# Maxi Educa

www.maxieducaa.com.br

Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx)

# Matemática

Curso de Formação e Graduação de Oficiais de Carreira de Linha de Ensino Militar Bélico




1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




# Sumário

1) Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos: - Representação de conjuntos, subconjuntos, operações: união e interseção, diferença e complementar. Conjunto universo e conjunto vazio; conjunto dos números Naturais e Inteiros: operações fundamentais; Números primos, fatoração, número de divisores, máximo divisor comum e mínimo múltiplo; Conjunto dos números Reais: Operações fundamentais, módulo, representação decimal, operações com intervalos reais; sistema de numeração na base 10 e em outras bases; e números complexos: Operações, módulo, conjugado de um número complexo, representações algébrica e trigonométrica. Representação no plano de Argand-Gauss, Potencialização e radiciação. Extração de raízes. Fórmulas de Moivre. Resolução de equações binomiais e trinomiais ..... **1**

2) Funções: - Definição, domínio, imagem, contradomínio, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, funções pares e ímpares, funções periódicas funções compostas; relações; raiz de uma função; função constante, função crescente, função decrescente; função definida por mais de uma sentença; as funções y=k/x, y= raiz quadrada de x e seus gráficos; função inversa e seu gráfico; e translação, reflexão de funções. 3) Função linear, função afim e função quadrática: - Gráficos, domínio, imagem e características; - Variações de sinal; - Máximos e mínimos; e inequação produto e inequação quociente ..... **57**

4) Função Modular: - O conceito e propriedades do módulo de um número real; - Definição, gráfico, domínio e imagem da função modular; - Equações modulares; - Inequações modulares ..... **85**

5) Função Exponencial: - Gráficos, domínio, imagem e características da função exponencial; logaritmos decimais, característica e mantissa; e as equações e inequações exponenciais ..... **92**

6) Função Logarítmica: - Definição de logaritmo, propriedades operatórias; - Gráficos, domínio, imagem e características da função logarítmica; - Equações e inequações logarítmicas ..... **106**

7) Trigonometria: - Trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer); - Lei dos senos e lei dos cossenos; - Unidades de medidas de arcos e ângulos: o grau e o radiano; - Círculo trigonométrico, razões trigonométricas, redução ao 1º quadrante; - Funções trigonométricas, transformações, identidades trigonométricas fundamentais, equações e inequações trigonométricas em R; - Fórmulas de adição de arcos, arcos duplos, arco metade e transformação em produto; - As funções trigonométricas inversas e seus gráficos, arcos notáveis; e sistemas de equações e inequações trigonométricas e resolução de triângulos ..... **115**

8) Contagem e Análise Combinatória: - Fatorial: definição e operações; - Princípios multiplicativo e aditivo da contagem; - Arranjos, combinações e permutações; - Binômio de Newton: desenvolvimento, coeficientes binomiais, termo geral ..... **149**

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

9) Probabilidade: - Experimento aleatório, experimento amostral, espaço amostral, evento; - Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis; - Probabilidade da união de dois eventos; - Probabilidade condicional; - Propriedades das probabilidades; e a Probabilidade de dois eventos sucessivos e experimentos binomiais ..... **158**

10) Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: - Operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar, transposição produto); - Matriz inversa; - Determinante de uma matriz: definição e propriedades; e os sistemas de equações lineares ..... **163**

11) Sequências Numéricas e Progressões: - Sequências Numéricas; - Progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos, propriedades; - Progressões Geométricas: termo geral, soma dos termos, propriedades ..... **211**

12) Geometria Espacial de posição: - Posições relativas entre duas retas; - Posições relativas entre dois planos; - Posições relativas entre reta e plano; - Perpendicularidade entre duas retas ou dois planos; e a Projeção ortogonal ..... **224**

13) Geometria Espacial Métrica: - Prismas: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Pirâmide: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Cilindro: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Cone: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Esfera: elementos, seção da esfera, área, volumes, partes da esfera; projeções; sólidos de revolução; e inscrição e circunscrição de sólido ..... **230**

14) Geometria Analítica Plana: - Ponto: O plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos; - Reta: equações geral e reduzida, interseção de retas, paralelismo e perpendicularidade, ângulo entre duas retas, distância ponto-reta, bissetrizes do ângulo entre duas retas, Área de um triângulo, inequações do primeiro grau com duas variáveis; - Circunferência: Equações geral e reduzida, posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; tangência; inequações do segundo grau com duas variáveis; - Elipse: Definição, equação, posições relativas entre ponto e elipse, posições relativas entre reta e elipse; - Hipérbole: definição, equação da hipérbole, posições relativas entre ponto e hipérbole, posições relativas entre reta e hipérbole, equações das assíntotas da hipérbole; - Parábola: definição, equação, posições relativas entre ponto e parábola, posições relativas entre reta e parábola; - Reconhecimento de cônicas a partir de sua equação geral ..... **245**

15) Geometria Plana: Ângulo: definição, elementos e propriedades: Ângulos na circunferência; Paralelismo e perpendicularidade: Semelhança de triângulos; Pontos notáveis do triângulo; Relação entre métricas nos triângulos; Relação Stewart; Triângulos retângulos, Teorema de Pitágoras; Congruência de figuras planas; Feixe de retas paralelas e transversais, Teorema de Tales; Teorema de bissetrizes internas e externas de um triângulo; Quadriláteros notáveis; Polígonos, polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; Perímetro e área de polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; Fórmula de Heron; Razão entre áreas; Lugares geométricos; Elipse, parábola e hipérbole; Linha poligonal; e a inscrição e circunscrição ..... **286**

16) Polinômios: - Função polinomial, polinômio identicamente nulo, grau de um polinômio, identidade de um polinômio, raiz de um polinômio, operações com polinômios, valor numérico de um polinômio; - Divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffinni; relação entre coeficientes e raízes. Fatoração e multiplicidade de raízes e produtos notáveis. Máximo divisor comum de polinômios ..... **333**

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

17) Equações Polinomiais: - Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema da decomposição, Raízes imaginárias, raízes racionais, relações de Girard, Teorema de Bolzano. ..... **343**

*Candidatos ao Concurso Público,*

*O Instituto Maximize Educação disponibiliza o e-mail professores@maxieduca.com.br para dúvidas relacionadas ao conteúdo desta apostila como forma de auxiliá-los nos estudos para um bom desempenho na prova.*

*As dúvidas serão encaminhadas para os professores responsáveis pela matéria, portanto, ao entrar em contato, informe:*

*- Apostila (concurso e cargo);*

*- Disciplina (matéria);*

*- Número da página onde se encontra a dúvida; e*

*- Qual a dúvida.*

*Caso existam dúvidas em disciplinas diferentes, por favor, encaminhá-las em e-mails separados. O professor terá até cinco dias úteis para respondê-la.*

*Bons estudos!*

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



**1) Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos: - Representação de conjuntos, subconjuntos, operações: união e interseção, diferença e complementar. Conjunto universo e conjunto vazio; conjunto dos números Naturais e Inteiros: operações fundamentais; Números primos, fatoração, número de divisores, máximo divisor comum e mínimo múltiplo; Conjunto dos números Reais: Operações fundamentais, módulo, representação decimal, operações com intervalos reais; sistema de numeração na base 10 e em outras bases; e números complexos: Operações, módulo, conjugado de um número complexo, representações algébrica e trigonométrica. Representação no plano de Argand-Gauss, Potencialização e radiciação. Extração de raízes. Fórmulas de Moivre. Resolução de equações binomiais e trinomiais.**

## CONJUNTOS

É uma reunião, agrupamento de pessoas, seres, objetos, classes…, que possuem a mesma característica, nos dá ideia de coleção.

### ➔ Noções Primitivas

Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definições:
- Conjunto;
- Elemento;
- E a pertinência entre um elemento e um conjunto.

Um cacho de bananas, um cardume de peixes ou uma porção de livros são todos exemplos de conjuntos.

Conjuntos, como usualmente são concebidos, têm elementos. Um elemento de um conjunto pode ser uma banana, um peixe ou um livro. Convém frisar que um conjunto pode ele mesmo ser elemento de algum outro conjunto.

Em geral indicaremos os conjuntos pelas letras maiúsculas A, B, C, ..., X, e os elementos pelas letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, ..., embora não exista essa obrigatoriedade.

A relação de pertinência que nos dá um relacionamento entre um elemento e um conjunto.

Se x é um elemento de um conjunto A, escreveremos $x \in A$.
Lê-se: x é elemento de A ou x pertence a A.

Se x não é um elemento de um conjunto A, escreveremos $x \notin A$.
Lê-se x não é elemento de A ou x não pertence a A.

### ➔ Como representar um conjunto

**1) Pela designação de seus elementos:**
Escrevemos os elementos entre chaves, separando os por vírgula.

**Exemplos:**
{a, e, i, o, u} indica o conjunto formado pelas vogais
{1, 2 ,5 ,10} indica o conjunto formado pelos divisores naturais de 10.

**2) Pela sua característica**

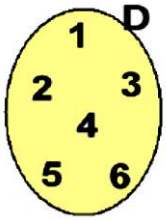
Escrevemos o conjunto enunciando uma propriedade ou característica comum de seus elementos. Assim sendo, o conjunto dos elementos x que possuem a propriedade P é indicado por:
{x, | (tal que) x tem a propriedade P}


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

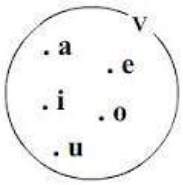
**Exemplos:**
- {x| x é vogal} é o mesmo que {a, e, i, o, u}
- {x | x são os divisores naturais de 10} é o mesmo que {1,2,5,10}

**3) Pelo diagrama de Venn-Euler**

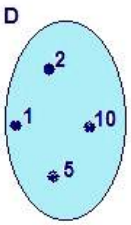
Os elementos do conjunto são colocados dentro de uma figura em forma de elipse, chamada diagrama de Venn.




**Exemplos:**
- Conjunto das vogais




- Conjunto dos divisores naturais de 10




**➔ Igualdade de Conjuntos**

Dois conjuntos A=B são ditos iguais (ou idênticos) se todos os seus elementos são iguais, e escrevemos A=B. Caso haja algum que não o seja dizemos que estes conjuntos são distintos e escrevemos A≠B.

**Exemplos:**

1) A={3,5,7} e B= {x| x é primo e 3≤x≤7}, então A=B.

2) B= {6,9,10} e C = {10,6,9}, então B= C, note que a ordem dos elementos não altera a igualdade dos conjuntos.

**➔ Tipos de Conjuntos**

**- Conjunto Universo**

Reunião de todos os conjuntos que estamos trabalhando.

**Exemplo:**

Quando falamos de números naturais, temos como Conjunto Universo os números inteiros positivos.

**- Conjunto Vazio**

Conjunto vazio é aquele que não possui elementos. Representa-se por $\emptyset$ ou, simplesmente { }.

**Exemplo:**

A = {x| x é natural e menor que 0}

**- Conjunto Unitário**

Conjunto caracterizado por possuir apenas um único elemento.

**Exemplos:**
- Conjunto dos números naturais compreendidos entre 2 e 4. A={3}
- Conjunto dos números inteiros negativos compreendidos entre -5 e -7. B={-6}


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**- Conjuntos Finitos e Infinitos**

**Finito=** quando podemos enumerar todos os seus elementos. **Exemplo:** Conjuntos dos Estados da Região Sudeste, S= {Rio de Janeiro, São Paulo, Espirito Santo, Minas Gerais}

**Infinito =** contrário do finito. **Exemplo:** Conjunto dos números inteiros, Z= {...,-2,-1,0,1,2,3,4,5, ...}. A reticências representa o infinito.

### ➔ Relação de Pertinência

A pertinência é representada pelo símbolo ϵ (pertence) ou $\notin$(não pertence). Ele relaciona elemento com conjunto.

Exemplo:
Seja o conjunto B={1,3,5,7}
* 1ϵ B, 3 ϵ B, 5 ϵ B
* 2 $\notin$ B, 6 $\notin$ B , 9 $\notin$B

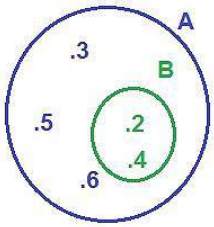
### ➔ Subconjuntos

Quando todos os elementos de um conjunto A são também elementos de um outro conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B.

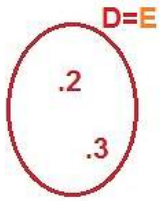
Podemos dizer ainda que subconjunto é quando formamos vários conjuntos menores com as mesmas caraterísticas de um conjunto maior.

**Exemplos:**

- B={2 ,4} $\subset$A={2, 3, 4, 5, 6}, pois 2 $\in$ {2, 3, 4, 5, 6} e 4 $\in$ {2, 3, 4,5 ,6}




- C={2, 7, 4}$\not\subset$ A={2, 3, 4, 5, 6}, pois 7 $\notin${2, 3, 4, 5, 6}
- D={2,3} $\subset$ E={2,3}, pois 2 ϵ {2,3} e 3 ϵ {2,3}





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



1) **Todo conjunto A é subconjunto dele próprio**;

2) O **conjunto vazio**, por convenção, é **subconjunto de qualquer conjunto**;

3) O conjunto das partes é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

**Exemplo:** Pegando o conjunto B acima, temos as partes de B:

B= {{ },{2},{4},B}

Podemos concluir com essa propriedade que: Se B tem *n* elementos então *B* possui $2^n$ subconjuntos e, portanto, P(B) possui $2^n$ elementos.

Se quiséssemos saber quantos subconjuntos tem o conjunto A (exemplo acima), basta calcularmos

### ➔ Relação de inclusão

Deve ser usada para estabelecer relação entre conjuntos com conjuntos, verificando se um conjunto é subconjunto ou não de outro conjunto.

Representamos as relações de inclusão pelos seguintes símbolos:

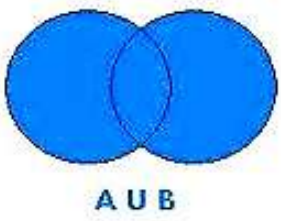
| | |
|---|---|
| $\subset \rightarrow$ Está contido | $\supset \rightarrow$ Contém |
| $\not\subset \rightarrow$ Não está contido | $\not\supset \rightarrow$ Não contém |

### ➔ Operações com Conjuntos

**- União de conjuntos**

A união (ou reunião) dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Representa-se por $A \cup B$.

