo que

$$\dot{\rho} = -3\rho\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja

$$\rho^{-\frac{3}{2}}\dot{\rho} = -\sqrt{24\pi G}$$

que pode ser integrado em relação ao tempo

$$2\rho^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{24\pi G}\, t$$

ou seja,

$$\rho = \left(6\pi G t^2\right)^{-1}$$

para um Universo dominado por matéria mas com pressão nula.

Para um Universo dominado por radiação,

$$P = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}\rho c^2$$

a equação 27.12.6 se transforma em

$$\dot{\rho} = -3\left(\rho - \frac{1}{3}\rho\right)H = -4H\rho = -4\left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\rho$$

de modo que

$$\rho^{-\frac{3}{2}}\dot{\rho} = -\sqrt{\frac{128\pi G}{3}}$$

que pode ser integrado em relação ao tempo

$$2\rho^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{128\pi G}{3}}\,t$$

ou seja,

$$\rho_{\rm rad} = \frac{3}{32\pi G t^2}$$

No início do Universo ele era dominado pela radiação e esta radiação era térmica, de modo que, independente de se o Universo é fechado ou aberto, a densidade de massa das partículas relativísticas (fótons, neutrinos, grávitons, ...) seguia a relação:

$$\rho_{\rm rel} = \frac{3}{32\pi G t^2}$$

Se os fótons fossem os únicos componentes relativísticos de massa–energia presentes, poderíamos escrever

$$\rho_{\rm rel} = \rho_{\rm rad} = \frac{aT^4}{c^2}$$

onde a é a constante de densidade de radiação de Stefan-Boltzmann, já que a densidade de energia para um corpo negro de temperatura T é dada por $u = aT^4$, e como $E = mc^2$, $\rho_{\rm rad} = u/c^2$. A densidade atual de energia em forma de radiação é diretamente obtida usando-se a temperatura da radiação cósmica do fundo do Universo, atualmente 2,73 K, obtendo-se $\rho_{\rm rad,atual} = 4,5 \times 10^{-31}$ kg/m^3. Esta densidade é muito menor que a densidade de matéria luminosa, $\rho_{\rm lum,atual} \simeq 10^{-29}$ kg/m^3, de modo que vivemos em um Universo dominado pela matéria.

Entretanto, a altas temperaturas, a produção de pares de partículas–antipartículas ocorre. Se escrevermos então que

$$\rho_{\rm rel} = q\rho_{\rm rad} = q\frac{aT^4}{c^2}$$

onde q é um número inteiro maior do que um dependente da temperatura, já que a produção de pares depende da temperatura, podemos escrever

$$\boxed{T = \frac{1}{q^{1/4}}\left(\frac{3c^2}{32\pi Ga}\right)^{1/4} t^{-\frac{1}{2}}}$$

Esta equação nos diz que $T = 10^{12}$ K($kT = 86,25$ MeV) para t=10^{-4} s e $T = 10^{10}$ K ($kT = 862,5$ keV) para t=1 s e $T = 7 \times 10^8$ K ($kT = 64$ keV) para t=180 s. Comparando com a energia de repouso ($E = mc^2$) do próton, de 931 MeV, e do eletron, de 511 keV, vemos que para t$\leq 10^{-4}$ s, a criação e destruição de pares de bárions–antibárions está em equilíbrio termodinâmico com a radiação ambiente.

27.12.7 Métrica de Robertson-Walker

O físico-matemático americano Howard Percy Robertson (1894-1979) e o matemático inglês Arthur Geoffrey Walker (1909-), demonstraram, em 1935 e 1936, que a métrica mais geral que satisfaz a condição de homogeneidade e isotropia para a geometria do espaço-tempo é a chamada métrica de Robertson-Walker:

$$\boxed{ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2\right)\right]}$$

Essa métrica pode ser convertida para a forma de Friedmann, com um fator de renormalização. Para a métrica de Robertson-Walker, a componente (00) da equação de campo de Einstein se reduz a:

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho = -K\frac{c^2}{a^2}}$$

Como na equação (27.3), podemos identificar a *constante* de Hubble como:

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}$$

A trajetória de uma galáxia que se move junto com a expansão do Universo é dada por (r, θ, ϕ) =constante, enquanto que a trajetória de um fóton satisfaz $ds^2 = c^2dt^2 - d\ell^2 = 0$. Portanto, a distância ℓ que um fóton percorre afastando-se radialmente (θ e ϕ mantidos constantes) de uma fonte é governada pela equação diferencial:

$$a^2(t)\frac{(dr/dt)^2}{1-Kr^2} = \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 = c^2 \tag{27.30}$$

Logo os fótons sempre atravessam uma distância própria ℓ em um intervalo de tempo próprio $(t - t_0)$ à velocidade da luz c,

$$\ell = c(t - t_0)$$

Após ser emitido por uma fonte isotrópica, o fóton atravessa uma esfera de área $4\pi r^2(t)a^2(t)$ em um tempo t, mas essa área não é igual a $4\pi\ell^2$, pois depende do valor de k e de $a(t)$.

Por exemplo, para um Universo de Einstein-de Sitter, isto é, plano, K=0 e

$$a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

Se o fóton for emitido num tempo t_e, o desvio para o vermelho z na recepção será dado por:

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a(t)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{2/3}$$

A equação (27.30), para $K = 0$, se reduz a:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{a(t)}$$

de modo que

$$r(t_0) = \frac{3c}{a_0}t_0\left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right]$$

onde $4\pi a^2(t)r^2(t_0)$ é a área da esfera centrada na fonte e passando pelo tempo presente. Como $r(z) = a_0 r(t_0)$,

$$r(z) = \frac{2c}{H_0}\left[1 - (1+z)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

já que para o Universo plano $t_0 = (2/3)H_0^{-1}$. Tendo em vista que Universo plano é euclidiano, $r(z)$ é a distância no presente da fonte. A distância que o fóton atravessou desse que foi emitido é dada por:

$$\ell(z) = c(t_e - t_0) = \frac{2c}{3H_0}\left[1 - (1+z)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

e, portanto, uma fonte com alto valor de z está mais longe do que a distância atravessada pela luz.

Se a constante cosmológica não for nula, o Universo se torna dominado por uma densidade de energia do vácuo positiva, constante e não nula $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G$. A evolução da métrica neste caso logo se aproxima de

$$a(t) = a_0 \exp\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,(t - t_0)\right]$$

Enquanto a luz viaja da fonte ao observador, seu comprimento de onda se expande por um fator proporcional ao aumento de a(t).

Se atualmente Λ contribui com 70% da densidade de energia total em um universo plano (K=0), então o universo se tornará dominado por Λ em cerca de metade da idade atual.

Podemos expressar a idade em função do deslocamento para o vermelho $z = a_0/a(t)$, da razão da densidade de matéria para a densidade crítica, Ω_M, e da razão da densidade de energia do vácuo para a densidade crítica, Ω_Λ, como

$$t(z) = H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_M + \Omega_M x^{-1} + \Omega_\Lambda\,(x^2 - 1)}}$$

Se o universo for plano, $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ e a integral resulta em

$$t(z) = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left[\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}\,(1+z)^{-3}} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}\,(1+z)^{-3} + 1}\right]$$

No limite $\Omega_\Lambda \to 0$, recuperamos a relação entre a idade e o deslocamento para o vermelho de um universo plano normal:

$$t(z) = \frac{2}{3H_0\,(1+z)^{3/2}}$$

Definindo a pressão de cada componente como $P_i = w_i\rho_i$, $\nabla_\mu T^{\mu,\nu} = 0$ implica que a densidade será expressa como

$$\rho_i \propto a^{-n_i} = a^{-3(1+w_i)}$$

e o parametro de desaceleração

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \sum_i \frac{n_i - 2}{2}\Omega_i$$

e

$$q = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$$

para um universo dominado por matéria e constante cosmológica, já que $w_M = 0$, $w_{\rm rad} = 1/3$ e $w_\Lambda = -1$.

A radiação do fundo do Universo é normalmente decomposta em esféricos harmônicos

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{\ell,m} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

e o momentum de multipolo é dado por

$$C_\ell = < |a^2_{\ell,m}| >$$

relacionado à separação angular

$$\theta = \frac{180^o}{\ell}$$

O valor de ℓ do primeiro "pico Doppler", um aumento na potência devido a oscilações acústicas, é diretamente proporcional ao valor de $H^{-1}_{\rm recombinação}$, pois é a escala angular subentendida pelo raio de Hubble quando os fótons da radiação de fundo se originaram, na época da recombinação.

$$\ell_{\rm acústico} \simeq 220\,\Omega^{-\frac{1}{2}}$$

27.13 Recombinação

Intuitivamente, espera-se que quando a energia média de um fóton da radiação do fundo do Universo cai abaixo de 13,6 eV, a energia de ionização do hidrogênio, a maior parte do hidrogênio torna-se-se neutra. Podemos definir $z_{\rm rec}$ como o desvio para o vermelho (*redshift*) para o qual os elétrons e prótons *recombinam*, formando o hidrogênio neutro. O termo *recombinação*, usado por James Peebles, em 1950, é um pouco problemático, pois nessa época da evolução do Universo, os elétrons e prótons estavam se combinando pela primeira vez.

Na verdade, como veremos a seguir, a temperatura de recombinação é da ordem de 5 vezes menor do que a correspondente a 13,6 eV, porque o

espaço de fase dos elétrons livres é muito maior do que o espaço de fase dos elétrons ligados, o que faz com que os elétrons permaneçam livres por mais tempo.

Consideremos a reação

$$e^- + p^+ \rightleftharpoons H + \gamma$$

Em equilíbrio químico, temos:

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H + \mu_\gamma = m_H \tag{27.31}$$

já que o potencial químico dos fótons é nulo. Nessa equação, p representa o próton.

A equação de Saha [Megh Nad Saha (1893-1956)] é obtida combinando-se essa expressão com a função distribuição para as espécies em questão:

$$n(p) = \frac{g}{h^3}\left[\exp\left(\frac{E(p)-\mu}{kT}\right) \pm 1\right]^{-1}$$

onde p é o *momentum*, g é o fator de degenerescência, o sinal mais se aplica aos férmions, isto é, partículas que obedecem à distribuição de *momentum* de Fermi-Dirac, como os prótons e os elétrons, e o sinal menos é para os bósons, isto é, partículas que obedecem à distribuição de Bose-Einstein, como os fótons. A função distribuição é definida de forma que $n(p)d^3x\,d^3p$ é o número de partículas no elemento de volume $d^3x\,d^3p$ do espaço de fase. Como estamos interessados em energias próximas a 13,6 eV, os elétrons e os prótons são não-relativísticos, $(mc^2 - \mu) \gg kT$,

$$E(p) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Assumindo que as densidades eram não-degeneradas, a densidade de partículas pode ser escrita como a distribuição de Boltzmann:

$$n = \int_0^\infty n(p)\, d^3p = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} e^{\frac{\mu - mc^2}{kT}} dp$$

Integrando, obtemos:

$$\mu = kT \ln\left(\frac{n}{g n_Q}\right) + mc^2 \tag{27.32}$$

onde a densidade quântica n_Q é definida como:

$$n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

Colocando-se o valor do potencial químico (27.32) na equação do equilíbrio químico (27.31), obtemos:

$$kT\left[\ln\left(\frac{n_e}{g_e n_{Qe}}\right)+\ln\left(\frac{n_p}{g_p n_{Qp}}\right)-\ln\left(\frac{n_H}{g_H n_{QH}}\right)\right]=\left(m_H-m_p-m_e\right)c^2 \tag{27.33}$$

Nessa equação, voltamos a usar p para representar um próton, e não o *momentum*. O termo da direita da equação (27.33) é a energia de ligação do hidrogênio, $\Delta E = 13,6$ eV. Os fatores de degenerescência são $g_e = g_p = 2$ e $g_H = 4$. Assumindo $m_p \approx m_H$ nos valores de n_Q, obtemos a equação de Saha para a reação:

$$\boxed{\frac{n_p n_e}{n_H}=\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}}$$

Definindo a fração de ionização x por $n_e = n_p = xn$, onde a densidade total $n = n_e + n_p + n_H$, obtemos uma equação transcendental para x em termos do desvio para o vermelho z substituindo-se $T = 2,726\ K(1+z)$ e $n = n_0(1+z)^3$. O desvio para o vermelho para a época de recombinação $x = 1/2$ pode ser obtido usando o valor da densidade de partículas no presente,

$$n_0 \simeq \frac{\rho_0}{m_H}$$

já que o hidrogênio compõe aproximadamente 75% da massa bariônica do Universo, obtemos

$$z_{\text{rec}} \approx 1360$$

A temperatura, nessa época, era de

$$T = T_0(1+z) \approx 3700\ \text{K} \longrightarrow kT \approx 3\ \text{eV}$$

muito menor do que 13,6 eV. Podemos utilizar uma massa média de bárions um pouco mais precisa, pois quase a totalidade dos 25% restantes de massa em bárions está na forma de átomos de hélio, de modo que:

$$\overline{m}_b \simeq 0,75 m_H + 0,25 m_{He} \simeq 0,75 m_p + 0,25 \times 4 m_p = 1,75 m_p$$

Logo após a recombinação temos a época do desacoplamento da radiação com a matéria, uma vez que quando os elétrons e prótons combinam-se, o Universo se torna muito menos opaco. Os elétrons ligados só são capazes de interagir com os fótons com energia discretas, correspondentes aos níveis de

excitação, ou com energias maiores do que a energia de ionização, mas, como vimos, a energia média dos elétrons é muito menor do que esta energia. O livre caminho médio dos fótons torna-se, então, muito grande, já que eles viajam grandes distâncias sem interagir com a matéria. Dizemos, então, que a radiação está desacoplada da matéria.

Capítulo 28

Telescópios

No século VII, os árabes instalaram observatórios em Bagdá, Cairo, Damasco e outros centros importantes e construíram quadrantes e torqueti, idealizados por Ptolomeu, assim como ampulhetas, astrolábios e esferas armilares. Quando conquistaram a Espanha, no século XI, os árabes estabeleceram observatórios nesses novos centros, de modo que a astronomia passou para a Europa sem interrupção.

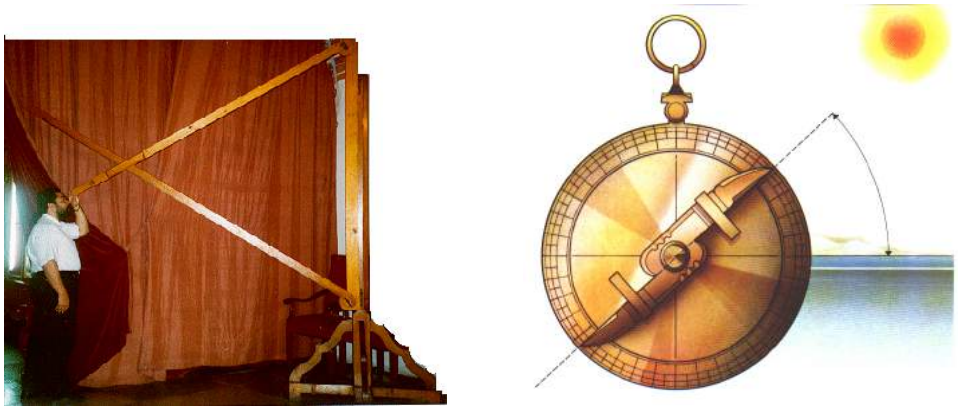


Figura 28.1: Triquetrum e Astrolábio.

Em 1571 foi publicado o livro do matemático inglês Leonard Digges (∼1520-1559) *Geometricall Practise, name Pantometria*, descrevendo o teodolito. Digges também descreveu um sistema com uma lente de longa distância focal e outra de curta distância focal em 1550, que pode ser interpretado como um precursor do telescópio.

Galileo começou suas observações telescópicas em 1610, usando um te-

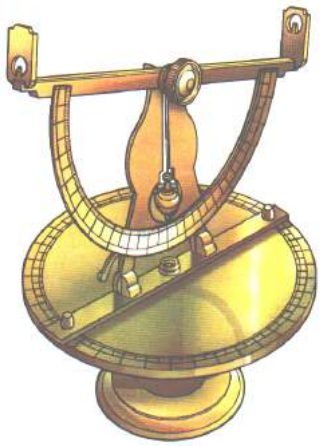


Figura 28.2: Teodolito de Leonard Digges, que permite medidas angulares precisas, a partir de um ponto de referência.

lescópio construído por ele mesmo. No entanto, não cabe a Galileo o crédito da invenção do telescópio. Lentes rudimentares escavadas na ilha de Creta datam de 2000 a.C. Lentes e óculos já eram usados desde cerca de 1350; em 1451, o bispo e matemático alemão Nicolás de Cusa (1401-1464) inventou o monóculo com lente convexa, e em 1590 o holandês Zacharias Janssen inventou o microscópio. A maioria dos historiadores aceita que o primeiro telescópio foi construído pelo holandês Hans Lippershey (1570-1619), em 1608, na cidade de Middlesburg, em Zeeland, Holanda. Galileo Galilei (1569-1642) soube desse instrumento em 1609 e, em 1610, sem ter visto o telescópio de Lippershey, construiu o seu próprio, com aumento de 3 vezes. Em seguida, ele construiu outros instrumentos, o melhor deles, com 30 vezes de aumento.

28.1 Refrator ou refletor

O telescópio de Galileo, construído em 1609-1610, era composto de uma lente convexa e uma lenta côncava. Johannes Kepler (1571-1630), no seu livro *Dioptrice* publicado em 1611, explicou que seria melhor construir um telescópio com duas lentes convexas, como se usa atualmente. Em 1668, Isaac Newton (1643-1727) construiu um telescópio refletor (catóptrico, do grego *kátoptron*, espelho), usado atualmente em todos os observatórios pro-



Figura 28.3: Réplica do telescópio de Galileo de 3 cm de diâmetro.

fissionais, com um espelho curvo (parabolóide ou hiperbolóide) em vez de uma lente, usada nos telescópios refratores (dióptrico) de Galileo e Kepler.

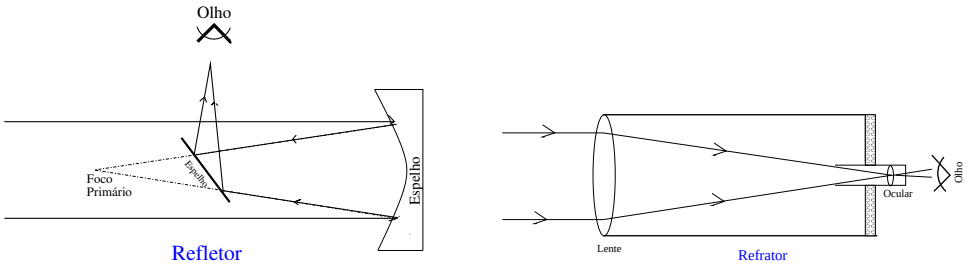


Figura 28.4: Esquema de Refletor e Refrator.

Newton argumentou que a luz branca era na verdade uma mistura de diferentes tipos de raios que eram refratados em ângulos ligeiramente diferentes, e que cada tipo de raio diferente produz uma cor espectral diferente. Newton concluiu, erroneamente, que telescópios usando lentes refratoras sofreriam sempre de aberração cromática.

$$\text{aberração} \propto \frac{F}{D^2}$$

onde F é a distância focal e D o diâmetro da objetiva. Ele, então, propôs e construiu um telescópio refletor, com 15 cm de comprimento. Newton colocou um espelho plano no tubo, a 45°, refletindo a imagem para uma ocular colocada no lado. A ocular é uma lente magnificadora colocada no foco do telescópio e usada para olhar a imagem. O telescópio de Newton gerava imagens nove vezes maior do que um refrator quatro vezes mais longo. Os espelhos esféricos construídos naquela época produziam imagens imperfeitas, com aberração esférica.



