

Faculdade de Engenharia São Paulo – FESP

Engenharia Civil

CE2 – Estabilidade das Construções II

CARGAS MÓVEIS

Autor: Prof. Dr. Alfonso Pappalardo Jr.

Coord. Geral: Prof. Dr. Antonio R. Martins

São Paulo

2011

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS ISOSTÁTICAS	3
2.1 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGA EM BALANÇO	3
2.2 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	4
2.3 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGA BIPOIADA COM BALANÇOS	6
2.4 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGAS ASSOCIADAS ISOSTÁTICAS	8
2.5 OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS	9
2.6 EXERCÍCIOS DE PROPOSTOS	10
3 LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS CONTÍNUAS	13
3.1 MÉTODO DA PROPAGAÇÃO	13
3.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	15
3.3 LINHAS DE INFLUÊNCIA	17
3.4 EXEMPLO DE APLICAÇÃO	18
3.5 EXERCÍCIOS DE PROPOSTOS	22
4 ENVOLTÓRIA DE ESFORÇOS	27
5 REFERÊNCIAS	28
ANEXOS	
ANEXO A LINHAS DE INFLUÊNCIA DE MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE	29
ANEXO B LINHAS DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO VERTICAL PARA O APOIO ESQUERDO	30
ANEXO C FUNÇÕES MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE	31
ANEXO D REAÇÕES DE APOIO	32
ANEXO E RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS	33

CARGAS MÓVEIS

1 INTRODUÇÃO

No contexto da análise de estruturas diversos carregamentos devem ser considerados, podendo classificá-los em dois tipos: cargas permanentes e cargas acidentais.

As cargas permanentes têm posição fixa e atuam com mesma intensidade durante toda a vida útil da estrutura. Como exemplos de cargas de ação permanente, pode-se citar: peso próprio da estrutura, paredes fixas, elementos arquitetônicos fixos à estrutura, fôrros, pisos e contra-pisos, dentre outras. Para estruturas carregadas apenas por cargas permanentes a análise dos esforços para o dimensionamento das mesmas, utiliza-se os Diagramas de Estado (momento fletor e torçor, força cortante, força normal). A partir dos Diagramas de Estado obtêm-se os esforços mais desfavoráveis atuantes na estrutura. Os deslocamentos limites podem ser verificados de maneira mais simples, pois os deslocamentos ocorridos por ação das cargas permanentes não variam com o tempo, portanto são únicos para toda a vida útil da estrutura.

As cargas acidentais podem variar no tempo e espaço. Para aquelas de variação temporal, ditas cargas dinâmicas, o estudo aqui apresentado não pode ser utilizado. Nestes casos deve-se recorrer à Teoria Dinâmica das Estruturas (CLOUGH, 2003). Por outro lado, para as cargas que têm variação espacial, ditas cargas móveis, deve-se verificar as posições mais desfavoráveis que estas poderão ocupar simultaneamente de modo a resultar numa situação de máximo ou mínimo esforço solicitante numa dada seção do elemento estrutural. Alguns exemplos de cargas móveis são: carregamentos rodoviários e ferroviários, multidão de pessoas sobre arquibancadas e passarelas, pontes rolantes para transporte de carga em edifícios industriais, dentre outras. A Figura 1 apresenta alguns veículos considerados em projetos de estradas.

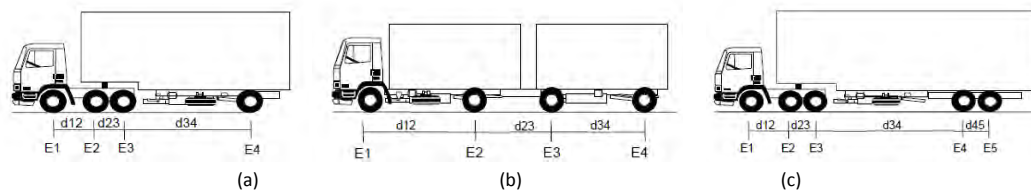


Figura 1 Cargas móveis (a) caminhão trator trucado + semi-reboque de 4 eixos (b) caminhão + reboque de 4 eixos (c) caminhão trator trucado + semi-reboque de 5 eixos
(Fonte: Limites legais. <http://www1.dnit.gov.br/Pesagem/qfv%20pdf.pdf>)

O dimensionamento de estruturas sob a ação de cargas móveis exige que a análise dos esforços seja feita a uma análise rigorosa. O procedimento geral consiste em se determinar a posição das cargas móveis em uma estrutura que provocam os valores limites de determinado esforço interno em uma dada seção transversal. Este procedimento é feito com o auxílio das **linhas de influência**. (MARTHA, 2010).

2 LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS ISOSTÁTICAS

Uma linha de influência registra a variação de um determinado esforço, deslocamento ou reação em função da posição de uma força unitária que percorre a estrutura.

Imaginando uma célula de carga, que indica a força vertical (tipo balança), instalada no apoio A da viga apresentada na Figura 2. Uma carga unitária de 1 kN percorre o vão AB da viga enquanto a célula de carga registra a reação no apoio A, levando à linha de influência mostrada na Figura 2.

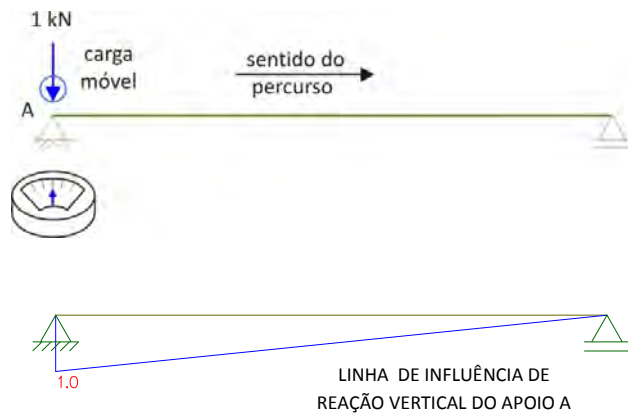


Figura 2 Carga móvel unitária e linha de influência de reação do apoio A da viga isostática simplesmente apoiada

Observa-se que a expressão matemática que mostra a variação da reação de apoio A em função distância da carga unitária do apoio esquerdo, definida pela distância a indicada na Figura 3, é uma função linear que varia de 1 kN (quando a carga unitária está sobre o apoio A) até 0 kN (quando a carga unitária está sobre o apoio B).

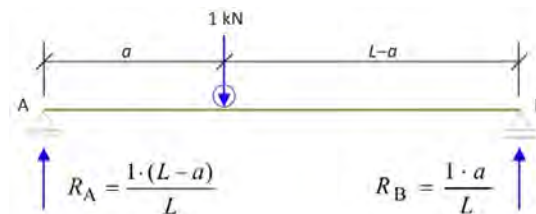


Figura 3 Variação das reações de apoio em função da posição da carga

No caso de vigas contínuas a obtenção da linha de influência para uma determinada reação de apoio torna-se mais complexa devido à hiperestaticidade do sistema estrutural. A resposta de uma estrutura hiperestática passa a ser não-linear que exige cálculos avançados baseados em métodos de energia ou propagação. Estes último será visto adiante.

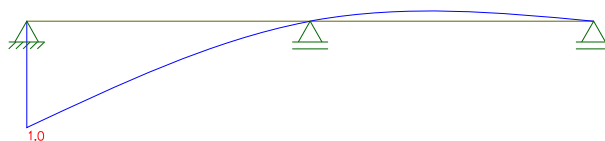


Figura 4 Linha de influência de reação do apoio A da viga contínua de dois vãos

2.1 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGA EM BALANÇO

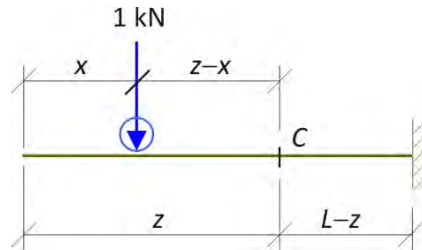


Figura 5 Viga em balanço de vão L

A função para descrever a variação do momento fletor em C em relação à posição da carga unitária, é dada por:

$$M_C = -1 \cdot (z - x) \rightarrow \begin{cases} x = 0: M_C = -z \\ x = z: M_C = 0 \end{cases}$$

e a função para a força cortante em C em relação à posição da carga, vale:

$$V_C = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 0: V_C = -1 \\ x = z: V_C = -1 \end{cases}$$

As linhas de influência de momento fletor e de força cortante em C são obtidas a partir do gráfico as funções anteriormente mencionadas. As linhas de influência são mostradas na Figura 6.

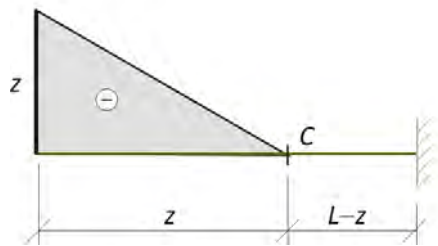


Figura 6 Linha de influência de momento fletor em C para a viga em balanço

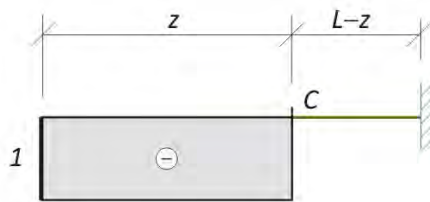


Figura 7 Linha de influência de força cortante em C para a viga em balanço

2.2 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

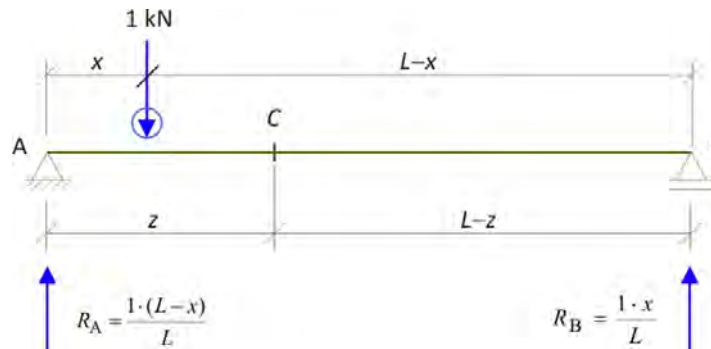


Figura 8 Viga simplesmente apoiada de vão L

A descrição da variação do momento fletor em C em relação à posição da carga unitária, para o caso da viga simplesmente apoiada, é obtida por meio de duas funções, apresentadas a seguir.

2.2.1 Carga unitária no Trecho AC (para $0 \leq x \leq z$)

Analisando-se pelo Teorema do Corte a sub-estrutura à direita de C (Figura 8), o momento fletor em C é dado por:

$$M_C = \frac{x}{L} \cdot (L-z) \rightarrow \begin{cases} x=0: M_C = 0 \\ x=z: M_C = \frac{z}{L} \cdot (L-z) \end{cases}$$

assim como a força cortante em C , que vale:

$$V_C = -\frac{x}{L} \rightarrow \begin{cases} x=0: V_C = 0 \\ x=z: V_C = -z/L \end{cases}$$

2.2.2 Carga unitária no Trecho CB (para $z \leq x \leq L$)

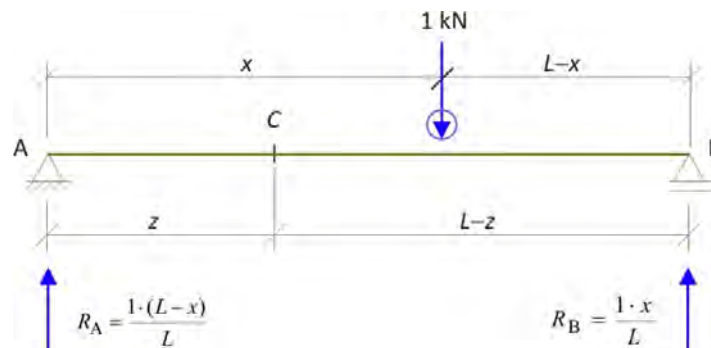


Figura 9 Viga simplesmente apoiada de vão L

Partindo da Figura 9 e procedendo-se de forma análoga ao trecho anterior, o momento fletor em C é dado por:

$$M_C = \frac{z}{L} \cdot (L - x) \rightarrow \begin{cases} x = z: & M_C = \frac{z}{L} \cdot (L - z) \\ x = L: & M_C = 0 \end{cases}$$

assim como, a força cortante em C, vale:

$$V_C = \frac{(L - x)}{L} \rightarrow \begin{cases} x = z: & V_C = \frac{(L - z)}{L} \\ x = L: & V_C = 0 \end{cases}$$

A partir das expressões anteriores pode-se traçar as linhas de influência de momento fletor e de força cortante na seção transversal C da viga simplesmente apoiada, conforme mostram as Figuras 10 e 11.