Simbolicamente: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



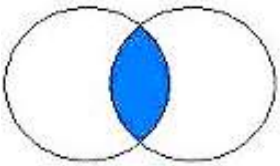

**Exemplos:**

- $\{2,3\} \cup \{4,5,6\} = \{2,3,4,5,6\}$
- $\{2,3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{2,3,4,5\}$
- $\{2,3\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
- $\{a,b\} \cup \phi = \{a,b\}$

**- Intersecção de conjuntos**

A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B. Representa-se por $A \cap B$. Simbolicamente: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

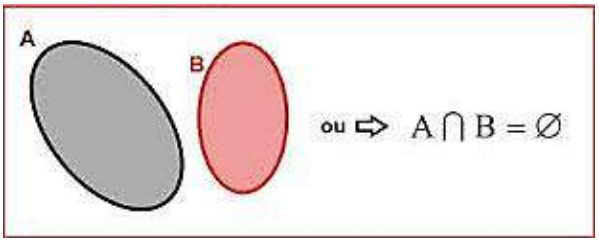

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



A ∩ B

**Exemplos:**
- $\{2,3,4\} \cap \{3,5\} = \{3\}$
- $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
- $\{2,3\} \cap \{1,2,3,5\} = \{2,3\}$
- $\{2,4\} \cap \{3,5,7\} = \phi$

Observação: Se $A \cap B = \phi$, dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.

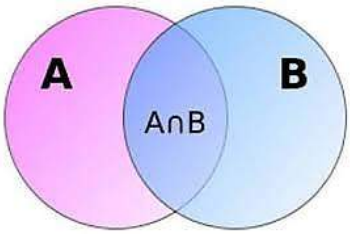



**- Propriedades dos conjuntos disjuntos**

1) A U (A ∩ B) = A
2) A ∩ (A U B) = A
3) Distributiva da reunião em relação à intersecção: A U (B U C) = (A U B) ∩ (A U C)
4) Distributiva da intersecção em relação à união: A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)

**- Número de Elementos da União e da Intersecção de Conjuntos**

Dados dois conjuntos A e B, como vemos na figura abaixo, podemos estabelecer uma relação entre os respectivos números de elementos.




$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Note que ao subtrairmos os elementos comuns $\left(n(A \cap B)\right)$ evitamos que eles sejam contados duas vezes.

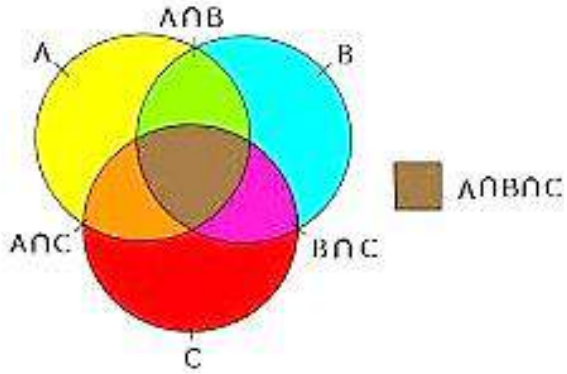
**Observações:**

a) Se os conjuntos A e B forem disjuntos ou se mesmo um deles estiver contido no outro, ainda assim a relação dada será verdadeira.

b) Podemos ampliar a relação do número de elementos para três ou mais conjuntos com a mesma eficiência.

Observe o diagrama e comprove:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

**- Propriedades da União e Intersecção de Conjuntos**

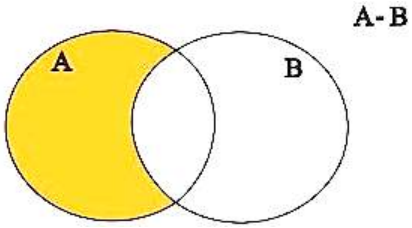
Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1) Idempotente: A U A = A e A ∩ A= A
2) Elemento Neutro: A U Ø= A e A ∩ U = A
3) Comutativa: A U B = B U A e A ∩ B = B ∩ A
4) Associativa: A U (B U C) = (A U B) U C e A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C

**- Diferença**

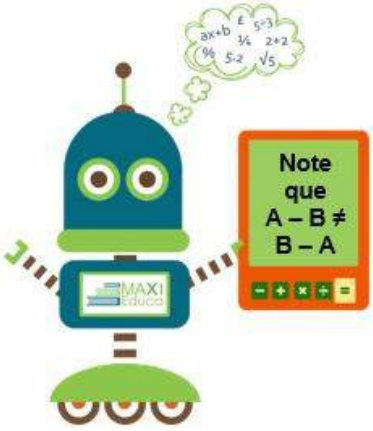
A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Representa-se por A – B. Para determinar a diferença entre conjuntos, basta observamos o que o conjunto A tem de diferente de B.

Simbolicamente: A – B = {x | x ∈ A e x ∉ B}




**Exemplos:**

- A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 2} ➔ A – B = {1,3} e B – A = $\phi$
- A = {1, 2, 3} e B = {2, 3, 4} ➔ A – B = {1} e B – A = {4}
- A = {0, 2, 4} e B = {1 ,3 ,5} ➔ A – B = {0,2,4} e B – A = {1,3,5}

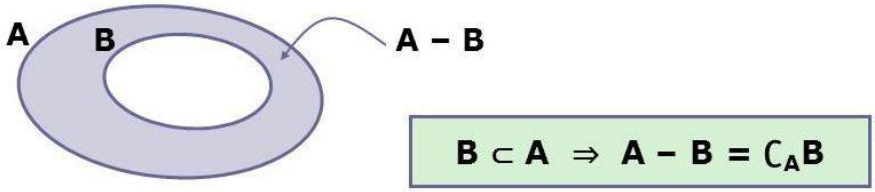



**- Complementar**

Dados dois conjuntos A e B, tais que B ⊂ A (**B é subconjunto de A**), chama-se complementar de B em relação a A o conjunto A - B, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

Dizemos complementar de B em relação a A.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Exemplos:**
Seja S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Então:
a) A = {2, 3, 4} $\Rightarrow \overline{A}$ = {0, 1, 5, 6}
b) B = {3, 4, 5, 6 } $\Rightarrow \overline{B}$ = {0, 1, 2}
c) C = $\phi \Rightarrow \overline{C}$ = S

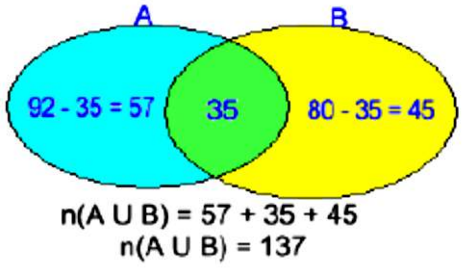
**➔ Resolução de Problemas Utilizando Conjuntos**

Muitos dos problemas constituem- se de perguntas, tarefas a serem executadas. Nos utilizaremos dessas informações e dos conhecimentos aprendidos em relação as operações de conjuntos para resolvê-los.

**Exemplos:**
**1)** Numa pesquisa sobre a preferência por dois partidos políticos, A e B, obteve-se os seguintes resultados. Noventa e duas disseram que gostam do partido A, oitenta pessoas disseram que gostam do partido B e trinta e cinco pessoas disseram que gostam dos dois partidos. Quantas pessoas responderam a pesquisa?

**Resolução pela Fórmula**
» n(A U B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)
» n(A U B) = 92 + 80 – 35
» n(A U B) = 137

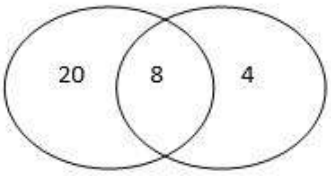
**Resolução pelo diagrama:**
- Se 92 pessoas responderam gostar do partido A e 35 delas responderam que gostam de ambos, então o número de pessoas que gostam somente do partido A é: 92 – 35 = 57.
- Se 80 pessoas responderam gostar do partido B e 35 delas responderam gostar dos dois partidos, então o número de operários que gostam somente do partido B é: 92 – 35 = 57.
- Se 57 gostam somente do partido A, 45 responderam que gostam somente do partido B e 35 responderam que gostam dos dois partidos políticos, então o número de pessoas que responderam à pesquisa foi: 57 + 35 + 45 = 137.




**2)** Num grupo de motoristas, há 28 que dirigem automóvel, 12 que dirigem motocicleta e 8 que dirigem automóveis e motocicleta. Quantos motoristas há no grupo?
(A) 16 motoristas
(B) 32 motoristas
(C) 48 motoristas
(D) 36 motoristas

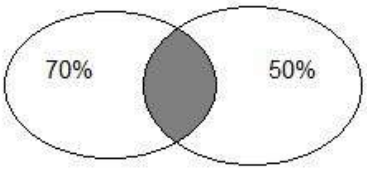

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Resolução:**




Os que dirigem automóveis e motocicleta: 8
Os que dirigem apenas automóvel: 28-8 = 20
Os que dirigem apenas motocicleta: 12-8= 4
A quantidade de motoristas é o somatório: 20+8+4 = 32 motoristas.
Resposta: B

**3)** Em uma cidade existem duas empresas de transporte coletivo, A e B. Exatamente 70% dos estudantes desta cidade utilizam a Empresa A e 50% a Empresa B. Sabendo que todo estudante da cidade é usuário de pelo menos uma das empresas, qual o % deles que utilizam as duas empresas?
(A) 20%
(B) 25%
(C) 27%
(D) 33%
(E) 35%
**Resolução:**




70 – 50 = 20.
20% utilizam as duas empresas.
Resposta: A.

## Questões

**01. (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014)** Dos 43 vereadores de uma cidade, 13 dele não se inscreveram nas comissões de Educação, Saúde e Saneamento Básico. Sete dos vereadores se inscreveram nas três comissões citadas. Doze deles se inscreveram apenas nas comissões de Educação e Saúde e oito deles se inscreveram apenas nas comissões de Saúde e Saneamento Básico. Nenhum dos vereadores se inscreveu em apenas uma dessas comissões. O número de vereadores inscritos na comissão de Saneamento Básico é igual a
(A) 15.
(B) 21.
(C) 18.
(D) 27.
(E) 16.

**02. (EBSERH/HU-UFS/SE - Tecnólogo em Radiologia - AOCP /2014)** Em uma pequena cidade, circulam apenas dois jornais diferentes. O jornal A e o jornal B. Uma pesquisa realizada com os moradores dessa cidade mostrou que 33% lê o jornal A, 45% lê o jornal B, e 7% leem os jornais A e B. Sendo assim, quantos por centos não leem nenhum dos dois jornais?
(A) 15%
(B) 25%
(C) 27%
(D) 29%
(E) 35%

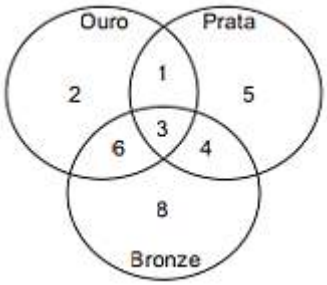
**03. (TRT 19ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2014)** Dos 46 técnicos que estão aptos para arquivar documentos 15 deles também estão aptos para classificar processos e os demais estão aptos para atender ao público. Há outros 11 técnicos que estão aptos para atender ao público, mas não são capazes


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

de arquivar documentos. Dentre esses últimos técnicos mencionados, 4 deles também são capazes de classificar processos. Sabe-se que aqueles que classificam processos são, ao todo, 27 técnicos. Considerando que todos os técnicos que executam essas três tarefas foram citados anteriormente, eles somam um total de

(A) 58.
(B) 65.
(C) 76.
(D) 53.
(E) 95.

**04. (METRÔ/SP – OFICIAL LOGISTICA –ALMOXARIFADO I – FCC/2014)** O diagrama indica a distribuição de atletas da delegação de um país nos jogos universitários por medalha conquistada. Sabe-se que esse país conquistou medalhas apenas em modalidades individuais. Sabe-se ainda que cada atleta da delegação desse país que ganhou uma ou mais medalhas não ganhou mais de uma medalha do mesmo tipo (ouro, prata, bronze). De acordo com o diagrama, por exemplo, 2 atletas da delegação desse país ganharam, cada um, apenas uma medalha de ouro.




A análise adequada do diagrama permite concluir corretamente que o número de medalhas conquistadas por esse país nessa edição dos jogos universitários foi de

(A) 15.
(B) 29.
(C) 52.
(D) 46.
(E) 40.

**05. (PREF. CAMAÇARI/BA – TÉC. VIGILÂNCIA EM SAÚDE NM – AOCP/2014)** Qual é o número de elementos que formam o conjunto dos múltiplos estritamente positivos do número 3, menores que 31?

(A) 9
(B) 10
(C) 11
(D) 12
(E) 13

**06. (PREF. CAMAÇARI/BA – TÉC. VIGILÂNCIA EM SAÚDE NM – AOCP/2014)** Considere dois conjuntos A e B, sabendo que $A \cap B = \{3\}, A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 5\}$ *e* $A - B = \{1; 2\}$, assinale a alternativa que apresenta o conjunto B.

(A) {1;2;3}
(B) {0;3}
(C) {0;1;2;3;5}
(D) {3;5}
(E) {0;3;5}

**07. (INES – Técnico em Contabilidade – MAGNUS CONCURSOS/2014)** Numa biblioteca são lidos apenas dois livros, K e Z. 80% dos seus frequentadores leem o livro K e 60% o livro Z. Sabendo-se que todo frequentador é leitor de pelo menos um dos livros, a opção que corresponde ao percentual de frequentadores que leem ambos, é representado:

(A) 26%
(B) 40%
(C) 34%
(D) 78%


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(E) 38%

**08. (METRÔ/SP – ENGENHEIRO SEGURANÇA DO TRABALHO – FCC/2014)** Uma pesquisa, com 200 pessoas, investigou como eram utilizadas as três linhas: A, B e C do Metrô de uma cidade. Verificou-se que 92 pessoas utilizam a linha A; 94 pessoas utilizam a linha B e 110 pessoas utilizam a linha C. Utilizam as linhas A e B um total de 38 pessoas, as linhas A e C um total de 42 pessoas e as linhas B e C um total de 60 pessoas; 26 pessoas que não se utilizam dessas linhas. Desta maneira, conclui-se corretamente que o número de entrevistados que utilizam as linhas A e B e C é igual a

(A) 50.
(B) 26.
(C) 56.
(D) 10.
(E) 18.

**09. (INES – Técnico em Contabilidade – MAGNUS CONCURSOS/2014)** Numa recepção, foram servidos os salgados pastel e casulo. Nessa, estavam presentes 10 pessoas, das quais 5 comeram pastel, 7 comeram casulo e 3 comeram as duas. Quantas pessoas não comeram nenhum dos dois salgados?

(A) 0
(B) 5
(C) 1
(D) 3
(E) 2

**10. (Corpo de Bombeiros Militar/MT – Oficial Bombeiro Militar – COVEST – UNEMAT/2014)** Em uma pesquisa realizada com alunos de uma universidade pública sobre a utilização de operadoras de celular, constatou-se que 300 alunos utilizam a operadora A, 270 utilizam a operadora B, 150 utilizam as duas operadoras (A e B) e 80 utilizam outras operadoras distintas de A e B.

Quantas pessoas foram consultadas?

(A) 420
(B) 650
(C) 500
(D) 720
(E) 800

## Respostas

**01. Resposta: C.**

De acordo com os dados temos:

7 vereadores se inscreveram nas 3.