Figura 28.5: Telescópio de Newton.

Guillaume Cassegrain (1625-1712), também referido como Jacques Cassegrain, propôs, em 1672, o uso de um espelho convexo secundário para convergir a luz para um buraco no centro do espelho principal, mas espelhos curvos não podiam ser feitos naquela época. A maioria dos telescópios modernos tem foco Cassegrain. A distância entre o espelho secundário e o primário, aumentando a distância focal, age como uma telefoto, permitindo grande escala de imagem.

Em 1731, o inglês John Hadley (1682-1744) inventou o sextante que olha o horizonte e uma estrela simultaneamente através de uma pequena luneta, para medir sua altura. Em 1757, o imigrante francês na Inglaterra John Dolland (1706-1761) patenteou a lente acromática, que combina duas lentes de vidros diferentes para focar luz com diferentes comprimentos de onda no mesmo ponto focal, embora o matemático inglês Chester Moor Hall (1703-1771) já tivesse, independentemente, construído o primeiro telescópio com lentes acromáticas em 1733.

A maior lente que se pode construir tem aproximadamente 1 metro de diâmetro, pesa meia tonelada, e deforma-se devido ao seu próprio peso, já que não pode ser apoiada por trás, como um espelho. Alvan Clark (1804-1887) completou a construção do telescópio refrator de 40 polegadas de Yerkes, em Chicago, em 1897.

A sensibilidade de um telescópio aumenta com o tamanho da área coletora e, portanto, com o quadrado do diâmetro, de modo que dobrando o seu tamanho, podemos detectar objetos quatro vezes mais fracos. Os telescópios na Terra podem enxergar objetos da ordem de 1 segundo de arco ou maiores (1 segundo de arco corresponde a uma moeda de 25 centavos a 50 km de

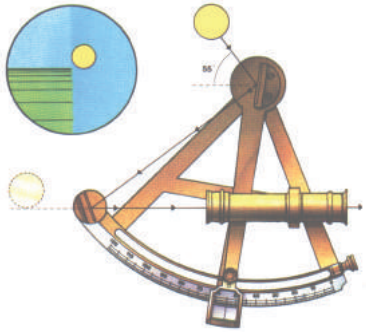


Figura 28.6: O sextante de Hadley. O observador vê a imagem do horizonte e da estrela simultaneamente, como no desenho do círculo superior esquerdo, e a escala graduada mede o ângulo de altura.

distância!). Com ótica ativa, que modifica rapidamente a forma dos espelhos para compensar a variação causada pela atmosfera da Terra, esse limite está decrescendo para aproximadamente 0,3 segundos de arco.

Em 1948, foi inaugurado o telescópio Hale, de Monte Palomar, na Califórnia, com um espelho primário de 200 polegadas (5 metros) de diâmetro. Este foi o maior telescópio do mundo por três décadas. Desde 1993, o maior telescópio é o Keck, no Havaí, com 10 metros de diâmetro. Na verdade, existem atualmente dois telescópios Keck idênticos, o Keck I e o Keck II. Seus espelhos, de 10 metros cada, são formados por mosaicos de espelhos menores. Os maiores telescópios de espelhos únicos (monolíticos) são o VLT



Figura 28.7: Telescópio Keck I, no Hawai'i, com 10 m de diâmetro.

do European Southern Observatory, no Chile, o Gemini Norte e o Subaru, no Havaí, todos com 8,2 metros de diâmetro de espelho principal.

Os telescópios modernos têm focos Ritchey-Chrétien, propostos por Ge-

orge Ritchey (1864-1945) e Henri Chrétien (1879-1956), onde o pequeno espelho secundário do Cassegrain é substituído por outro de forma mais complexa, que permite a correção da imagem para um campo maior. Na verdade, nesse sistema, tanto o primário quanto o secundário são hiperbolóides.

Para grandes campos, os telescópios mais utilizados são os catadriópticos (espelho mais lente corretora) do tipo Schmidt-Cassegrain, desenvolvido em 1934 pelo estoniano Bernhardt Voldemar Schmidt (1879-1935), ou Maksutov, desenvolvido pelo russo Dmitri Maksutov (1896-1964). Os Maksutovs são muito parecidos com os Schmidts, mas têm placa de correção curvada, permitindo maior campo e maior contraste.

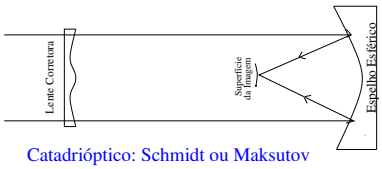


Figura 28.8: Esquema de um telescópio catadrióptico.

Muitos observatórios têm, ainda, um foco Coudé (cotovelo, em francês) em seus telescópios equatoriais, em que um conjunto de espelhos leva a luz para uma posição de grande distância focal e, portanto, de grande aumento (magnificação, escala de campo). Normalmente, os espelhos direcionam a luz através de um furo no eixo polar do telescópio. Essa configuração foi desenvolvida, em 1880, no Observatoire de Paris por Maurice Loewy (1833-1907). Para montagem alto-azimutal, a luz pode ser direcionada ao longo do eixo de altura para um dos dois focos Nasmyth [James Nasmyth (1808-1890)].

28.2 Radiotelescópio

Em 1899, o engenheiro elétrico italiano Guglielmo Marchese Marconi (1874-1937) desenvolveu um sistema de transmissão de ondas pelo ar para longas distâncias, o rádio, e fez uma transmissão sobre o Canal da Mancha, que separa a França da Inglaterra e, em 1901, uma transmissão que atravessou o Atlântico, enviando sinais de código Morse. Somente em 1906 ele conseguiu transmitir a voz humana. O padre brasileiro Roberto Landell de Moura (1861-1928) já havia transmitido a voz humana, em 1893, e obtido a patente do transmissor e receptor no Brasil, em 1901, e nos Estados Unidos, em 1904.



Figura 28.9: O telescópio de James Nasmyth, com o próprio na lateral.

Durante a Primeira Guerra Mundial, o desenvolvimento das transmissões de rádio se acentuou, para permitir a comunicação entre diferentes unidades de um exército, e, posteriormente, entre um avião e a base, e entre dois aviões.

Em 1932, o americano Karl Guthe Jansky (1905-1950), dos Laboratórios Bell, realizou as primeiras observações de emissão de rádio do cosmos, quando estudava as perturbações causadas pelas tempestades nas ondas de rádio. Ele estava fazendo observações na freqüência de 20,5 MHz ($\lambda = 14,6\,\mathrm{m}$) e descobriu uma emissão de origem desconhecida, que variava com um período de 24 horas. Somente mais tarde demonstrou-se que a fonte dessa radiação estava no centro da Via Láctea.

No fim dos anos 1930, Grote Reber (1911-2002) iniciou observações sistemáticas com uma antena parabolóide de 9,5 m. Hoje em dia, a radioastronomia se extende desde freqüências de poucos megahertz ($\lambda \simeq 100\,\mathrm{m}$) até 300 GHz ($\lambda \simeq 1\,\mathrm{mm}$).

Em 1963, entrou em operação o maior radiotelescópio monolítico até hoje, em Arecibo, Porto Rico, com 300 metros de diâmetro. Em 1980, entrou em operação o VLA (Very Large Array), um conjunto de radiotelescópios em Socorro, Novo México, mostrado na Figura 28.10.



Figura 28.10: Conjunto de radiotelescópios do VLA: Very Large Array.

28.3 Comprando um telescópio

Muitas pessoas, vendo as belas imagens astronômicas publicadas nas revistas e apresentadas na TV, sentem vontade de comprar um telescópio para ver esses objetos. A vista por telescópios pequenos é geralmente um grande desapontamento. As fotos publicadas são obtidas com telescópios de até 10 metros de diâmetro, custando centenas de milhões de dólares, ou pelo telescópio espacial Hubble, um telescópio de 2,5 metros de diâmetro em órbita da Terra, que custou mais de 1,5 bilhão de dólares, e que, desde 1993, quando sua ótica foi corrigida, vem produzindo imagens espetaculares desde planetas do sistema solar até as galáxias mais longínquas até hoje observadas.

Os telescópios pequenos, por receberem pouca luz, apresentam imagens acinzentadas, com difícil distinção de cores, exceto para os planetas mais brilhantes. Outra grande dificuldade de usar um telescópio é a de encontrar os objetos celestes, que são pequenos, no céu imenso. É preciso aprender antes a usar cartas celestes e a localizar as constelações no céu a olho nu.

O melhor telescópio para um iniciante é um Newtoniano com montagem Dobsoniana, em honra ao astrônomo amador americano nascido na China John Lowry Dobson (1915-), com 6 polegadas (15 cm) de diâmetro. Esse telescópio, por ser alto-azimutal, é muito fácil de montar e usar. Infelizmente, não existem fabricantes de porte no Brasil, e um telescópio desse

tipo custa da ordem de 400 dólares, nos Estados Unidos. Os impostos de importação e o transporte elevam o custo em mais de 60%. Os planos para a construção de um telescópio como esse podem ser acessados em http://tie.jpl.nasa.gov/tie/dobson/index.html.



Figura 28.11: Telescópio Dobsoniano.

Uma das dificuldades dos telescópios em geral é seu tamanho. Um telescópio muito pequeno (abaixo de 6 cm de diâmetro) tem muito pouca utilidade na astronomia, exceto para olhar a Lua, e um telescópio maior tem problema de locomoção; um telescópio amador precisa ser móvel, para que se possa transportá-lo para um local escuro adequado. Mesmo um Dobsoniano de 6 polegadas, mencionado anteriormente, mede 1,2 metros de comprimento, e embora seja leve, já ocupa boa parte do assento de um carro.

Um telescópio de menor tamanho físico, mas que permite um aumento suficiente para observar os anéis de Saturno, pode ser um Maksutov-Cassegrain ou um Schmidt-Cassegrain de 8 a 12 cm de diâmetro, ou um refletor Newtoniano apocromático (acromático) de 10 cm ou maior, mas todos esses custam acima de 600 dólares, nos Estados Unidos, com tripé. O termo apocromático indica que as lentes são feitas de vidros especiais que eliminam as franjas coloridas, artificiais, em volta dos objetos brilhantes, permitindo que cores diferentes sejam focadas no mesmo ponto. Note que os Newtonianos invertem a imagem e, portanto, não são adequados para olhar objetos na



Figura 28.12: Telescópio Schmidt-Cassegrain

Terra. É importantíssimo ressaltar que não se deve observar o Sol através de nenhum telescópio ou binóculo, pois isso causa lesão irreversível na retina do olho, sem qualquer dor! Existem filtros solares especiais, que reduzem a luz do Sol em milhões de vezes, tornando a observação segura, mas o mais indicado é sempre a observação da *projeção* da imagem do Sol.

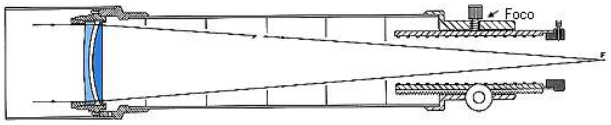


Figura 28.13: Telescópio apocromático.

Um telescópio refrator usa um par de lentes para produzir a imagem, enquanto um telescópio refletor usa um espelho primário. Para telescópios pequenos, um refrator apocromático produz uma imagem mais nítida do que um refletor de mesmo tamanho. Mas o custo de um refletor é menor, e normalmente se obtém um refletor maior e, portanto, mais luminoso, pelo mesmo preço que um refrator menor.

Um item fundamental em qualquer telescópio é o tripé, que precisa ser

alto o suficiente para uma visão confortável e bastante rígido para não vibrar, o que causaria movimento da imagem. Note também que os astros se movem no céu, devido à rotação da Terra, além do movimento próprio de cometas, satélites e planetas. Quanto maior for o telescópio, menor será o campo de visão, isto é, menor a parte do céu que está visível ao mesmo tempo na ocular e, portanto, menor o tempo em que um astro permanecerá no campo. Para um aumento razoável, os astros saem do campo em poucos minutos. Para compensar esrste movimento, é preciso recentrar o objeto, manualmente ou por movimento motorizado. Se a montagem for alto-azimutal, a recentragem terá que ser feita em dois eixos, utilizando dois controles diferentes. Se a montagem for equatorial, a correção é só em um eixo, mas, nesse caso, o alinhamento do telescópio com o pólo antes da observação é mais difícil.

Para utilizar o telescópio para fotografia é necessário que este seja motorizado, para permitir longas exposições, e os Dobsonianos não são adequados. O custo de um telescópio motorizado, com montagem rígida suficiente para evitar vibração, e com adaptadores para a câmara, será acima de 2500 dólares, nos Estados Unidos.

Note que, além do telescópio em si, o sistema deve conter um telescópio buscador 6x30, isto é, 6 vezes de aumento e 30 mm de diâmetro, com lente Kellner [Carl Kellner (1826-1855)] (K), acromática modificada (MA) ou Plössl [Georg Simon Plössl (1794-1868)], e montado com seis pontos de apoio. Uma ocular Kellner combina uma lente acromática com uma lente simples, e, normalmente, tem um campo de 40° a 50°. Uma Plössl usa duas lentes acromáticas e tem um campo um pouco maior. Mais recentes são as Erfle [Heinrich Valentin Erfle (1884-1923)], com seis ou sete componentes, e 60° a 70° de campo, e as Nagler [Albert Nagler (1935-)], com oito ou mais elementos, e campo de até 85°.

Note que todas as lentes devem ser revestidas (*coated*) com filmes que reduzam a reflexão. Uma lente normal reflete cerca de 5% da luz incidente por superfície, de modo que um sistema contendo digamos 5 lentes não revestidas perde cerca de 40% da luz incidente só por reflexão. Dióxido de silício e fluoreto de lítio são dois materiais usados para revestir as lentes, minimizando a reflexão.

Outro fator importante em uma ocular é a distância entre a superfície da última lente e o foco (imagem da ocular), chamada de *eye relief*, que precisa ser entre 6 e 10 milímetros, para uma visão confortável.

28.3.1 Características óticas dos telescópios

Os telescópios são caracterizados, geralmente, pelo *diâmetro* da objetiva (o espelho ou a lente principal) e por sua *razão focal* (f/n), onde o número n indica a razão entre a distância focal e o diâmetro da objetiva. Por exemplo: um telescópio de 10 cm de diâmetro e razão focal f/9, tem distância focal de 90 cm.

Essas especifificações nos permitem avaliar o *poder de captar luz* do telescópio, a sua *luminosidade* e o seu *aumento*.

O aumento não é uma propriedade do telescópio, mas da ocular, a *lente* colocada na extremidade junto ao olho. Na verdade, a ocular é um conjunto de lentes.

O aumento do telescópio é igual à distância focal da objetiva dividida pela distância focal da ocular, ou seja

$$\text{aumento} = \frac{\text{distância focal da objetiva}}{\text{distância focal da ocular}}$$

Normalmente, a ocular pode ser trocada, de forma a poder alterar o aumento do telescópio, usando oculares com diferentes distâncias focais. No telescópio do exemplo acima, se a ocular tem distância focal de 5 cm, seu aumento será de $\frac{90}{5} = 18$ vezes; se trocarmos a ocular por outra de 2 cm de distância focal, o aumento passa a ser de 45 vezes.

O melhor aumento para um telescópio ou binóculo é aquela que produz uma imagem de diâmetro da ordem de 5 mm, que é o tamanho *médio* da pupila de uma pessoa normal, após a adaptação ao escuro. O tamanho dessa imagem (pupila de saída) é dada dividindo-se a abertura do telescópio (lente de entrada no caso de refrator ou binóculo, e espelho primário no caso de refletor) pelo aumento. Por exemplo, um telescópio de 10 cm (100 mm) de diâmetro, com uma ocular com 50X de aumento, produzirá uma imagem total de 2 mm. Com um aumento de 20X, produzirá uma imagem de 5 mm e, portanto, utilizará uma área maior da retina para a imagem, produzindo uma imagem melhor. O aumento de 20X é a mínima necessária para distinguir os anéis de Saturno, o que indica que uma imagem de 1 mm é produzida por um telescópio ou binóculo de 20 mm de diâmetro. Note que, se a imagem for maior do que 5 mm, para uma pessoa com dilatação máxima da pupila de 5 mm, a luz estará caindo fora do olho e, portanto, não será detectada.

Se o céu não estiver completamente escuro, passando de baixo para alto aumento, é possível enxergar objetos mais fracos, já que o aumento reduz o brilho superficial do campo inteiro, espalhando a luz por uma área maior,

o que reduz o brilho do céu sem afetar o brilho *total* dos objetos menores, discretos.

A luminosidade do telescópio é especificada pela sua razão focal. Quanto menor o n, menor é a distância focal da objetiva, e menor será o aumento, mas maior será a luminosidade.

O poder de captar luz do telescópio depende apenas do tamanho da área coletora, sendo proporcional ao quadrado do diâmetro da objetiva. O telescópio do exemplo acima, comparado com a pupila humana, tem diâmetro 20 vezes maior e capta $20^2 = 400$ vezes mais luz, permitindo enxergar objetos 400 vezes mais fracos do que se pode ver a olho nu.

28.3.2 Binóculos

Uma alternativa recomendada é o uso de binóculos. O preço é muito mais acessível, de cerca de 100 dólares, e o uso muito mais geral, além de ser totalmente transportável. O binóculo permite observar milhares de objetos celestes que não podem ser vistos a olho nu. Mesmo pequenos binóculos, como os de teatro, permitem a observação de astros inacessíveis a olho nu, mas os binóculos mais adequados para a astronomia seguem as regras de quanto maior a abertura, mais luminoso, e o aumento deve ser adequado para produzir uma imagem mais próxima de 5 mm possível.

Os binóculos são especificados por dois números, marcados no corpo do binóculo. Os mais adequados para a astronomia são os 7x42, 8x50 e 10x50. O primeiro número indica o aumento, e o segundo o tamanho da lente de entrada, em milímetros. Dividindo-se o segundo pelo primeiro, obtém-se o tamanho da imagem de saída.

A maior dificuldade para o uso de binóculos na Astronomia se deve à instabilidade das mãos, que faz a imagem mover-se constantemente. Para minimizar esse efeito, recomenda-se o uso de tripés com adaptadores para binóculos, ou, pelo menos, apoiar os braços nos braços de uma cadeira, ou em uma base qualquer. Essa dificuldade limita o aumento máximo em 10X, para binóculos sem apoio. Note que um binóculo típico com 10X abrange um campo de cerca de 5°, quase metade da área de um binóculo similar com aumento de 7X.

O limite de difração teórico de um telescópio é uma função inversa do tamanho do espelho primário, devido ao efeito da difração de Fraunhofer, que espalha a luz de um objeto puntual em um disco de Airy (o disco no limite de difração, Sir George Biddell Airy (1801-1892)].

$$\text{sen}\theta = 1,22\frac{\lambda}{D} \longrightarrow \theta \simeq 1,22\frac{\lambda}{D}$$

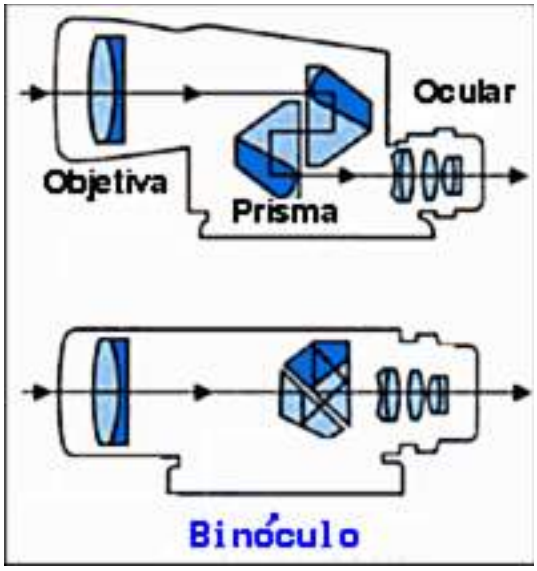


Figura 28.14: Esquema de um binóculo.