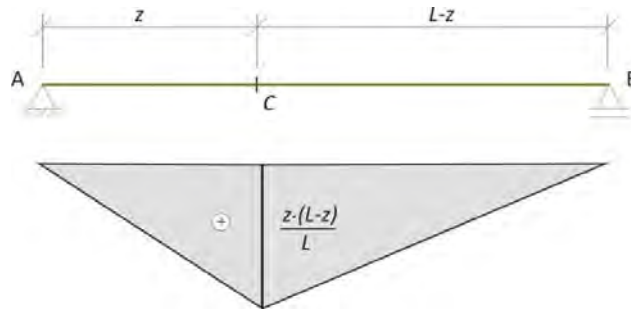


Figura 10 Linha de influência para momento fletor em C para a viga simplesmente apoiada

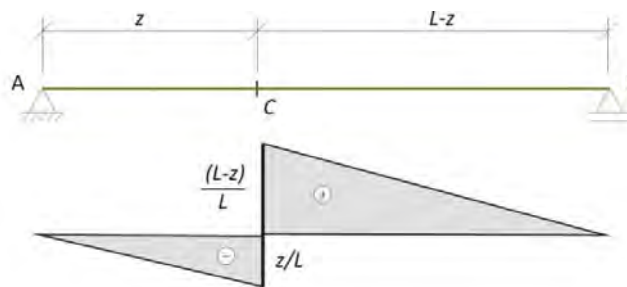


Figura 11 Linha de influência para força cortante em C para a viga simplesmente apoiada

2.3 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGA BIAPOIADA COM BALANÇOS

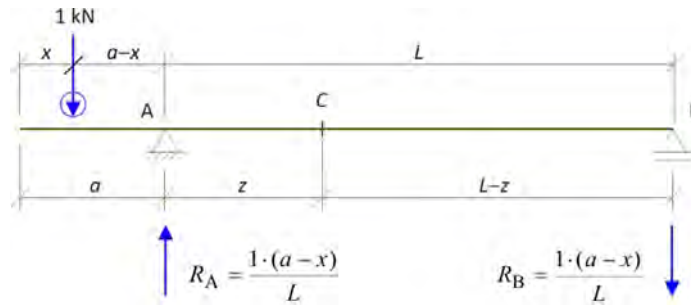


Figura 12 Viga simplesmente apoiada de vão L com balanço à esquerda

Neste caso, a descrição da variação do momento fletor e força cortante em C em relação à posição da carga unitária contempla a existência de balanços de ambos os lados.

2.3.1 Carga unitária no balanço à esquerda

Analisando-se pelo Teorema do Corte a sub-estrutura à direita de C (Figura 12), o momento fletor em C é dado por:

$$M_C = \frac{-(a-x) \cdot (L-z)}{L} \rightarrow \begin{cases} x=0: & M_C = \frac{-a \cdot (L-z)}{L} \\ x=a: & M_C = 0 \end{cases}$$

e a força cortante em C vale:

$$V_C = +\frac{(a-x)}{L} \rightarrow \begin{cases} x=0: & V_C = a/L \\ x=a: & V_C = 0 \end{cases}$$

2.3.2 Carga unitária no balanço à direita

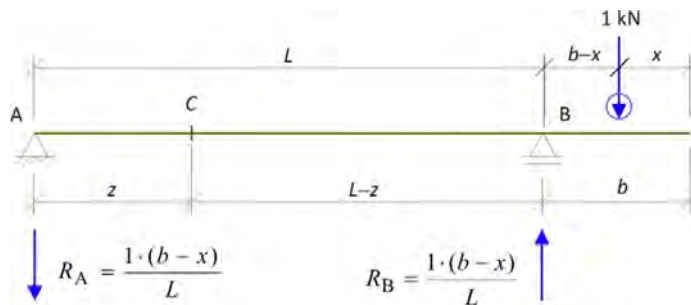


Figura 13 Viga simplesmente apoiada de vão L com balanço à direita

Por outro lado, analisando-se pelo Teorema do Corte a sub-estrutura à esquerda de C (Figura 13), o momento fletor em C é dado por:

$$M_C = \frac{-(b-x) \cdot z}{L} \rightarrow \begin{cases} x=0: M_C = \frac{-b \cdot z}{L} \\ x=b: M_C = 0 \end{cases}$$

e a força cortante em C vale:

$$V_C = \frac{-(b-x)}{L} \rightarrow \begin{cases} x=0: V_C = -b/L \\ x=b: V_C = 0 \end{cases}$$

A partir das expressões anteriores pode-se traçar as linhas de influência de momento fletor e de força cortante na seção transversal C da viga biapoiada com balanços, conforme mostram as Figuras 14 e 15.

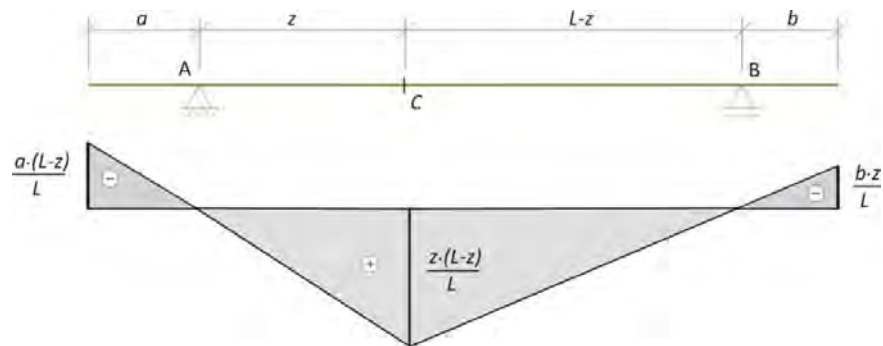


Figura 14 Linha de influência para momento fletor em C para a viga biapoiada com balanços

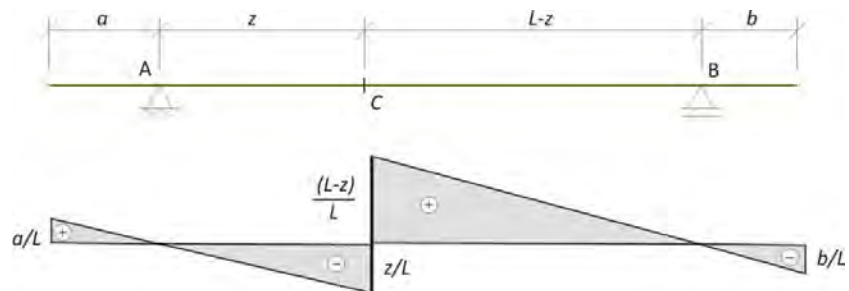


Figura 15 Linha de influência para força cortante em C para a viga biapoiada com balanços

2.4 LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGAS ASSOCIADAS ISOSTÁTICAS

As estruturas associadas são compostas por uma série de vigas interligadas por consolo curto e dente Gerber. Os tramos isostáticos levam a uma série de facilidades construtivas, no caso de estruturas de pontes, conforme o esquema da Figura 16. A única diferença que há entre as linhas de influência de vigas biapoiadas com balanços e as vigas associadas isostáticas é que a linha de influência tende a zero na ligação adjacente, conforme se observa nas Figuras 17 e 18.

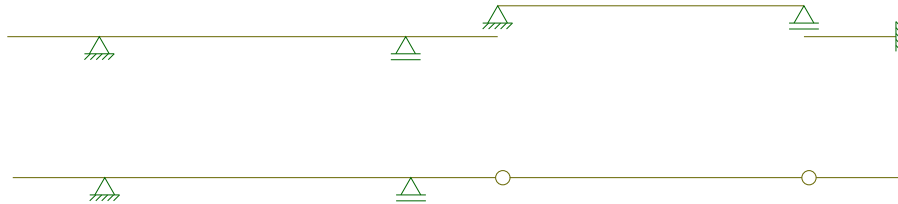


Figura 16 Vigas isostáticas associadas (a) esquema estático (b) ligação consolo curto e dente Gerber

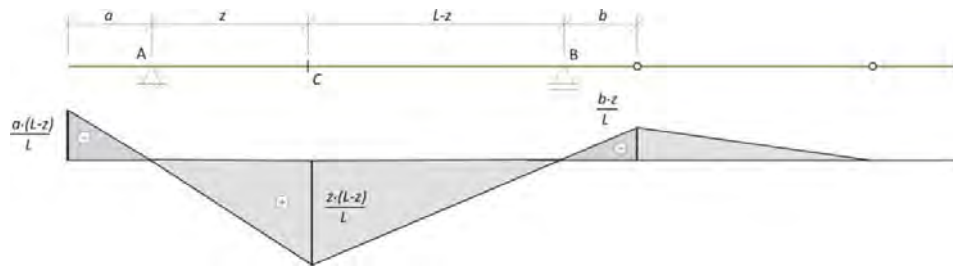


Figura 17 Linha de influência de momento fletor na seção transversal C para a viga contínua associada

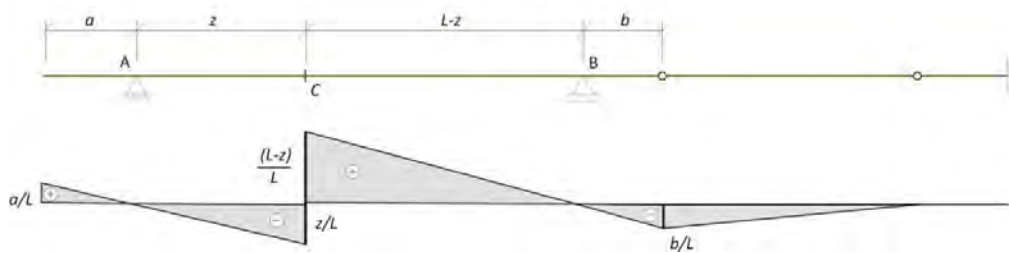


Figura 18 Linha de influência de força cortante na seção transversal C para a viga contínua associada

2.5 OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS

No caso de cargas móveis concentradas, para a obtenção de um determinado esforço numa certa seção, basta multiplicar o valor da ordenada da linha de influência correspondente ao esforço desejado pela intensidade da carga concentrada.

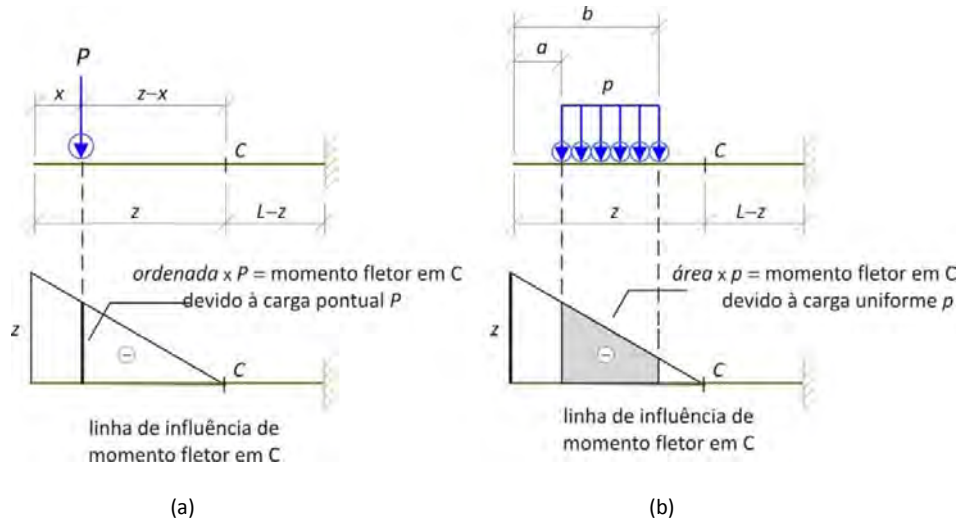


Figura 19 Esforços de flexão na seção transversal C devidos (a) à carga concentrada (b) à carga uniforme

Já para o caso de cargas móveis uniformemente distribuídas, para a obtenção de um determinado esforço numa certa seção, basta multiplicar o valor da área da projeção do carregamento distribuído da linha de influência correspondente ao esforço desejado pela intensidade da carga uniforme.

De modo, pode aplicar os carregamentos, estrategicamente, de modo a gerar os esforços mais desfavoráveis na seção analisada. No caso da Figura 20 o carregamento móvel uniformemente distribuído foi aplicado estrategicamente na viga contínua, somente na região positiva, de modo a produzir o máximo momento fletor na seção transversal S. Analogamente, na Figura 21, o carregamento móvel foi aplicado para produzir o mínimo momento fletor na seção transversal S.