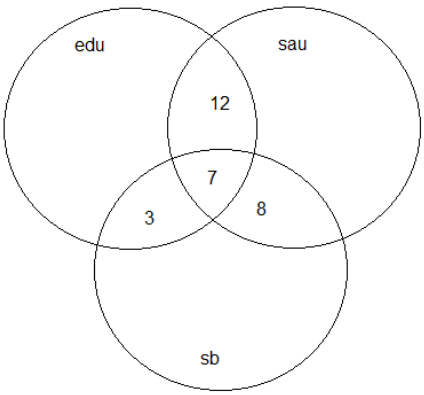
APENAS 12 se inscreveram em educação e saúde (o 12 não deve ser tirado de 7 como costuma fazer nos conjuntos, pois ele já desconsidera os que se inscreveram nos três)

APENAS 8 se inscreveram em saúde e saneamento básico.

São 30 vereadores que se inscreveram nessas 3 comissões, pois 13 dos 43 não se inscreveram.

Portanto, 30 – 7 – 12 – 8 = 3

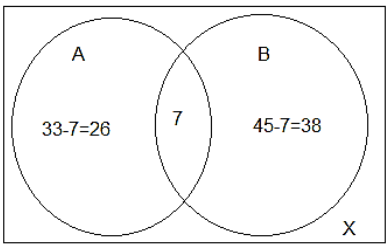
Se inscreveram em educação e saneamento 3 vereadores.




Só em saneamento se inscreveram: 3 + 7 + 8 = 18

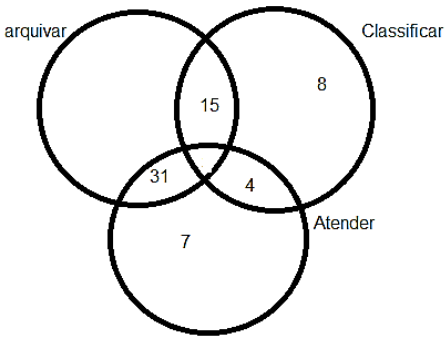

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**02. Resposta: D.**




26 + 7 + 38 + x = 100
x = 100 - 71
x = 29%

**03. Resposta: B.**
Técnicos arquivam e classificam: 15
Arquivam e atendem: 46 – 15 = 31
Classificam e atendem: 4
Classificam: 15 + 4 = 19 como são 27 faltam 8
Dos 11 técnicos aptos a atender ao público 4 são capazes de classificar processos, logo apenas 11 - 4 = 7 técnicos são aptos a atender ao público.
Somando todos os valores obtidos no diagrama teremos: 31 + 15 + 7 + 4 + 8 = 65 técnicos.



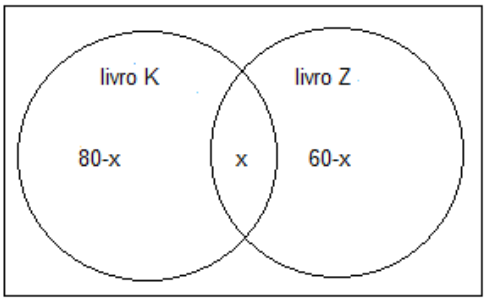

**04. Resposta: D.**
O diagrama mostra o número de atletas que ganharam medalhas.
No caso das intersecções, devemos multiplicar por 2 por ser 2 medalhas e na intersecção das três medalhas multiplica-se por 3.
Intersecções:
$6 \cdot 2 = 12$
$1 \cdot 2 = 2$
$4 \cdot 2 = 8$
$3 \cdot 3 = 9$
Somando as outras:
2 + 5 + 8 + 12 + 2 + 8 + 9 = 46

**05. Resposta: B.**
Se nos basearmos na tabuada do 3, teremos o seguinte conjunto
A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}
10 elementos.

**06. Resposta: B.**
A intersecção dos dois conjuntos, mostra que 3 é elemento de B.
A-B são os elementos que tem em A e não em B.
Então de A ∪ B, tiramos que B = {0; 3; 5}.

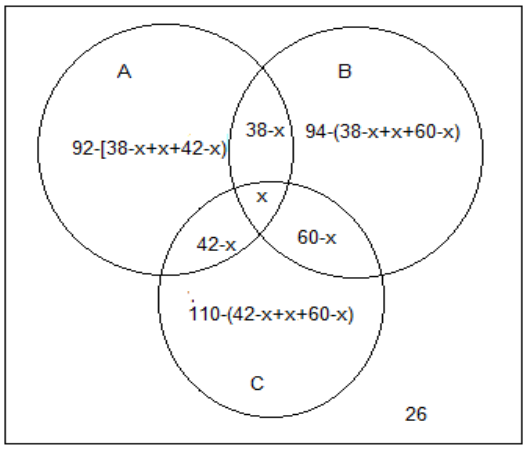

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**07. Resposta: B.**



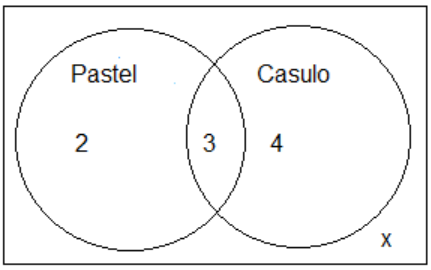

80 – x + x + 60 – x = 100
- x = 100 - 140
x = 40%

**08. Resposta: E.**




92-[38-x+x+42-x]+94-[38-x+x+60-x]+110-[42-x+x+60-x]+(38-x)+x+(42-x)+(60-x)+26=200
92 - [80 - x] + 94 - [98 - x] + 110 - [102 - x] + 38 + 42 – x + 60 – x + 26 = 200
92 – 80 +x + 94 – 98 +x + 110 – 102 + x + 166 -2x = 200
x + 462 – 180 = 200 ➔ x + 182 = 200 ➔ x = 200-182 ➔ x = 18

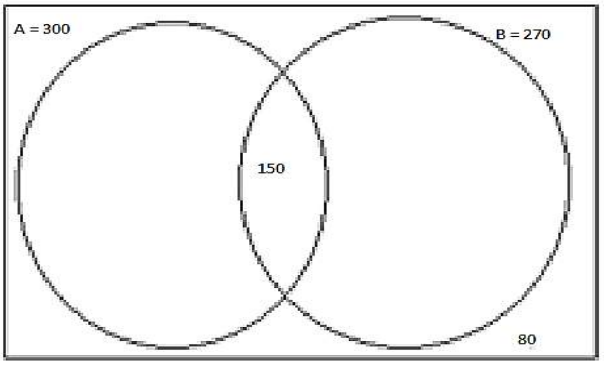
**09. Resposta: C.**




2 + 3 + 4 + x = 10
x = 10 - 9
x = 1


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**10. Resposta: C.**




300 – 150 = 150
270 – 150 = 120
Assim: 150 + 120 + 150 + 80 = 500(total)

## CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS - N

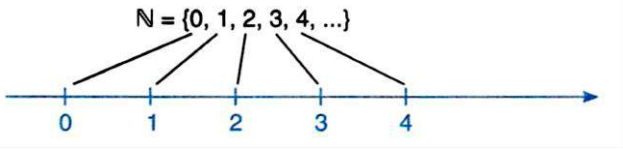
O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula ***N*** e estes números são construídos com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que também são conhecidos como algarismos indo-arábicos. No século VII, os árabes invadiram a Índia, difundindo o seu sistema numérico.

Embora o zero não seja um número natural no sentido que tenha sido proveniente de objetos de contagens naturais, iremos considerá-lo como um número natural uma vez que ele tem as mesmas propriedades algébricas que os números naturais. Na verdade, o zero foi criado pelos hindus na montagem do sistema posicional de numeração para suprir a deficiência de algo nulo.

Na sequência consideraremos que os naturais têm início com o número zero e escreveremos este conjunto como: N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}




As reticências (três pontos) indicam que este conjunto não tem fim. **N** é um conjunto com infinitos números.




Excluindo o zero do conjunto dos números naturais, o conjunto será representado por:

$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$

Subconjuntos notáveis em N:

| | |
|---|---|
| **1 – Números Naturais não nulos**<br>$N^* = \{1,2,3,4,...,n,...\}$; $N^* = N - \{0\}$ | **2 – Números Naturais pares**<br>$N_p = \{0,2,4,6,...,2n,...\}$; com $n \in N$ |
| **3 - Números Naturais ímpares**<br>$N_i = \{1,3,5,7,...,2n+1,...\}$ com $n \in N$ | **4 - Números primos**<br>P={2,3,5,7,11,13...} |

➔ **A construção dos Números Naturais**

- Todo número natural dado tem um sucessor (número que vem depois do número dado), considerando também o zero.

Exemplos: Seja m um número natural.

a) O sucessor de m é m+1.
b) O sucessor de 0 é 1.
c) O sucessor de 3 é 4.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- Se um número natural é sucessor de outro, então os dois números juntos são chamados números consecutivos.

Exemplos:

a) 1 e 2 são números consecutivos.

b) 7 e 8 são números consecutivos.

c) 50 e 51 são números consecutivos.

- Vários números formam uma coleção de números naturais consecutivos se o segundo é sucessor do primeiro, o terceiro é sucessor do segundo, o quarto é sucessor do terceiro e assim sucessivamente.

Exemplos:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são consecutivos.

b) 7, 8 e 9 são consecutivos.

c) 50, 51, 52 e 53 são consecutivos.

- Todo número natural dado N, exceto o zero, tem um antecessor (número que vem antes do número dado).

Exemplos: Se m é um número natural finito diferente de zero.

a) O antecessor do número m é m-1.

b) O antecessor de 2 é 1.

c) O antecessor de 56 é 55.

d) O antecessor de 10 é 9.

O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais pares. Embora uma sequência real seja outro objeto matemático denominado função, algumas vezes utilizaremos a denominação sequência dos números naturais pares para representar o conjunto dos números naturais pares: P = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

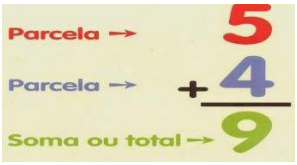
O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais ímpares, às vezes também chamados, a sequência dos números ímpares. I = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

### ➔ Operações com Números Naturais

Na sequência, estudaremos as duas principais operações possíveis no conjunto dos números naturais. Praticamente, toda a Matemática é construída a partir dessas duas operações: adição e multiplicação.

**- Adição de Números Naturais**

A primeira operação fundamental da Aritmética tem por finalidade reunir em um só número, todas as unidades de dois ou mais números.




**-Subtração de Números Naturais**

É usada quando precisamos tirar uma quantia de outra, é a operação inversa da adição. A operação de subtração só é válida nos naturais quando subtraímos o maior número do menor, ou seja quando a-b tal que a≥ $b$.




Obs.: o minuendo também é conhecido como aditivo e o subtraendo como subtrativo.

**- Multiplicação de Números Naturais**

É a operação que tem por finalidade adicionar o primeiro número denominado multiplicando ou parcela, tantas vezes quantas são as unidades do segundo número denominadas multiplicador.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

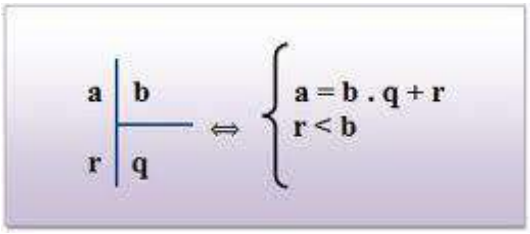



- 2 vezes 5 é somar o número 2 cinco vezes: 2 x 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10. Podemos no lugar do "x" (vezes) utilizar o ponto ". ", para indicar a multiplicação).

**- Divisão de Números Naturais**

Dados dois números naturais, às vezes necessitamos saber quantas vezes o segundo está contido no primeiro. O primeiro número que é o maior é denominado dividendo e o outro número que é menor é o divisor. O resultado da divisão é chamado quociente. Se multiplicarmos o divisor pelo quociente obteremos o dividendo.

No conjunto dos números naturais, a divisão não é fechada, pois nem sempre é possível dividir um número natural por outro número natural e na ocorrência disto a divisão não é exata.




**Relações essenciais numa divisão de números naturais:**

- Em uma divisão exata de **números naturais**, o **divisor deve ser menor do que o dividendo**.

35 : 7 = 5

- Em uma divisão exata de **números naturais**, o **dividendo é o produto do divisor pelo quociente**.

35 = 5 x 7

- **A divisão de um número natural n por zero não é possível** pois, se admitíssemos que o quociente fosse q, então poderíamos escrever: n ÷ 0 = q e isto significaria que: n = 0 x q = 0 o que não é correto! Assim, a divisão de n por 0 não tem sentido ou ainda é dita impossível.

➔ **Propriedades da Adição e da Multiplicação dos números Naturais**

Para todo a, b e c ∈ $N$

1) Associativa da adição: (a + b) + c = a + (b + c)
2) Comutativa da adição: a + b = b + a
3) Elemento neutro da adição: a + 0 = a
4) Associativa da multiplicação: (a.b).c = a. (b.c)
5) Comutativa da multiplicação: a.b = b.a
6) Elemento neutro da multiplicação: a.1 = a
7) Distributiva da multiplicação relativamente à adição: a.(b +c ) = ab + ac
8) Distributiva da multiplicação relativamente à subtração: a .(b –c) = ab –ac
9) Fechamento: tanto a adição como a multiplicação de um número natural por outro número natural, continua como resultado um número natural.

**Questões**

**01. (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012)** A partir de 1º de março, uma cantina escolar adotou um sistema de recebimento por cartão eletrônico. Esse cartão funciona como uma conta corrente: coloca-se crédito e vão sendo debitados os gastos. É possível o saldo negativo. Enzo toma lanche diariamente na cantina e sua mãe credita valores no cartão todas as semanas. Ao final de março, ele anotou o seu consumo e os pagamentos na seguinte tabela:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

| | Valor Gasto | Valor Creditado |
|---|---|---|
| 1ª semana | R$ 27,00 | R$ 40,00 |
| 2ª semana | R$ 33,00 | R$ 30,00 |
| 3ª semana | R$ 42,00 | R$ 35,00 |
| 4ª semana | R$ 25,00 | R$ 15,00 |

No final do mês, Enzo observou que tinha
(A) crédito de R$ 7,00.
(B) débito de R$ 7,00.
(C) crédito de R$ 5,00.
(D) débito de R$ 5,00.
(E) empatado suas despesas e seus créditos.

**02. (PREF. IMARUI/SC – AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS - PREF. IMARUI/2014)** José, funcionário público, recebe salário bruto de R$ 2.000,00. Em sua folha de pagamento vem o desconto de R$ 200,00 de INSS e R$ 35,00 de sindicato. Qual o salário líquido de José?
(A) R$ 1800,00
(B) R$ 1765,00
(C) R$ 1675,00
(D) R$ 1665,00

**03. (Professor/Pref.de Itaboraí)** O quociente entre dois números naturais é 10. Multiplicando-se o dividendo por cinco e reduzindo-se o divisor à metade, o quociente da nova divisão será:
(A) 2
(B) 5
(C) 25
(D) 50
(E) 100

**04. (PREF. ÁGUAS DE CHAPECÓ – OPERADOR DE MÁQUINAS – ALTERNATIVE CONCURSOS)** Em uma loja, as compras feitas a prazo podem ser pagas em até 12 vezes sem juros. Se João comprar uma geladeira no valor de R$ 2.100,00 em 12 vezes, pagará uma prestação de:
(A) R$ 150,00.
(B) R$ 175,00.
(C) R$ 200,00.
(D) R$ 225,00.