Dois objetos mais próximos que este disco parecem um só objeto.

A imagem produzida por um telescópio em geral não é ideal, isto é, não segue um disco de difração (de Airy), devido à turbulência atmosférica, degradando a resolução. A Função de Espalhamento Puntual (*Point Spread Function*, PSF) é a função que descreve a distribuição de luz produzida por uma imagem puntual, e sua largura mede a resolução real da imagem.

$$P(\vec{r}) = \frac{\pi D^2}{4\lambda^2}\left[\frac{2J_1(\pi D|\vec{r}|/\lambda)}{\pi D|\vec{r}|/\lambda)}\right]^2$$

onde $P(\vec{r})$ é a intensidade no ponto $\vec{r}$, J_1 é a função de Bessel de primeira ordem, λ o comprimento de onda e D o diâmetro do telescópio.

A luz uma fonte puntual passando através de uma fenda gera uma série de franjas de interferência. Como o padrão de difração é a transformada de Fourier da forma da fenda, a intensidade em um ponto da imagem é dada por

$$I_\theta = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(\pi d \operatorname{sen}\pi/\lambda)^2}{(\pi d \operatorname{sen}\pi/\lambda)}$$

onde θ é o ângulo normal a apartir da fenda, d é a largura da fenda, I_0 é a intensidade da fonte na normal e I_θ a intensidade em um ângulo θ. Para

uma abertura circular, a imagem é circular, com círculos concêntricos claros e escuros. O máximo central é conhecido como o disco de Airy. Considerando uma abertura de raio r iluminado por um feixe normal ao seu plano, em coordenadas cilíndricas θ, ϕ). A diferença no caminho, Δ, entre os raios difratados é dada por

$$\Delta = (r - \rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta$$

e a diferença de fase

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(r - \rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta$$

onde o elemento de área é

$$dA = \rho d\phi d\rho$$

de modo que a contribuição para o vetor elétrico da radiação no plano da imagem pela área elementar para um ângulo θ em relação à normal é proporcional a

$$\text{sen}\,[\omega t + 2\pi\lambda(r - \rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta]\rho d\phi d\rho$$

onde $\omega/2\pi$ é a freqüência da radiação, e o resultado final é obtido integrando-se sobre a abertura

$$\int_0^{2\pi}\int_0^r \text{sen}\left[\omega t + \left(\frac{2\pi r\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right) - \left(\frac{2\pi\rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\right]\rho d\rho d\phi$$

$$= \text{sen}\left[\omega t + \left(\frac{2\pi r\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\cos\left(\frac{2\pi\rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\right] d\rho d\phi$$

$$- \cos\left[\omega t + \left(\frac{2\pi r\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\,\text{sen}\left(\frac{2\pi\rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\right] d\rho d\phi$$

A segunda integral no lado direito é nula, como pode ser visto substituindo

$$s = \frac{2\pi\rho\cos\phi\,\text{sen}\,\theta}{\lambda}$$

de modo que

$$\cos\left[\omega t + \left(\frac{2\pi r\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\,\text{sen}\left(\frac{2\pi\rho\cos\phi)\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\right] d\rho d\phi$$

$$= \cos\left[\omega t + \left(\frac{2\pi r\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\int_0^r \rho\int_{s=2\pi\rho\text{sen}\,\theta/\lambda}^{s=2\pi\rho\text{sen}\,\theta/\lambda} \frac{-\text{sen}\,s}{[(4\pi^2\rho^2\text{sen}^2\theta/\lambda^2) - s^2]^{1/2}} ds d\phi$$

$$= 0$$

já que os limites inferiores e superiores da integração em relação a s são idênticos. Desta forma, a intensidade da imagem $I(\theta)$ é dada por

$$I(\theta) \propto \left[\text{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi r \text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\cos\left(\frac{2\pi\rho\cos\phi\text{sen}\,\theta}{\lambda}\right)d\rho d\phi\right]^2$$

$$\propto \frac{\pi^2 r^4}{m^2}\left[J_1(2m)\right]^2$$

28.4 Mínimos Quadrados

Em 1809, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou um artigo no *Werke*, 4, 1-93, demonstrando que a melhor maneira de determinar um parâmetro desconhecido de uma equação de condições é minimizando a soma dos quadrados dos resíduos, mais tarde chamado de Mínimos Quadrados por Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Em abril de 1810, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) apresenta no Memoir da Academia de Paris, a generalização a problemas com vários parâmetros desconhecidos.

Um programa de mínimos quadrados sempre começa com a minimização da soma:

$$\boxed{S \equiv \sum_{i=1}^{N}(y_i^o - y_i)^2} \tag{28.1}$$

onde chamamos de

$$y_i^o = \text{valores observados de y}$$

$$y_i = \text{valores calculados de y}$$

ou seja, mínimos quadrados implica em minimizar os **quadrados** dos resíduos.

Por que este critério é considerado um bom critério e não simplismente minimizar os resíduos ou o cubo dos resíduos? A resposta formal é que os mínimos quadrados são corretos se os resíduos tiverem uma distribuição gaussiana (normal). É simples notar que se minimizarmos os resíduos diretamente, um grande resíduo negativo pode ser anulado por um grande resíduo positivo, enquanto que com o quadrado minimizamos os módulos das diferenças.

Suponhamos que temos um conjunto de dados y com uma distribuição normal:

$$P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-\bar{y}\right)^2\right]$$

onde

$$\begin{aligned} P(y) &= \text{probabilidade de obter o valor y} \\ y &= \text{quantidade a ser observada} \\ \bar{y} &= \text{valor médio de y} \\ \sigma &= \text{desvio padrão de y} \end{aligned}$$

Por exemplo, a probabilidade de se encontrar uma medida entre $-\sigma$ e $+\sigma$ é de 68,3%, a probabilidade de se encontrar uma medida entre $-1,5\sigma$ e $+1,5\sigma$ é de 86,6%, a probabilidade de se encontrar uma medida entre -2σ e $+2\sigma$ é de 95,4%, a probabilidade de se encontrar uma medida entre $-2,5\sigma$ e $+2,5\sigma$ é de 98,76%, a probabilidade de se encontrar uma medida entre -3σ e $+3\sigma$ é de 99,74%.

Suponhamos que medimos o valor de y várias vezes, obtendo uma série de valores $\{y_i\}$. A probabilidade de observar este conjunto é dada por

$$\begin{aligned} P\left(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N\right) &= \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_1-\bar{y}\right)^2\right]\right\} \times \\ &\times \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_2-\bar{y}\right)^2\right]\right\} \times \ldots \\ &\ldots \times \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_N-\bar{y}\right)^2\right]\right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Queremos agora saber qual é o melhor valor de $\bar{y}$, o valor médio. O melhor valor será aquele que maximiza a probabilidade de obter os valores observados $\{y_i\}$, ou seja, o melhor valor de $\bar{y}$ é obtido colocando a derivada da probabilidade como nula:

$$\frac{d}{d\bar{y}}\left[P\left(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N\right)\right] = 0$$

Ou seja

$$\frac{d}{d\bar{y}}\left\{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right]\right\} = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2\right]\frac{d}{d\bar{y}}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2\right]=0$$

Como o termo exp[...] não pode ser nulo, obtemos

$$\frac{d}{d\bar{y}}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2\right]=0$$

ou na nossa notação

$$S=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2$$

$$\boxed{\frac{dS}{d\bar{y}}=0}$$

Continuando com a derivação, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\bar{y}}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}-2\,(y_i-\bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}\bar{y}
\end{aligned}$$

$$N\bar{y}=\sum_{i=1}^{N}y_i$$

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$$

que é a média simples, como queríamos.

O próximo passo é simplesmente reconhecer que y pode ser uma função, por exemplo:

$$y_i=a+b\,x_i$$

de modo que

$$S=\sum_{i=1}^{N}(y_i^o-a-b\,x_i^o)^2$$

Minimizando S em relação a a e b, obtemos:

$$\frac{dS}{da} = \sum_{i=1}^{N} -2\,(y_i^o - a - b\,x_i^o) = 0$$

$$\frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^{N} -2x_i^o\,(y_i^o - a - b\,x_i^o) = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^o - Na - b\sum_{i=1}^{N} x_i^o = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^o y_i^o - a\sum_{i=1}^{N} x_i^o - b\sum_{i=1}^{N} (x_i^o)^2 = 0$$

Em notação matricial

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i^o \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^o & \sum_{i=1}^{N} (x_i^o)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i^o \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^o y_i^o \end{pmatrix}$$

Para simplificar a notação, vamos definir os colchetes:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \equiv [x]$$

$$\sum_{i=1}^{N} 1 = N \equiv [1]$$

desta forma, nossa equação matricial se escreve como:

$$\begin{pmatrix} [1] & [x] \\ [x] & [x^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [y] \\ [xy] \end{pmatrix}$$

Estas equações são chamadas de equações normais, e podem ser resolvidas com a matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] & [x] \\ [x] & [x^2] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [y] \\ [xy] \end{pmatrix}$$

28.5 Mínimos quadrados lineares

Os mínimos quadrados são lineares quando podemos resolver as equações normais usando álgebra linear. O exemplo dado acima é um mínimo quadrado linear, pois podemos resolver as equações para a e b exatamente.

28.6 Mínimos quadrados não lineares

Muitos problemas interessantes não podem ser resolvidos linearmente. Por exemplo, qual é o melhor valor de α em

$$y = \exp(-\alpha x)$$

Pela nossa definição de S:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i^o - \exp\left(-\alpha x_i\right)\right]^2$$

e quando minimizamos S:

$$0 = \frac{dS}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i^o - \exp\left(-\alpha x_i\right)\right]\left[-\exp\left(-\alpha x_i\right)\right]\left(-x_i\right)$$

ou seja

$$0 = \sum_{i=1}^{N} y_i^o x_i \exp\left(-\alpha x_i\right) - \sum_{i=1}^{N} x_i \exp\left(-2\alpha x_i\right)$$

Que podemos escrever, na notação de colchetes, como:

$$0 = \left[xy\exp\left(-\alpha x\right)\right] - \left[x\exp\left(-2\alpha x\right)\right]$$

Esta equação não pode ser resolvida usando-se álgebra linear.

Precisamos utilizar técnicas diferentes. A técnica mais empregada e, de fato, a técnica que se utiliza quando chamamos de **mínimos quadrados não lineares**, é a linearização do problema.

A idéia, aplicada ao problema acima, é:

$$y = \exp(-\alpha x)$$

Escolhemos um valor inicial de α, chamado α_0, e definimos:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$$

Definindo

$$y_0 = \exp(-\alpha_0 x)$$

Em primeira ordem, isto é, linear:

$$y = y_0 + \left.\frac{dy}{d\alpha}\right|_{\alpha_0} \Delta\alpha$$

$$y = \exp(-\alpha_0 x) - x \exp(-\alpha_0 x)\, \Delta\alpha$$

Agora y é linear em $\Delta\alpha$ e podemos usar os mínimos quadrados lineares para encontrar a correção $\Delta\alpha$:

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} (y_i^o - y_i)^2$$

que se torna

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^o - y_{0,i} - \frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} \Delta\alpha \right)^2$$

que minimizando

$$0 = \frac{dS}{d(\Delta\alpha)} = \sum_{i=1}^{N} -2 \frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} \left(y_i^o - y_{0,i} - \frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} \Delta\alpha \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i^o \frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} - y_{0,i} \frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} - \left(\frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} \right)^2 \Delta\alpha \right]$$

ou, na notação dos colchetes:

$$0 = \left[y^o \frac{dy}{d\alpha} \right] - \left[y_0 \frac{dy}{d\alpha} \right] - \left[\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 \Delta\alpha \right]$$

Que podemos resolver para $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \frac{\left[y^o \frac{dy}{d\alpha} \right] - \left[y_0 \frac{dy}{d\alpha} \right]}{\left[\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 \right]}$$

e finalmente obter o valor revisado de α:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$$

Note entretanto que o valor revisado de α não é o melhor valor de α, mas somente uma melhor aproximação do que α_0. Isto ocorre porque $\Delta\alpha$ é a solução do problema linearizado e **não** do problema real. Portanto, precisamos iterar, isto é, utilizar este valor revisado de α como um novo α_0 e obter um novo valor revisado.

28.7 Formulação Geral

Se a função y for uma função de k parâmetros que queremos ajustar:

$$y_i = y\left(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_k\right)$$

colocamos

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1,0} + \Delta a_1 \\ a_2 &= a_{2,0} + \Delta a_2 \\ &\vdots \\ a_k &= a_{k,0} + \Delta a_k \end{aligned}$$

com a hipótese de que $\Delta a_i \ll a_{i,0}$.

Então podemos linearizar

$$\begin{aligned} y_i \quad = \quad & y\left(x_i, a_{1,0}, a_{2,0}, \ldots, a_{k,0}\right) + \frac{dy}{da_1}\Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_1 + \\ & + \frac{dy}{da_2}\Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_2 + \cdots + \frac{dy}{da_k}\Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_k \end{aligned}$$

notando que as derivadas são calculadas para todos $a_n = a_{n,0}$.

Chamando

$$y_{i,0} = y\left(x_i, a_{1,0}, a_{2,0}, \ldots, a_{k,0}\right)$$

e

$$\frac{dy_i}{da_j}\Big|_{a_0} \Delta a_j = \frac{dy_i}{da_j}\Big|_{a_n=a_{n,0}} \Delta a_j$$

podemos escrever

$$y_i = y_{i,0} + \sum_{j=1}^{k} \frac{dy_i}{da_j}\Big|_{a_0} \Delta a_j$$

onde o subscrito i significa calculado no ponto x_i.

Podemos agora calcular S:

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^o - y_i\right)^2$$

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^o - y_{i,0} - \sum_{j=1}^{k} \frac{dy_i}{da_j}\Big|_{a_0} \Delta a_j \right)^2$$

que minimizando com respeito a Δa_m:

$$0 = \frac{dS}{d\left(\Delta a_m\right)} = \sum_{i=1}^{N} 2\left(y_i^o - y_{i,0} - \sum_{j=1}^{k} \frac{dy_i}{da_j}\Big|_{a_0} \Delta a_j\right)\left(-\frac{dy_i}{da_m}\Big|_{a_0}\right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^o - y_{i,0}\right)\left(\frac{dy_i}{da_m}\Big|_{a_0}\right) - \sum_{j=1}^{k} \frac{dy_i}{da_j}\Big|_{a_0} \Delta a_j \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{dy_i}{da_m}\Big|_{a_0}\right)$$

que na notação dos colchetes pode ser escrita como:

$$0 = \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_m}\right] - \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{dy}{da_m}\frac{dy}{da_j}\right]\Delta a_j$$

Ou, em notação matricial

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{dy}{da_1}\frac{dy}{da_1}\right] & \left[\frac{dy}{da_1}\frac{dy}{da_2}\right] & \cdots \left[\frac{dy}{da_1}\frac{dy}{da_k}\right] \\ \left[\frac{dy}{da_2}\frac{dy}{da_1}\right] & \left[\frac{dy}{da_2}\frac{dy}{da_2}\right] & \cdots \left[\frac{dy}{da_2}\frac{dy}{da_k}\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{dy}{da_k}\frac{dy}{da_1}\right] & \left[\frac{dy}{da_k}\frac{dy}{da_2}\right] & \cdots \left[\frac{dy}{da_k}\frac{dy}{da_k}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \vdots \\ \Delta a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_1}\right] \\ \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_2}\right] \\ \vdots \\ \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_k}\right] \end{pmatrix}$$

Esta equação matricial pode agora ser revolvida por álgebra matricial para encontrar as correções Δa_m.

Para o problema linear,

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{dy}{da_1}\frac{dy}{da_1}\right] & \left[\frac{dy}{da_1}\frac{dy}{da_2}\right] & \cdots \left[\frac{dy}{da_1}\frac{dy}{da_k}\right] \\ \left[\frac{dy}{da_2}\frac{dy}{da_1}\right] & \left[\frac{dy}{da_2}\frac{dy}{da_2}\right] & \cdots \left[\frac{dy}{da_2}\frac{dy}{da_k}\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{dy}{da_k}\frac{dy}{da_1}\right] & \left[\frac{dy}{da_k}\frac{dy}{da_2}\right] & \cdots \left[\frac{dy}{da_k}\frac{dy}{da_k}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_1}\right] \\ \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_2}\right] \\ \vdots \\ \left[\left(y^o - y_0\right)\frac{dy}{da_k}\right] \end{pmatrix}$$

28.8 Determinação das incertezas

A maneira correta de determinar as incertezas nos parâmetros é calculando a variança de um parâmetro qualquer z:

$$\boxed{\sigma_z^2 \equiv \langle (\Delta z)^2 \rangle}$$

onde o quadrado é necessário pelas mesmas considerações do valor de S, $\langle a \rangle$ significa a média e onde

$$\Delta z = z_{\text{calculado}} - z_{\text{observado}}$$

Agora suponhamos que z seja uma função de duas variáveis x e y, $z = z(x, y)$. Podemos expandir por série de Taylor [Brook Taylor (1685-1731), *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715)]:

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y$$

de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 \equiv \langle (\Delta z)^2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 (\Delta x)^2 + 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\Delta x \Delta y + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 (\Delta y)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Se as variáveis x e y são separáveis, podemos reduzir a equação acima a

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \langle\, (\Delta x)^2 \,\rangle + 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\langle \Delta x \Delta y \rangle + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \langle\, (\Delta y)^2 \,\rangle$$

e, por definição:

$$\sigma_x^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle$$
$$\sigma_y^2 \equiv \langle (\Delta y)^2 \rangle$$
$$\sigma_{xy}^2 \equiv \langle \Delta x \Delta y \rangle$$

de modo que

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \sigma_x^2 + 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\sigma_{xy}^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \sigma_y^2$$

E como obtemos σ_x, σ_y e σ_{xy}? Definindo a matriz covariança.

28.9 Matriz Covariança

Definimos a matriz covariança como

$$COV = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

De modo que, se a equação normal matricial é escrita como

$$\mathbf{MA} = \mathbf{Y}$$

de modo que a solução é dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{M^{-1}Y}$$

onde $\mathbf{M^{-1}}$ é a matriz inversa da matriz $\mathbf{M}$, vemos que a matriz covariança é dada por

$$\mathbf{COV}(\mathbf{A}) = \sigma^{\mathbf{2}}\mathbf{M^{-1}}$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{S}{N-k} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^o - y_i\right)^2}{N-k}$$

Desta maneira é muito fácil calcular as incertezas nos parâmetros, pois somente precisamos multiplar a matriz inversa que usamos para obter os valores dos parâmetros, por σ^2, obtendo a matriz covariança.