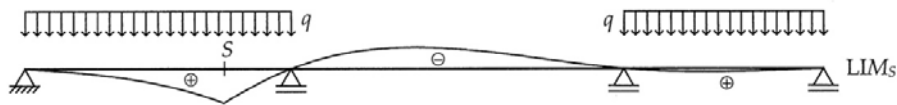


Figura 20 Posicionamento da carga móvel uniforme para provocar o máximo momento fletor na seção transversal S (MARTHA, 2010)

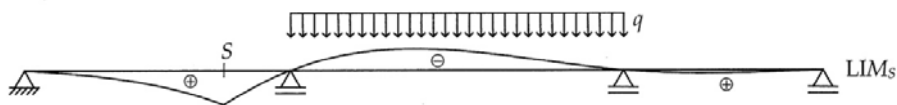
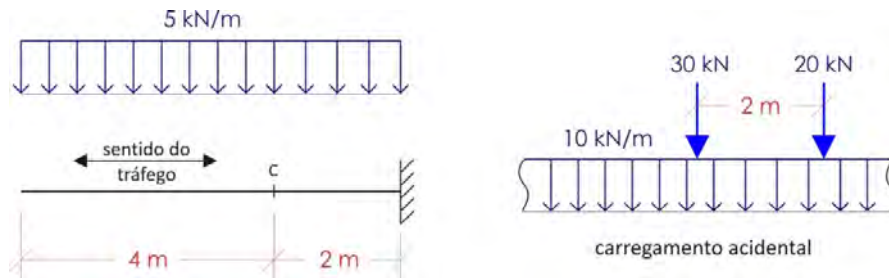


Figura 21 Posicionamento da carga móvel uniforme para provocar o mínimo momento fletor na seção transversal S (MARTHA, 2010)

2.6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

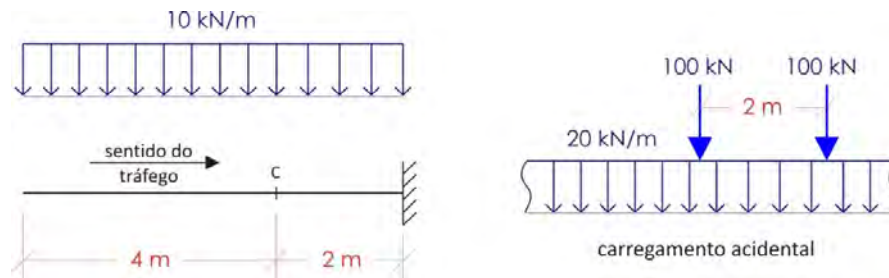
EXERCÍCIO 2.1

Determinar os esforços mais desfavoráveis na seção transversal C, para momento fletor e força cortante, devidos aos carregamentos indicados a seguir. Considere a carga móvel trafegando nos dois sentidos.



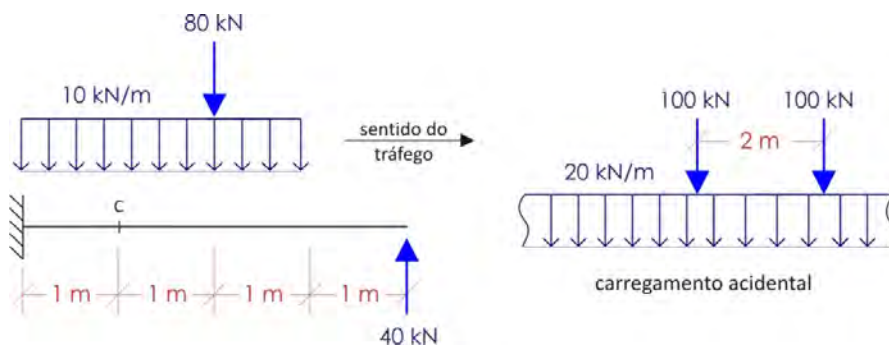
EXERCÍCIO 2.2

Determinar os esforços mais desfavoráveis na seção transversal C, para momento fletor e força cortante, devidos aos carregamentos indicados a seguir. Considere a carga móvel trafegando em sentido único.



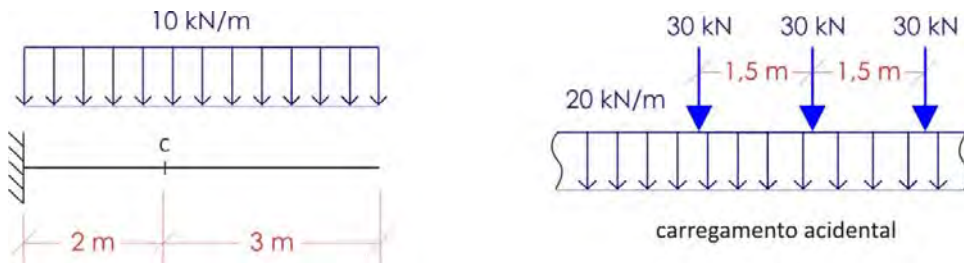
EXERCÍCIO 2.3

Determinar os esforços mais desfavoráveis na seção transversal C, para momento fletor e força cortante, devidos aos carregamentos indicados a seguir. Considere a carga móvel trafegando em sentido único.



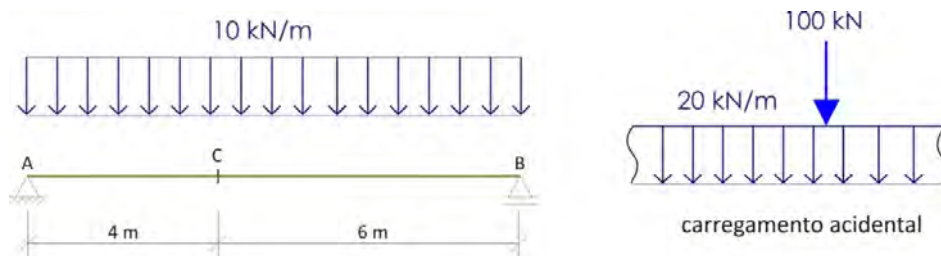
EXERCÍCIO 2.4

Determinar os esforços mais desfavoráveis na seção transversal C, para momento fletor e força cortante, devidos aos carregamentos indicados a seguir. Considere a carga móvel trafegando em sentido único.



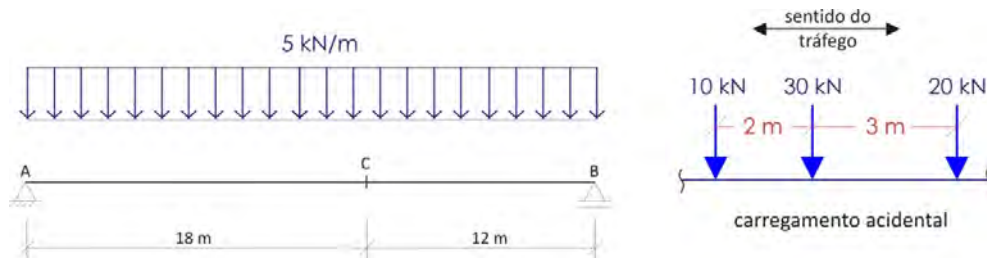
EXERCÍCIO 2.5

Para a viga simplesmente apoiada, indicada na figura abaixo, sujeita às ações permanente e acidental indicadas, pede-se: (a) os momentos fletores máximo e mínimo na seção transversal C; (b) as forças cortantes máxima e mínima na seção transversal C; (c) as reações máxima e mínima no apoio A. Considere a carga móvel trafegando em sentido único.



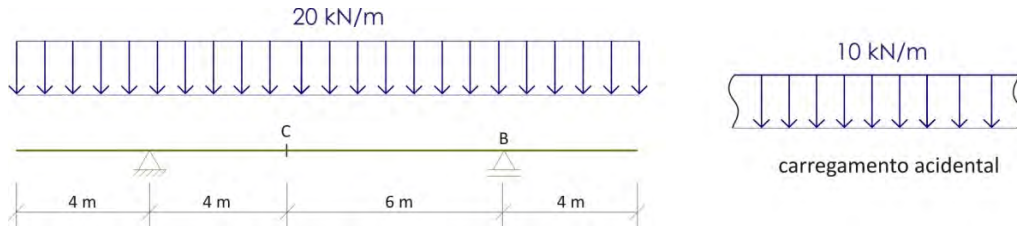
EXERCÍCIO 2.6

Para a viga simplesmente apoiada, indicada na figura abaixo, sujeita às ações permanente e acidental indicadas, pede-se: (a) os momentos fletores máximo e mínimo na seção transversal C; (b) as forças cortantes máxima e mínima na seção transversal C; (c) os momentos fletores máximo e mínimo na seção transversal M (no meio do vão); (d) as forças cortantes máxima e mínima na seção transversal M (no meio do vão); (e) as reações máxima e mínima no apoio A. Considere a carga móvel trafegando nos dois sentidos em incrementos de 1 metro.



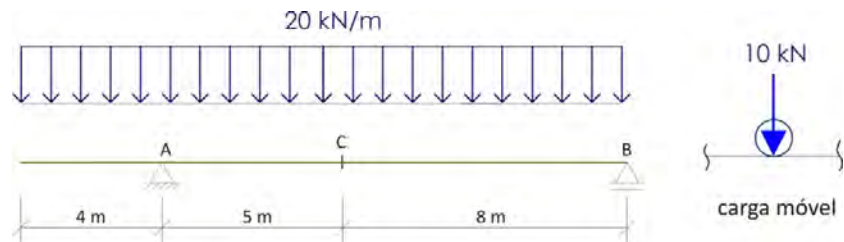
EXERCÍCIO 2.7

Para a viga biapoiada com balanços sujeita às ações permanente e accidental, indicadas na figura abaixo, determine: (a) os momentos fletores máximo e mínimo na seção transversal C; (b) as reações máxima e mínima no apoio B.



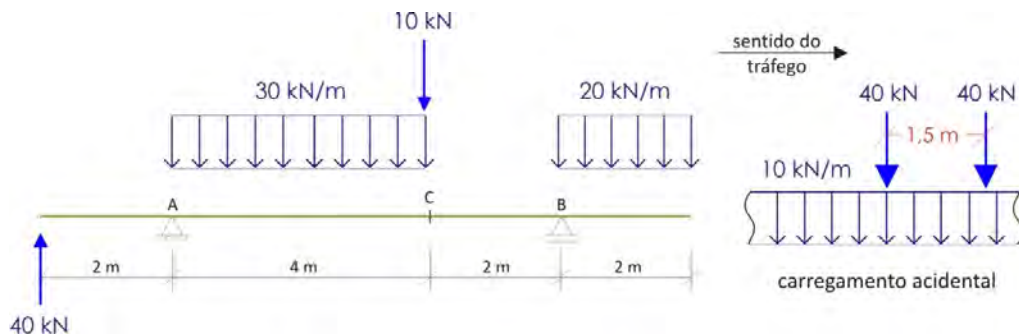
EXERCÍCIO 2.8

Para a viga biapoiada com balanço sujeita às ações permanente e accidental, indicadas na figura abaixo, determine: (a) os momentos fletores máximo e mínimo no apoio A; (b) as forças reativas máxima e mínima no apoio B; (c) os momentos fletores máximo e mínimo na seção transversal.



EXERCÍCIO 2.9

Para a viga biapoiada com balanços, sujeita às ações permanentes e accidentais, indicadas na figura abaixo, pede-se: (a) os momentos fletores máximo e mínimo no apoio A; (b) as forças reativas máxima e mínima no apoio B; (c) os momentos fletores máximo e mínimo na seção transversal. Considere a carga móvel trafegando em sentido único.



3 LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS CONTÍNUAS

Conforme se mostrou anteriormente, para o caso de vigas contínuas a obtenção da linha de influência para um determinado esforço torna-se mais complexa devido à hiperestaticidade do sistema estrutural devendo-se recorrer a métodos adequados para este tipo de estrutura. Diversos métodos analíticos para o cálculo de vigas hiperestáticas podem ser utilizados, por exemplo, o Método de Cross, o Método dos Pontos Fixos, a Equação dos Três Momentos, o Método da Propagação, dentre outros. Neste estudo será apresentado o Método da Propagação.

3.1 MÉTODO DA PROPAGAÇÃO

O método da propagação decorre da aplicação direta a Equação dos Três Momentos. As relações entre os momentos de apoio, assim obtidas, permitem que sejam definidos coeficientes propagação de momentos de um apoio para outro. Deste modo, um carregamento aplicado em um tramo de uma viga contínua, por meio dos termos de carga à esquerda e à direita deste tramo, propagará esforços em todos os pontos da estrutura. Este método é recomendado para a obtenção de linhas de influência de esforços em vigas contínuas, devido à facilidade de se considerar apenas um tramo carregado (no caso com a carga móvel unitária) e os demais descarregados, além da convergência para a solução exata em apenas uma iteração.