**05. PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013)** Ontem, eu tinha 345 bolinhas de gude em minha coleção. Porém, hoje, participei de um campeonato com meus amigos e perdi 67 bolinhas, mas ganhei outras 90. Sendo assim, qual a quantidade de bolinhas que tenho agora, depois de participar do campeonato?
(A) 368
(B) 270
(C) 365
(D) 290
(E) 376

**06. (Pref. Niterói)** João e Maria disputaram a prefeitura de uma determinada cidade que possui apenas duas zonas eleitorais. Ao final da sua apuração o Tribunal Regional Eleitoral divulgou a seguinte tabela com os resultados da eleição. A quantidade de eleitores desta cidade é:

| | 1ª Zona Eleitoral | 2ª Zona Eleitoral |
|---|---|---|
| João | 1750 | 2245 |
| Maria | 850 | 2320 |
| Nulos | 150 | 217 |
| Brancos | 18 | 25 |
| Abstenções | 183 | 175 |


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) 3995
(B) 7165
(C) 7532
(D) 7575
(E) 7933

**07. (PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013)** Durante um mutirão para promover a limpeza de uma cidade, os 15.000 voluntários foram igualmente divididos entre as cinco regiões de tal cidade. Sendo assim, cada região contou com um número de voluntários igual a:
(A) 2500
(B) 3200
(C) 1500
(D) 3000
(E) 2000

**08. EBSERH/HU-UFGD – Técnico em Informática – AOCP/2014)** Joana pretende dividir um determinado número de bombons entre seus 3 filhos. Sabendo que o número de bombons é maior que 24 e menor que 29, e que fazendo a divisão cada um dos seus 3 filhos receberá 9 bombons e sobrará 1 na caixa, quantos bombons ao todo Joana possui?
(A) 24.
(B) 25.
(C) 26.
(D) 27.
(E) 28

**09. (CREFITO/SP – ALMOXARIFE – VUNESP/2012)** O sucessor do dobro de determinado número é 23. Esse mesmo determinado número somado a 1 e, depois, dobrado será igual a
(A) 24.
(B) 22.
(C) 20.
(D) 18.
(E) 16.

**10. (Prefeitura Municipal de Ribeirão Preto/SP – Agente de Administração – VUNESP/2014)** Em uma gráfica, a máquina utilizada para imprimir certo tipo de calendário está com defeito, e, após imprimir 5 calendários perfeitos (P), o próximo sai com defeito (D), conforme mostra o esquema.




Considerando que, ao se imprimir um lote com 5 000 calendários, os cinco primeiros saíram perfeitos e o sexto saiu com defeito e que essa mesma sequência se manteve durante toda a impressão do lote, é correto dizer que o número de calendários perfeitos desse lote foi
(A) 3 642.
(B) 3 828.
(C) 4 093.
(D) 4 167.
(E) 4 256.

**Respostas**

**01. Resposta: B.**
Crédito: 40 + 30 + 35 + 15 = 120
Débito: 27 + 33 + 42 + 25 = 127
120 – 127 = - 7
Ele tem um débito de R$ 7,00.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**02. Resposta: B.**
2000 – 200 = 1800 – 35 = 1765
O salário líquido de José é R$ 1.765,00.

**03. Resposta: E.**
D= dividendo
d= divisor
Q = quociente = 10
R= resto = 0 (divisão exata)
Equacionando:
D = d.Q + R
D = d.10 + 0 ➔ D = 10d
Pela nova divisão temos:
$5D = \frac{d}{2}.Q \quad \rightarrow 5.(10d) = \frac{d}{2}.Q$ , isolando Q temos:

$$Q = \frac{50d}{\frac{d}{2}} \quad \rightarrow Q = 50d.\frac{2}{d} \quad \rightarrow Q = 50.2 \rightarrow Q = 100$$

**04. Resposta: B.**
$\frac{2100}{12} = 175$
Cada prestação será de R$175,00

**05. Resposta: A.**
345 – 67 = 278
Depois ganhou 90
278 + 90 = 368

**06. Resposta: E.**
Vamos somar a 1ª Zona: 1750 + 850 + 150 + 18 + 183 = 2951
2ª Zona: 2245 + 2320 + 217 + 25 + 175 = 4982
Somando os dois: 2951 + 4982 = 7933

**07. Resposta: D.**
$\frac{15000}{5} = 3000$
Cada região terá 3000 voluntários.

**08. Resposta: E.**
Sabemos que 9. 3 = 27 e que, para sobrar 1, devemos fazer 27 + 1 = 28.

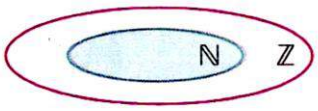
**09. Resposta: A.**
Se o sucessor é 23, o dobro do número é 22, portanto o número é 11.
(11 + 1)·2 = 24

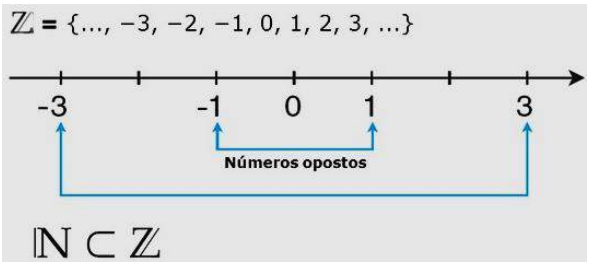
**10. Resposta: D.**
Vamos dividir 5000 pela sequência repetida (6):
5000 / 6 = 833 + resto 2.
Isto significa que saíram 833. 5 = 4165 calendários perfeitos, mais 2 calendários perfeitos que restaram na conta de divisão.
Assim, são 4167 calendários perfeitos.

## CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS – Z

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3, 4,..., n,...}, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra *Z* (Zahlen=número em alemão).


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- O conjunto dos números inteiros **não nulos**:
$Z^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$;
$Z^* = Z - \{0\}$

- O conjunto dos números inteiros **não negativos**:
$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$Z_+$ é o próprio conjunto dos números naturais: $Z_+ = N$

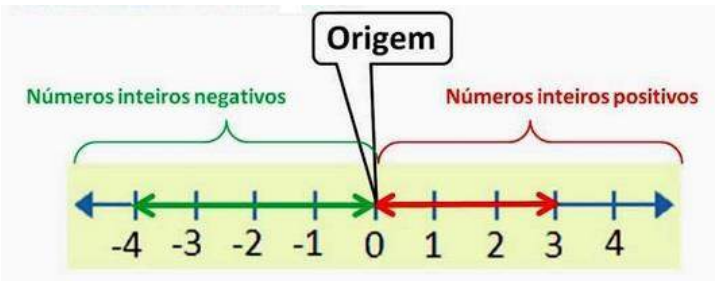
- O conjunto dos números inteiros **positivos**:
$Z^*_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

- O conjunto dos números inteiros **não positivos**:
$Z_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

- O conjunto dos números inteiros **negativos**:
$Z^*_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$

**Módulo**: chama-se módulo de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.
O módulo de 0 é 0 e indica-se |0| = 0
O módulo de +7 é 7 e indica-se |+7| = 7
O módulo de –9 é 9 e indica-se |–9| = 9
O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

**Números Opostos:** Dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.
Exemplo: O oposto do número 3 é -3, e o oposto de -3 é 3, pois 3 + (-3) = (-3) + 3 = 0
No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de *a* é – *a*, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.




➔ **Adição de Números Inteiros**
Para melhor entendimento desta operação, associaremos aos números inteiros positivos a idéia de ganhar e aos números inteiros negativos a idéia de perder.
Ganhar 5 + ganhar 3 = ganhar 8 (+5) + (+3) = (+8)


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Perder 3 + perder 4 = perder 7 (-3) + (-4) = (-7)
Ganhar 8 + perder 5 = ganhar 3 (+8) + (-5) = (+3)
Perder 8 + ganhar 5 = perder 3 (-8) + (+5) = (-3)

O sinal (+) antes do número positivo pode ser dispensado, mas o sinal (–) antes do número negativo nunca pode ser dispensado.

**➔Subtração de Números Inteiros**
A subtração é empregada quando:
- Precisamos tirar uma quantidade de outra quantidade;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto uma delas tem a mais que a outra;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto falta a uma delas para atingir a outra.

A subtração é a operação inversa da adição.




Considere as seguintes situações:

1- Na segunda-feira, a temperatura de Monte Sião passou de +3 graus para +6 graus. Qual foi a variação da temperatura?
Esse fato pode ser representado pela subtração: (+6) – (+3) = +3

2- Na terça-feira, a temperatura de Monte Sião, durante o dia, era de +6 graus. À Noite, a temperatura baixou de 3 graus. Qual a temperatura registrada na noite de terça-feira?
Esse fato pode ser representado pela adição: (+6) + (–3) = +3

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que (+6) – (+3) é o mesmo que (+6) + (–3).
Temos:
(+6) – (+3) = (+6) + (–3) = +3
(+3) – (+6) = (+3) + (–6) = –3
(–6) – (–3) = (–6) + (+3) = –3

Daí podemos afirmar: Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

**Fique Atento**: todos parênteses, colchetes, chaves, números, ... , entre outros, precedidos de sinal negativo, tem o seu sinal invertido, ou seja, é dado o seu oposto.

**➔ Multiplicação de Números Inteiros**
A multiplicação funciona como uma forma simplificada de uma adição quando os números são repetidos. Poderíamos analisar tal situação como o fato de estarmos ganhando repetidamente alguma quantidade, como por exemplo, ganhar 1 objeto por 30 vezes consecutivas, significa ganhar 30 objetos e esta repetição pode ser indicada por um **x**, isto é: 1 + 1 + 1 ... + 1 + 1 = 30 x 1 = 30
Se trocarmos o número 1 pelo número 2, obteremos: 2 + 2 + 2 + ... + 2 + 2 = 30 x 2 = 60
Se trocarmos o número 2 pelo número -2, obteremos: (–2) + (–2) + ... + (–2) = 30 x (-2) = –60
Observamos que a multiplicação é um caso particular da adição onde os valores são repetidos.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Na multiplicação o produto dos números *a* e *b*, pode ser indicado por ***a* x *b***, ***a* . *b*** ou ainda ***ab*** sem nenhum sinal entre as letras.

➔ **Divisão de Números Inteiros**

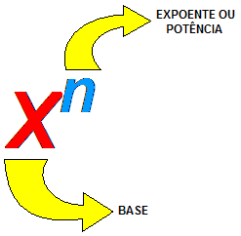



- Divisão exata de números inteiros.
Veja o cálculo:
(–20) : (+5) = q ⇨ (+5) . q = (–20) ⇨ q = (–4)
Logo: (–20) : (+5) = +4

Considerando os exemplos dados, concluímos que, para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor.
Exemplo: (+7) : (–2) ou (–19) : (–5) são divisões que não podem ser realizadas em *Z*, pois o resultado não é um número inteiro.
- No conjunto *Z*, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade da existência do elemento neutro.
- Não existe divisão por zero.
- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é zero, pois o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.
Exemplo: 0 : (–10) = 0 b) 0 : (+6) = 0 c) 0 : (–1) = 0




➔ **Potenciação de Números Inteiros**
A potência $a^n$ do número inteiro *a*, é definida como um produto de *n* fatores iguais. O número a é denominado a *base* e o número *n* é o *expoente*.$a^n$ = a x a x a x a x ... x a , *a* é multiplicado por *a n* vezes





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Exemplos:
$3^3 = (3) \times (3) \times (3) = 27$
$(-5)^5 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = -3125$
$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$
$(+9)^2 = (+9) \times (+9) = 81$

- Toda potência de **base positiva** é um número **inteiro positivo**.
Exemplo: $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **inteiro positivo**.
Exemplo: $(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **inteiro negativo**.
Exemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

**- Propriedades da Potenciação:**

**1) Produtos de Potências com bases iguais:** Conserva-se a base e somam-se os expoentes. $(-7)^3 \cdot (-7)^6 = (-7)^{3+6} = (-7)^9$

**2) Quocientes de Potências com bases iguais:** Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes. $(-13)^8 : (-13)^6 = (-13)^{8-6} = (-13)^2$

**3) Potência de Potência:** Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. $[(-8)^5]^2 = (-8)^{5 \cdot 2} = (-8)^{10}$

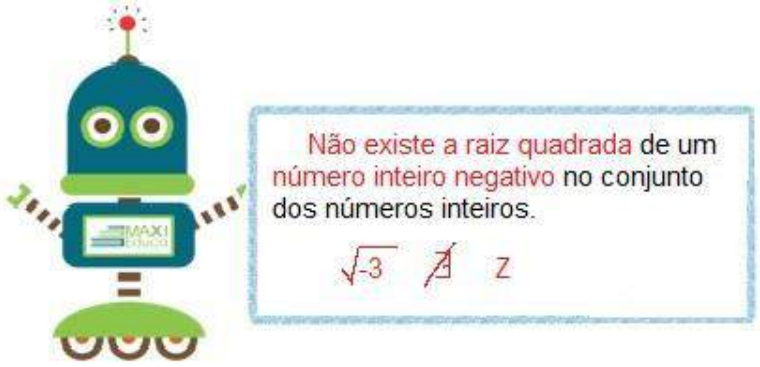
**4) Potência de expoente 1:** É sempre igual à base. $(-8)^1 = -8$ e $(+70)^1 = +70$

**5) Potência de expoente zero e base diferente de zero:** É igual a 1.
Exemplo: $(+3)^0 = 1$ e $(-53)^0 = 1$

➔ **Radiciação de Números Inteiros**

A raiz n-ésima (de ordem *n*) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo b* que elevado à potência *n* fornece o número *a*. O número *n* é o índice da raiz enquanto que o número *a* é o radicando (que fica sob o sinal do radical).

A raiz quadrada (de ordem 2) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo* que elevado ao quadrado coincide com o número *a*.




**Erro comum:** Frequentemente lemos em materiais didáticos e até mesmo ocorre em algumas aulas aparecimento de:

$\sqrt{9} = \pm 3$, mas isto está errado. O certo é: $\sqrt{9} = +3$

Observamos que não existe um número inteiro não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro que elevado ao cubo seja igual ao número *a*. Aqui não restringimos os nossos cálculos somente aos números não negativos.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplos:**

(a) $\sqrt[3]{8}$ = 2, pois $2^3 = 8$.

(b) $\sqrt[3]{-8}$ = –2, pois $(-2)^3 = -8$.