28.10 χ^2

Mas o que fazemos se a função a ser fitada não é analítica, como por exemplo, um espectro resultante de um modelo de atmosferas? Er-Ho Zhang, Edward L. Robinson e R. Edward Nather (1986, Astrophysical Journal, 305, 740) demonstraram que no caso medirmos vários parâmetros simultaneamente, onde a mudança de alguns pode gerar mudanças significativas, enquanto que a mudança de outros parâmetros gera pequenas diferenças e, ainda, que os parâmetros não são independentes, isto é, estão correlacionados, precisamos maximizar a probabilidade (*likelihood*) de que os parâmetros $x_1, \ldots, x_k$ sejam medidos pelos valores $x_1^o, \ldots, x_k^o$, definindo incertezas $\epsilon_i = x_i^o - x_i$,

$$f(\epsilon_1, ..., \epsilon_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma_1 \cdots \sigma_k} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_1^2}{\sigma_1^2} + \cdots + \frac{\epsilon_k^2}{\sigma_k^2}\right)\right]$$

e, portanto, maximizarmos a probabilidade é equivalente a minimizarmos

$$\chi^2 \equiv \tilde{S} \equiv \frac{\epsilon_1^2}{\sigma_1^2} + \cdots + \frac{\epsilon_k^2}{\sigma_k^2}$$

Note que o valor de $\tilde{S}$ tem normalização diferente da de S definido na equação (28.1).

Se medimos os valores I_i^o, por exemplo, o espectro, e calculamos I_i com os parâmetros $x_1, \ldots, x_k$, se assumirmos que a distribuição de erros é normal e que todas as variânças são iguais ($\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k = W$), obtemos

$$\tilde{S} = \frac{\sum_i^N (I_i^o - I_i)^2}{W^2}$$

de modo que, se $\tilde{S}_0$ é o valor mínimo de $\tilde{S}$, e se mudarmos o valor do parâmetro i por um delta d_i, mantendo todos os outros parâmetros constantes, obteremos um novo valor de $\tilde{S}$

$$\tilde{S} = \tilde{S}_0 + d_i^2/\sigma_{ii}$$

e, portanto,

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = \frac{d_i^2}{\tilde{S} - \tilde{S}_0} \tag{28.2}$$

Podemos encontrar o termo de correlação usando uma transformação de variáveis

$$d_i\prime = (d_i + d_j)/\sqrt{2}$$

$$d_j\prime = (d_i - d_j)/\sqrt{2}$$

com $d_i = d_j = d = d_{i\prime}/\sqrt{2}$. Pela propagação de erros,

$$\sigma_{i\prime}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + 2\sigma_{ij} + \sigma_j^2)$$

de modo que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i\prime}^2 - \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2) = \frac{d^2}{\tilde{S} - \tilde{S}_0} - \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2) \tag{28.3}$$

Portanto podemos obter a incerteza em cada parâmetro minimizando $\tilde{S}$ com todos os parâmetros livres, para obter $\tilde{S}_0$, fixando o valor do parâmetro x_i para o valor que minimizou $\tilde{S}$ mais um delta, digamos 5%, e minimizando novamente $\tilde{S}$ com este valor de x_i fixo, obtendo um novo $\tilde{S}$. Com a equação (28.2) podemos então estimar o valor de sua incerteza, e repetir o processo para os outros parâmetros.

Se a normalização não for unitária, devemos usar:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = \frac{\tilde{S}}{n - k + 1} \frac{d^2}{\tilde{S} - \tilde{S}_0} \tag{28.4}$$

onde n é o número de pontos, k o número de parâmetros fitados, e o +1 é porque um dos parâmetros foi mantido fixo, reduzindo o número de graus de liberdade.

A distribuição de probabilidades χ^2 para k graus de liberdade é dada por

$$f_k(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{(k-2)/2}}{2^{k/2}(k/2-1)!} \exp\Big[-\frac{1}{2}\chi^2\Big]$$

O valor médio de χ^2 é k, e algumas vezes se usa um χ^2 reduzido para que sua média seja 1:

$$\chi^2_{\text{red}} \equiv \frac{1}{k}\chi^2 = \frac{1}{k}\sum_i^k \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2}$$

28.11 Estimativa Robusta

O grande problema do método de mínimos quadrados é a grande influência de pontos com resíduo muito grande, os *outliers*. Para se reduzir a influência destes resíduos muito grandes, pode-se minimizar funções que não crescem tão rapidamente quanto S^2, como por exemplo, mimizando a função discrepância, definida como:

$$f(S) = \begin{cases} S^2 & \text{se } |S| \le c \\ c^2 & \text{se } |S| > c \end{cases}$$

onde c é uma constante.

28.11.1 Probabilidade

A função normal, centrada em x=0 e com largura em 1/e em x=1 e x=-1, é definida como

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

e sua integral é a distribuição normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Com esta definição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$$

Se tivermos uma distribuição centrada em x_o, e de largura σ^2,

$$P(x - x_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}$$

Se a distribuição é discreta, com N valores:

$$\sum_{i=0}^{N} P(x_i) \equiv 1$$

de modo que precisamos normalizar nossas probabilidades

$$\boxed{P(x - x_o) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} P(x_i)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}}$$

Chamemos de b(k;n,p) a probabilidade que n tentativas com probabilidade intrínseca de sucesso p, e q=1-p a probabilidade intrínseca de insucesso, resulte em k sucessos e n-k insucessos. Esta probabilidade é dada pela distribuição binominal

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}} P\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Para duas variáveis correlacionadas, x_1 medida a partir de μ_1 e x_2 medida a partir de μ_2:

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{z}{2(1-\rho^2)}\right]$$

onde

$$z = \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$\rho = \mathrm{cor}(x_1, x_2) = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2}$$

Variança da média

Definimos como $p(x)$ a probabilidade de um evento ocorrer entre x e $x + dx$:

$$\int p(x)dx = 1$$

a média mu:

$$\mu = \int xp(x)dx$$

a variança σ^2:

$$\sigma^2 = \int (x-\mu)^2 p(x)dx$$

o desvio padrão σ, e o modo, que é o valor mais provável da distribuição

$$\left.\frac{d\,p(x)}{dx}\right|_{\text{modo}} = 0$$

Definindo a média de um conjunto de medidas, $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Como nossas medidas são finitas, a média $\bar{x}$ não é idêntica à média μ. Se medirmos nossas médias $\bar{x}$ várias vezes, podemos calcular a variança da média:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sum(\bar{x}_k - \bar{x})^2}{N}$$

Substituindo a definição da média $\bar{x}_k$, obtemos

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}$$

Se as medidas i e j não são correlacionadas,

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sigma^2_x$$

e a variança do conjunto:

$$\sigma^2_x = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

já que

$$S = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - \mu) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \mu)\right]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Big[(x_i - \mu)^2 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_i - \mu)(x_j - \mu) + \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_k (x_j - \mu)(x_k - \mu) \Big]$$

Calculando o valor médio:

$$\langle S \rangle = \sum_{i=1}^{N} \Big[\langle (x_i - \mu)^2 \rangle - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \langle (x_i - \mu)(x_j - \mu) \rangle + \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_k \langle (x_j - \mu)(x_k - \mu) \rangle \Big]$$

Assumindo que as amostras são não correlacionadas, $\sigma_{ij} = \sigma_x^2 \partial_{ij}$,

$$\langle S \rangle = \sum_{i=1}^{N} \Big[\sigma_x^2 - \frac{2}{N} \sigma_x^2 + \frac{1}{N^2} \sum_j \sigma_x^2 \Big] = \sum_{i=1}^{N} \Big[\sigma_x^2 - \frac{1}{N} \sigma_x^2 \Big]$$

ou seja

$$\langle \sigma_x^2 \rangle = \frac{1}{N-1} \sigma_x^2$$

Se tivermos um conjunto de medidas independentes x_i, cada qual com sua incerteza σ_i, podemos minimizar a incerteza total na média

$$\bar{x} = \sum_i a_i x_i$$

e demonstrar que o multiplicador a_i

$$a_i = \frac{1/\sigma_i^2}{\sum_i (1/\sigma_i^2)}$$

é aquele que produz a menor incerteza na média.

Portanto, definimos os pesos

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

que nos levam a

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i}$$

Para sabermos se, quando passamos de uma fitagem de uma reta para uma fitagem de uma parábola, a redução no $S \equiv \chi^2 \equiv \sigma^2$ é suficiente para que o termo quadrático seja significativo, podemos definir um parâmetro

$$\lambda = \frac{\sigma^2_{\text{reta}} - \sigma^2_{\text{parab}}}{\sigma^2_{\text{parab}}} (N - 3)$$

e determinar o nível de confiabilidade que podemos descartar a hipótese do termo quadrático ser nulo por

$$\lambda = F_p(1, n-3)$$

onde a distribuição F é dada por

$$F(a,b) = \frac{\chi^2(a)/a}{\chi^2(b)/b}$$

[Brownlee, K.A. 1960, *Statistical theory & methodology in science and engineering*, Wiley]

28.12 Determinação das incertezas

A maneira correta de determinar as incertezas nos parâmetros é calculando a variança de um parâmetro qualquer z:

$$\sigma_z^2 \equiv \langle (\Delta z)^2 \rangle$$

onde o quadrado é necessário para que grandes incertezas negativas não se anulem com grandes incertezas positivas, $\langle a \rangle$ significa a média e onde

$$\Delta z = z_{\text{calculado}} - z_{\text{observado}}$$

Agora suponhamos que z seja uma função de duas variáveis x e y, $z = z(x,y)$. Podemos expandir por série de Taylor [Brook Taylor (1685-1731), *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715)]:

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y$$

de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 \equiv \langle (\Delta z)^2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 (\Delta x)^2 + 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\Delta x \Delta y + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 (\Delta y)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Se as variáveis x e y são separáveis, podemos reduzir a equação acima a

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \left\langle \, (\Delta x)^2 \, \right\rangle + 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\langle \Delta x \Delta y \rangle + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \left\langle \, (\Delta y)^2 \, \right\rangle$$

e, por definição:

$$\sigma_x^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle$$
$$\sigma_y^2 \equiv \langle (\Delta y)^2 \rangle$$
$$\sigma_{xy}^2 \equiv \langle \Delta x \Delta y \rangle$$

de modo que

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 + 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\sigma_{xy}^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \sigma_y^2$$

Por exemplo, da equação do CCD, que descreve as contribuições dos diversos tipos de ruído nas medidas, supondo que tenhamos N_* fotoelétrons (contagens) detectados de um objeto, o ruído estatístico (Poissoniano) da medida será dado por $R = \sqrt{N_*}$. Mas em um CCD temos outras fontes de ruído:

$$R = \sqrt{N_* + n_{\rm pix}(1 + \frac{n_{\rm pix}}{n_B})(N_B + N_D + N_R^2 + G^2\sigma_f^2)}$$

onde

N_*	número total de contagens coletadas do objeto (em elétrons)
$n_{\rm pix}$	número de pixels considerados
n_B	número de pixeis de fundo (céu)
N_B	número total de contagens por pixel de fundo (céu, em elétrons)
N_D	número total de contagens por pixel de corrente de escuro (térmicos, em elétrons)
N_R	ruído de leitura por pixel (em elétrons)
G	Ganho do detector (número de elétrons/ADU)
σ_f	σ da contagem fracional perdida na discretização por pixel (em ADU)

Desta forma, a incerteza na medida do número de elétrons é dada pelo seu ruído, R.

Mas quando convertemos estas contagens em magnitudes observadas em um certo filtro, representado pelo seu comprimento de onda efetivo, temos outras incertezas:

$$m_\lambda^o = -2,5 \log F_\lambda + C_\lambda$$

onde F_λ é o fluxo medido, que pode ser o número de fótons detectados por unidade de tempo por unidade de área, ou a energia correspondente, e C_λ a constante do ponto zero daquela magnitude (correspondente ao fluxo de uma estrela de magnitude zero), e $\sigma(F_\lambda) = R$.

Neste caso, como $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$

$$\sigma(m_\lambda^o) = -2,5 \frac{1}{F_\lambda \ln 10} \sigma(F_\lambda)$$

Mas ainda temos que transformar as magnitudes para um sistema padrão:

$$m_\lambda = m^o_\lambda + a + b(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1}) + k_\lambda x$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\sigma^2(m_\lambda) &= \sigma(m^o_\lambda)^2 + \sigma(a)^2 + \sigma(b)^2(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})^2 + b^2\sigma(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})^2 + \\
&+ \sigma(k_\lambda)^2x^2 + k^2_\lambda\sigma(x)^2 + +2\sigma(m^o_\lambda, a) + 2\sigma(m^o_\lambda, b)(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1}) + \\
&+ 2\sigma(m^o_\lambda, m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})b + 2\sigma(m^o_\lambda, k_\lambda)x + 2\sigma(m^o_\lambda, x)k_\lambda + \\
&+ 2\sigma(a, b)(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1}) + 2\sigma(a, m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})b + 2\sigma(a, k_\lambda)x + \\
&+ 2\sigma(a, x)k_\lambda + 2\sigma(b, m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})b(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1}) + \\
&+ 2\sigma(b, k_\lambda)(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})x + 2\sigma(b, x)(m^o_\lambda - m^o_{\lambda_1})k_\lambda + 2\sigma(k_\lambda, x)k_\lambda x
\end{aligned}$$

onde $\sigma(x)$ é a variação da massa de ar durante a exposição. Os coeficientes cruzados são calculados pela matriz de covariança.

Apêndice A

Biografias

A.1 Nicolau Copérnico



A invenção da imprensa de tipos móveis (no ocidente) por Johann Gutenberg (c.1398-c.1468) em 1451, a motivação para a leitura dos autores gregos, devido em parte aos estudiosos que foram para o Ocidente após a captura de Constantinopla pelos turcos, em 1543, e a descoberta da América em 1492, foram fatores que impulsionaram a grande revolução nas diversas áreas do conhecimento, conhecida com Renascimento ou Renascença.

Na Astronomia, o Renascimento teve seu principal agente em Nicolau Co-

pérnico, ou Mikolaj Kopernik, polonês nascido em 19 de fevereiro de 1473, em Toruñ, às margens do rio Vístula, na Pomerânia.

Depois da morte de seu pai, Niklas Koppernigk, em 1483, ficou sob tutela de seu tio, Lucas Watzelrode, mais tarde nomeado Bispo de Ermland, e foi destinado pelo tio para a carreira eclesiástica desde cedo. Em 1491, foi estudar no Collegium Maius, onde estudou Medicina, Matemática e Astronomia, por três anos. O Collegium Maius faz parte da Universidade Jagielonia (Uniwersytet Jagiellonski), em que foi transformada a Academia de Cracóvia, fundada em 1364 pelo rei Kasimir, o Grande, mas cujo maior patrono foi o Rei Wladyslaw Jagiello, cujo nome foi dado desde sua morte, em 1434. No Collegium Maius, utilizou instrumentos de medida astronômicos que antecederam o telescópio, que só seria inventado mais de cem anos depois. Em 1496, rumou para a Itália, onde permaneceu nove anos, com interrupção em 1501, quando retornou à Polônia, para assumir as funções de cônego em Frauenburgo. Nas universidades de Bolonha, Pádua e Ferrara, estudou Direito, Medicina, Astronomia e Matemática. Embora estivesse na Itália para estudar Medicina e Direito, seus maiores interesses eram Astronomia e Matemática, mas também dedicou-se ao estudo do grego. Em Bolonha, associou-se a Domenico Novarra (1454-1504), com quem fez a observação da ocultação de Aldebarã, em 9 de março de 1497.

Quando retornou a Frauenburgo, quase imediatamente obteve licença para se juntar ao seu tio em Heilsberg, oficialmente como seu conselheiro médico, mas realmente como acompanhante. Foi, provavelmente, nesses calmos dias em Heilsberg, que Copérnico elaborou suas idéias astronômicas e escreveu os primeiros rascunhos de seu livro. Desde 1512, após a morte de seu tio, viveu em Frauenburgo e suas observações eram feitas com instrumentos construídos por ele próprio.

Em 1529, circulava entre os astrônomos um manuscrito *Nic. Copernici de Hypothesibus Motuum Coelestium a se Constitutis Commentariolus* (Pequenos comentários de Nicolau Copérnico em torno de suas hipóteses sobre os movimentos celestes), no qual Copérnico apresentava o sistema heliocêntrico como uma hipótese. Em 1533, o Papa Clemente VII solicitou a exposição da teoria em Roma, e em 1536 o Cardeal Schönberg pediu sua publicação, mas Copérnico achava que deveria, primeiro, elaborar uma teoria completa, que fosse nitidamente superior ao sistema de Ptolomeu.

Em 1539, chegou em Frauenburgo um jovem astrônomo, Georg Joachim (1514-1574), mais conhecido como Rheticus, por ser originário de Rhaetia. Ele estudou Astronomia com Johannes Schöner (1477-1547) em Nürnberg, e foi nomeado professor de matemática na Universidade de Wittenberg. Tendo

ouvido de Copérnico e suas teses, decidiu visitá-lo, e sua visita se estendeu por dois anos, estudando o manuscrito de Copérnico. Escreveu com este uma Primeira Narrativa (*Prima Narratio*) expondo as idéias na forma de uma carta ao seu mestre Schöner. Essa carta, publicada em 1540, foi a primeira forma acessível das idéias de Copérnico. Em 1540, Rheticus enviou para publicação o livro completo de Copérnico, *De Revolutionibus* (As Revoluções), cujo primeiro exemplar chegou às mãos de Copérnico em leito de morte, em 1543. Provavelmente, não teve consciência de que o seu prefácio, dedicado ao Papa Paulo III, fora substituído por outro, anônimo, de Andreas Osiander (1498-1552), um pastor Luterano interessado em Astronomia, em que insistia sobre o carácter hipotético do novo sistema e também modificando o nome para *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (As Revoluções do Orbe Celeste). No livro, Copérnico declarava que a Terra cumpria "uma revolução em torno do Sol, como qualquer outro planeta", como já haviam afirmado Pythagoras (∼569-475 a.C.) e Aristarchus de Samus (310-230 a.C.), que Copérnico já tinha lido. Mas Copérnico desenvolveu a idéia matematicamente, usando deferentes e epiciclos, construindo um sistema capaz de prever as posições dos planetas, pelo menos tão precisamente como qualquer versão do sistema de Ptolomeu e, em muitos aspectos, mais simples. Esse sistema só pôde refutar o de Ptolomeu, com as observações telescópicas de Galileo das fases de Vênus e dos satélites de Júpiter.

O manuscrito original do livro, *De Revolutionibus*, permaneceu com o autor até sua morte, em 24 de maio de 1543, e atualmente está na biblioteca do Collegium Maius, reservada como um museu em honra a Copérnico, junto com os instrumentos por ele utilizados.

A.2 Tycho Brahe



Tycho Brahe nasceu em 14 de dezembro de 1546, primeiro filho de Otto Brahe e Beatte Bille, de uma família nobre da Dinamarca. Antes de seu nascimento, o pai havia prometido que o daria a um tio, Jorgen, que era vice-almirante. Porém não cumpriu sua promessa. Após o nascimento de um irmão mais novo, Jorgen seqüestrou o jovem Tycho, fato que o pai do rapaz acabou aceitando, devido à fortuna que o filho herdaria. Seu tio morreu depois, de pneumonia, após resgatar o rei Frederick II (1534-1588) de afogamento, quando este caiu de uma ponte ao retornar de uma batalha naval com os suecos.