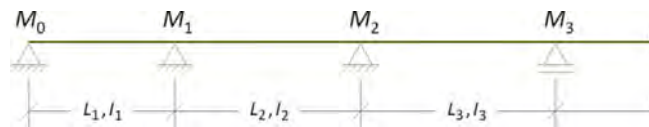


Figura 22 Extremidade esquerda da viga contínua de n tramos

Considerando-se uma viga contínua de n tramos, sendo que somente o i -ésimo tramo esteja carregado. A Equação dos Três Momentos para o primeiro e o segundo tramo descarregados, mostrado na Figura 22, é dada por:

$$M_0 \cdot x_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (x_1 + x_2) + M_2 \cdot x_2 = 0$$

sendo $x_i = L_i / I_i$ a relação entre comprimento do vão i dividido pelo respectivo momento de inércia. Como na extremidade esquerda da viga contínua é livre de um momento aplicado externamente, então $M_0 = 0$. Isolando-se M_1 da equação anterior, chega-se a:

$$M_1 = - \left[\frac{x_2}{2 \cdot (x_1 + x_2)} \right] \cdot M_2 = -\alpha_{21} \cdot M_2.$$

Analogamente, para o segundo e o terceiro tramo descarregados, mostrados na Figura 22, tem-se:

$$M_1 \cdot x_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (x_2 + x_3) + M_3 \cdot x_3 = 0$$

$$(-\alpha_{21} \cdot M_2) \cdot x_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (x_2 + x_3) + M_3 \cdot x_3 = 0$$

e se isolando M_2 da expressão anterior, chega-se a:

$$M_2 = - \left[\frac{x_3}{2 \cdot (x_2 + x_3) - x_2 \cdot \alpha_{21}} \right] \cdot M_3 = -\alpha_{32} \cdot M_3.$$

Genericamente, para qualquer tramo descarregado pode-se escrever o coeficiente de propagação da direita para a esquerda como sendo:

$$\alpha_{n,n-1} = \frac{1}{2 + (x_{n-1}/x_n) \cdot (2 - \alpha_{n-1,n-2})}$$

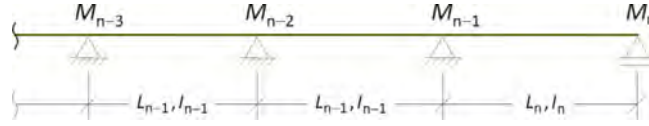


Figura 23 Extremidade direita da viga contínua de n tramos

Procedendo-se da mesma forma, a partir da extremidade direita do n -ésimo tramo descarregado, conforme ilustrado na Figura 23, pode-se obter o coeficiente de propagação da **esquerda para a direita**, pela expressão:

$$\alpha_{n-1,n} = \frac{1}{2 + (x_{n+1}/x_n) \cdot (2 - \alpha_{n,n-1})}$$

Por outro lado, escrevendo-se a Equação dos Três Momentos para o único tramo carregado, esquematizado na Figura 24, chega-se nas expressões:

$$M_{i-2} \cdot x_{i-1} + 2 \cdot M_{i-1} \cdot (x_{i-1} + x_i) + M_i \cdot x_i = -E_i \cdot x_i$$

e

$$M_{i-1} \cdot x_i + 2 \cdot M_i \cdot (x_i + x_{i+1}) + M_{i+1} \cdot x_{i+1} = -D_i \cdot x_i$$

nas expressões acima os parâmetros E_i e D_i , relativos ao i -ésimo tramo carregado, são conhecidos como *termos de carga* que são dados em função do carregamento.

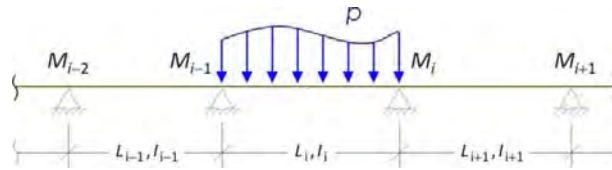


Figura 24 i -ésimo tramo carregado da viga contínua de n tramos

A partir das expressões em que foram definidos os *coeficientes de propagação*, apresentadas anteriormente, tem-se:

$$M_{i-2} = -\alpha_{i-1,i-2} \cdot M_{i-1} \quad \text{e} \quad M_{i+1} = -\alpha_{i,i+1} \cdot M_i$$

e se introduzindo nas equações anteriores, pode-se encontrar duas expressões que relacionam M_{i-1} e M_i . A partir daí, isolando-se M_{i-1} das expressões encontradas e se igualando as mesmas chega-se a:

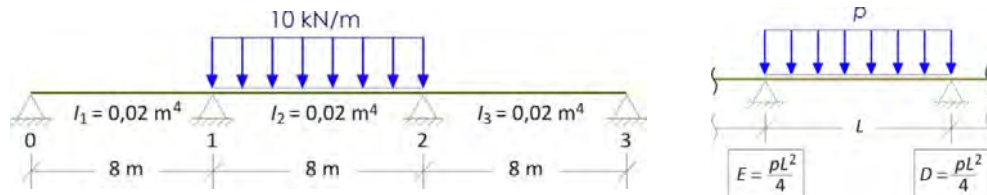
$$M_i = \frac{\alpha_{i-1,i} \cdot (E_i \cdot \alpha_{i,i-1} - D_i)}{1 - (\alpha_{i-1,i} \cdot \alpha_{i,i-1})}$$

Repetindo-se o mesmo procedimento anterior, isolando-se M_i das expressões e se igualando os termos chega-se a:

$$M_{i-1} = \frac{\alpha_{i,i-1} \cdot (D_i \cdot \alpha_{i-1,i} - E_i)}{1 - (\alpha_{i,i-1} \cdot \alpha_{i-1,i})}$$

3.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

EXEMPLO 3.2.1 (KALMUS, 1984) Utilizando-se o Método da Propagação, determinar os momentos nos apoios da viga contínua esquematizada abaixo. Em seguida, traçar o diagrama de momentos fletores. São fornecidos os termos de carga para o carregamento uniformemente distribuído.



Coeficientes de propagação:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{8}{0,02} = 400$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2 + (x_1 / x_2) \cdot (2 - \alpha_{10})} = \frac{1}{2 + (400 / 400) \cdot (2 - 0)} = 0,25$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{2 + (x_2 / x_3) \cdot (2 - \alpha_{21})} = \frac{1}{2 + (400 / 400) \cdot (2 - 0,25)} = \frac{8}{30}$$

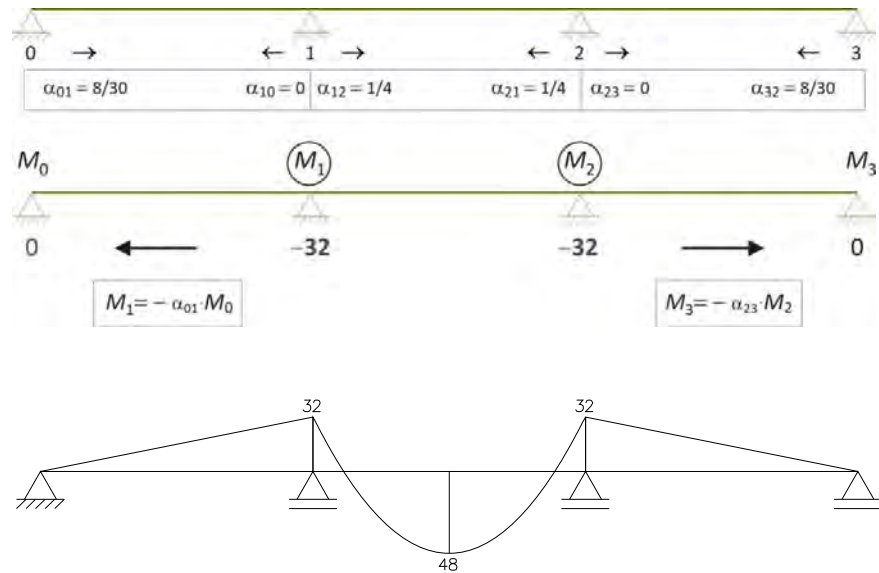
Termos de carga para o carregamento uniforme:

$$E_2 = D_2 = \frac{10 \cdot 8^2}{4} = 160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

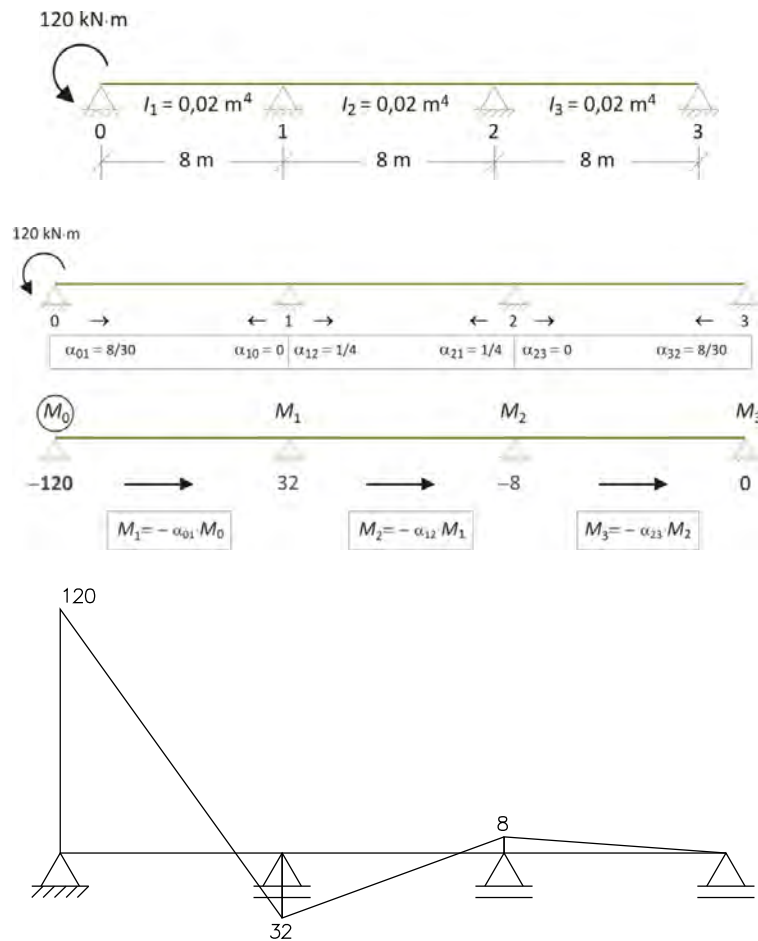
e momentos fletores nos apoios do vão carregado:

$$M_1 = \frac{\alpha_{21} \cdot (D_2 \cdot \alpha_{12} - E_2)}{1 - (\alpha_{21} \cdot \alpha_{12})} = \frac{0,25 \cdot (160 \cdot 0,25 - 160)}{1 - (0,25 \cdot 0,25)} \rightarrow M_1 = -32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = \frac{\alpha_{12} \cdot (E_2 \cdot \alpha_{21} - D_2)}{1 - (\alpha_{12} \cdot \alpha_{21})} = \frac{0,25 \cdot (160 \cdot 0,25 - 160)}{1 - (0,25 \cdot 0,25)} \rightarrow M_2 = -32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



EXEMPLO 3.2.2 Utilizando-se o Método da Propagação, determinar os momentos nos apoios da viga contínua esquematizada abaixo e traçar o diagrama de momentos fletores.



3.3 LINHAS DE INFLUÊNCIA

Para a obtenção da linha de influência de esforços solicitantes e forças reativas em vigas contínuas será utilizado o Método da Propagação. Seja uma carga móvel unitária aplicada nos quintos dos vãos, de acordo com a Figura 25, e a partir dos termos de carga à esquerda e à direita para carga pontual (Figura 26), obtém-se os momentos nos apoios correspondentes ao vão carregado, que serão transmitidos por meio dos coeficientes de propagação aos apoios subsequentes. De posse dos momentos nos apoios, pode-se obter os momentos fletores no vão, as forças cortantes e as reações de apoio.