(c) $\sqrt[3]{27}$ = 3, pois $3^3 = 27$.

(d) $\sqrt[3]{-27}$ = –3, pois $(-3)^3 = -27$.

**Observação:** Ao obedecer à regra dos sinais para o produto de números inteiros, concluímos que:
(1) Se o índice da raiz for par, não existe raiz de número inteiro negativo.
(2) Se o índice da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número inteiro.

➔ **Propriedades da Adição e da Multiplicação dos números Inteiros**

Para todo a, b e c $\in Z$

1) Associativa da adição: (a + b) + c = a + (b + c)
2) Comutativa da adição: a + b = b +a
3) Elemento neutro da adição : a + 0 = a
4) Elemento oposto da adição: a + (-a) = 0
5) Associativa da multiplicação: (a.b).c = a. (b.c)
6) Comutativa da multiplicação : a.b = b.a
7) Elemento neutro da multiplicação: a.1 = a
8) Distributiva da multiplicação relativamente à adição: a.(b +c ) = ab + ac
9) Distributiva da multiplicação relativamente à subtração: a .(b –c) = ab –ac
10) Elemento inverso da multiplicação: Para todo inteiro *z* diferente de zero, existe um inverso $z^{-1}=1/z$ em *Z*, tal que, $z \times z^{-1} = z \times (1/z) = 1$
11) Fechamento: tanto a adição como a multiplicação de um número natural por outro número natural, continua como resultado um número natural.

## Questões

**01. (TRF 2ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012)** Uma operação λ é definida por:
$w^{\lambda} = 1 - 6w$, para todo inteiro w.
Com base nessa definição, é correto afirmar que a soma $2^{\lambda} + (1^{\lambda})^{\lambda}$ é igual a
(A) −20.
(B) −15.
(C) −12.
(D) 15.
(E) 20.

**02. (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014)** Ruth tem somente R$ 2.200,00 e deseja gastar a maior quantidade possível, sem ficar devendo na loja.
Verificou o preço de alguns produtos:

TV: R$ 562,00
DVD: R$ 399,00
Micro-ondas: R$ 429,00
Geladeira: R$ 1.213,00

Na aquisição dos produtos, conforme as condições mencionadas, e pagando a compra em dinheiro, o troco recebido será de:
(A) R$ 84,00
(B) R$ 74,00
(C) R$ 36,00
(D) R$ 26,00
(E) R$ 16,00

**03. (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013)** Multiplicando-se o maior número inteiro menor do que 8 pelo menor número inteiro maior do que - 8, o resultado encontrado será
(A) - 72


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(B) - 63
(C) - 56
(D) - 49
(E) – 42

**04. (SEPLAG - POLÍCIA MILITAR/MG - ASSISTENTE ADMINISTRATIVO - FCC/2012)** Em um jogo de tabuleiro, Carla e Mateus obtiveram os seguintes resultados:

| Carla | |
|---|---|
| 1ª partida | Ganhou 520 pontos |
| 2ª partida | Perdeu 220 pontos |
| 3ª partida | Perdeu 485 pontos |
| 4ª partida | Ganhou 635 pontos |

| Mateus | |
|---|---|
| 1ª partida | Perdeu 280 pontos |
| 2ª partida | Ganhou 675 pontos |
| 3ª partida | Ganhou 295 pontos |
| 4ª partida | Perdeu 115 pontos |

Ao término dessas quatro partidas,

(A) Carla perdeu por uma diferença de 150 pontos.
(B) Mateus perdeu por uma diferença de 175 pontos.
(C) Mateus ganhou por uma diferença de 125 pontos.
(D) Carla e Mateus empataram.

**05. (Operador de máq./Pref.Coronel Fabriciano/MG)** Quantos são os valores inteiros e positivos de x para os quais $\frac{x+15}{x+5}$ é um número inteiro?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

**06. (CASA DA MOEDA)** O quadro abaixo indica o número de passageiros num vôo entre Curitiba e Belém, com duas escalas, uma no Rio de Janeiro e outra em Brasília. Os números indicam a quantidade de passageiros que subiram no avião e os negativos, a quantidade dos que desceram em cada cidade.

| | |
|---|---|
| Curitiba | +240 |
| Rio de Janeiro | -194<br>+158 |
| Brasília | -108<br>+94 |

O número de passageiros que chegou a Belém foi:
(A) 362
(B) 280
(C) 240
(D) 190
(E) 135

**07. (Pref.de Niterói)** As variações de temperatura nos desertos são extremas. Supondo que durantes o dia a temperatura seja de 45ºC e à noite seja de -10ºC, a diferença de temperatura entre o dia e noite, em ºC será de:
(A) 10
(B) 35
(C) 45
(D) 50
(E) 55


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**08. (Pref.de Niterói)** Um trabalhador deseja economizar para adquirir a vista uma televisão que custa R$ 420,00. Sabendo que o mesmo consegue economizar R$ 35,00 por mês, o número de meses que ele levará para adquirir a televisão será:

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 15

**09. (Pref.de Niterói)** Um estudante empilhou seus livros, obtendo uma única pilha 52cm de altura. Sabendo que 8 desses livros possui uma espessura de 2cm, e que os livros restantes possuem espessura de 3cm, o número de livros na pilha é:

(A) 10
(B) 15
(C) 18
(D) 20
(E) 22

**10. (FINEP – Assistente – Apoio administrativo – CESGRANRIO/2014)** Um menino estava parado no oitavo degrau de uma escada, contado a partir de sua base (parte mais baixa da escada). A escada tinha 25 degraus. O menino subiu mais 13 degraus. Logo em seguida, desceu 15 degraus e parou novamente.

A quantos degraus do topo da escada ele parou?

(A) 8
(B) 10
(C) 11
(D) 15
(E) 19

## Respostas

**01. Resposta: E.**

Pela definição:

Fazendo w = 2

$2^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 2 = -11$

$1^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 1 = -5$

$\left(1^{\lambda}\right)^{\lambda} = 1 - 6 \cdot (-5) = 31$

$2^{\lambda} + \left(1^{\lambda}\right)^{\lambda} = -11 + 31 = 20$

**02. Resposta: D.**

Geladeira + Micro-ondas + DVD = 1213 + 429 + 399 = 2041

Geladeira + Micro-ondas + TV = 1213 + 429 + 562 = 2204, extrapola o orçamento

Geladeira + TV + DVD = 1213 + 562 + 399 = 2174, é a maior quantidade gasta possível dentro do orçamento.

Troco:2200 – 2174 = 26 reais

**03. Resposta: D.**

Maior inteiro menor que 8 é o 7

Menor inteiro maior que - 8 é o - 7.

Portanto: 7·(-7) = - 49

**04. Resposta: C.**

Carla: 520 – 220 – 485 + 635 = 450 pontos

Mateus: - 280 + 675 + 295 – 115 = 575 pontos

Diferença: 575 – 450 = 125 pontos

**05. Resposta: C.**

Fazendo substituição dos valores de x, dentro dos conjuntos do inteiros positivos temos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

x=0 ; $\frac{15}{5} = 3$ x=1 $\frac{16}{6} = não\ é\ inteiro$ $\therefore$ $x = 2$ $\frac{17}{7} = não\ é\ inteiro$

$x = 5$ $\frac{20}{10} = 2$ , logo os únicos números que satisfazem a condição é x = 0 e x = 5 , dois números apenas.

**06. Resposta: D.**
240 - 194 + 158 - 108 + 94 = 190

**07. Resposta: E.**
45 – (-10) = 55

**08. Resposta: D.**
420 : 35 = 12 meses

**09. Resposta: D.**
São 8 livros de 2 cm: 8.2 = 16 cm
Como eu tenho 52 cm ao todo e os demais livros tem 3 cm, temos:
52 - 16 = 36 cm de altura de livros de 3 cm
36 : 3 = 12 livros de 3 cm
O total de livros da pilha: 8 + 12 = 20 livros ao todo.

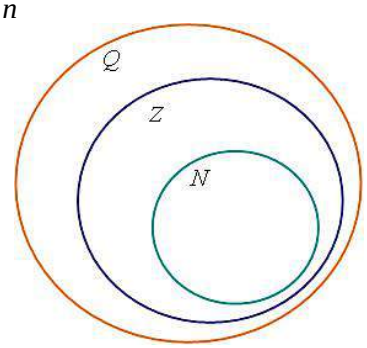
**10. Resposta: E.**
Ao contar os degraus, devemos descontar um deles, pois é o que se encontra parado.
(8 – 1) + 13 = 7 +13 = 20
(20 – 1) – 13 = 19 – 13 = 6
25 – 6 = 19

## CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS – Q

Um número racional é o que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são números inteiros, sendo que *n* deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos *m/n* para significar a divisão de *m* por *n*.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por *Q*. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

***Q = {$\frac{m}{n}$ : m e n em Z, n diferente de zero}***




No conjunto *Q* destacamos os seguintes subconjuntos:
- Q* = conjunto dos racionais *não nulos*;
- $Q_+$ = conjunto dos racionais *não negativos*;
- $Q^*_+$ = conjunto dos racionais *positivos*;
- Q _ = conjunto dos racionais *não positivos*;
- Q*_ = conjunto dos racionais *negativos*.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Representação Decimal das Frações**

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que *p* não seja múltiplo de *q*. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

**1º)** O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, um número finito de algarismos. Decimais Exatos:

$\frac{2}{5}$ = 0,4

$\frac{1}{4}$ = 0,25

$\frac{35}{4}$ = 8,75

$\frac{153}{50}$ = 3,06

**2º)** O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, infinitos algarismos (nem todos nulos), repetindo-se periodicamente. Decimais Periódicos ou Dízimas Periódicas:

$\frac{1}{3}$ = 0,333...

$\frac{1}{22}$ = 0,04545...

$\frac{167}{66}$ = 2,53030...

➔ **Representação Fracionária dos Números Decimais**

Trata-se do problema inverso: estando o número racional escrito na forma decimal, procuremos escrevê-lo na forma de fração. Temos dois casos:

**1º)** Transformamos o número em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é composto pelo numeral 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número decimal dado:

0,9 = $\frac{9}{10}$

5,7 = $\frac{57}{10}$

0,76 = $\frac{76}{100}$

3,48 = $\frac{348}{100}$

0,005 = $\frac{5}{1000}$ = $\frac{1}{200}$

**2º)** Devemos achar a fração geratriz da dízima dada; para tanto, vamos apresentar o procedimento através de alguns exemplos:

**Exemplos:**

**1) Seja a dízima 0, 333... .**

Veja que o período que se repete é apenas 1(formado pelo 3) ➔ então vamos colocar um 9 no denominador e repetir no numerador o período.

$\frac{3}{9}$ —— número do período que se repete
—— representa o número de dígitos do período



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Assim, a geratriz de 0,333... é a fração $\frac{3}{9}$.

**2) Seja a dízima 5, 1717... .**

O período que se repete é o 17, logo dois noves no denominador (99). Observe também que o 5 é a parte inteira, logo ele vem na frente:

$$5\frac{17}{99} \rightarrow temos\ uma\ fração\ mista, tranformando\ \rightarrow (5.99+17) = 512, logo: \frac{512}{99}$$

Assim, a geratriz de 5,1717... é a fração $\frac{512}{99}$.



**Neste caso para transformarmos uma dízima periódica simples em fração basta utilizarmos o dígito 9 no denominador para cada quantos dígitos tiver o período da dízima.**

**3) Seja a dízima 1, 23434...**

O número 234 é a junção do ante período com o período. Neste caso temos um dízima periódica é composta, pois existe uma parte que não se repete e outra que se repete. Neste caso temos um ante período (2) e o período (34). Ao subtrairmos deste número o ante período(234-2), obtemos 232, o numerador. O denominador é formado por tantos dígitos 9 – que correspondem ao período, neste caso 99(dois noves) – e pelo dígito 0 – que correspondem a tantos dígitos tiverem o ante período, neste caso 0(um zero).




$$1\frac{232}{990} \rightarrow temos\ uma\ fração\ mista, tranformando - a\ \rightarrow (1.990+232) = 512, logo: \frac{1222}{990}$$

Simplificando por 2, obtemos x = $\frac{611}{495}$, a fração geratriz da dízima 1, 23434...

➔ **Módulo ou valor absoluto:** É a distância do ponto que representa esse número ao ponto de abscissa zero.




**Exemplos:**

1) Módulo de – $\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

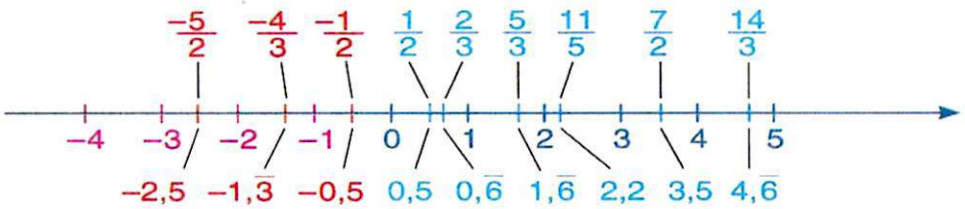
2) Módulo de + $\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

➔ **Números Opostos:** Dizemos que $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são números racionais opostos ou simétricos e cada um deles é o oposto do outro. As distâncias dos pontos $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ ao ponto zero da reta são iguais.

➔ **Inverso de um Número Racional**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}, a \neq 0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}, b \neq 0$$

➔ **Representação geométrica dos Números Racionais**




Observa-se que entre dois inteiros consecutivos existem infinitos números racionais.

➔ **Soma (Adição) de Números Racionais**

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

➔ **Subtração de Números Racionais**

A subtração de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de adição do número *p* com o oposto de *q*, isto é: *p – q = p + (–q)*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

➔ **Multiplicação (Produto) de Números Racionais**

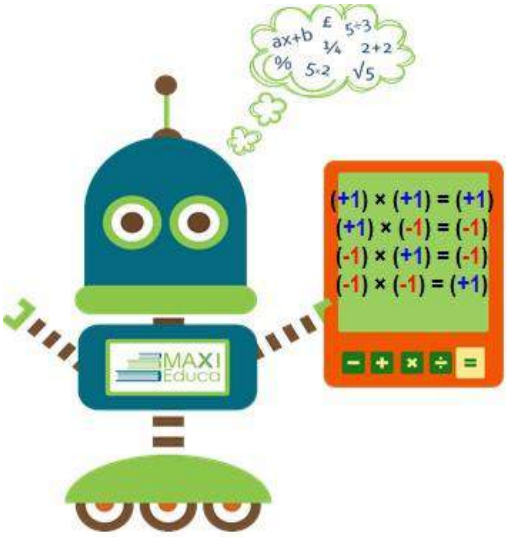
Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que o produto de frações, através de:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O produto dos números racionais *a/b* e *c/d* também pode ser indicado por *a/b* × *c/d*, *a/b.c/d* . Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:

Podemos assim concluir que o produto de **dois números com o mesmo sinal é positivo**, mas o produto de **dois números com sinais diferentes é negativo**.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




➔ **Propriedades da Adição e Multiplicação de Números Racionais**

1) Fechamento: O conjunto *Q* é fechado para a operação de adição e multiplicação, isto é, a soma e a multiplicação de dois números racionais ainda é um número racional.