Com 13 anos, Tycho foi estudar Direito e Filosofia na Universidade de Copenhague. Nessa época, ocorreu um eclipse parcial do Sol, que havia sido predito com exatidão. Tycho ficou muito impressionado que os homens soubessem o movimento dos astros com exatidão para poder prever suas posições. Aos 16 anos, seu tio o enviou a Leipzig, na Alemanha, para continuar seus estudos de Direito. Mas ele estava obcecado com a Astronomia, comprou livros e instrumentos e passava a noite observando as estrelas. Em 17 de agosto de 1563, Júpiter passou muito perto de Saturno; Tycho descobriu que as Tabelas Alfonsinas[1] erraram por um mês ao predizer o evento, e as tabelas de Copérnico erraram por vários dias. Ele decidiu que melhores

[1]Em 1252, Afonso X, o Sábio, Rei de Castela (Espanha), que, em 1256, foi proclamado rei e, no ano seguinte, imperador do Sacro Império Romano, convocou 50 astrônomos para revisar as tabelas astronômicas calculadas por Ptolomeu, que incluíam as posições dos planetas no sistema geocêntrico, publicado por Cláudio Ptolomeu em 150 d.C., no Almagesto. Os resultados foram publicados como as *Tabelas Alfonsinas*.

tabelas poderiam ser calculadas após observações exatas e sistemáticas das posições dos planetas por um longo período de tempo, e que ele as realizaria.

Em 1572, outro evento importante aconteceu. Em 11 de novembro, Tycho notou uma nova estrela na constelação de Cassiopéia, mais brilhante que Vênus. A estrela era tão brilhante que podia ser vista à luz do dia, e durou 18 meses. Era o que hoje em dia se chama de uma supernova, um evento raro. A grande pergunta era se essa estrela estava na alta atmosfera da Terra, mais perto do que a Lua, onde mudanças podiam ocorrer, ou se estava no céu, contradizendo o dogma do grego Aristóteles (384-322 a.C.), incorporado pelos cristãos, de que a esfera celeste era imutável. Tycho tinha recém-terminado a construção de um sextante com braços de 1,6 metros, com uma escala calibrada em minutos de arco, muito mais preciso do que qualquer outro já construído até então, e demonstrou que a estrela se movia menos do que a Lua e os planetas em relação às outras estrelas e, portanto, estava na esfera das estrelas. Publicou suas observações no *De Nova et Nullius Aevi Memoria Prius Visa Stella* (Sobre a nova e previamente nunca vista estrela), em Copenhague, em 1573.

Em 1575, Tycho já era famoso em toda a Europa, e o Rei Frederick II, que seu tio havia salvo, ofereceu-lhe uma ilha inteira, chamada Hveen, perto do castelo de Hamlet em Elsinore. A Dinamarca pagaria a construção de um observatório, e os habitantes da ilha, cerca de 40 famílias, se tornariam seus súditos.

Tycho, então, construiu seu castelo dos céus, Uraniburg, e vários instrumentos. O castelo foi batisado em honra de Urânia, a musa da Astronomia. Vários relógios (clepsidras, baseadas no escorrimento da água, ampulhetas de areia, velas graduadas ou semelhantes) eram usados, ao mesmo tempo, para medir as observações o mais precisamente possível, e um observador e um marcador de tempo trabalhavam juntos. Com seus assistentes, Tycho conseguiu reduzir a imprecisão das medidas, de 10 minutos de arco desde o tempo de Ptolomeu, para um minuto de arco. Foi o primeiro astrônomo a calibrar e conferir a precisão de seus instrumentos periodicamente e corrigir as observações por refração atmosférica. Também foi o primeiro a instituir observações diárias, e não somente quando os astros estavam em configurações especiais, descobrindo assim anomalias nas órbitas até então desconhecidas.

Em 1588, publicou *Mundi Aetherei Recentioribus Phaenomenis* (Sobre o novo fenômeno no mundo etéreo), em Uraniburg, sobre suas observações do cometa que apareceu em 1577, demonstrando que o cometa se movia entre as esferas dos planetas, e, portanto, que o "céu" não era imutável, e as "esferas cristalinas", concebidas na tradição greco-cristã, não eram entes físicos.

Tycho propôs seu próprio modelo, em que todos os planetas giravam em torno do Sol, com exceção da Terra. O Sol e a Lua, em seu modelo, giravam em torno da Terra. Seu modelo foi aceito por longo tempo, pois não era refutado pelas fases de Vênus e mantinha a Terra parada, como propunha a Igreja.

Ainda em 1588, o rei faleceu e Tycho foi desatencioso com o novo rei, Christian IV, e com a alta corte de justiça. Seus rendimentos foram drasticamente reduzidos e, em 1597, Tycho deixou a Dinamarca com todos seus equipamentos. Em 1598, publicou *Astronomiae Instauratae Mechanica* (Instrumentos para a Astronomia restaurada), em Wandsbeck.

Em 1599, ele chegou em Praga, onde o Imperador Rudolph II o nomeou matemático imperial, e pôde continuar suas observações. Em 1600, contratou Johannes Kepler para ajudá-lo, e faleceu em 24 de outubro de 1601. Está enterrado na Igreja Tyn, em Praga.

A.3 Johannes Kepler



Johannes Kepler nasceu em 27 de dezembro de 1571, no sul da atual Alemanha, que naquela época pertencia ao Sacro Império Romano, em uma cidade chamada Weil der Stadt, região da Swabia. Era filho de Heinrich Kepler, um soldado, e de sua esposa Katharina, cujo sobrenome de solteira era Guldenmann. Seu avô paterno, Sebald Kepler, era prefeito da cidade, apesar de ser protestante (Luterano), numa cidade católica. Essa era a época da Renascença e da Reforma Protestante.

Por ter corpo frágil e pelas poucas condições financeiras da família, foi enviado ao seminário para seus estudos. Em setembro de 1588, Kepler passou o exame de admissão (bacharelado) da Universidade de Tübingen, mas só iniciou seus estudos lá em 17 de setembro de 1589, onde estudava teologia no seminário Stift. Em 10 de agosto de 1591, foi aprovado no mestrado, completando os dois anos de estudos em *Artes*, que incluia grego, hebreu, astronomia e física. Iniciou, então, os estudos de teologia, estudando grego com Martin Crusius (1526-1607), matemática e astronomia com Michael Maestlin (1550-1631), aprendendo com este sobre Copérnico, embora seu mestre defendesse o modelo geocêntrico do *Almagesto* de Ptolomeu. Antes

de completar seus estudos, Kepler foi convidado a ensinar matemática no seminário protestante (*Stiftsschule*) de Graz, na Áustria, onde chegou em 11 de abril de 1594. Seu trabalho, além de ensinar matemática, que se conectava com a astronomia, também incluía a posição de matemático e calendarista do distrito.

Note que, naquela época, o calendarista deveria prever o clima, dizendo a melhor data para plantar e colher, prever guerras e epidemias e mesmo eventos políticos. Kepler fazia os calendários porque era sua obrigação, mas tinhas sérias restrições à sua veracidade, dizendo, por exemplo: "Os céus não podem causar muitos danos ao mais forte de dois inimigos, nem ajudar o mais fraco... Aquele bem preparado supera qualquer situação celeste desfavorável." E mais, Kepler usava os calendários para instigar cuidados, disfarçados como prognósticos, para prevenir doenças.

No início de 1597, Kepler publica seu primeiro livro, *Prodromus dissertationum cosmographicarum continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium celestium deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis et propiis, demonstratum per quinque regularia corpora geometrica*, cujo título abreviado é *Mysterium Cosmographicum* (Mistérios do Universo). Nesse livro, defendia o heliocentrismo de Copérnico e propunha que o tamanho de cada órbita planetária é estabelecido por um sólido geométrico (poliedro) circunscrito à órbita anterior. Esse modelo matemático poderia prever os tamanhos relativos das órbitas. Kepler enviou um exemplar para Tycho Brahe, que respondeu que existiam diferenças entre as previsões do modelo e suas medidas. Um exemplar enviado a Galileo, oito anos mais velho que Kepler, fez este enviar uma pequena carta a Kepler agradecendo e dizendo que ainda não havia lido, mas que acreditava na teoria de Copérnico.

Em setembro de 1598, o arquiduque da Áustria, príncipe Ferdinando de Habsburgo, líder da Contra-Reforma Católica, fechou o colégio e a igreja protestante em Graz, e ordenou que todos os professores e padres deixassem a cidade imediatamente. Kepler foi autorizado a retornar a cidade como matemático do distrito, onde permaneceu até agosto de 1600, quando foi expulso definitivamente da cidade por recusar-se a se converter ao catolicismo.

Em junho de 1599, o imperador Rudolph II, da Boêmia, contratou Tycho Brahe como matemático da corte em Praga. Em janeiro de 1600, Kepler, então com 28 anos, visitou-o no castelo de Benatky, que o imperador tinha colocado à disposição de Tycho. Kepler sabia que somente com os dados de Tycho Brahe poderia resolver as diferenças entre os modelos e as observações. Tycho não acreditava no modelo de Copérnico por motivos teológicos, mas

também porque tentou, sem sucesso, medir a paralaxe das estrelas com o movimento da Terra. Copérnico assumia uma distância enorme para as estrelas, pois não se observava paralaxe. A paralaxe das estrelas só foi medida em 1838, pela primeira vez, por Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846).

Kepler já tinha observado eclipses e mesmo as estrelas, procurando medir a paralaxe, mas seus instrumentos eram muito rudes, e sua vista muito fraca.

Em 19 de outubro de 1600, Kepler, abandonado por seus antigos mestres por suas convicções na teoria heliocêntrica de Copérnico, e também por suas tendências Calvinistas, não aceitando os dogmas incondicionalmente, começou a trabalhar para Tycho Brahe em Praga. Em setembro de 1601, Kepler retornou a Praga depois de uma visita a Graz para acertar a herança de seu sogro, e Tycho já havia instalado seus instrumentos, que haviam sido trazidos de Hveen. Tycho o apresentou ao imperador, que o contratou como assistente de Brahe. Logo depois, em 24 de outubro de 1601, Brahe morreu. Dois dias depois, o imperador nomeou Kepler como matemático imperial, sucedendo Brahe na tarefa de calcular as Tabelas Rudolfinas, com a previsão das posições dos planetas.

Kepler começou imediatamente a trabalhar no cálculo da órbita de Marte e, em 1602, descobriu a Lei das Áreas, mas não conseguiu ajustar a forma da órbita. Se a órbita fosse circular, bastariam 3 observações, pois 3 pontos definem um círculo. Os pontos deveriam ser observados em oposição, já que em oposição é irrelevante se é a Terra ou o Sol que se movem, pois os três corpos estão alinhados. Tycho tinha observado 10 oposições de Marte entre 1580 e 1600, às quais Kepler depois adicionou as de 1602 e 1604. Naturalmente, qualquer conjunto de 3 observações deveria resultar na mesma órbita. Como Marte é o planeta externo com maior excentricidade, dos conhecidos naquela época, um círculo não se ajustava às observações. Mesmo introduzindo um equante, Kepler não conseguia ajustar as observações com erro menor que 8', enquanto a precisão das observações de Tycho eram da ordem de 1'. Em 1605, Kepler descobriu que a órbita era elíptica, com o Sol em um dos focos. Estes resultados foram publicados no Astronomia Nova, em 1609.

Em 1604 Kepler completou o Astronomiae pars Optica (*Ad Vitellionen Paralipomena, quibur Astronomiae Pars Optica traditur*), considerado o livro fundamental da óptica, no qual explicou a formação da imagem no olho humano, explicou como funciona uma câmara obscura, descobriu uma aproximação para a lei da refração, estudou o tamanho dos objetos celestes e os eclipses.

Em 17 de outubro de 1604, Kepler observou a nova estrela (supernova)

na constelação de Ophiucus, junto a Saturno, Júpiter e Marte, que estavam próximos, em conjunção. A estrela competia com Júpiter em brilho. Kepler imediatamente publicou um pequeno trabalho sobre ela, mas, dois anos depois, publicou um tratado, descrevendo o decaimento gradual de luminosidade, a cor, e considerações sobre a distância que a colocava junto com as outras estrelas.

Em 1610, Kepler leu o livro com as descobertas de Galileo usando o telescópio, e escreveu um longa carta em suporte, publicada como *Dissertatio cum Nuncio Sidereo* (Conversa com o mensageiro sideral). Em agosto de 1610, ele usou um telescópio dado por Galileo ao duque da Bavária, Ernst de Cologne, para observar os satélites de Júpiter, publicando *Narratio de Observatis Quatuor Jovis Satellitibus* (Narração das observações dos quatro satélites de Júpiter). Esses tratados deram grande suporte a Galileo, cujas descobertas eram negadas por muitos. Os dois trabalhos foram republicados em Florença.

Kepler também estudou as leis que governam a passagem da luz por lentes e sistemas de lentes, inclusive a magnificação e a redução da imagem, e como duas lentes convexas podem tornar objetos maiores e distintos, embora invertidos, que é o princípio do telescópio astronômico. Estudou, também, o telescópio de Galileo, com uma lente convergente como objectiva e uma lente divergente como ocular. Esses estudos foram publicados no *Dioptrice*, em 1611.

Em 1612, com a morte do Imperador Rudolph II, que havia abdicado em 23 de maio de 1611, Kepler aceitou a posição de matemático e professor do colégio distrital em Linz. Lá, publicou o primeiro trabalho sobre a cronologia e o ano do nascimento de Jesus, em alemão, em 1613 e, ampliado, em latim em 1614: *De vero Anno, quo aeternus Dei Filius humanam naturam in Utero benedictae Virginis Mariae assumpsit* (Sobre o verdadeiro ano em que o Filho de Deus assumiu a natureza humana no útero da Sagrada Virgem Maria). Nesse trabalho, Kepler demonstrou que o calendário Cristão estava em erro por cinco anos, pois Jesus tinha nascido em 4 a.C., uma conclusão atualmente aceita. O argumento é que, em 532 d.C., o abade Dionysius Exiguus assumiu que Cristo nascera no ano 754 da cidade de Roma, correspondente ao ano 46 do calendário Juliano, definindo-o como o ano um da era cristã. Entretanto, vários historiadores afirmavam que o rei Herodes, que faleceu depois do nascimento de Cristo, morreu no ano 42 do calendário juliano. Desse modo, o nascimento ocorrera em 41 do calendário juliano, 5 anos antes do que Dionysius assumira.

Entre 1617 e 1621, Kepler publicou os 7 volumes do *Epitome Astrono-*

miae Copernicanae (Compêndio da Astronomia copernicana), que se tornou a introdução mais importante à astronomia heliocêntrica e um livro-texto de grande uso. A primeira parte do Epitome, publicada em 1617, foi colocada no *índex* de livros proibidos pela Igreja Católica em 10 de maio de 1619. A proibição por parte da Igreja Católica às obras sobre o modelo heliocêntrico começou pelo fato de Galileo ter escrito seu livro *Siderius Nuncius* (Mensagem celeste), em 1610, despertando o interesse do povo. A razão da proibição era que no Salmo 104:5 do Antigo Testamento da Bíblia, está escrito: "Deus colocou a Terra em suas fundações, para que nunca se mova".

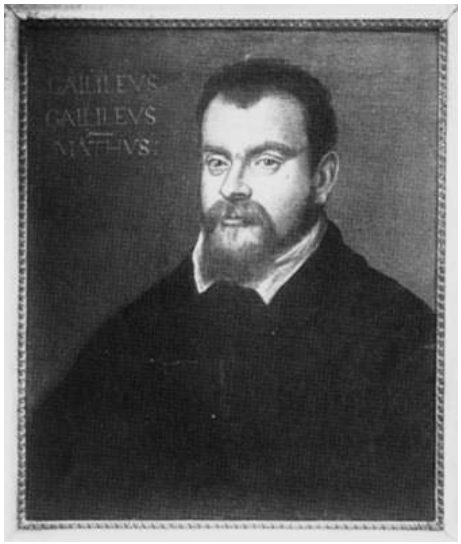
Em 1615-16, houve uma caça às bruxas em sua região nativa, e ele defendeu sua mãe num processo em que ela era acusada de bruxarias. O processo se estendeu até 1620, quando ela foi liberada.

O ano de 1618 marcou o início da Guerra dos Trinta Anos, entre os Reformistas Protestantes e a Contra-Reforma Católica, que devastou a região da Alemanha e Áustria. A posição de Kepler piorava, pois a Contra-Reforma Católica aumentava a pressão sobre os protestantes na Alta Áustria, da qual Linz era a capital. Como Kepler era oficial da corte, ele estava isento do decreto que bania todos os protestantes da província. Nesse período, Kepler estava imprimindo as Tabulae Rudolphinae baseadas nas observações de Tycho Brahe e calculadas de acordo com suas órbitas elípticas. Essas tabelas incluíam a posição dos planetas e cálculos de eclipses. Quando uma rebelião ocorreu e Linz foi tomada, a oficina de impressão foi queimada e, com ela, muito da edição já impressa. Em 1619, Kepler publicou *Harmonices Mundi* (Harmonia do Mundo), em que derivava que as distâncias heliocêntricas dos planetas e seus períodos estão relacionados pela Terceira Lei, que diz que o quadrado do período é proporcional ao cubo da distância média do planeta ao Sol. Essa lei foi descoberta por Kepler em 15 de maio de 1618. Kepler e sua família deixaram Linz em 1626. Sua família ficou em Regensburg, enquanto ele mudou-se para Ulm, para imprimir as Tabulae Rudolphinae, finalmente publicadas em 1627. Essas tabelas provaram-se precisas por um longo tempo, trazendo a aceitação ao sistema heliocêntrico.

Apesar do nome de Kepler estar ligado à Astrologia, ele diz: *"Meus corpos celestes não eram o nascimento de Mercúrio na sétima casa em quadratura com Marte, mas Copérnico e Tycho Brahe; sem sua observações, tudo o que eu pude trazer à luz estaria enterrado na escuridão."*

Kepler, então, juntou-se à sua família em Regensburg, mas mudou-se para Sagan em julho de 1628, como matemático do imperador e do duque de Friedland. Em uma viagem, foi acometido de uma doença aguda em Regensburg, Alemanha, onde faleceu em 15 de novembro de 1630.

A.4 Galileo Galilei



Galileo Galilei (em português **Galileu Galilei**) nasceu em 15 de fevereiro de 1564, em Pisa, filho de Vincenzo Galilei (1525 - 1591), um músico alaudista conhecido por seus estudos sobre teoria da música, e Giulia Ammannati de Pescia. De setembro de 1581 a 1585 estudou medicina na Universidade de Pisa, da qual depois foi professor de matemática entre 1589 e 1592.

Em 1586, inventou a balança hidrostática para a determinação do peso específico dos corpos, e escreveu um trabalho *La bilancetta*, que só foi publicado após sua morte.

Em 1592, Galileo tornou-se professor de matemática na Universidade de Pádua, onde permaneceu por 18 anos, inventando, em 1593, uma máquina para elevar água, uma bomba movimentada por cavalos, patenteada no ano seguinte. Em 1597, inventou um setor geométrico, o "compasso geométrico-militar", instrumento matemático com várias escalas, usado especialmente para medir ângulos. Nessa época, explicou que o período de um pêndulo não depende de sua amplitude, e propôs teorias dinâmicas que só poderiam ser observadas em condições ideais. Escreveu o *Trattato di mechaniche*, que só foi impresso na tradução para o latim do padre Marino Mersenne, em 1634, em Paris.

Em 1604, observou a supernova de Kepler, apresentando em 1605 três palestras públicas sobre o evento, mostrando que a impossibilidade de medir-se a paralaxe indica que a estrela está além da Lua, e que, portanto, mudanças ocorrem no céu. Nessas palestras, Galileo considera esse evento uma prova

da teoria heliocêntrica de Copérnico. Em 1606, publica um pequeno trabalho, *Le operazioni del compasso geometrico militare*, e inventa o termoscópio, um termômetro primitivo.