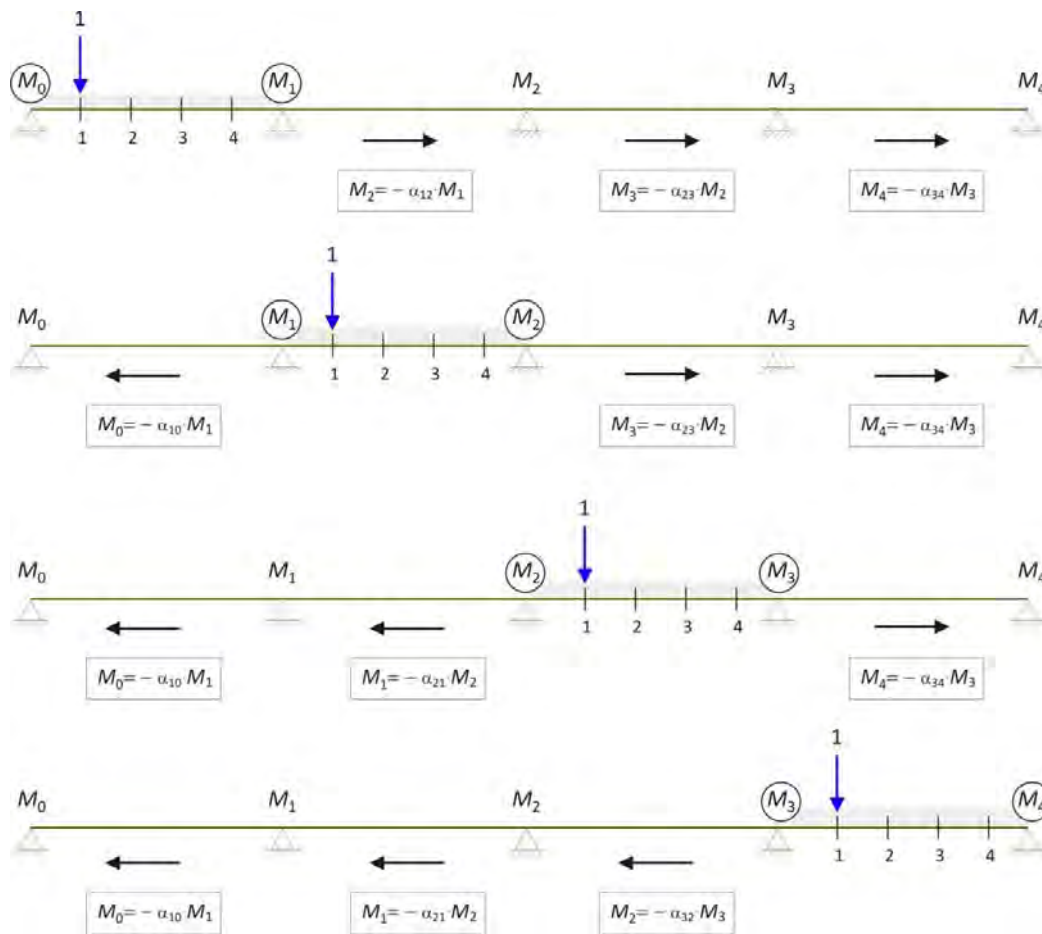


Figura 25 Carga móvel unitária e coeficientes de propagação da viga contínua de 4 vãos

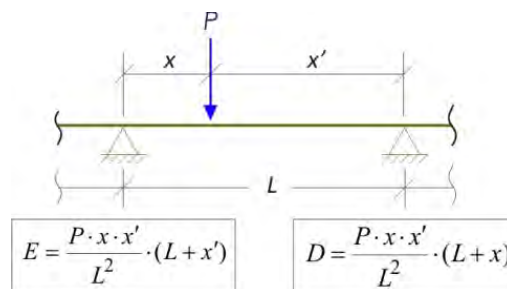
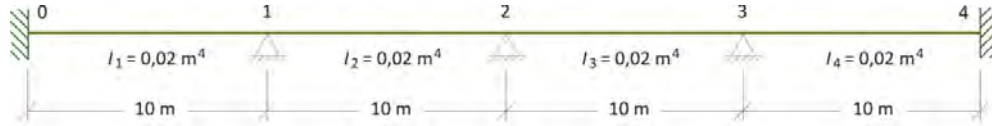


Figura 26 Termos de carga à esquerda e à direita para carga pontual

3.4 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

EXEMPLO 3.4.1 (KALMUS, 1984) Determinar as linhas de influência para momentos fletores nos apoios da viga contínua, esquematizada abaixo, utilizando-se o Método da Propagação. Na Figura 26, são fornecidos os termos de carga para a carga móvel pontual em função da sua posição no vão. Considere a carga móvel pontual trafegando em sentido único (esquerda para a direita), em incrementos de dois metros.



Coefficientes de propagação:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{10}{0,02} = 500$$

$$\alpha_{10} = 0,5 \text{ (engaste)}$$

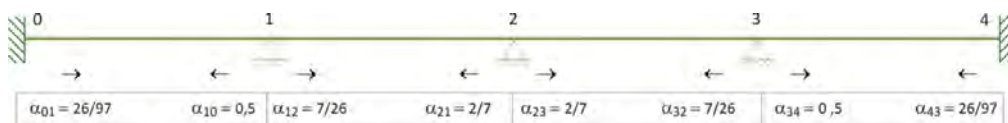
$$\alpha_{34} = 0,5 \text{ (engaste)}$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2 + (x_1 / x_2) \cdot (2 - \alpha_{10})} = \frac{1}{2 + (500 / 500) \cdot (2 - 0,5)} = \frac{2}{7}$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{2 + (x_2 / x_3) \cdot (2 - \alpha_{21})} = \frac{1}{2 + (500 / 500) \cdot (2 - 2/7)} = \frac{7}{26}$$

$$\alpha_{43} = \frac{1}{2 + (x_3 / x_4) \cdot (2 - \alpha_{32})} = \frac{1}{2 + (500 / 500) \cdot (2 - 7/26)} = \frac{26}{97}$$

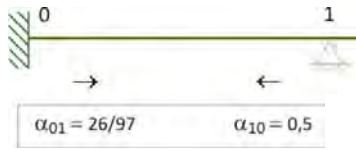
Os demais coeficientes são obtidos por simetria. A figura a seguir sintetiza todos os coeficientes calculados.



Os termos de carga para a carga unitária (móvel) em cada posição em relação ao vão, são tabelados a abaixo. Devido à simetria, os termos de carga apresentados são os mesmos para os quatro vãos.

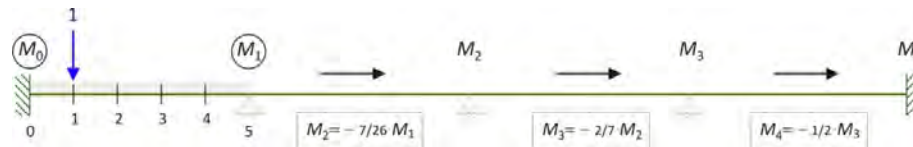
Posição	$E_i = \frac{x \cdot x'}{100} \cdot (10 + x')$	$D_i = \frac{x \cdot x'}{100} \cdot (10 + x)$	
0	0	0	
1	72/25	48/25	
2	96/25	84/25	
3	84/25	96/25	
4	48/25	72/25	
5	0	0	

Os momentos fletores M_0 e M_1 , relativos aos apoios do 1º vão, carregado pela carga móvel unitária, são expressos por:



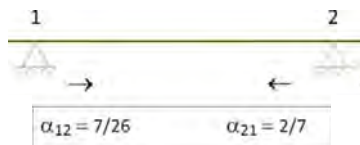
$$M_0 = \frac{\alpha_{10} \cdot (D_1 \cdot \alpha_{01} - E_1)}{1 - (\alpha_{10} \cdot \alpha_{01})} = \frac{0,5 \cdot (26/97 \cdot D_1 - E_1)}{1 - (0,5 \cdot 26/97)} = \frac{97}{168} \cdot (26/97 \cdot D_1 - E_1)$$

$$M_1 = \frac{\alpha_{01} \cdot (E_1 \cdot \alpha_{10} - D_1)}{1 - (\alpha_{01} \cdot \alpha_{10})} = \frac{26/97 \cdot (0,5 \cdot E_1 - D_1)}{1 - (26/97 \cdot 0,5)} = \frac{13}{42} \cdot (0,5 \cdot E_1 - D_1)$$



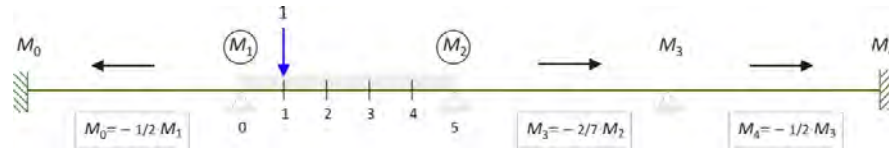
POS	M ₀	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	-1,366	-0,149	0,040	-0,011	0,006
2	-1,697	-0,446	0,120	-0,034	0,017
3	-1,346	-0,669	0,180	-0,051	0,026
4	-0,663	-0,594	0,160	-0,046	0,023
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Os momentos fletores M_1 e M_2 nos apoios do 2º vão, carregado pela carga móvel unitária, são dados por:



$$M_1 = \frac{\alpha_{21} \cdot (D_2 \cdot \alpha_{12} - E_2)}{1 - (\alpha_{21} \cdot \alpha_{12})} = \frac{2/7 \cdot (7/26 \cdot D_2 - E_2)}{1 - (2/7 \cdot 7/26)} = \frac{13}{42} \cdot (7/26 \cdot D_2 - E_2)$$

$$M_2 = \frac{\alpha_{12} \cdot (E_2 \cdot \alpha_{21} - D_2)}{1 - (\alpha_{12} \cdot \alpha_{21})} = \frac{7/26 \cdot (2/7 \cdot E_2 - D_2)}{1 - (7/26 \cdot 2/7)} = \frac{7}{24} \cdot (2/7 \cdot E_2 - D_2)$$



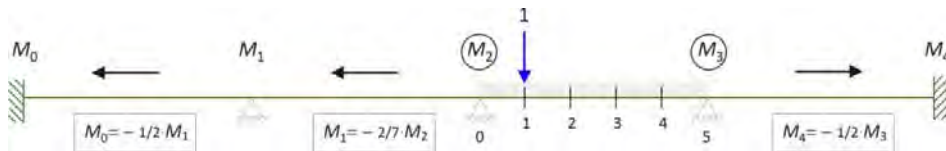
POS	M ₀	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,366	-0,731	-0,320	0,091	-0,046
2	0,454	-0,909	-0,660	0,189	-0,094
3	0,360	-0,720	-0,840	0,240	-0,120
4	0,177	-0,354	-0,680	0,194	-0,097
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Por simetria, para o 3º vão carregado pela carga móvel unitária, pode-se escrever:

$$M_2 = \frac{7}{24} \cdot (2/7 \cdot E_3 - D_3) \quad \text{e}$$

$$M_3 = \frac{13}{42} \cdot (7/26 \cdot D_3 - E_3),$$

que conduzem aos momentos nos demais apoios em função da posição da carga unitária. Os momentos nos apoios foram obtidos por meio dos coeficientes de propagação. Os resultados são mostrados a seguir.



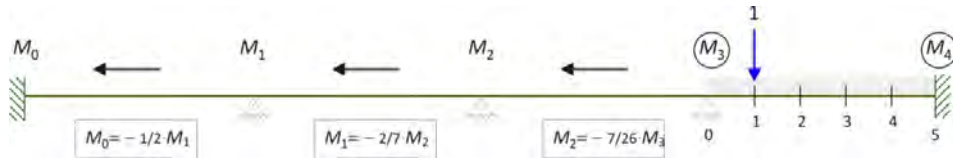
POS	M ₀	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	-0,097	0,194	-0,680	-0,354	0,177
2	-0,120	0,240	-0,840	-0,720	0,360
3	-0,094	0,189	-0,660	-0,909	0,454
4	-0,046	0,091	-0,320	-0,731	0,366
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Também por simetria, para o 4º vão carregado pela carga móvel unitária, pode-se escrever:

$$M_3 = \frac{13}{42} \cdot (0,5 \cdot E_4 - D_4) \quad \text{e}$$

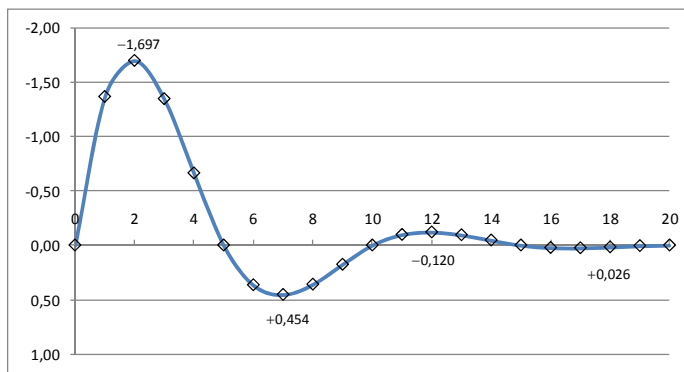
$$M_4 = \frac{97}{168} \cdot (26/97 \cdot D_4 - E_4)$$

que implica na obtenção dos momentos nos demais apoios em função da posição da carga unitária. Os resultados são mostrados a seguir.

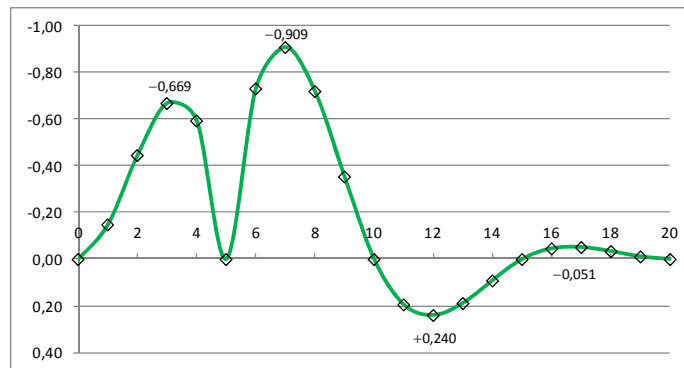


POS	M ₀	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,023	-0,046	0,160	-0,594	-0,663
2	0,026	-0,051	0,180	-0,669	-1,346
3	0,017	-0,034	0,120	-0,446	-1,697
4	0,006	-0,011	0,040	-0,149	-1,366
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

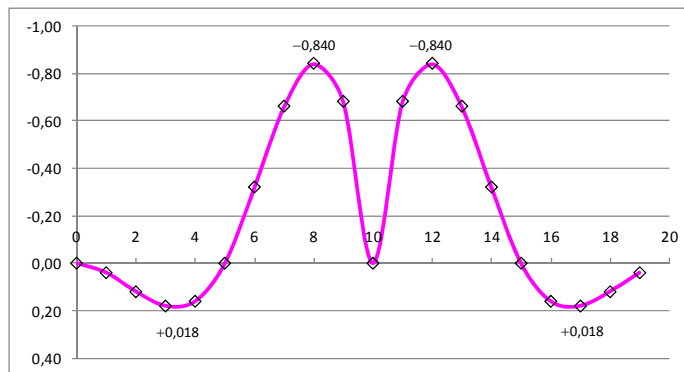
As figuras a seguir correspondem aos valores das linhas de influência de momentos fletores M₀ a M₄.