2) Associativa da adição: Para todos *a*, *b*, *c* em *Q*: $a + ( b + c ) = ( a + b ) + c$

3) Comutativa da adição: Para todos a, b em *Q*: $a + b = b + a$

4) Elemento neutro da adição: Existe 0 em *Q*, que adicionado a todo *q* em Q, proporciona o próprio *q*, isto é: $q + 0 = q$

5) Elemento oposto: Para todo q em *Q*, existe -q em Q, tal que $q + (–q) = 0$

6) Associativa da multiplicação: Para todos a, b, c em *Q*: $a \times ( b \times c ) = ( a \times b ) \times c$

7) Comutativa da multiplicação: Para todos a, b em *Q*: $a \times b = b \times a$

8) Elemento neutro da multiplicação: Existe 1 em *Q*, que multiplicado por todo q em *Q*, proporciona o próprio q, isto é: $q \times 1 = q$

9) Elemento inverso da multiplicação: Para todo q = $\frac{a}{b}$ em *Q*, q diferente de zero, existe :

$$\mathbf{q^{-1} = \frac{b}{a}\ em\ Q:\ q \times q^{-1} = 1} \qquad \mathbf{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1}$$

10) Distributiva da multiplicação: Para todos a, b, c em *Q*: $a \times ( b + c ) = ( a \times b ) + ( a \times c )$

➔ **Divisão(Quociente) de Números Racionais**

A divisão de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de multiplicação do número *p* pelo inverso de *q*, isto é: $p \div q = p \times q^{-1}$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$$

➔ **Potenciação de Números Racionais**

A potência $q^n$ do número racional *q* é um produto de *n* fatores iguais. O número *q* é denominado a base e o número *n* é o expoente.

$q^n = q \times q \times q \times q \times ... \times q$, ($q$ aparece $n$ vezes)

**Exemplos:**

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) . \left(\frac{2}{5}\right) . \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) . \left(-\frac{1}{2}\right) . \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

**- Propriedades da Potenciação:**

1) Toda potência com expoente 0 é igual a 1.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$

**2)** Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

$\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$

**3)** Toda potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

**4)** Toda potência com expoente ímpar tem o mesmo sinal da base.

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

**5)** Toda potência com expoente par é um número positivo.

$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$

**6)** Produto de potências de mesma base. Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e somamos os expoentes.

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$

**7)** Quociente de potências de mesma base. Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$\left(\frac{3}{2}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}.\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

**8)** Potência de Potência. Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ ou $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3.2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

➔ **Radiciação de Números Racionais**

Se um número representa um produto de dois ou mais fatores iguais, então cada fator é chamado raiz do número.

**Exemplos:**

1) $\frac{1}{9}$ Representa o produto $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ .Logo, $\frac{1}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{1}{9}$.

Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

2) 0,216 Representa o produto 0,6 . 0,6 . 0,6 ou $(0,6)^3$. Logo, 0,6 é a raiz cúbica de 0,216. Indica-se $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.

Um número racional, quando elevado ao quadrado, dá o número zero ou um número racional positivo. Logo, os números racionais negativos não têm raiz quadrada em Q.

O número $-\frac{100}{9}$ não tem raiz quadrada em Q, pois tanto $-\frac{10}{3}$ como $+\frac{10}{3}$, quando elevados ao quadrado, dão $\frac{100}{9}$.

Um número racional positivo só tem raiz quadrada no conjunto dos números racionais se ele for um quadrado perfeito.

O número $\frac{2}{3}$ não tem raiz quadrada em Q, pois não existe número racional que elevado ao quadrado dê $\frac{2}{3}$.

## Questões

**01. (PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013)** Na escola onde estudo, ¼ dos alunos tem a língua portuguesa como disciplina favorita, 9/20 têm a matemática como favorita e os demais têm ciências como favorita. Sendo assim, qual fração representa os alunos que têm ciências como disciplina favorita?

(A) 1/4
(B) 3/10
(C) 2/9
(D) 4/5
(E) 3/2

**02. (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014)** Dirce comprou 7 lapiseiras e pagou R$ 8,30, em cada uma delas. Pagou com uma nota de 100 reais e obteve um desconto de 10 centavos. Quantos reais ela recebeu de troco?

(A) R$ 40,00
(B) R$ 42,00
(C) R$ 44,00
(D) R$ 46,00
(E) R$ 48,00

**03. (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013)** De um total de 180 candidatos, 2/5 estudam inglês, 2/9 estudam francês, 1/3estuda espanhol e o restante estuda alemão. O número de candidatos que estuda alemão é:

(A) 6.
(B) 7.
(C) 8.
(D) 9.
(E) 10.

**04. (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013)** Em um estado do Sudeste, um Agente de Apoio Operacional tem um salário mensal de: salário-base R$ 617,16 e uma gratificação de R$ 185,15. No mês passado, ele fez 8 horas extras a R$ 8,50 cada hora, mas precisou faltar um dia e foi descontado em R$ 28,40. No mês passado, seu salário totalizou

(A) R$ 810,81.
(B) R$ 821,31.
(C) R$ 838,51.
(D) R$ 841,91.
(E) R$ 870,31.

**05. (Pref. Niterói)** Simplificando a expressão abaixo


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Obtém-se $\frac{1,3333+\frac{3}{2}}{1,5+\frac{4}{3}}$ :

(A) ½
(B) 1
(C) 3/2
(D) 2
(E) 3

**06. (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012)** Em um jogo matemático, cada jogador tem direito a 5 cartões marcados com um número, sendo que todos os jogadores recebem os mesmos números. Após todos os jogadores receberem seus cartões, aleatoriamente, realizam uma determinada tarefa que também é sorteada. Vence o jogo quem cumprir a tarefa corretamente. Em uma rodada em que a tarefa era colocar os números marcados nos cartões em ordem crescente, venceu o jogador que apresentou a sequência

$(A)\ -4;\ -1;\ \sqrt{16};\ \sqrt{25};\frac{14}{3}$

$(B)\ -1;\ -4;\ \sqrt{16};\ \frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

$(C)\ -1;\ -4;\ \frac{14}{3};\ \sqrt{16};;\ \sqrt{25}$

$(D)\ -4;\ -1;\ \sqrt{16};\frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

$(E)\ -4;\ -1;\ \frac{14}{3};\ \sqrt{16};\sqrt{25}$

**07. (Sabesp/SP – Agente de Saneamento Ambiental – FCC/2014)** Somando-se certo número positivo x ao numerador, e subtraindo-se o mesmo número x do denominador da fração 2/3 obtém-se como resultado, o número 5. Sendo assim, x é igual a

(A) 52/25.
(B) 13/6.
(C) 7/3.
(D) 5/2.
(E) 47/23.

**08. (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012)** Mariana abriu seu cofrinho com 120 moedas e separou-as:

− 1 real: ¼ das moedas
− 50 centavos: 1/3 das moedas
− 25 centavos: 2/5 das moedas
− 10 centavos: as restantes

Mariana totalizou a quantia contida no cofre em

(A) R$ 62,20.
(B) R$ 52,20.
(C) R$ 50,20.
(D) R$ 56,20.
(E) R$ 66,20.

**09. (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014*)*** Numa operação policial de rotina, que abordou 800 pessoas, verificou-se que 3/4 dessas pessoas eram homens e 1/5 deles foram detidos. Já entre as mulheres abordadas, 1/8 foram detidas.

Qual o total de pessoas detidas nessa operação policial?

(A) 145
(B) 185
(C) 220
(D) 260
(E) 120

**10. (PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013)** Quando perguntado sobre qual era a sua idade, o professor de matemática respondeu:

"O produto das frações 9/5 e 75/3 fornece a minha idade!".

Sendo assim, podemos afirmar que o professor tem:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) 40 anos.
(B) 35 anos.
(C) 45 anos.
(D) 30 anos.
(E) 42 anos.

**Respostas**

**01. Resposta: B.**
Somando português e matemática:
$\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=\frac{5+9}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$
O que resta gosta de ciências:
$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

**02. Resposta: B.**
$8{,}3\cdot 7=58{,}1$
Como recebeu um desconto de 10 centavos, Dirce pagou 58 reais
Troco:100 – 58 = 42 reais

**03. Resposta: C.**
$\frac{2}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$
Mmc(3,5,9)=45

$\frac{18+10+15}{45}=\frac{43}{45}$
O restante estuda alemão: 2/45

$180\cdot\frac{2}{45}=8$

**04. Resposta: D.**
$salário\ mensal: 617{,}16+185{,}15=802{,}31$
$horas\ extras: 8{,}5\cdot 8=68$
$mês\ passado: 802{,}31+68{,}00-28{,}40=841{,}91$
Salário foi R$ 841,91.

**05. Resposta: B.**
1,3333= 12/9 = 4/3
1,5 = 15/10 = 3/2

$\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{\frac{17}{6}}{\frac{17}{6}}=1$

**06. Resposta: D.**
$\sqrt{16}=4$
$\sqrt{25}=5$
$\frac{14}{3}=4{,}67$
A ordem crescente é : $-4;\ -1;\ \sqrt{16};\frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

**07. Resposta B.**
$\frac{2+x}{3-x}=5$
$15-5x=2+x$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$6x = 13$
$x = \frac{13}{6}$

**08. Resposta: A.**

$1\ real: 120 \cdot \frac{1}{4} = 30\ moedas$
$50\ centavos: \frac{1}{3} \cdot 120 = 40\ moedas$
$25\ centavos: \frac{2}{5} \cdot 120 = 48\ moedas$
$10\ centavos: 120 - 118\ moedas = 2\ moedas$
$30 + 40 \cdot 0{,}5 + 48 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}10 = 62{,}20$

Mariana totalizou R$ 62,20.

**09. Resposta: A.**

$800 \cdot \frac{3}{4} = 600\ homens$

$600 \cdot \frac{1}{5} = 120\ homens\ detidos$

Como 3/4 eram homens, 1/4 eram mulheres

$800 \cdot \frac{1}{4} = 200\ mulheres$ ou 800-600=200 mulheres

$200 \cdot \frac{1}{8} = 25\ mulhers\ detidas$

Total de pessoas detidas: 120+25=145

**10. Resposta: C.**

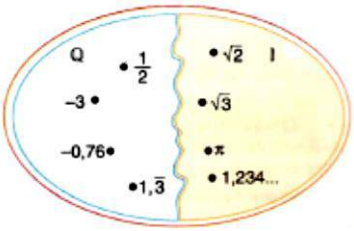
$\frac{9}{5} \cdot \frac{75}{3} = \frac{675}{15} = 45\ anos$

## CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS - R

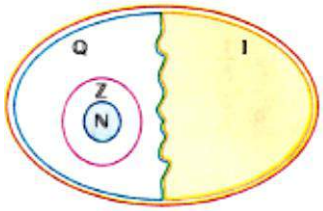
O conjunto dos **números reais *R*** é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Assim temos:

**R = Q U I** , sendo **Q ∩ I = Ø** ( Se um número real é racional, não irracional, e vice-versa).




Lembrando que **N C Z C Q** , podemos construir o diagrama abaixo:

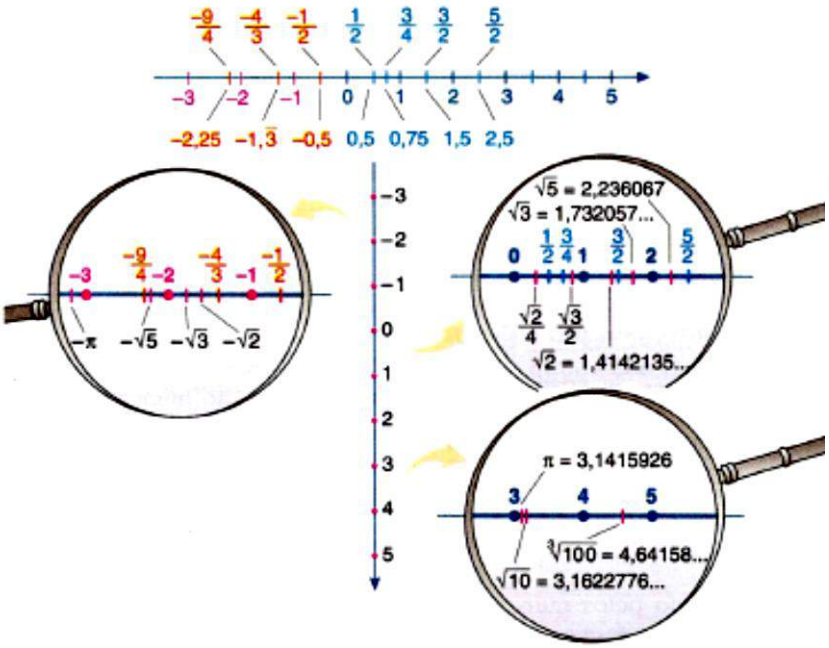




1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

O conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:
- Conjunto dos números reais não nulos: $R^* = \{x \in R | x \neq 0\}$
- Conjunto dos números reais não negativos: $R_+ = \{x \in R | x \geq 0\}$
- Conjunto dos números reais positivos: $R^*_+ = \{x \in R | x > 0\}$
- Conjunto dos números reais não positivos: $R_- = \{x \in R | x \leq 0\}$
- Conjunto dos números reais negativos: $R^*_- = \{x \in R | x < 0\}$

➔ **Representação Geométrica dos números reais**




➔ **Propriedades**

É válido todas as propriedades anteriormente vistos nos outros conjuntos, assim como os conceitos de módulo, números opostos e números inversos (quando possível).

➔ **Ordenação dos números Reais**

A representação dos números Reais permite definir uma relação de ordem entre eles. Os números Reais positivos são maiores que zero e os negativos, menores. Expressamos a relação de ordem da seguinte maneira: Dados dois números Reais **a** e **b**,

$$a \leq b \leftrightarrow b - a \geq 0$$

**Exemplo**: $-15 \leq \leftrightarrow 5 - (-15) \geq 0$
$5 + 15 \geq 0$

➔ **Operações com números Reais**

Operando com as aproximações, obtemos uma sucessão de intervalos fixos que determinam um número Real. É assim que vamos trabalhar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão. Relacionamos, em seguida, uma série de recomendações úteis para operar com números Reais.

➔ **Intervalos reais**

O conjunto dos números reais possui também subconjuntos, denominados intervalos, que são determinados por meio de desiguladades. Sejam os números *a* e *b* , com a < b.

**1º** - Intervalo aberto de extremos *a* e *b* é conjunto $]a,b[ = \{ x \in R | a < x < b\}$
Exemplo: $]3,5[ = \{ x \in R | 3 < x < 5\}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$]3,\ 5[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$




Note as "bolinhas vazias".