Em maio de 1609, ele ouviu falar de um instrumento de olhar à distância que o holandês Hans Lippershey havia construído e, mesmo sem nunca ter visto o aparelho, construiu sua primeira luneta em junho, com um aumento de 3 vezes. Galileo se deu conta da necessidade de fixar a luneta, ou telescópio, como se chamaria mais tarde, para permitir que sua posição fosse registrada com exatidão. Até dezembro, construiu vários outros, o mais potente com 30X, e fez uma série de observações da Lua, descobrindo que esta tem montanhas. De 7 a 15 de janeiro de 1610, descobre os satélites de Júpiter, publicando, em latim, em 12 de março de 1610 o *Siderius Nuncius* (Mensagem celeste) com as descobertas do mesmo ano. Essa descoberta prova que, contrariamente à teoria de Aristóteles, existem corpos celestes que circundam outro corpo que não a Terra.

Em 8 de abril de 1610, Johannes Kepler recebe uma cópia do livro, com um pedido de Galileo por sua opinião. Em 19 de abril, Kepler envia-lhe uma carta, em suporte às suas descobertas, publicada em Praga, em maio, como "Conversações com o Mensageiro Celeste" e, depois, em Florença. O suporte de Kepler foi importante porque publicações de Martin Horky, Lodovico delle Colombe, e Francesco Sizi duvidavam das observações de Galileo. Kepler e os matemáticos do Colégio Romano eram reconhecidos como as autoridades científicas da época.

Já em julho, Galileo foi nomeado Primeiro Matemático da Universidade de Pisa, e Filósofo e Matemático do grão-duque da Toscana. Ainda em dezembro, Galileo verificou que Vênus apresenta fases como a Lua, tornando falso o sistema geocêntrico de Ptolomeu e provando que Vênus orbita o Sol.

A confirmação oficial das descobertas galileanas foi dada pelos poderosos padres jesuítas do Colégio Romano, que observaram os satélites de Júpiter por dois meses, em uma conferência solene realizada no Colégio, em maio de 1611, na presença de Galileo. Essa conferência foi intitulada *Nuncius sidereus Collegii Romani*, e apresentada pelo padre Odo van Maelcote.

Retornando a Florença, Galileo participou de reuniões no palácio do grão-duque Cósimo II, de Medici (1590-1621), em que se discutia sobre o fenômeno da flutuação e suas possíveis explicações; Galileo expôs e defendeu a tese de Arquimedes (Archimedes de Siracusa, ca. 287-ca. 212 a.C.), de que um corpo flutua pela diferença do peso específico do corpo e da água, à qual se alinhou o Cardeal Maffeo Barberini (1568-1644) (o futuro Papa Urbano VIII). Outros, como o Cardeal Federico Gonzaga, defendiam a tese de Aristóteles, de que

um corpo flutua porque dentro dele há o elemento aéreo, que tende a subir. Cósimo II propôs que os debatentes registrassem seus argumentos, e Galileo escreveu *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono*, publicado em 1612. Em sua introdução, havia referência aos satélites de Júpiter e às manchas solares. Em 1613 a Academia del Lincei publica *Istoria e dimonstrazione intorno alle macchie solari e loro accidenti, comprese in tre lettere scritte all'ilustrissimo Signor Marco Velseri Linceo, Duumviro d'Augusta, Consigliero di Sua Maestà Cesarea, dal Signor Galileo Galilei, Nobil fiorentino, Filosofo e Matematico primario del Serenissimo D. Cosimo II Gran Duca di Toscana* (História sobre as manchas solares), de Galileo, argumentando que a existência das manchas demonstrava a rotação do Sol.

Galileo havia juntado assim grande quantidade de evidências em favor da teoria heliocêntrica e escrevia em italiano para difundir ao público a teoria de Copérnico. Isso chamou a atenção da Inquisição, que, após um longo processo e o exame do livro de Galileo sobre as manchas solares, lhe dá uma advertência, na qual o Cardeal Roberto Bellarmino (1542-1621) lê a sentença do Santo Ofício de 19 de fevereiro de 1616, proibindo-o de difundir as idéias heliocêntricas. Em 5 de março de 1616, a Congregação do Índice colocou o *Des Revolutionibus* de Copérnico no Índice de livros proibidos pela Igreja Católica, junto com todos livros que defendem a teoria heliocêntrica. A razão da proibição é porque no Salmo 104:5 da Bíblia, está escrito: "Deus colocou a Terra em suas fundações, para que não se mova por todo o sempre", além de referências similares no livro de Joshua.

Galileo se dedicou, então, a medir os períodos dos satélites de Júpiter, com a intenção de difundir seu uso para medir-se longitudes no mar, mas o método nunca foi usado no mar, por ser pouco prático, e só raramente em terra.

Em agosto de 1623, o cardeal Maffeo Barberini, amigo e patrono de Galileo, foi eleito papa e assumiu com o nome de Urbano VIII. Em abril de 1624, Galileo teve seis audiências com o papa, que o liberou a escrever sobre a teoria de Copérnico, desde que fosse tratada como uma hipótese matemática. Galileo inventou o microscópio em 1624, chamado por ele de *occhialini*.

Em abril de 1630, Galileo terminou seu *Dialogo di Galileo Galilei Linceo, dove ne i congressi di quattro giornate si discorre sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (Diálogo dos dois mundos), e o enviou ao Vaticano para liberação para publicação. Recebendo autorização para publicá-lo em Florença, o livro saiu da tipografia *Tre Pesci* (Três Peixes)

em 21 de fevereiro de 1632. Note que Galileo não incluiu o sistema de Tycho Brahe, em que os planetas giram em torno do Sol, mas este gira em torno da Terra, o sistema de compromisso aceito pelos jesuítas. No Diálogo, Galileo defende o movimento diário e anual da Terra, e mostra como o sistema de Copérnico explica os fenômenos celestes, principalmente as fases de Vênus, que refuta o sistema de Ptolomeu. O livro não desenvolve detalhes matemáticos do sistema, como epiciclos, e nunca se refere às leis de Kepler. É escrito não em latim, mas em italiano, não tem apenas o carácter estritamente científico, mas também o de uma obra pedagógico-filosófica. O papa, que enfrentava grande oposição política na época, enviou o caso para a Inquisição, que exigiu a presença de Galileo em Roma, para ser julgado por heresia. Apesar de ter sido publicado com as autorizações eclesiásticas prescritas, Galileo foi intimado a Roma, julgado e condenado por heresia em 1633. Em 22 de junho de 1633, em uma cerimômia formal no convento dos padres dominicanos de Santa Maria de Minerva, lida a sentença proibindo o Diálogo, e sentenciando seu autor ao cárcere, Galileo, aos setenta anos, renega suas conclusões de que a Terra não é o centro do Universo e imóvel. A sentença ao exílio foi depois convertida a aprisionamento em sua residência, em Arcetri, onde permaneceu até sua morte.

Apesar de praticamente cego, completa o *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, attinenti alla meccanica e I movimenti locali* (Discurso das duas novas ciências, Mecânica e Dinâmica), contrabandeado para a Holanda, pois Galileo havia sido também proibido de contato público e de publicar novos livros. O livro foi publicado em Leiden, em 1638, e trata das oscilações pendulares e suas leis, da coesão dos sólidos, do movimento uniforme, acelerado e uniformemente acelerado, e da forma parabólica das trajetórias percorridas pelos projéteis.

Faleceu em 8 de janeiro de 1642 em Arcetri, perto de Florença, e foi enterrado na Igreja da Santa Cruz, em Florença. Apenas em 1822 foram retiradas do Índice de livros proibidos as obras de Copérnico, Kepler e Galileo. Em 1979, o Papa João Paulo II ordenou um reexame do processo contra Galileo, e em 1992 a comissão papal reconheceu o erro do Vaticano o que eliminou os últimos vestígios de resistência, por parte da igreja Católica, à revolução copernicana.

Notas: O Sacro Império Romano, eregido como uma tentativa de reconstruir o Império Romano do Ocidente que decaiu entre o século V e VII, iniciou em 962 d.C., com a coroação do saxão Oto I pelo Papa João XII, em Roma. Frederico V de Habsburgo, eleito Imperador do Sacro Império Romano como Frederico III, reinou de 1440 a 1493. O império durou até

1806.

Em 1559, aparece o primeiro Índice dos Livros Proibidos e, depois de 1565, sob o Papa Pio V, funciona regularmente a Congregação do Índice.

O Papa Gregório XIII, inspirador do calendário Gregoriano, mandou construir, em 1567, um grande prédio especificamente para os Colégios Romanos, fundado por Santo Ignácio de Loiola em 1551, da Sociedade de Jesus.

Em 31 de outubro de 1517, o padre agostinho Martinho Lutero (1483-1546) afixa na porta do castelo eleitoral de Wittenberg as 95 proposições que condena o mercantilismo das indulgências, voltadas para o lucro material da Igreja.

A bula *Exsurge Domine*, de 15 de junho de 1520, condena 41 das proposições, e a bula *Decet Romanum Pontificiem*, de 3 de janeiro de 1521, do Papa Leão X, excomunga Lutero, que, logo após, traduz o Novo Testamento para o alemão.

Por proposta de Ferdinando I, a Dieta de Spira (1529) dá aos príncipes católicos o direito de não permitir os luteranos em seus domínios, ao passo que os luteranos devem tolerar o catolicismo em seus Estados. Os luteranos protestam com veemência, datando daí o nome de "protestantes" como serão conhecidas.

A.5 Christiaan Huygens



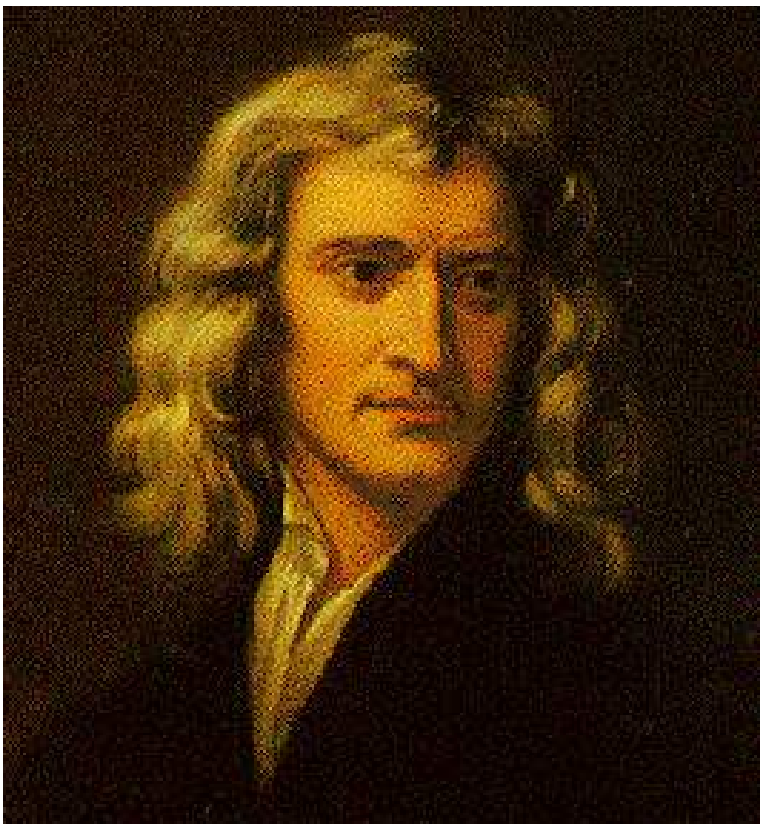
Christiaan Huygens, nasceu em 14 de abril de 1629 em The Hague, Holanda, e faleceu em 8 de julho de 1695, na mesma cidade. Estudou Direito e Matemática na Universidade de Leiden de 1645 a 1647, e de 1647 a 1649 no Colégio Orange, em Breda. Em 1654, descobriu uma nova maneira de polir lentes, tendo feito alguns dos melhores telescópios da época. Com eles, descobriu a forma dos anéis de Saturno, e seu satélite Titan. Em seu Systema Saturnium (1659), Huygens explica as fases e as mudanças de forma do anel. Foi o primeiro a usar relógios de pêndulos, patenteados por ele, em 1656, estimulado pela descoberta de Galileo de que para pequenas oscilações, o período T de um pêndulo não depende da amplitude. Descobriu que, nesse caso, $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde ℓ é o comprimento do pêndulo, e g a aceleração da gravidade.

Investigou as leis da colisão, estabelecendo, nesse caso, a conservação do momentum linear. Formulou uma teoria ondulatória da luz, mas supondo ondas longitudinais. Viveu por longos períodos em Paris, colaborando na Academia Real de Ciências, com auxílio real.

No final de sua vida, compôs um dos primeiros trabalhos propondo a possibilidade de vida extraterrestre, publicado após sua morte como o Cosmotheoros (1698). Nesse livro, Huygens dizia ter a mesma opinião dos grandes filósofos de sua época, que consideravam o Sol da mesma natureza das

estrelas fixas. Tendo falhado ao tentar medir a paralaxe, procurou medir a distância relativa entre o Sol e Sírius, a estrela mais brilhante do céu e que, por isso, ele supôs a mais próxima, usando a diferença entre a luz de ambas que chega à Terra. Bloqueou a luz do Sol, deixando-a passar sucessivamente através de dois pequenos orifícios, até que parecesse com Sírius, e concluiu que Sírius estaria 27 664 vezes mais distante que o Sol (valor 26 vezes menor que o real, de 2,7 pc). A maior fonte de erro na medida de Huygens foi assumir que Sírius tem o mesmo brilho que o Sol.

A.6 Isaac Newton



A vida de Newton pode ser dividida em três períodos. O primeiro, sua juventude, de 1643 até sua graduação em 1669. O segundo, de 1669 a 1687, foi o período altamente produtivo em que ele era professor Lucasiano em Cambridge. O terceiro período viu Newton como um funcionário do governo bem pago em Londres, com pouco interesse pela matemática, mas atuante como presidente da Sociedade Real.

Isaac Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643 (quase um ano depois da morte de Galileo) em Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Embora tenha nascido no dia de Natal de 1642, a data dada aqui é no calendário gregoriano, que adotamos hoje, mas que só foi adotada na Inglaterra em 1752. Newton veio de uma família de agricultores, mas seu pai, também chamado Isaac Newton (1606-1642), morreu antes de seu nascimento. Ele foi criado por sua avó, e não por sua mãe Hannah Ayscough (1623-1679). Um tio o enviou para o Trinity College, Cambridge, em Junho de 1661.

O objectivo inicial de Newton em Cambridge era o direito. Em Cambridge, estudou a filosofia de Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), Descartes (René Descartes, 1596-1650), Gassendi (Pierre Gassendi, 1592-1655), e Boyle (Robert Boyle, 1627-1691), a nova álgebra e geometria analítica de Viète (François Viète, 1540-1603), Descartes e Wallis (John Wallis, 1616-1703); a mecânica da astronomia de Copérnico e Galileo, e a óptica de Kepler o atraíram. O talento de Newton emergiu com a chegada de Isaac Barrow (1630-1677), para a cadeira Lucasiana de matemática em Cambridge.

Seu gênio científico despertou quando uma epidemia de peste fechou a Universidade no verão de 1665, e ele retornou a Lincolnshire. Só em Londres, a peste vitimou mais 70 000 pessoas. Lá, em um período de menos de dois anos, Newton, que ainda não tinha completado 25 anos, iniciou a revolução da matemática, óptica, física e astronomia.

Durante sua estada em casa, ele lançou a base do cálculo diferencial e integral, muitos anos antes de sua descoberta independente por Leibniz (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716). O "método dos *fluxions*", como ele o chamava, estava baseado na descoberta crucial de que a integração de uma função é meramente o procedimento inverso da diferenciação. Seu livro *De Methodis Serierum et Fluxionum* foi escrito em 1671, mas só foi publicado quando John Colson o traduziu para o inglês, em 1736.

Com a saída de Barrow da cadeira Lucasiana em 1669, Newton, com apenas 27 anos, foi nomeado para sua posição, por indicação do anterior, por seus trabalhos em cálculo integral, em que Newton havia feito progresso em um método geral de calcular a área delimitada por uma curva.

O primeiro trabalho de Newton como professor Lucasiano foi em óptica. Ele havia concluído durante os dois anos de peste que a luz branca não é um entidade simples, como acreditavam todos desde Aristóteles. Embora o fato de que a luz solar produz várias cores ao passar por um prisma fosse conhecido, vigorava a concepção de Aristóteles de que as cores apareciam por modificação da luz, conforme *De Refracione*, publicado em Nápoles, em 1558, por Giambattista della Porta.

A aberração cromática (anéis coloridos em volta da imagem) de uma lente de telescópio convenceu Newton do contrário. Quando ele passava um feixe de luz solar por um prisma de vidro, um espectro de cores se formava, mas, ao passar a luz azul por um segundo prisma, sua cor não mudava.

Newton argumentou que a luz branca era, na verdade, uma mistura de diferentes tipos de raios que eram refractados em ângulos ligeiramente diferentes, e que cada tipo de raio diferente produz uma cor espectral diferente. Newton concluiu, erroneamente, que telescópios usando lentes refratoras so-

freriam sempre de aberração cromática. Ele, então, propôs e construiu um telescópio refletor, com 15 cm de comprimento.

Newton colocou um espelho plano no tubo, a 45^o, refletindo a imagem para uma ocular colocada no lado. O telescópio de Newton gerava imagens nove vezes maior do que um refractor quatro vezes mais longo. Os espelhos esféricos construídos naquela época produziam imagens imperfeitas, com aberração esférica.

Newton foi eleito membro da Sociedade Real em 1672, após doar um telescópio refletor. Ainda em 1672, Newton publicou seu primeiro trabalho científico sobre luz e cor, no *Philosophical Transactions of the Royal Society.*

Seu livro *Opticks* só foi publicado em 1704, tratando da teoria da luz e cor e com (i) investigações da cor em películas finas (ii) anéis de interferência de Newton e (iii) difração da luz.

Seu trabalho mais importante foi em mecânica celeste, que culminou com a Teoria da Gravitação Universal. Em 1666, Newton tinha versões preliminares de suas três leis do movimento. Ele descobriu a lei da força centrípeta sobre um corpo em órbita circular.

A idéia genial de Newton, em 1666, foi imaginar que a força centrípeta na Lua era proporcionada pela atração gravitacional da Terra.

Com sua lei para a força centrípeta e a terceira Lei de Kepler, Newton deduziu a lei da atração gravitacional.

Em 1679, Newton provou que a Lei das Áreas de Kepler é uma conseqüência da força centrípeta, e também que a órbita é uma elipse, para um corpo sob uma força central em que a dependência radial varia com o inverso do quadrado da distância ao centro.

Em agosto de 1684, Edmond Halley (1656-1742) visitou Newton para perguntar-lhe sobre as órbitas planetárias, e Newton afirmou que já havia resolvido o problema muitos anos antes, mas não encontrou a demonstração no momento. Após recebê-la, Halley decidiu persuadir Newton a escrever um trabalho completo sobre sua nova física e sua aplicação à Astronomia. Em menos de 2 anos, Newton tinha escrito os dois primeiros volumes do *Principia*, com suas leis gerais, mas também com aplicações a colisões, o pêndulo, projéteis, fricção do ar, hidrostática e propagação de ondas. Somente depois, no terceiro volume, Newton aplicou suas leis ao movimento dos corpos celestes. Em 1687, é publicado o *Philosophiae naturalis principia mathematica* ou *Principia*, como é conhecido.