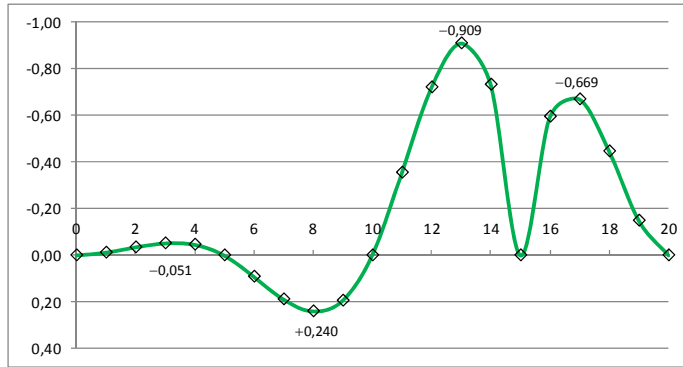
LIM₀



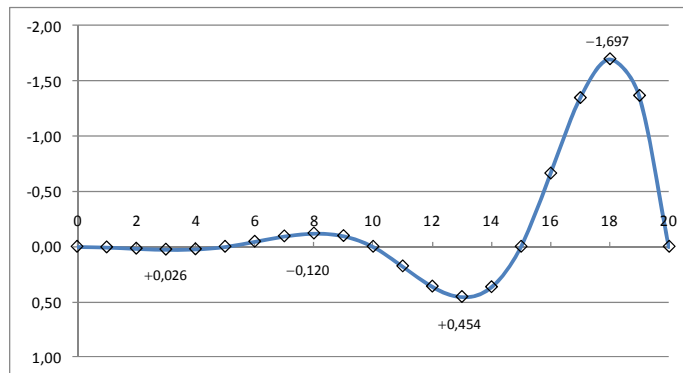
LIM₁



LIM₂



LIM₃



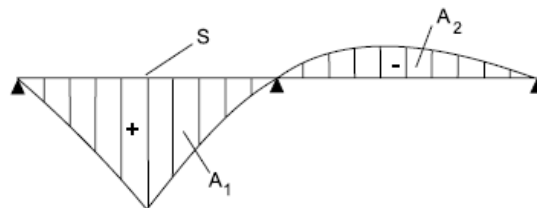
LIM₄

3.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nesta seção serão sugeridos alguns problemas relativos às vigas contínuas, apresentadas nesta seção, para determinação do posicionamento das cargas móveis e obtenção dos esforços mais desfavoráveis de flexão e cortante e forças reativas.

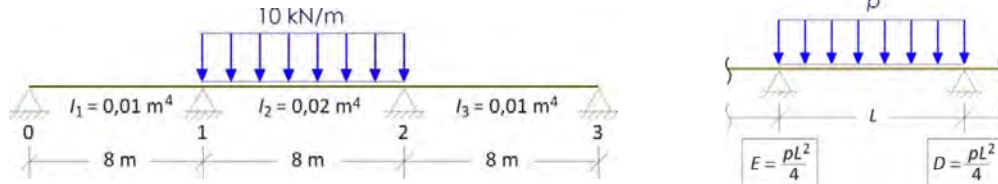
EXERCÍCIO 3.1 (ENC, 2000)

No projeto de uma passarela para pedestres, cujo sistema estrutural é de uma viga contínua de dois vãos, adota-se a carga móvel (multidão) uniformemente distribuída 10 kN/m. Na figura abaixo está representada a linha de influência de momento fletor para a seção transversal S, situada na metade do vão esquerdo da viga. Sejam $A_1=9,38 \text{ m}^2$ e $A_2=3,13 \text{ m}^2$, respectivamente, as áreas positiva e negativa da linha de influência, pede-se: os momentos fletores máximos positivo e negativo na seção transversal S, para a carga móvel dada.



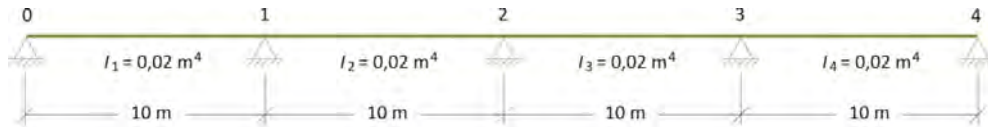
EXERCÍCIO 3.2

Utilizando-se o Método da Propagação, determinar os momentos nos apoios da viga contínua esquematizada abaixo, cujo vão intermediário tem o dobro da inércia dos demais. Comparar com os momentos fletores obtidos no Exemplo 3.2.1. São fornecidos os termos de carga para o carregamento uniformemente distribuído.



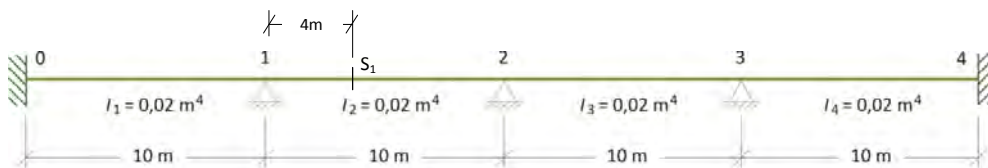
EXERCÍCIO 3.3

Determinar as linhas de influência para momentos fletores nos apoios (1) e (2) da viga contínua, esquematizada abaixo, utilizando-se o Método da Propagação. Considere a carga móvel pontual trafegando em sentido único (esquerda para a direita), em incrementos de dois metros.



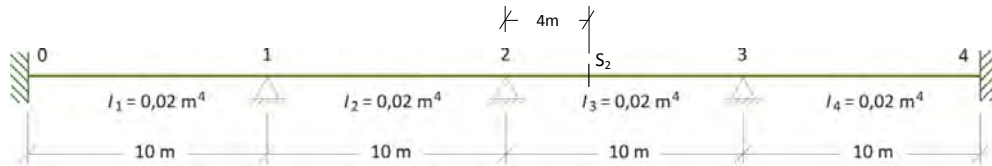
EXERCÍCIO 3.4

Determinar as linhas de influência para MOMENTO FLETOR na seção transversal S_1 da viga contínua a 4 metros do Apoio 1, conforme mostrado abaixo, a partir dos resultados obtidos no Exemplo 3.4.1. Utilizar as expressões apresentadas no Anexo C.



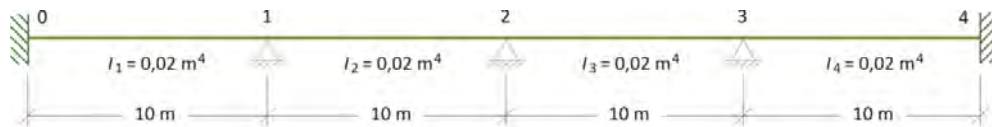
EXERCÍCIO 3.5

Determinar as linhas de influência para FORÇA CORTANTE na seção transversal S_2 da viga contínua a 4 metros do Apoio 2, conforme mostrado abaixo, a partir dos resultados obtidos no Exemplo 3.4.1. Utilizar as expressões apresentadas no Anexo C.



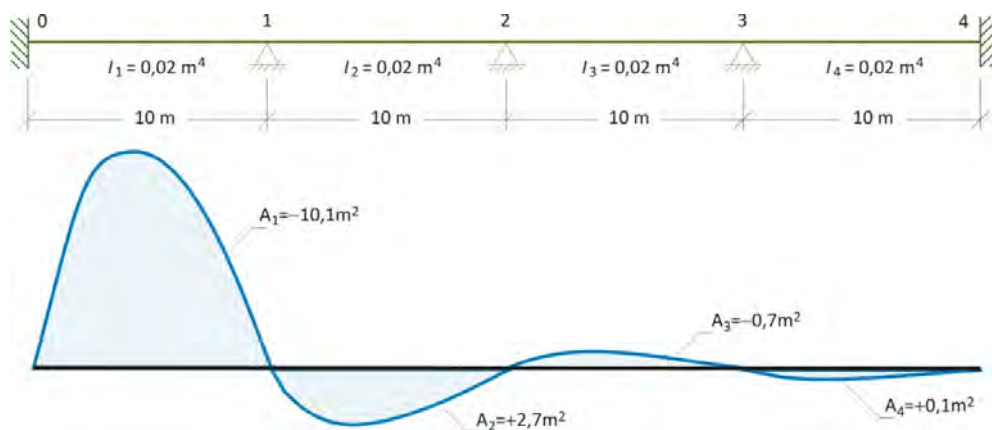
EXERCÍCIO 3.6

Determinar as linhas de influência para REAÇÃO VERTICAL NO APOIO 2 da viga contínua, conforme esquematizada abaixo, a partir dos resultados obtidos no Exemplo 3.4.1. Utilizar as expressões apresentadas no Anexo D.



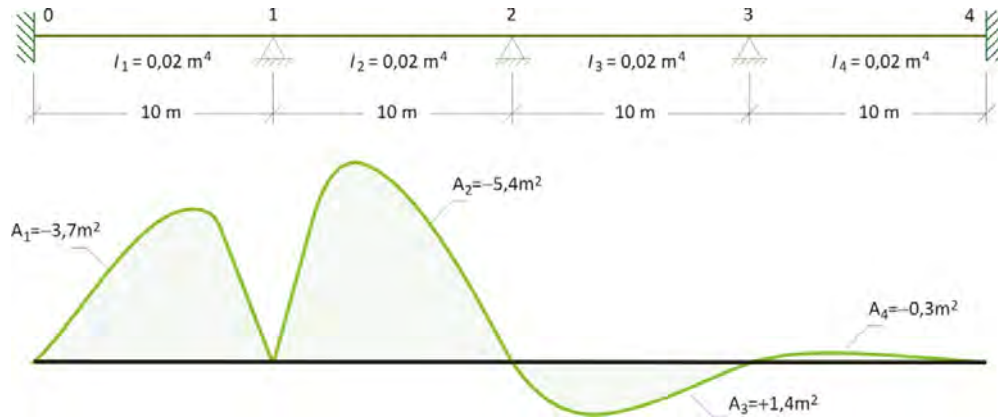
EXERCÍCIO 3.7

Determinar os momentos fletores M_0 (máximo e mínimo), referentes ao apoio extremo esquerdo da viga contínua esquematizada abaixo, para os carregamentos uniformemente distribuídos permanente de 5 kN/m e acidental de 20 kN/m. A linha de influência de momento fletor M_0 e suas respectivas áreas são fornecidas abaixo.



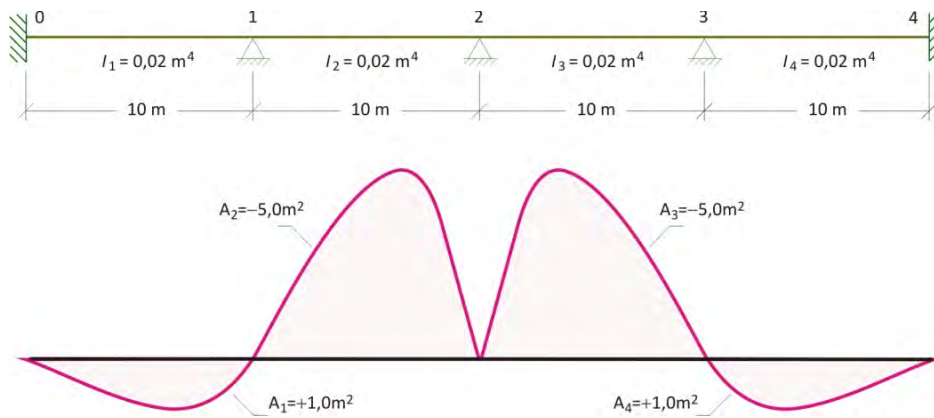
EXERCÍCIO 3.8

Determinar os momentos fletores M_1 (máximo e mínimo), referentes ao apoio (1) da viga contínua esquematizada abaixo, para os carregamentos uniformemente distribuídos permanente de 5 kN/m e acidental de 20 kN/m. A linha de influência de momento fletor M_1 e suas áreas são fornecidas abaixo.