**2º** - Intervalo fechado de extremos *a* e *b* é o conjunto [a,b] = { x ϵ R| a ≤ x ≤ b}
Exemplo: [3,5] = { x ϵ R| 3 ≤ x ≤ 5}

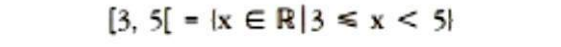
$$[3,\ 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$




Note as "bolinhas cheias".

**3º** - Intervalo aberto à direita ( ou fechado à esquerda) de extremos *a* e *b* é o conjunto [a,b[ = { x ϵ R| a ≤ x < b}
Exemplo: [3,5[ = { x ϵ R| 3 ≤ x < 5}

$$[3,\ 5[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$$




**4º** - Intervalo aberto à esquerda( ou fechado à direita) de extremos *a* e *b* é o conjunto ]a,b] = { x ϵ R| a <x ≤ b}
Exemplo: ]3,5] = { x ϵ R| 3 <x ≤ 5}

$$]3,\ 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$$




**5º** - ] -∞, a] = { x ϵ R| x ≤ a}

Exemplo: ] -∞, 3] = { x ϵ R| x ≤ 3}

$$]-\infty,\ 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$$




**6º** - ] -∞, a[ = { x ϵ R| x < a}
Exemplo: ] -∞, 3[ = { x ϵ R| x < 3}

$$]-\infty,\ 3[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$




**7º** - [a,+ ∞ [ = { x ϵ R| x ≥ a}
Exemplo: [3,+ ∞ [ = { x ϵ R| x ≥ 3}

$$[3,\ +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$




**8º** - ]a,+ ∞ [ = { x ϵ R| x > a}
Exemplo: ]3,+ ∞ [ = { x ϵ R| x > 3}

$$]3,\ +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

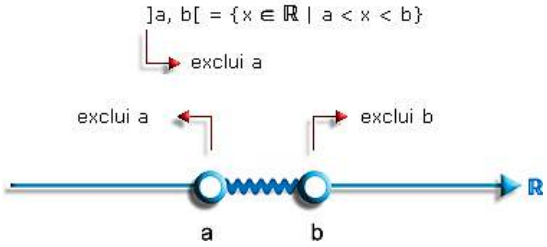



Em termos gerais temos:

- A bolinha aberta = a intervalo aberto (estamos excluindo aquele número), utilizamos os símbolos:

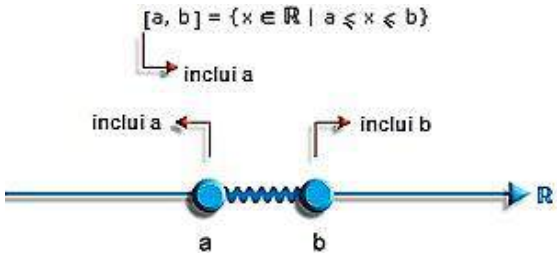
**> ;< ; ] ; [**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




- A bolinha fechada = a intervalo fechado (estamos incluindo aquele número), utilizamos os símbolos:

**≥ ; ≤ ; [ ; ]**




E assim sucessivamente para todos os intervalos, sejam eles de ambos os lados, como apenas aberto/ fechado de um dos lados.




Podemos utilizar ( ) no lugar dos [ ] , para indicar as extremidades abertas dos intervalos.

[a,b[ = [a,b) ; ]a,b] = (a,b] ; e ]a,b[ = (a,b)

**Questões**

**01. (EBSERH/ HUPAA – UFAL – Analista Administrativo – Administração – IDECAN/2014)** Mário começou a praticar um novo jogo que adquiriu para seu videogame. Considere que a cada partida ele conseguiu melhorar sua pontuação, equivalendo sempre a 15 pontos a menos que o dobro marcado na partida anterior. Se na quinta partida ele marcou 3.791 pontos, então, a soma dos algarismos da quantidade de pontos adquiridos na primeira partida foi igual a

(A) 4.
(B) 5.
(C) 7.
(D) 8.
(E) 10.

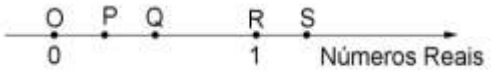
**02. (Pref. Guarujá/SP – SEDUC – Professor de Matemática – CAIPIMES/2014)** Considere m um número real menor que 20 e avalie as afirmações I, II e III:

I- (20 – m) é um número menor que 20.
II- (20 m) é um número maior que 20.
III- (20 m) é um número menor que 20.
É correto afirmar que:
A) I, II e III são verdadeiras.
B) apenas I e II são verdadeiras.
C) I, II e III são falsas.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

D) apenas II e III são falsas.

**03. (Pref. Guarujá/SP – SEDUC – Professor de Matemática – CAIPIMES/2014)** Na figura abaixo, o ponto que melhor representa a diferença $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ na reta dos números reais é:




(A) P.
(B) Q.
(C) R.
(D) S.

**04. (TJ/PR - Técnico Judiciário – TJ/PR/2014)** Uma caixa contém certa quantidade de lâmpadas. Ao retirá-las de 3 em 3 ou de 5 em 5, sobram 2 lâmpadas na caixa.

Entretanto, se as lâmpadas forem removidas de 7 em 7, sobrará uma única lâmpada. Assinale a alternativa correspondente à quantidade de lâmpadas que há na caixa, sabendo que esta comporta um máximo de 100 lâmpadas.

(A) 36.
(B) 57.
(C) 78.
(D) 92.

**05. (MP/SP – Auxiliar de Promotoria I – Administrativo – VUNESP/2014)** Para ir de sua casa à escola, Zeca percorre uma distância igual a $\frac{3}{4}$ da distância percorrida na volta, que é feita por um trajeto diferente. Se a distância percorrida por Zeca para ir de sua casa à escola e dela voltar é igual a $\frac{7}{5}$ de um quilômetro, então a distância percorrida por Zeca na ida de sua casa à escola corresponde, de um quilômetro, a

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{3}{5}$

**06. (TJ/SP - AUXILIAR DE SAÚDE JUDICIÁRIO - AUXILIAR EM SAÚDE BUCAL – VUNESP/2013)** Para numerar as páginas de um livro, uma impressora gasta 0,001 mL por cada algarismo impresso. Por exemplo, para numerar as páginas 7, 58 e 290 gasta-se, respectivamente, 0,001 mL, 0,002 mL e 0,003 mL de tinta. O total de tinta que será gasto para numerar da página 1 até a página 1 000 de um livro, em mL, será

(A) 1,111.
(B) 2,003.
(C) 2,893.
(D) 1,003.
(E) 2,561.

**07. (Câmara de São Paulo/SP – Técnico Administrativo – FCC/2014)** Um funcionário de uma empresa deve executar uma tarefa em 4 semanas. Esse funcionário executou 3/8 da tarefa na 1a semana. Na 2 a semana, ele executou 1/3 do que havia executado na 1a semana. Na 3a e 4a semanas, o funcionário termina a execução da tarefa e verifica que na 3a semana executou o dobro do que havia executado na 4 a semana. Sendo assim, a fração de toda a tarefa que esse funcionário executou na 4ª semana é igual a


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) 5/16.
(B) 1/6.
(C) 8/24.
(D)1/ 4.
(E) 2/5.

**08. (Sabesp/SP – Agente de Saneamento Ambiental – FCC/2014)** Somando-se certo número positivo x ao numerador, e subtraindo-se o mesmo número x do denominador da fração 2/3 obtém-se como resultado, o número 5. Sendo assim, x é igual a
(A) 52/25.
(B) 13/6.
(C) 7/3.
(D) 5/2.
(E) 47/23.

**09. (METRÔ – Assistente Administrativo Júnior – FCC/2014)** Quatro números inteiros serão sorteados. Se o número sorteado for par, ele deve ser dividido por 2 e ao quociente deve ser acrescido 17. Se o número sorteado for ímpar, ele deve ser dividido por seu maior divisor e do quociente deve ser subtraído 15. Após esse procedimento, os quatro resultados obtidos deverão ser somados. Sabendo que os números sorteados foram 40, 35, 66 e 27, a soma obtida ao final é igual a
(A) 87.
(B) 59.
(C) 28.
(D) 65.
(E) 63.

**10. (UNESP – Assistente de Informática I – VUNESP/2014)** O valor de uma aposta em certa loteria foi repartido em cotas iguais. Sabe-se que a terça parte das cotas foi dividida igualmente entre Alex e Breno, que Carlos ficou com a quarta parte das cotas, e que Denis ficou com as 5 cotas restantes. Essa aposta foi premiada com um determinado valor, que foi repartido entre eles de forma diretamente proporcional ao número de cotas de cada um. Dessa forma, se Breno recebeu R$ 62.000,00, então Carlos recebeu
(A) R$ 74.000,00.
(B) R$ 93.000,00.
(C) R$ 98.000,00.
(D) R$ 102.000,00.
(E) R$ 106.000,00.

## Respostas

**01. Resposta: D.**
Pontuação atual = 2 . partida anterior – 15
* 4ª partida: 3791 = 2.x – 15
2.x = 3791 + 15
x = 3806 / 2
x = 1903

* 3ª partida: 1903 = 2.x – 15
2.x = 1903 + 15
x = 1918 / 2
x = 959

* 2ª partida: 959 = 2.x – 15
2.x = 959 + 15
x = 974 / 2
x = 487
* 1ª partida: 487 = 2.x – 15
2.x = 487 + 15


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

x = 502 / 2
x = 251
Portanto, a soma dos algarismos da 1ª partida é 2 + 5 + 1 = 8.

**02. Resposta: C.**
I. Falso, pois m é Real e pode ser negativo.
II. Falso, pois m é Real e pode ser negativo.
III. Falso, pois m é Real e pode ser positivo.

**03. Resposta: A.**
$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}=0{,}25$

**04. Resposta: D.**
Vamos chamar as retiradas de ***r***, ***s*** e ***w***: e de **T** o total de lâmpadas.
Precisamos calcular os múltiplos de 3, 5 e de 7, separando um múltiplo menor do que 100 que sirva nas três equações abaixo:
De 3 em 3: 3 . r + 2 = Total
De 5 em 5: 5 . s + 2 = Total
De 7 em 7: 7 . w + 1 = Total
Primeiramente, vamos calcular o valor de w, sem que o total ultrapasse 100:
7 . 14 + 1 = 99, mas 3 . r + 2 = 99 vai dar que r = 32,333... (não convém)
7 . 13 + 1 = 92, e 3 . r + 2 = 92 vai dar r = 30 e 5 . s + 2 = 92 vai dar s = 18.

**05. Resposta: E.**
Ida + volta = 7/5 . 1
$\frac{3}{4}.x+x=\frac{7}{5}$

$\frac{5.3x+20x=7.4}{20}$

$15x+20x=28$
$35x=28$

$x=\frac{28}{35}$ (: 7/7)

$x=\frac{4}{5}$ (volta)

Ida: $\frac{3}{4}.\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

**06. Resposta: C.**
1 a 9 = 9 algarismos = 0,001·9 = 0,009 ml
De 10 a 99, temos que saber quantos números tem.
99 – 10 + 1 = 90.
OBS: soma 1, pois quanto subtraímos exclui-se o primeiro número.
90 números de 2 algarismos: 0,002·90 = 0,18ml
De 100 a 999
999 – 100 + 1 = 900 números
900·0,003 = 2,7 ml
1000 = 0,004ml
Somando: 0,009 + 0,18 + 2,7 + 0,004 = 2,893

**07. Resposta: B.**
Tarefa: x
Primeira semana: 3/8x
2 semana: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}x=\frac{1}{8}x$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

1ª e 2ª semana: $\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x = \frac{4}{8}x = \frac{1}{2}x$
Na 3ª e 4ª semana devem ser feito a outra metade.
3ªsemana: 2y
4ª semana: y
$2y + y = \frac{1}{2}x$
$3y = \frac{1}{2}x$
$y = \frac{1}{6}x$

**08. Resposta: B.**
$\frac{2+x}{3-x} = 5$
$15 - 5x = 2 + x$
$6x = 13$
$x = \frac{13}{6}$

**09. Resposta: B.**
* número 40: é par.
40 / 2 + 17 = 20 + 17 = 37
* número 35: é ímpar.
Seu maior divisor é 7.
35 / 35 – 15 = 1 – 15 = – 14
* número 66: é par.
66 / 2 + 17 = 33 + 17 = 50
* número 27: é ímpar.
Seu maior divisor é 27.
27 / 27 – 15 = 1 – 15 = – 14
* Por fim, vamos somar os resultados:
37 – 14 + 50 – 14 = 87 – 28 = 59

**10. Resposta: B.**
Vamos chamar o valor de cada cota de ( *x* ). Assim:
* Breno:
$\frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \boldsymbol{x = 62000}$

$\frac{1}{6} . \boldsymbol{x = 62000}$

x = 62000 . 6
x = R$ 372000,00
* Carlos:

$\frac{1}{4} . \boldsymbol{372000 = R\$\ 93000,00}$

## SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E ROMANA

### ➔ Sistema de numeração Decimal

O sistema de numeração que normalmente utilizamos é o sistema de numeração decimal. Os símbolos matemáticos utilizados para representar um número no sistema decimal são chamados de algarismos: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**, ou algarismos indo-arábico (utilizados pelos hindus e árabes) que são utilizados para contagem.

**- Leitura dos números decimais**

**Números com parte inteira e decimal:**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Cada algarismo, da parte inteira ou decimal, ocupa uma posição ou ordem com as seguintes denominações:

| Centenas | Dezenas | Unidades | Décimos | Centésimos | Milésimos | Décimos milésimos | Centésimos milésimos | Milionésimos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Partes inteiras** | | | **Partes decimais** | | | | | |

Lemos a parte inteira, seguida da parte decimal, acompanhada das palavras:
décimos ..... : quando houver uma casa decimal;
centésimos..... : quando houver duas casas decimais;
milésimos..... : quando houver três casas decimais;
décimos milésimos ..... : quando houver quatro casas decimais;
centésimos milésimos ..... : quando houver cinco casas decimais e, assim sucessivamente.

**- Números com parte inteira:**

| Classes | Milhões | | | Milhares | | | Unidades Simples | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | c | d | u | c | d | u | c | d | u |
| | | | | | | 2 | 7 | 5 | 6 |
| | | 5 | 7 | 7 | 2 | 1 | 0 | 5 | 7 |
| | 3 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 |

Podemos ler os seguintes algarismos acima com maior facilidade:
2.756 ➔ Dois mil setecentos e cinquenta e seis.
57.721.057 ➔ Cinquenta e sete milhões, setecentos e vinte e um mil e cinquenta e sete.
376.103.035 ➔ Trezentos e setenta e seis milhões, cento e três mil e trinta e cinco.

**➔ Sistema de numeração Romana**

É o sistema mais usado depois do decimal, utiliza-se para:- designação de séculos e datas;
- indicação de capítulos e volumes de livros;
- nos nomes de papas e imperadores.
- mostradores de alguns relógios, etc.