O *Principia* é reconhecido como o mais importante livro científico já escrito. Newton analisou o movimento dos corpos em meios resistentes e não-resistentes sob a ação de forças centrípetas. Os resultados eram aplicados

a corpos em órbita, e queda livre perto da Terra. Ele também demonstrou que os planetas são atraídos pelo Sol pela Lei da Gravitação Universal e generalizou que todos os corpos celestes atraem-se mutuamente.

Newton explicou uma ampla gama de fenômenos até então não-correlatos: a órbita excêntrica dos cometas; as marés e suas variações; a precessão do eixo da Terra e o movimento da Lua perturbado pela gravidade do Sol.

Newton já explicava que o movimento de três corpos sob uma força central só pode ser resolvido por aproximação, que a Lei da Gravitação Universal trata os corpos como pontos, e que os planetas não são pontos, nem ao menos esféricos, que o movimento das marés introduz perturbações no cálculo das órbitas, as quais precisam ser calculadas por aproximações.

Depois de sofrer um colapso nervoso, em 1693, Newton abandonou a pesquisa para uma posição no governo em Londres, tornando-se guardião da Casa da Moeda Real (1696) e mestre (1699).

Em 1703, foi eleito presidente da Sociedade Real, e foi reeleito a cada ano até sua morte. Foi agraciado com o título de cavalheiro (*Sir*), em 1708, pela Rainha Anne, o primeiro cientista a receber essa honra.

Morreu em 31 de março de 1727, em Londres, Inglaterra.

A.7 Gian Domenico Cassini



Gian (Giovanni) Domenico Cassini nasceu em 8 de junho de 1625, em Perinaldo, República de Gênova, atual Itália, e faleceu em 14 de setembro de 1712, em Paris, França. Estudou no colégio jesuíta em Gênova, e no seminário de San Fructuoso. De 1648 a 1669, Cassini observou o céu no Observatório Panzano e, em 1650, tornou-se professor de astronomia na Universidade de Bologna. Foi convidado por Luis XIV para ir para Paris em 1669, onde tornou-se o diretor do Observatoire de Paris, e cidadão francês, nunca retornando à Itália.

Descobriu quatro satélites de Saturno, Iapetus (1671), Rhea (1672), Tethys e Dione (1684), a divisão dos anéis de Saturno, conhecida como a separação Cassini, produziu um grande mapa da Lua e refinou as tabelas dos satélites de Júpiter.

Seus descendentes, também astrônomos, mantiveram-se na França.

A.8 Edmond Halley



Edmond Halley[2] nasceu em (29 out 1656 no calendário juliano) 8 de novembro de 1656, em Haggerston, Shoreditch, Inglaterra e faleceu em 14 de janeiro de 1742, em Greenwich, Inglaterra. Interrompeu seus estudos em Oxford, em 1676, para catalogar 350 estrelas no Hemisfério Sul e observar o trânsito de Mercúrio pelo disco solar, passando 2 anos na ilha de Santa Helena, no Atlântico, 1200 milhas a oeste da África (lat=-16 graus), financiado por seu pai, também chamado Edmond Halley, um rico mercador de sabão e sal. Nesta estada ele observou as "duas nebulosas" próximas da Via Láctea, as Nuvens de Magalhães. Retornando à Inglaterra em 1678, publicou seu catálogo de 341 estrelas austrais (*Catalogus Stellarum Astralium*, 1679), conectando suas observações comas estrelas do hemisfério norte catalogadas por Giovanni Domenico Cassini (1646-1719) em Paris, Johannes Hevelius (Höfelcke) (1611-1687) em Danzig e John Flamesteed (166-1719), o primeiro astrônomo real inglês. Realizou seus exames em Oxford e, em 29 de julho de 1680, foi eleito para a *Royal Society*.

O cometa brilhante que apareceu em 1664 foi observado por Adrien Auzout (1622-1691) no Observatòire de Paris, Huygens na Holanda, Hevelius em Danzig, e Robert Hooke (1635-1703) na Inglaterra. Qual seria sua órbita?

[2]No prefácio do *Principia* de Newton, consta Edmund Halley, bem como em muitas enciclopédias, mas as referências atuais são para Edmond Halley, como o livro *Edmond Halley*, de Alan Cook, chefe do Departamento de Física da Universidade de Cambridge, 1998.

Tycho Brahe tinha suposto circular, Kepler dizia que era em linha reta, com curvatura devida à órbita da Terra. Hevelius propôs que fosse elíptica. Em 1665, o francês Pierre Petit, em seu *Dissertação sobre a natureza dos cometas* propôs pela primeira vez que suas órbitas fossem fechadas, e que os cometas de 1618 e 1664 poderiam ser o mesmo cometa.

Halley observou um cometa brilhante em novembro de 1681 em Londres e especulou sobre o problema da gravitação em relação aos cometas. Sem conseguir resolver o problema, em agosto de 1684 ele o propôs a Newton. Newton disse que já o havia resolvido o problema muitos anos antes, e que todos os movimentos no sistema solar poderiam ser explicados pela lei da gravitação. Um cometa na constelação de Virgem, em 1680, tinha uma órbita claramente curva. Em menos de 2 anos, Newton tinha escrito os dois primeiros volumes do *Principia*. No terceiro volume, Newton aplicou suas leis ao movimento dos corpos celestes, inclusive de cometas. Foi graças ao esforço de Halley que o *Principia* foi publicado. Halley chegou a custear a impressão do mesmo, apesar de problemas judiciais com a herança de seu pai e de que Newton era rico. Halley também cuidou da discussão com o impressor, da correção das provas, da verificação dos diagramas e dos cálculos.

Em 1695 Halley computa a órbita dos cometas usando a teoria de Newton, incluindo o efeito dos grandes planetas Júpiter e Saturno nas órbitas elípticas e encontrou que o cometa de 1682, que mais tarde levaria o nome de Halley, tinha um período de 67 anos e tinha sido observado em 1531 e 1607. Em 1705 ele publicou o *Synopsis of the Astronomy of Comets*, prevendo que o cometa deveria reaparecer em 1758, como de fato foi observado.

Halley foi nomeado professor Savilian de geometria em Oxford em 1704. Em 1720, foi o sucessor de John Flamsteed (1646-1719) como astrônomo real. No Greenwich Observatory, usou o primeiro instrumento de trânsito e estabeleceu um método para determinar a longitude no mar usando observações lunares. Halley foi quem descobriu o cúmulo globular em Hércules e, em 1718, detectou o movimento próprio das estrelas (movimento intrínseco das estrelas no plano do céu). Produziu um estudo intensivo do magnetismo terrestre, das marés e correntes e fez avanços na compreensão de fenômenos meteorológicos. A primeira descrição do ciclo de evaporação, formação de nuvens, precipitação, e evaporação é sua. Iniciou um programa sistemático para a determinação precisa da distância da Terra ao Sol usando o trânsito de Mercúrio pelo disco solar.

Bibliografia

1. ABELL, George Ogden (1927-1983); MORRISON, David; WOLFF, Sidney. *Exploration of the Universe*. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1991.

2. ALONSO, Marcelo; FINN, Edward J. *Fundamental University Physics. III Quantum and Statistical Physics*. Reading: Addison-Wesley, 1968.

3. BERRY, Arthur. *A Short History of Astronomy*. New York: Dover, 1961.

4. BOCZKO, Roberto. *Conceitos de Astronomia*. São Paulo: Edgard Blücher, 1984.

5. CAJORI, Florian. *A History of Physics*. New York: Dover, 1929.

6. CASPAR, M. *Kepler*. New York: Dover, 1993.

7. CHAISSON, Eric; MCMILLAN, Steve. *Astronomy Today*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.

8. CLAYTON, Donald D. *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. New York: McGraw-Hill, 1968.

9. COX, John P. (1926-1984); GIULI, R. Thomas. *Principles of Stellar Structure*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

10. DREYER, J.L.E. *A History of Astronomy from Thales to Kepler*. New York: Dover, 1953.

11. EINSTEIN, Albert. *Relativity: The Special and the General Theory*. New York: Bonanza Books, 1961.

12. EISBERG, Robert Martin. *Fundamentals of Modern Physics*. New York: John Wiley & Son, 1961.

13. GEYMONAT, L. *Galileu Galilei*. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

14. GLENDENNING, Norman K. *Compact Stars*. New York: Springer-Verlag, 1997.

15. GREENE, Brian. *The Elegant Universe*. New York: W.W. Norton & Company, 1999.

16. GUTH, Alan H. *The Inflationary Universe*. Reading: Perseus Books, 1997.

17. HANSEN, Carl J. (1933-); KAWALER, Steven D. (1958-). *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*. New York: Springer-Verlag, 1994.

18. HARTMANN, William K. *Moons & Planets*. Belmont: Wadsworth Publishing Company, 1999.

19. HEARNSHAW, John B. *The Analysis of Starlight*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

20. KARTTUNEN, H.; KRÖGER, P.; OJA, H.; POUTANEN, M.; DONNER, K.J. (Eds). *Fundamental Astronomy*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

21. KAUFMANN III, William J.; FREEDMAN, Roger A. *Universe*. 4th Edition. New York: W.H. Freeman and Company, 1998.

22. KIPPENHAHN, Rudolf; WEIGERT, Alfred. *Stellar Structure and Evolution*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

23. KITCHIN, C.R. *Astrophysical Techniques*. 3rd Edition. Bristol: IOP Publishing, 1998.

24. MACIEL, W. (Ed.). *Astronomia e Astrofísica*. São Paulo: IAG/USP, 1991.

25. MAURY, Jean-Pierre. *Newton, the Father of Modern Astronomy*. London: Harry N. Abrans editor, 1992.

26. MISNER, Charles W. (1932-); THORNE, Kip S. (1940-); WHEELER, John Archibald (1911-). *Gravitation.* San Francisco: W.H. Freeman & Co., 1973.

27. MITTON, Jacqueline. *A concise dictionary of Astronomy.* New York: Oxford University Press, 1991.

28. MORRISON, David; WOLFF, Sidney; FRAKNOI, Andrew. *Abell's Exploration of the Universe.* Philadelphia: Saunders College Publishing, 1995.

29. MOTZ, Lloyd; WEAVER, Jefferson Hane. *The Story of Astronomy.* New York: Plenum Press, 1995.

30. ROSE, William Kenneth (1935-). *Advanced Stellar Astrophysics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

31. ROBBINS, R.; JEFFERYS, W.; SHAWL, S. *Discovering Astronomy.* New York: John Wiley & Sons, 1995.

32. SHU, Frank. *The physical Universe; An Introduction to Astronomy.* Mill Valley: Universe Science Books, 1982.

33. SMART, W.M. *Textbook on Spherical Astronomy.* Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

34. SCHWARZSCHILD, Martin (1912-1997). *Structure and Evolution of the Stars.* New York: Dover Publications, 1958.

35. ZEILIK, Michael. *Astronomy - The Evolving Universe.* New York: John Wiley & Sons, 1994.

36. ZEILIK, Michael; SMITH, Elske. *Introductory Astronomy and Astrophysics.* Philadelphia: Saunders College Publishing, 1987.

Índice

aberração, 752
absorção, 344
Abundância dos Elementos, 371
abundâncias, 654
Adams
    Walter, 250
adiabática, 543
Aggarwald
    Hans, 122
aglomerados, 595
aglomerados de galáxias, 619
aglomerados globulares, 595
Airy
    George, 220
Algol, 187
ALH84001, 171
Almagesto, 5
Alpher
    Ralph, 645
Althaus
    Leandro, 420
altura, 16
Alvarez
    Luis, 267
aminoácidos, 170
amônia, 596
anã branca
    áxions, 422
anã marrom, 249
anãs brancas, 250, 651
    cristalização, 483
    função luminosidade, 490
    pulsações, 560
Anaxágoras, 52
Anderson
    Carl, 661
Ando
    Hiroyasu, 550, 560
Andrômeda, 604
anéis, 153
Ångström
    Anders, 220
ângulo horário, 19
ângulo sólido, 194
ano
    sideral, 38
    tropical, 38
ano tropical, 126
ano-luz, 182
antimatéria, 652, 653
aproximação
    não adiabática, 557
aproximação adiabática, 543
Arecibo, 641
Aristarco, 3, 66
Aristóteles, 3
Arnett
    David, 340, 572
Arquimedes, 745
ascensão reta, 17
asteróides, 147
    1996TL66, 148

astrologia, 740
atmosferas
    retenção, 142
auroras, 166
autofunções, 548
avermelhamento
    gravitacional, 679
áxions, 416
azimute, 16

Baade, 596
bactérias, 169
Bahcall
    John, 265
Ball
    Robert, 252
Balmer, 225
    Johann, 225
Barberini
    Maffeo, 745
Barnard
    Edward, 157
Bayer
    Johann, 7
Becquerel
    Edmond, 228
Bell
    Jocelyn, 278
Bell Labs, 644
Bellarmino
    Roberto, 746
Bennett
    Charles, 662
Benvenuto
    Omar, 420
Bessel
    Friedrich, 250, 741
Bethe
    Hans, 168, 255, 647
Biermann
    Ludwig, 363
Big Bang, 643, 645
Big Crunch, 643
binárias, 187
    astrométricas, 188
    eclipsantes, 189
    espectroscópicas, 188
    visuais, 188
bissexto, 41
Bjorken
    James, 661
BL Lacertae, 632
Black
    Joseph, 319
blazares, 632
Bode
    Johann, 73
Böhm-Vitense
    Erica, 363
Bohr
    Niels, 222
Bok
    Bart, 520
    glóbulos, 520
Boltzmann, 235
    Ludwig, 213, 322
bomba atômica, 258
Bondi
    Herman, 643
Born Again, 477
Bose
    Satyendra, 288
Bose-Einstein, 211, 288
bósons, 288
Bowen
    Ira, 227
BPM 37093, 484
braços espirais, 597
Bradley

James, 187
Paul, 561
Brahe
Tycho, 736
Breit
Gregory, 403
Breit-Wigner
fórmula, 403
brilho superficial, 198
Brillouin
Marcel, 401
Brunt
David, 554
Brunt-Väisälä, 554
Bunsen
Robert, 218
buraco negro, 112, 272, 619
Burbidge
Geoffrey, 409
Margaret, 409
(B-V), 207

calendário, 38
calendário Gregoriano, 39
calendário Romano, 41
Cameron
Alastair, 340
Cannon
Annie, 228
carbono, 170
Cassegrain
Guillaume, 702
Cassini, 755
Giovanni, 167, 181
Caughlan
Georgeanne, 404
Cavendish
Henry, 220
CCD, 285
Cefeidas, 254, 282, 466, 557, 604
Relação P-L, 466
Čerenkov
Pavel, 264
Chadwick
James, 255
Chandrasekhar, 251, 570
Subrahmanyan, 446
Chapman
Sydney, 374
Chrétien
Henri, 704
Christenson
James, 653
Christoffel
Elwin, 504, 685
símbolos, 504, 685
ciclo do carbono, 256
ciclo próton-próton, 256
ciclos solares, 163
cinturão de Van Allen, 166
círculo vertical, 12
circumpolares, 10, 24
civilizações extra-terrestres, 172
Clarck
Alvan, 188
Clark
Alvan, 250
classes espectrais, 228
classificação de luminosidade, 230
classificação espectral, 227
Clausius
Rudolf, 258, 318, 321
Clavius
Christoph, 39
COBE, 653
Cockroft
John, 267
Collegium Maius, 734
Coma, 617, 619

cometa, 154
    Hale–Bopp, 155
    Halley, 155
    Nuvem de Oort, 156
    Shoemaker-Levy 9, 155
cometas, 170
composição química, 218
compostos orgânicos, 170
Compton
    Arthur, 379
condição de estabilidade
    de Ledoux, 359
    de Schwarzschild, 358
condritos, 149
condução, 343
conducção, 392
configurações, 68
    conjunção, 68
    oposição, 68
    quadratura, 68
conjunção, 68
conservação de energia, 172
constante cosmológica (Λ), 683
Constelações, 6
contravariante, 686
convecção, 161, 343
coordenadas, 15
coordenadas gaussianas, 682
Copérnico, 733
    Nicolau, 66
Coriolis
    Gaspard, 533
coroa, 161, 165
corpo negro, 212
Córsico
    Alejandro, 420
cosmologia, 635
Coulomb
    Charles, 223, 400
    lei de, 223
covariante, 686
Cowan
    Clyde, 263
Cowling
    Thomas, 374
Cox
    Arthur, 394
    John, 550
CP, 416
crateras, 140
cristalização, 483
Critchfield
    Charles, 256
critério
    de Ledoux, 359
    de Schwarzschild, 359
Crommelin
    Andrew, 639
cromosfera, 161, 163
Cronin
    James, 653
Crusius
    Martin, 739
cúmulos de galáxias, 618
Curtis
    Heber, 604
Cusa
    Nicolás, 700

Daguerre
    Louis, 227
Dahn
    Conard, 490
data juliana, 41
datação, 267
DAV, 561
Davis
    Raymond, 263
DBV, 561

de Broglie
Louis, 222
de Sitter
Willem, 638
de Vaucouleurs
Gérard, 620
Debye
Peter, 408, 490
decaimento do próton, 649
declinação, 17
deferente, 65
densidade
crítica, 654
crítica, 643, 669
de estados livres, g(p), 289
partículas, 289
desacoplamento
matéria-radiação, 697
Descartes
René, 681
desvio para o vermelho, 645
Deubner
Franz, 560
deutério, 266, 268
Diagrama HR, 239
Diaz
Marcos, 484
Dicke
Robert, 644
difusão, 374
Digges
Leonard, 699
Dirac
Paul, 289
distribuição de Bose-Einstein, 211
Dolez
Noel, 561
Dolland
John, 702
Donati
Giovanni, 220
Doppler, 191
Christian, 191, 234
Drake, 173
Draper
Henry, 228
John, 228
Dziembowski
Wojciech, 561

E_{B-V}, 208
eclipses, 54
tabelas, 61
eclíptica, 43
Eddington
Arthur, 253, 282, 431, 475
Efeito Doppler, 234
efeito estufa, 143
efeito fotoelétrico, 221
Einstein, 268
Albert, 221, 254, 637
constante gravitacional, 503, 684
equação de campo, 503, 683
elétron, 661
elipses, 76
elongação, 68
Emden, 425
emissão, 346
emissividade, 346
energia, 252
de Fermi, 289
de ligação, 266
efetiva de reação nuclear, 403
gravitacional, 252, 317
nuclear, 255, 398
potencial, 252
térmica, 291, 317
energia escura, 662
entropia, 258, 321

epiciclo, 65
equação de Drake, 173
Equação de Excitação, 235
Equação de Ionização, 237
equação de onda, 548
equação do tempo, 37
Equador celeste, 11
equante, 66
equilíbrio
convectivo, 361
hidrostático, 138, 313
radiativo, 353
térmico, 340, 355
equilíbrio térmico, 287, 291
era, 42
de Aquário, 42
Eratóstenes, 4
Erfle
Heinrich, 709
Éris, 135, 148
erosão, 140
esfera celeste, 9
esféricos harmônicos, 553
espaçonaves, 172
espalhamento, 595
espalhamento Thomson, 386
espectros
classificação, 228
Espectroscopia, 217
estações, 43
estatística
Bose-Einstein, 288
Fermi-Dirac, 288
Maxwell-Boltzmann, 288
estrela da Pistola, 273
estrela de nêutrons, 272
estrelas, 239
variáveis, 543
estrutura hiperfina, 594
Eudóxio, 3
Euler
Leonhard, 522, 551
Euleriana, 551
Europa
água, 170
evolução da vida, 175
Ewen
Harold, 594
excesso de cor, 208
excitação, 236
experimento de Davis, 263
experimento de Miller-Urey, 170
extinção
interestelar, 595
extinção atmosférica, 204
extra-terrestres, 172
extremófilos, 175