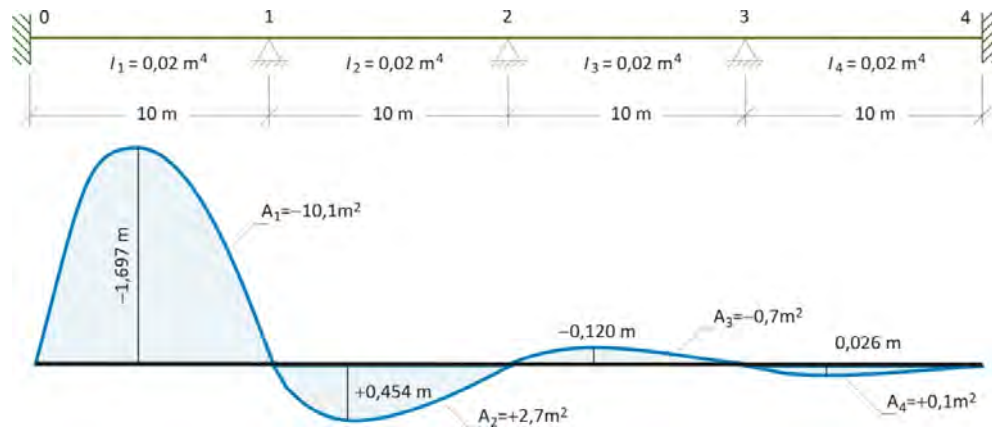
EXERCÍCIO 3.9

Determinar os momentos fletores M_2 (máximo e mínimo), referentes ao apoio (2) da viga contínua esquematizada abaixo, para os carregamentos uniformemente distribuídos permanente de 5 kN/m e acidental de 20 kN/m. A linha de influência de momento fletor M_2 e suas áreas são fornecidas abaixo.



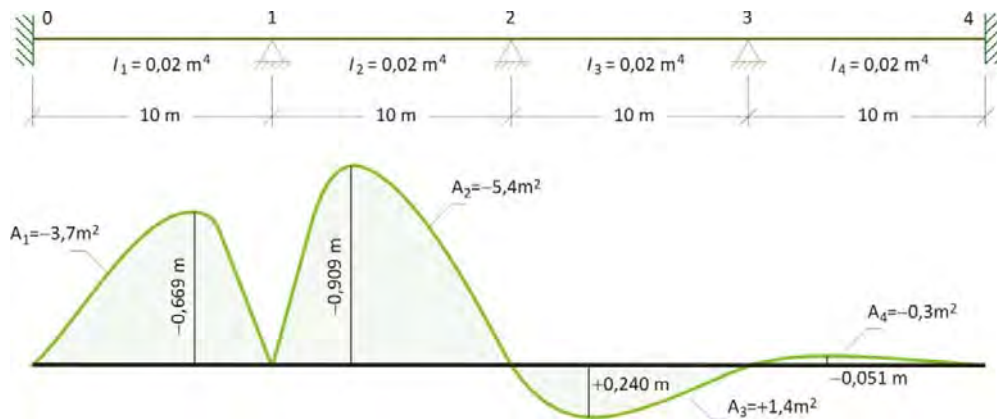
EXERCÍCIO 3.10

Determinar os momentos fletores M_0 (máximo e mínimo), referentes ao apoio extremo esquerdo da viga contínua esquematizada abaixo, para o carregamento uniformemente distribuído permanente de 10 kN/m e a carga móvel concentrada accidental de 50 kN. A linha de influência de momento fletor M_0 e suas áreas e ordenadas são fornecidas abaixo.



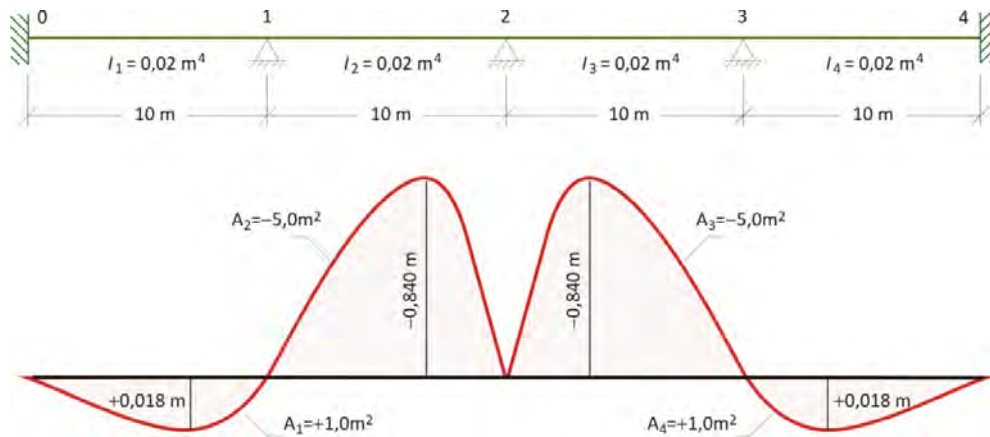
EXERCÍCIO 3.11

Determinar os momentos fletores M_1 (máximo e mínimo), referentes ao apoio (1) da viga contínua esquematizada abaixo, para o carregamento uniformemente distribuído permanente de 10 kN/m e a carga móvel concentrada accidental de 50 kN. A linha de influência de momento fletor M_1 e suas áreas e ordenadas são fornecidas abaixo.



EXERCÍCIO 3.12

Determinar os momentos fletores M_2 (máximo e mínimo), referentes ao apoio (2) da viga contínua esquematizada abaixo, para o carregamento uniformemente distribuído permanente de 10 kN/m e a carga móvel concentrada acidental de 50 kN. A linha de influência de momento fletor M_2 e suas áreas e ordenadas são fornecidas abaixo.



4 ENVOLTÓRIA DE ESFORÇOS

Com base no traçado de linhas de influência, é possível obter as envoltórias de esforços, sendo estas necessárias para o dimensionamento de estruturas sujeitas à ação de cargas móveis. As envoltórias de esforços descrevem os valores máximos e mínimos de um determinado esforço que ocorre em uma seção transversal. A interpretação das envoltórias de esforços é idêntica àquela dos diagramas de esforços para carregamentos permanentes (MARTHA, 2010).

A construção da envoltória de esforços consiste em se combinar, para cada seção transversal, os esforços decorrentes das ações permanentes e acidentais, sendo estas últimas aplicadas nas posições mais desfavoráveis de modo a produzir os esforços máximos e mínimos na seção transversal estudada. Repete-se o procedimento para as demais seções transversais, definidas a partir de um incremento de modo a varrer todas as seções relevantes no modelo estrutural. A envoltória de esforços permite a visualização das solicitações extremas que poderão ocorrer ao longo da vida útil da estrutura.

Considerando-se o Exemplo 2.5, apresentado na página 11, foram obtidos os esforços de flexão máximo +600 kN'm e mínimo +120 kN'm para a Seção C, mediante a utilização da linha de influência de momentos fletores para a seção C e, conseqüentemente, a aplicação dos carregamentos permanentes e acidental nas posições mais desfavoráveis. Realizando este estudo para as demais seções da viga, por exemplo, uma seção transversal a cada metro, pode-se obter a envoltória de momentos fletores que apresenta os esforços de flexão máximo e mínimo em cada seção transversal considerada.

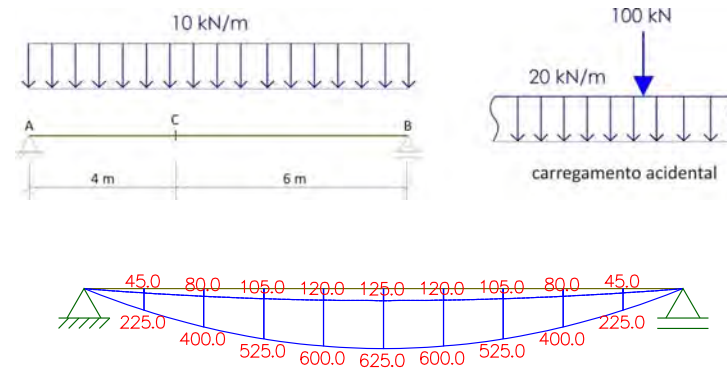
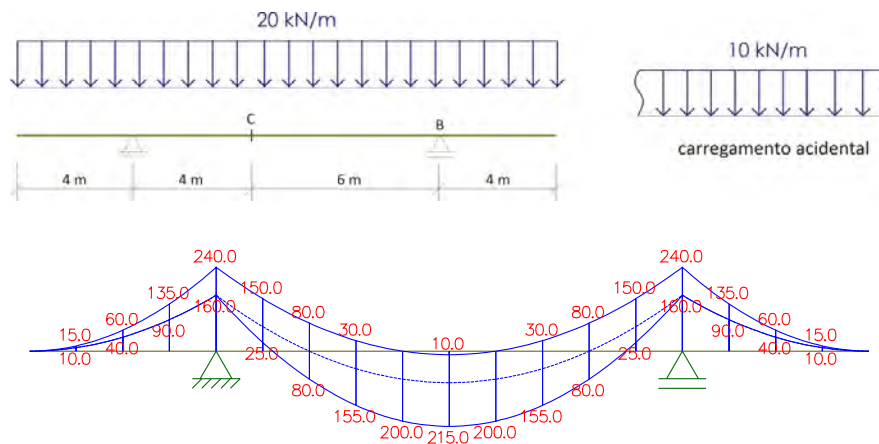


Figura 27 Envoltória de momentos fletores para os carregamentos permanente e acidental da viga simplesmente apoiada

Considerando-se o Exemplo 2.7, apresentado na página 12, foram obtidos os esforços de flexão máximo +200 kN·m e mínimo 0 kN·m para a Seção C, mediante a utilização da linha de influência de momentos fletores para a seção C. Realizando este estudo para as demais seções da viga, espaçadas a cada metro, obtém-se a envoltória de momentos fletores, que apresenta os esforços de flexão máximo e mínimo em cada seção transversal considerada.



Devido ao considerável custo operacional, as envoltórias de esforços são obtidas utilizando-se programas de análise de estruturas reticuladas (FTOOL, 2002) e de análise por elementos finitos genéricos com barras (1-D), placas e cascas (2-D) e sólidos 3-D (SAP2000, 2009).

5 REFERÊNCIAS

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 2. ed. Berkeley: CSI, 2003.

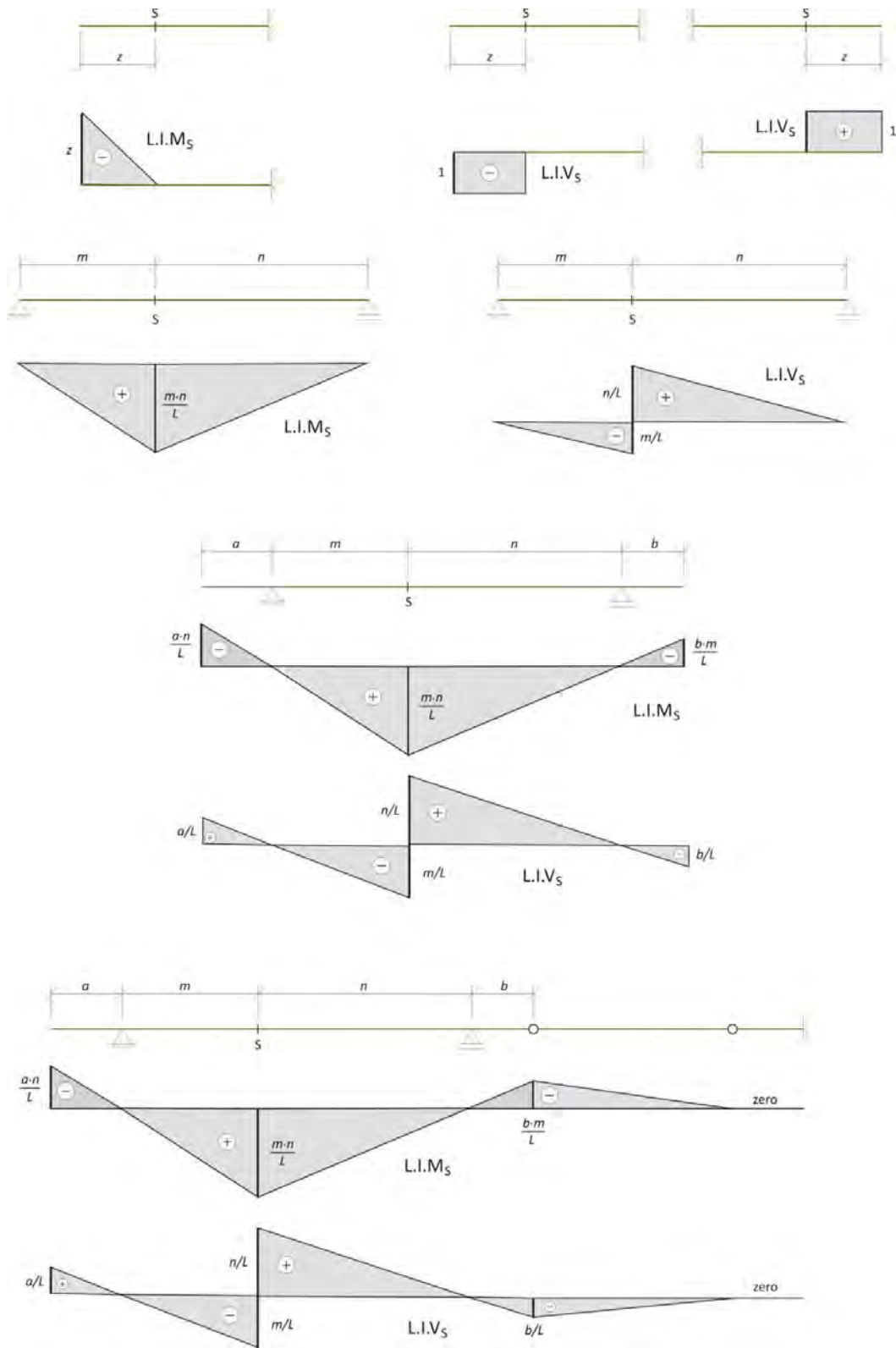
FTOOL. **Um Programa Gráfico Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas**: Versão Educacional 2.11. Rio de Janeiro: TECGRAF, 2002.