Fabricius
David, 162
Johannes, 162
fator de Gaunt, 381
fator de guilhotina, 389
Fermi
Enrico, 288
Fermi-Dirac, 288
Fermilab, 661
férmions, 288
Feynman
Richard, 322
Fick
Adolf, 374
leis, 374
Filolaus, 3
fissão, 266
Fitch
Val, 653
Fleming
Williamina, 228

Fontaine
Gilles, 490, 561
força
forte, 417
forças
de maré, 116
diferenciais, 113
Fornax, 619
fósseis, 169
fotografia, 227
Fotometria, 193
fóton, 221
fotosfera, 160, 161
Fourier
Jean, 552
Fowler
Ralph, 381
William, 339, 404, 409, 499
Fraunhofer
Joseph, 218
fricção, 252
Friedman
Jerome, 660
Friedmann
Aleksandr, 687
Alexander, 642
função de massa, 454
função inicial de massa, 595
função luminosidade, 490
fusão, 266
fusão nuclear, 255
fusos, 37

γ, 559
densidade de estados livres, 289
Galáxias Seyfert, 631
Galáxia
massa, 586
rotação, 586
galáxias, 603
aglomerados, 619
barradas, 605
classificação, 604
colisões, 620
elípticas, 604
irregulares, 607
Galilei
Vincenzo, 562
Galileo, 81, 162, 744
Galilei, 700
Gamow
George, 412, 645, 647
García-Berro
Enrique, 420
gás, 593
relativístico, 290
gás de fótons, 295
gás ideal, 291
Gaunt, 381
Gauss
Carl, 682
Gell-Mann
Murray, 660
Geller
Margaret, 620
geodésica, 506, 685
gigantes, 274
Giovannini
Odilon, 484
Glashow
Sheldon, 661
Glendenning
Norman, 519
Gliese
Wilhem, 250
glúons, 417
Gödel
Kurt, 659
Gold

Thomas, 643
Goldstein
Eugen, 661
Goldstone
bóson, 417
Jeffrey, 417
Goodricke
John, 187, 280
gradiente de temperatura
adiabático, 358
Grande Unificação, 265
granulação, 161
Greenstein
Jesse, 474
Greenwich, 15
Grupo Local, 618
guilhotina, 389
GUT, 265, 423, 648
Gutenberg, 733
Johann, 733
Guth
Alan, 648

H^-, 391
Hadley
John, 702
Hahn
Otto, 268
Hall
Chester, 702
Halley, 583
cometa, 155
Edmond, 155, 756
Hamada, 471
Hansen
Carl, 490, 543
Harriot
Thomas, 162
Harvard, 228
Hawking
Stephen, 519
Hayashi
Chusiro, 465
limite de, 465
Heisenberg
Werner, 211, 287, 652
hélio
descoberta, 220
heliosismologia, 560
Helmholtz, 168
Hermann, 252, 319
Herbig-Haro, 530
Herman
Robert, 645
Hermite
Charles, 548
Hernanz
Margareta, 419
Herschel, 577
William, 135, 187
Hertzsprung
Ejnar, 239
Hevelius
Johannes, 7
Hewish
Antony, 278
HI em 21 cm, 594
Higgs
bóson, 417, 653
Peter, 648, 653
Hine
Butler, 475
Hiparco, 4, 199
Hipparcos, 283
HL Tau 76, 560
Holwarda
John, 280
homologia, 545
Hooft

Gerardus, 423
horizonte, 10
horizonte de eventos, 112
Hoyle
Fred, 337, 409, 499, 643
Hubble
classificação, 605
Edwin, 604, 641
Huchra
John, 620
Hückel
Erich, 408
Huggins
William, 227, 496
Hulse
Russell, 641
Humason
Milton, 642
Huygens, 749

Iben
Icko, 276, 446, 464, 477
idade da Terra, 175
idade do universo, 671
Iglesias
Carlos, 394
IMF, 454, 527
Índice, 748
índice de cor, 201, 207
Insolação, 46
intensidade, 194
interiores estelares, 287
inverno, 44
ionização, 237
Isern
Jordi, 420
isotrópica, 291

Jackson
John, 553
Jansky
Karl, 705
Jansse
Pierre, 220
Janssen
Zacharias, 700
Jeans
comprimento de onda, 524
critério, 524
James, 521
Johnson
Harold, 200
Joule
James, 252
Joyce
James, 660

κ, 559
Kanaan
Antonio, 484
Kant, 603
Immanuel, 132, 603
kaon, 653
Kawaler
Steven, 474, 475, 543
Keenan
Philip, 233
Kellman
Edith, 233
Kellner
Carl, 709
Kelvin, 253
William, 319
Kelvin-Helmholtz
tempo, 319
Kelvin-Helmoltz
tempo, 543
Kendall
Henri, 660
Kepler, 76, 423, 564, 570, 739

Johannes, 700
S.O., 474, 484, 491
Kerr
Roy, 659
Kibble
Thomas, 650
Kim
áxions, 419
Jihn, 422
Kirchhoff
Gustav, 218
Koester
Detlev, 561
Kolmogorov
Andrei, 370
Konkoly
Nicholas, 497
Kramers
Hendrik, 381, 391, 401
Kuiper
cinturão, 148
Gerard, 148
Kurlbaum
Ferdinand, 209

ℓ, 553
Lacaille
Nicolas, 7
Lagrange
Joseph, 534
Lagrangiana
descrição, 544
Lamb
Donald, 491
Horace, 554
Landau
Lev, 278
Landolt
Arlo, 560
Lane, 425
Lane-Emden
equação, 425
Langley
Samuel, 209
Laplace
Pierre, 132
Larmor
Joseph, 382
Larson
Richard, 530
latitude, 16
Laughlin
Gregory, 446
Le Verrier, 135
Urbain, 639
Leavitt
Henrietta, 281, 466
Lederman
Leon, 661
Ledoux, 359
Paul, 550
Legendre
Adrien, 553
Lei de Boltzmann, 235
Lei de Maxwell, 293
Lei de Planck, 211
máximo, 212
Lei de Saha, 237
Lei de Stefan-Boltzmann, 213
Lei de Wien, 212
Leibacher
John, 560
Leighton
Robert, 560
leis
Kepler, 75
Newton, 85
Leis de Kirchhoff, 219
Lemaître

Georges, 642
lente
acromática, 702
convexa, 700
lentes gravitacionais, 639
leptons
léptons, 661
Libby
Willard, 267
Liebert
James, 490, 492
Limite de Roche, 121
Lin
Chia, 598
Linde
Andrei, 648
linearização, 544
linhas
de Balmer, 225, 226
de Lyman, 226
espectrais, 217
proibidas, 227
Liouville
Joseph, 548
Lippershey, 81, 745
Hans, 700
Lóbulo de Roche, 534
Lockyer
Joseph, 220
Loewy
Maurice, 704
longitude, 15
Lorentz
Hendrik, 681
transformações, 681
Lua
diâmetro, 51
fases, 51
movimentos, 51
luminosidade, 214
definição, 197
Lummer
Otto, 209
luneta, 745
Lutero
Martinho, 748
Luyten
Willem, 474
Lyman, 225
Theodore, 225

M87, 619
Maeder
André, 456, 468
Maestlin
Michael, 739
bolométrica, 203
Magnitudes aparentes, 199
Maksutov
Dmitri, 704
manchas solares, 162
MAP, 662
Marconi, 704
marés, 113, 115, 118
massa de ar (μ), 206
Massa da Galáxia, 586
massa-luminosidade
relação, 355
massas, 189
matéria escura, 618, 647, 650
Mather
John, 654
Maxwell
James, 154
Maxwell-Boltzmann, 288
Mayer
Julius, 252
mecânica quântica, 287
Meitner

Lise, 268
Merzbacher
Eugene, 553
mês
lunar, 53
sideral, 53
Messier
Charles, 607
Mestel
Leon, 393, 478
meteoritos, 149, 170
meteoros, 149
métrica
Robertson-Walker, 692
Michell
John, 112, 542
microondas, 644
Miller
Stanley, 170
Milne
Edward, 238
Minkowski
espaço-tempo, 681
Hermann, 681
Rudolph, 497
Mira, 280, 466
missing mass, 588
modelo
geocêntrico, 65
heliocêntrico, 66
inflacionário, 648
modos
g, 550, 556
p, 550, 555, 560
r, 550, 554
s, 550
módulo de distância, 244
moléculas interestelares, 596
momentum
transferência, 291
Monet
David, 490
Montanari
Geminiano, 187
Morgan
William, 200, 233
movimento próprio, 583

nadir, 11
Nagler
Albert, 709
Nambu
Yoishiro, 417
Nasmyth
James, 704
Nather
R. Edward, 474, 475, 490
Nebulosa de Órion, 594
nebulosa solar, 132
nebulosas, 603
Neddermeyer
Seth, 661
neutrinos, 262, 421, 652
nêutron, 255
Newton, 751
Isaac, 700
Nicolaci da Costa
Luiz, 620
Niépce
Joseph, 227
níveis de energia, 222
Nobel
Alfred, 255
nodos, 60
novas, 494
Noyes
Robert, 560
Nuvem de Oort, 156
nuvens, 593

Nuvens de Magalhães, 608
nuvens moleculares, 595

Oberbeck
    Vern, 122
Olbers
    Heinrich, 636
Oliveira
    Kepler, 423, 474, 484, 490
Oliver, 172
ondas de densidade, 598
Oort, 156
    Jan, 618
opacidade, 344, 559
opacidades
    OPAL, 394
oposição, 68
Oppenheimer
    Robert, 251, 507, 514, 519
ordem, 553
Órion, 6
Órion
    Nebulosa, 594
Oró
    Juan, 171
Osaki
    Yoji, 550, 560
Osiander
    Andreas, 735
outono, 43
overshooting, 369
OVNIs, 172
ozônio, 170

paleontologia, 169
Pallas, 147
Paradoxo de Olbers, 636
paralaxe, 180, 741
    espectroscópica, 247
paralelos, 12
parâmetro
    de densidade, 671
parâmetro
    de desaceleração, 678
paridade, 416
parsec, 184
Páscoa, 39
Pauli
    Wolfgang, 225, 262, 288
Peccei
    Roberto, 418
Peebles
    James, 644
Pellegrini
    Paulo, 620
penumbra, 163
Penzias
    Arno, 644
Perfil da linha, 235
período
    sideral, 68
    sinódico, 68
Perl
    Martin, 661
Picard
    Jean, 181
Pickering
    Edward, 187, 228
Pigott
    Edward, 254
Pionner, 172
Pitágoras, 2, 562
Planck
    constante, 222, 652
    lei, 211
    Max, 209, 651
    tempo, 652
planeta
    equilíbrio hidrostático, 138

estrutura interna, 137
roração, 136
temperatura, 136
planetas, 65
atividade geológica, 139
atmosferas, 141
características, 135
crateras, 140
distância, 136
erosão, 140
exteriores, 67
interiores, 67
massas, 136
raio, 136
retenção de atmosfera, 142
superfícies, 139
planetas fora do Sistema Solar, 173
Plössl
Georg, 709
Plutão, 135
poeira, 593
Pogson
Norman, 199
Poisson
Siméon, 521
polítropos, 424
pólos celestes, 10
Polyakov
Alexander, 423
Ponto Áries, 18
população, 596
pósitron, 661
potencial químico, 289, 324
Pound
Robert, 680
Prandtl
Ludwig, 363
precessão, 4
precessão, 42, 124
pressão, 291
de radiação, 295
gás isotrópico, 293
primavera, 44
Principia, 753
princípio
da equivalência, 505
Princípio Cosmológico, 638
princípio da exclusão, 288
princípio da incerteza, 287, 289, 652
Pringsheim
Ernst, 209
problema do neutrino solar, 264
profundidade ótica(τ), 205
proto-estrela, 249
proto-sol, 133
próton, 661
decaimento, 417
Ptolomeu, 5, 65, 66
Claudius, 7
pulsação, 542
radial, 542
pulsações
não radiais, 550
pulsar, 641
Purcell
Edward, 594

QCD, 660
quadrivelocidade, 504, 684
quântica, 287
quantização, 221
quarks, 660
quasares, 625
queda livre, 543
Quinn
Helen, 418
quintessencia, 662

radiação, 194, 343

de corpo negro, 212
teoria, 209
radiação de fundo, 644
radio-galáxias, 629
Radiotelescópio, 704
raio da Terra, 4
Raio de Schwarzschild, 112
raio do horizonte, 112
Raman
Chandrasekhara, 380
ramo horizontal, 459
Ramsay
William, 220
Rayet
Georges, 271
Rayleigh, 282, 550
John, 380
reações nucleares
coeficientes, 398
seção de choque, 398
reações termo-nucleares, 168
Reber
Grote, 705
Rebka
Glen, 680
recombinação, 646, 653, 695
redshift, 645, 679
Rees
Martin, 525
refletividade, 137
Refletor, 700
Refrator, 700
região de ionização parcial, 559
Região HII, 594
Reines
Frederick, 263
relação massa-luminosidade, 247
relatividade
especial, 637
geral, 638
Relatividade Geral, 683
Renascença, 66
retenção da atmosfera, 170
Revolutionibus, 66, 735
Rheticus
Georg, 734
Ricci
Georgorio, 503, 686
tensor, 503, 686
Richer
Burton, 661
Jean, 167, 181
Riemann
Georg, 504, 685
Ritchey
George, 704
Robertson
Howard, 692
Roche
Édouard, 495
Edouard, 121
Roemer, 182
Olaus, 181
Rogers
Forrest, 394
Roll
Peter, 644
Rosen
Nathan, 659
Rossby
Carl, 554
Rosseland
opacidade de, 381
Svein, 381
rotação
diferencial, 598
rotação sincronizada, 119
RR Lyrae, 465

Rubens
Heinrich, 209
Rubin
Vera, 648
Russel
Henry, 239, 431
Rutherford
Ernest, 267, 661
Rutherfund
Lewis, 220

Saha
Megh, 237
Saio
Hideyuki, 550
Salam
Abdus, 421
Salpeter, 471, 527
Edwin, 274, 336, 454, 483, 625
Sandage
Allan, 245
Saros, 63
satélites, 152
Savary
Felix, 187
Schönberner
Detlef, 477
Scheiner
Christoph, 162
Schenberg
Mário, 275, 446
Mário, 412
Schenberg-Chandrasekhar
limite, 446
Schmidt
Bernhardt, 704
Schöner
Johanne, 734
Schrödinger
Erwin, 222
Schwarzschild
Karl, 112, 272, 358
Martin, 464, 572, 761
raio, 509
Secchi
Angelo, 220, 227
Século XXI, 41
Seitz
Fredrick, 408
semiconvecção, 369
SETI, 171
sextante, 702
Shapiro
Stuart, 407, 537
Shapley, 577
Harlow, 604
Shibahashi
Hiromoto, 550
Shu
Frank, 598
Siderius Nuncius, 745
Simon
George, 560
Sírius, 7
sismologia, 542
sistema
equatorial, 17
horizontal, 16
Sistema Solar, 132
massa, 132
origem, 132
Slipher
Vesto, 633
Smoot
George, 655
SN1987A, 278
Snider, 680
Snyder
Hartland, 519

SOHO, 554
Sol, 159
    oscilações, 560
    variável, 560
sombra, 55
    penumbra, 55
    umbra, 55
Sommerfeld
    Arnold, 401
spin, 594
Starfield
    Sumner, 561
Stark
    Johannes, 391
Stefan
    Josef, 213
Stein
    Robert, 560
Steinhardt
    Paul, 648
Strassmann
    Fritz, 268
Strömgren, 203
Strutt
    John, 550
Sturm
    Jacques, 548
supercordas - superstrings, 650
supernova, 272
supernovas, 494
    Tipo I, 497
    Tipo II, 497

T Tauri, 520
Tabelas Alfonsinas, 736
Tabor
    James, 394
Tales, 2
Taylor
    Joseph, 641
    Richard, 660
telescópio, 745
    Cassegrain, 702
    Newton, 753
    Ritchey-Chrétien, 703
Telescópios, 699
temperatura, 287
temperatura da Terra, 215
temperatura efetiva
    definição, 214
tempo
    civil, 36
    de contração de Kelvin, 319
    de queda livre, 317
    sideral, 19, 35
    solar, 35
    universal, 37
Tempo nuclear, 260
tensor
    de curvatura de Riemann, 686
    espaço-tempo, 503, 683
metrico
    métrico, 503, 683
tensor de Einstein, 504
tensor momentum-energia, 503, 683
teorema do virial, 318, 355
Teoria da Grande Unificação, 648
teoria de gauge, 661
termodinâmica, 252
    primeira lei, 324
Teukolski
    Saul, 407
Thompson
    Benjamin, 252
Thomson
    Joseph, 379, 661
    William, 253
Ting
    Samuel, 661

Titius
Johann, 73
TNT, 258
Tolman
Richard, 507, 514
Tombaugh
Clyde, 135, 157
Toomre, 622
torque, 125
transporte
por convecção, 356, 362
transporte radiativo, 343, 344, 346
triplo-α, 258
trítio, 267
Trópico, 44
Trumpler
Julius, 206
Truran
James, 340
Tsallis
Constantino, 322
Turlay
René, 653
Tycho, 75, 736
modelo, 737

(U-B), 207
UBV, 200
curvas de transmissão, 200
UFOS, 172
Ulrich
Roger, 560
umbra, 163
unidade astronômica, 181
unidade de massa atômica, 268
Universo, 635
evolução química, 651
idade, 650
Unno
Wasaburo, 550
Uraniburg, 737
Urca, 412, 499
Urey
Harold, 170, 267

Väisälä
Yrjö, 554
Van Allen
cinturão, 166
James, 165
van de Hulst
Hendrick, 594
Van Horn
Hugh, 490
Vauclair
Gerard, 561
velocidade da luz, 182
velocidade radial, 234, 584
vento solar, 165
verão, 45
Via Láctea, 577
estrutura espiral, 597
massa, 586
morfologia, 582
viagem interestelar, 172
viagem no tempo, 659
Vida, 169
Vida Extraterrestre, 169
Vida no Sistema Solar, 171
Virial, 261
Virgem, 619
virial, 318
Vogel
Hermann, 497
Vogt
Heinrich, 431
Vogt-Russel
teorema, 432
Volkoff
George, 251, 507, 514

Voyager, 172

Walker
    Arthur, 692
Walraven
    Théodore, 550
Watt
    James, 167
Weinberg
    Steven, 421
Weizäcker
    Carl, 133, 256
Wentzel
    Gregor, 401
Wheeler
    John, 112
Whipple
    Fred, 154
Whole Earth Telescope, 474, 484
Wien
    lei de, 220
    Wilhelm, 209
Wigner
    Eugene, 403
Wilkinson
    David, 644, 662
Wilson
    Robert, 644
Winget
    Donald, 474, 490, 561
WKB, 401
WMAP, 662
Wolf
    Charles, 271
Wolf-Rayet, 271, 498
Wollaston
    William, 217
Wood
    Matt, 484, 492
wormhole, 659
Wright
    Thomas, 603

Zel'dovich
    Yakov, 625
zênite, 11
Zweig
    George, 660
Zwicky
    Fritz, 647
ZZ Ceti, 560