KALMUS, S. S.; LUNARDI JUNIOR, E. **Estabilidade das construções**. 3. ed. São Paulo: Nobel, 1984. 2 t.

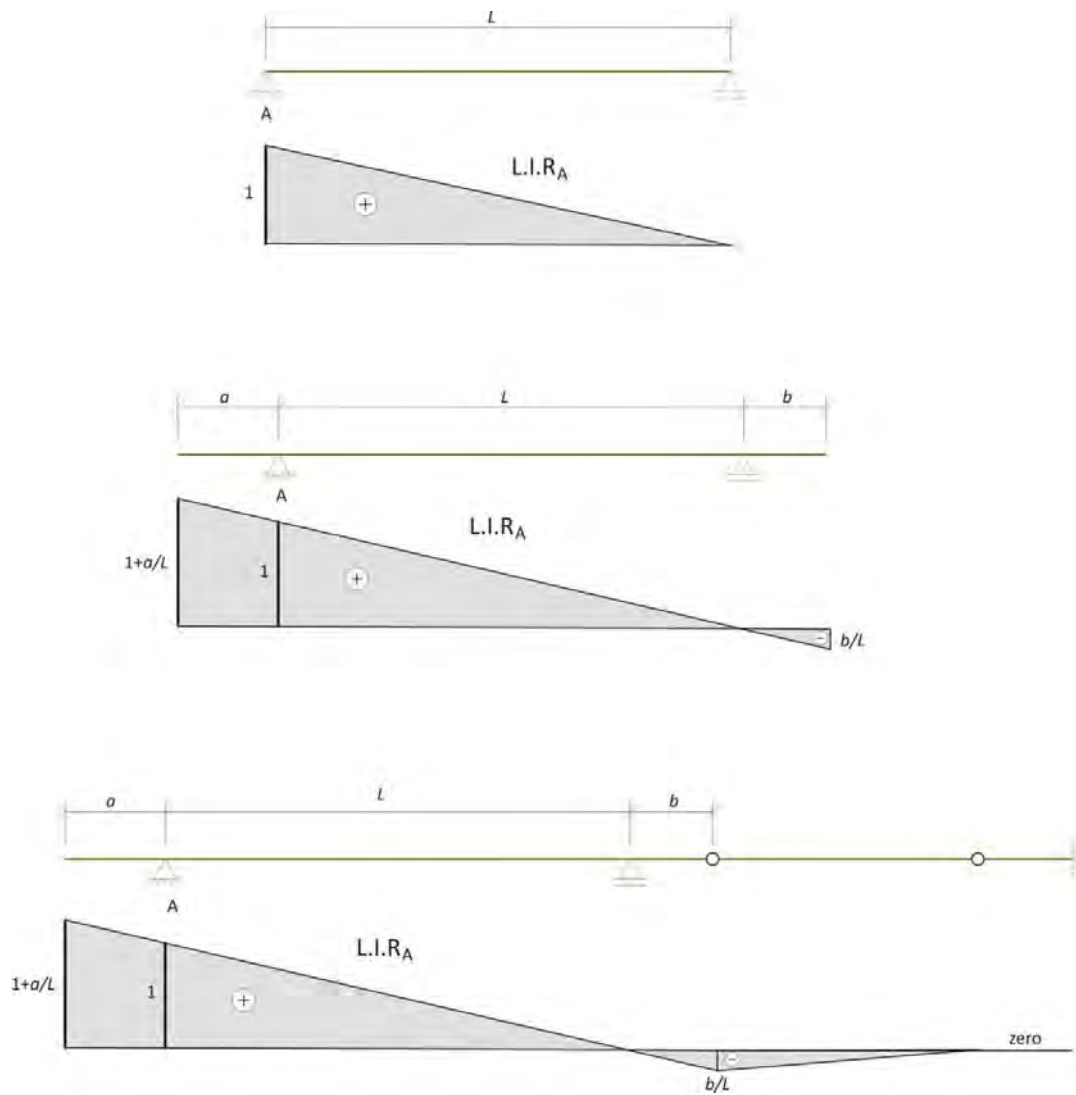
MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas**: Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: ELSEVIER, 2010.

SAP2000. **Analysis Reference Manual for Release 14**. Berkeley: CSI, 2009.

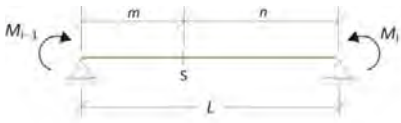
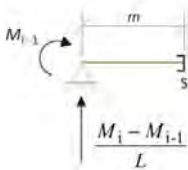
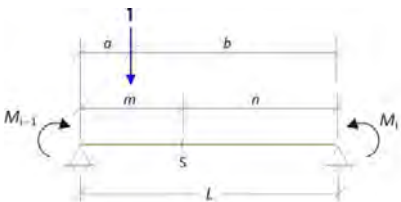
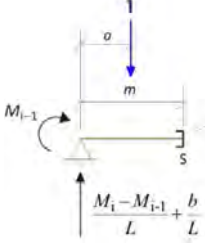
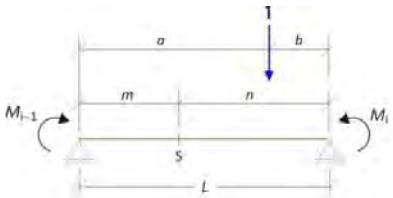
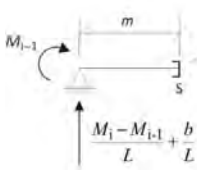
ANEXO A LINHAS DE INFLUÊNCIA DE MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE



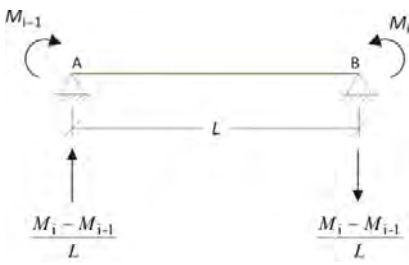
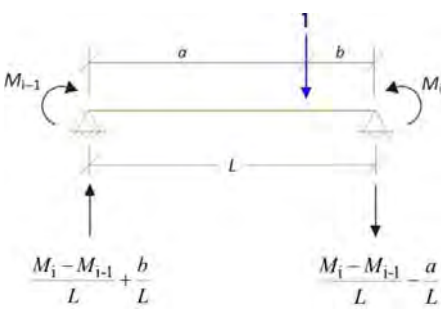
ANEXO B LINHAS DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO VERTICAL PARA O APOIO ESQUERDO



ANEXO C

Situação	Funções momento fletor e força cortante na seção transversal S
Vão descarregado	  $M_S = m \cdot \left(\frac{M_i - M_{i-1}}{L} \right) + M_{i-1}$ $V_S = \frac{M_i - M_{i-1}}{L}$ sendo: M_{i-1} e M_i positivos
Vão carregado com carga móvel à esquerda de S	  $M_S = m \cdot \left(\frac{M_i - M_{i-1}}{L} + \frac{b}{L} \right) + M_{i-1} - (m - a)$ $V_S = \frac{M_i - M_{i-1}}{L} + \frac{b}{L} - 1 \quad \text{para : } a < m$ sendo: M_{i-1} e M_i positivos
Vão carregado com carga móvel à direita de S	  $M_S = m \cdot \left(\frac{M_i - M_{i-1}}{L} + \frac{b}{L} \right) + M_{i-1}$ $V_S = \frac{M_i - M_{i-1}}{L} + \frac{b}{L} \quad \text{para : } a > m$ sendo: M_{i-1} e M_i positivos

ANEXO D

Situação	Reações de apoio
Vão descarregado	
Vão carregado	

ANEXO E RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

EXERCÍCIO 2.1

$M_C \in [-90 \text{ kN}\cdot\text{m}; -300 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
 $V_C \in [-30 \text{ kN}; -120 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.2

$M_C \in [-180 \text{ kN}\cdot\text{m}; -840 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
 $V_C \in [-60 \text{ kN}; -340 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.3

$M_C \in [-45 \text{ kN}\cdot\text{m}; -470 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
 $V_C \in [-70 \text{ kN}; -320 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.4

$M_C \in [-125 \text{ kN}\cdot\text{m}; -270 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
 $V_C \in [+50 \text{ kN}; +180 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.5

$M_C [+120 \text{ kN}\cdot\text{m}; +600 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
 $V_C [-46 \text{ kN}; +106 \text{ kN}]$
 $R_A [+50 \text{ kN}; +160 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.6

- (a) $M_C \in [+540 \text{ kN}\cdot\text{m}; +936 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
- (b) $V_C \in [-46,33 \text{ kN}; +4,33 \text{ kN}]$
- (c) $M_M \in [+562,5 \text{ kN}\cdot\text{m}; +972,5 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
- (d) $V_M \in [-25,33 \text{ kN}; +25,33 \text{ kN}]$
- (e) $R_A \in [+75 \text{ kN}; +130,33 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.7

- (a) $M_C \in [0 \text{ kN}\cdot\text{m}; +200 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
- (b) $R_B \in [+172 \text{ kN}; +278 \text{ kN}]$

EXERCÍCIO 2.8

- (a) $M_A [-200 \text{ kN}\cdot\text{m}; -160 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
- (b) $R_B [+127,7 \text{ kN}; +114,6 \text{ kN}]$
- (c) $M_C [+276,9 \text{ kN}\cdot\text{m}; +332,3 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 2.9

- (a) $M_A [-40 \text{ kN}\cdot\text{m}; +80 \text{ kN}\cdot\text{m}]$
- (b) $R_B [+86,9 \text{ kN}; +306,7 \text{ kN}]$
- (c) $M_C [+7,5 \text{ kN}\cdot\text{m}; +202,2 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 3.1

$M_S \in [-31,3 \text{ kN}\cdot\text{m}; +93,8 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

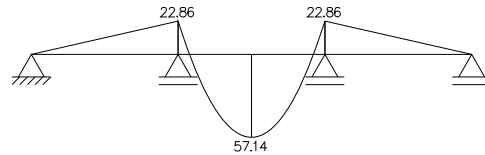
EXERCÍCIO 3.2

$$\alpha_{2,1} = \frac{1}{2 + (800/400) \cdot (2-0)} = 1/6$$

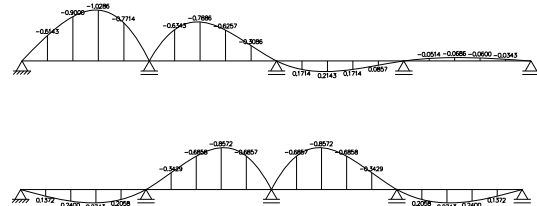
$$\alpha_{3,2} = \frac{1}{2 + (400/800) \cdot (2-1/6)} = \frac{12}{35}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{1/6 \cdot (160 \cdot 1/6 - 160)}{1 - (1/6 \cdot 1/6)}$$

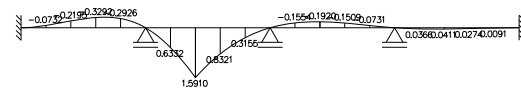
$$M_1 = M_2 = -16/7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



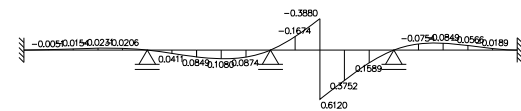
EXERCÍCIO 3.3



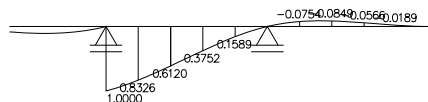
EXERCÍCIO 3.4



EXERCÍCIO 3.5



EXERCÍCIO 3.6



EXERCÍCIO 3.7 $M_0 [-256 \text{ kN}\cdot\text{m}; +16 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 3.8 $M_1 [-288 \text{ kN}\cdot\text{m}; -12 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 3.9 $M_2 [-240 \text{ kN}\cdot\text{m}; 0 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 3.10 $M_0 [-170,85 \text{ kN}\cdot\text{m}; -56 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 3.11 $M_1 [-161,45 \text{ kN}\cdot\text{m}; -68 \text{ kN}\cdot\text{m}]$

EXERCÍCIO 3.12 $M_2 [-164 \text{ kN}\cdot\text{m}; -78,2 \text{ kN}\cdot\text{m}]$