Utilizam-se sete letras maiúsculas(símbolos) para designa-los:

| Letras | Valores |
|---|---|
| **I** | 1 |
| **V** | 5 |
| **X** | 10 |
| **L** | 50 |
| **C** | 100 |
| **D** | 500 |
| **M** | 1000 |

**- Regras para escrita dos números romanos:**

**1 –** Se a direita se escreve um símbolo de igual ou maior valor somamos ao valor dessa:
Exemplos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

VI = (5 + 1) = 6
XXI = (10 + 10 + 1) = 21
LXVII = (50 + 10 + 5 + 1 + 1) = 67

**2 –** Se a esquerda se escreve um símbolo “I” , “X” ou “C” subtraímos:
Exemplos:
IV = (5 - 1) = 4
IX = (10 - 1) = 9
XL = (50 - 10) = 40
XC = (100 - 10) = 90
CD = (500 - 100) = 400
CM = (1000 - 100) = 900

**3 –** Não se pode repetir o mesmo símbolo por mais de três vezes seguidas:
Exemplos:
XIII = 13
XIV = 14
XXXIII = 33
XXXIV = 34

**4 -** A letra "V", "L" e a "D" não podem se duplicar, pois as letras “X”,”C” e “M” representam um valor duplicado.
Exemplos:
XX = 20(10 + 10)
CC = 200(100 + 100)
MM = 2.000 (1000 + 1000)

**5 -** Se entre dois símbolos quaisquer existe outra menor, o valor desta pertencerá a letra seguinte a ela.
Exemplos:
XIX = 19(X = 10 + IX = 9;19)
LIV = 54(L = 50 + IV = 4;54)
CXXIX = 129 (C = 100 + XX = 20 + IX = 9; 129)

**6 -** O valor dos números romanos quando multiplicados por mil, colocam-se barras horizontais em cima dos mesmos.
Exemplos:

$$\overline{M} = 1.000.000$$

Tabela dos números Maiores que 2100

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3000 | MMM | 30000 | $\overline{XXX}$ | 300000 | $\overline{CCC}$ |
| 4000 | $\overline{IV}$ | 40000 | $\overline{XL}$ | 400000 | $\overline{CD}$ |
| 5000 | $\overline{V}$ | 50000 | $\overline{L}$ | 500000 | $\overline{D}$ |
| 6000 | $\overline{VI}$ | 60000 | $\overline{LX}$ | 600000 | $\overline{DC}$ |
| 7000 | $\overline{VII}$ | 70000 | $\overline{LXX}$ | 700000 | $\overline{DCC}$ |
| 8000 | $\overline{VIII}$ | 80000 | $\overline{LXXX}$ | 800000 | $\overline{DCCC}$ |
| 9000 | $\overline{IX}$ | 90000 | $\overline{XC}$ | 900000 | $\overline{CM}$ |
| 10000 | $\overline{X}$ | 100000 | $\overline{C}$ | 1000000 | $\overline{M}$ |
| 20000 | $\overline{XX}$ | 200000 | $\overline{CC}$ | | |


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01. (AUX.JUD./TRT-6ª REG/FCC)** Se X é o menor número natural que tem cinco algarismos e Y é número natural que tem quatro algarismos distintos, a diferença de X-Y é
(A) divisível por 4.
(B) múltiplo de 6.
(C) maior que 150.
(D) quadrado perfeito.
(E) primo.

**02. (AUX.JUD./TRT-23ª REG/FCC)** O número 0,0202 pode ser lido como:
(A) duzentos e dois milésimos.
(B) duzentos e dois décimos de milésimos.
(C) duzentos e dois centésimos de milésimos.
(D) duzentos e dois centésimos.
(E) duzentos e dois décimos

**03. (AUX.JUD./TRT-1ª REG/FCC)** Ao preencher corretamente um cheque no valor de R$ 2010,50, deve se escrever por extenso:
(A) dois mil e cem reais e cinquenta centavos.
(B) dois mil e dez reais e cinquenta centavos.
(C) dois mil e dez reais e cinco centavos.
(D) duzentos reais e dez reais e cinquenta centavos.
(E) duzentos e um reais e cinco centavos.

**04. (MARINHA DO BRASIL – APRENDIZ – MARINHEIRO – EAM/2013)** Qual é a representação do número 745 em algarismos romanos?
(A) CDXLV
(B) DCCXLV
(C) DCCXV
(D) CDXV
(E) DCCCXXV

**05. (BANCO DO BRASIL - ESCRITURÁRIO – FCC)** O esquema abaixo apresenta a subtração de dois números inteiros e maiores que 1 000, em que alguns algarismos foram substituídos por letras.

$$\begin{array}{r} A\ 1\ 5\ B \\ -\ 2\ C\ D\ 3 \\ \hline 4\ 2\ 1\ 8 \end{array}$$

Se a diferença indicada é a correta, os valores de A, B, C e D são tais que:
(A) A < B < C < D.
(B) B < A < D < C.
(C) B < D < A < C.
(D) D < A < C < B.
(E) D < A < B < C.

## Respostas

**01. Resposta: A.**
Como X é o menor número natural de 5 algarismos temos que:
X = 1 0 0 0 0
E Y é o maior natural de 4 algarismos distintos:
Y = 9 8 7 6
Logo a diferença X-Y:
10000 - 9876 = 124 , que é divisível por 4

**02. Resposta: B.**
Como temos 4 casas decimais, lemos então com décimos de milésimos,


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Logo: duzentos e dois décimos de milésimos.

**03. Resposta: B.**
Dois mil e dez reais e cinquenta centavos.

**04. Resposta: B.**
Sabemos que precisamos decompor o número para forma-lo:
500 – D
200 – CC
45 – XLV
Juntando tudo temos 745 = DCCXLV

**05. Resposta: C.**
Temos que:
A 1 5 B – 2 C D 8 = 4 2 1 8
A 1 5 B = 4 2 1 8 + 2 C D 3

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\quad 1} \\ 4218 \\ 2CD3 \\ \hline A15B \end{array}$$

+ somando as unidades 8 + 3 = 11 ➔ **B = 1**; 1 + 1 + D = 5 ➔ D = 5 – 1 – 1 ➔ **D = 3** ➔ 2 + C = 11 ➔ C = 11 – 2 ➔ **C = 9** ➔ 1 + 4 + 2 = A ➔ **A = 7**
1 < 3 < 7 < 9
B < D < A < C

## BASE NÃO DECIMAIS

A base de um sistema de numeração é a quantidade de algarismos utilizados para a escrita de todos os números. O sistema mais utilizado é de base 10, ou decimal, mas não é o único. Abaixo estão relacionados alguns sistemas normalmente utilizados.

### ➔ Sistema de Base 2 (Binário)

Este sistema é muito utilizado no cotidiano, sendo fácil de manipular, trata-se do sistema utilizado pelos computadores. Utilizamos apenas dois algarismos: 0 e 1.

**- Transformação de Decimal para Binário**

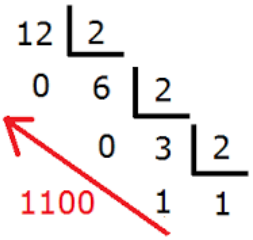
Exemplo:
1) Passar 14 decimal para base 2.

$14_{(base10)} = 1110_{(base2)}$

14 / 2 = 7 resto 0
7 / 2 = 3 resto 1
3 / 2 = 1 resto 1

2) Passar 12 decimal para base 2.

Observe que fazemos várias divisões por 2 ➔o número é formado pelo quociente da última divisão e os respectivos restos.

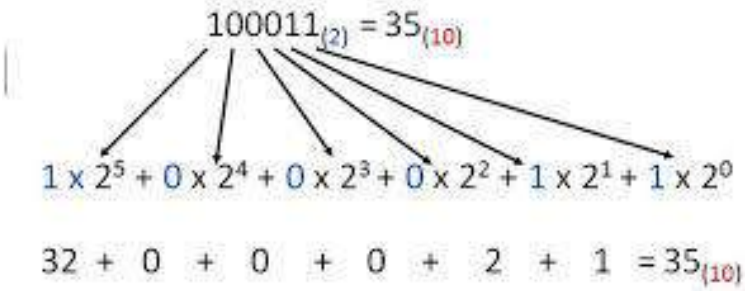




1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Conversão de binário para decimal

Exemplo:

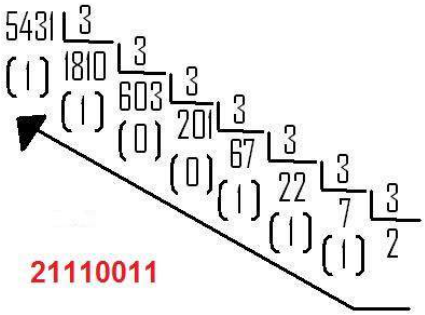



Pega-se cada unidade decimal e transforma-se em um potência de base 2.Efetuando-se as potenciações e somando-se os resultados, obtemos a conversão.

➔ **Sistema de Base 3 (Ternário)**

Neste sistema agrupamos os números de 3 em 3. Utilizamos apenas 3 algarismos: 0,1 e 2.
**Transformação de Decimal para Ternário**

O processo de transformação é o mesmo do binário.



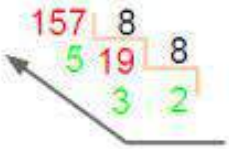

➔ **Sistema de Base 4 (Quaternário)**

Neste sistema agrupamos os números de 4 em 4. Utilizamos apenas 4 algarismos: 0,1,2 e 3.

➔ **Sistema de Base 8 (Octal ou octagenário)**

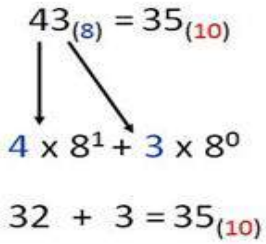
Neste sistema agrupamos os números de 8 em 8. Utilizamos apenas 8 algarismos: 0,1,2,3,4,5,6 e 7.
**Transformação de Decimal para Octal**

1) Converter o número 157 para base octal



157 Decimal = 235 Octal

Conversão de Octal ➔ Decimal





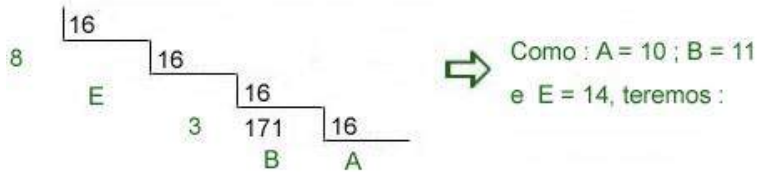
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

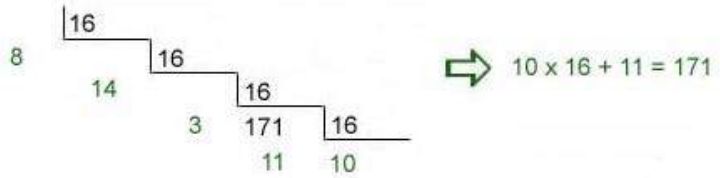
➔ **Base 16**

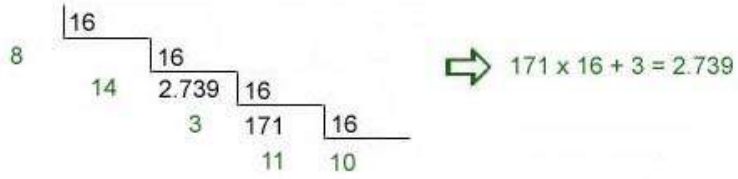
Seriam 10 algarismos usados na base 10 e mais os símbolos A, B, C, D, E e F representando respectivamente 10,11,12,13,14 e 15.

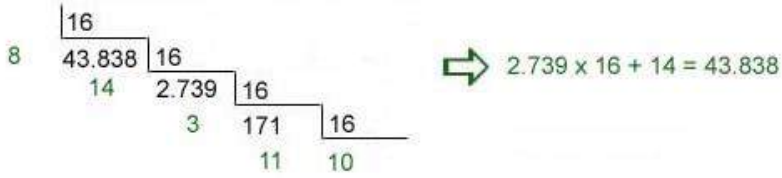
Conversão de Base 16 ➔ Decimal

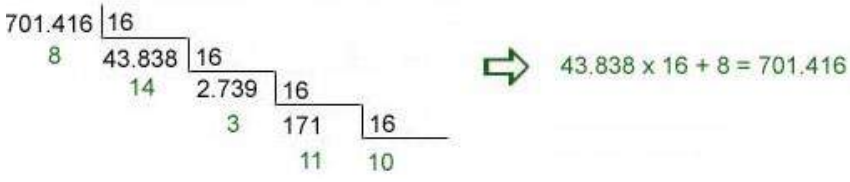
1) Converta o número $AB3E8_{(16)}$ em base decimal.




➔ **Para demais bases**

De modo geral, temos que uma base (b) qualquer utilizará b algarismos, onde b varia entre **0** e **b – 1.** Utilizamos sempre os mesmos critérios de transformação e conversão par todas elas.

## Questões

**01. (CEFET RJ)** Escreva o numeral 745 no sistema de base 16, sabendo que, nesse sistema, os símbolos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

(A) A4B5
(B) 2E9
(C) 2BA1
(D) 21CD
(E) 1EF

**02.** Transforme o número 269 da base decimal para base 5.

**03.** Escreva o número 531 da base decimal na base 8.

**04.** Escreva o número 97 da base decimal na base 2.

**05.** Transforme $1246_{(7)}$ para base decimal.

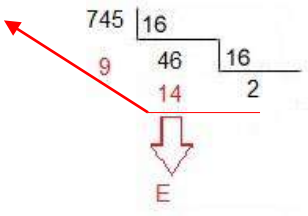

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**06.** Transforme $10212_{(3)}$ para base decimal.

## Respostas

**01. Resposta: B.**

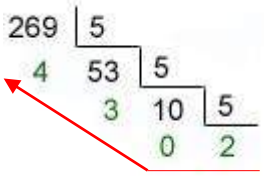
Efetuamos a divisão sucessiva de 745 por 16 até chegar a um quociente menor que 16.




Efetuamos a leitura do número de trás para frente, e considerando, apenas o último quociente e os demais restos, substituindo o 14 pela letra E, teremos a nossa solução: 745 = 2E9. (dois, E, nove na base 16)

**02. Resposta: $2034_{(5)}$**

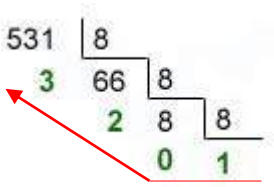
Efetuamos a divisão sucessiva de 269 por 5 até chegar a um quociente menor que o divisor.




Efetuamos a leitura do número de trás para frente, e considerando, apenas o último quociente e os demais restos, teremos a nossa solução: $269 = 2034_{(5)}$. (Esse número não pode ser lido como dois mil e trinta e quatro na base cinco, já que essa leitura é específica da base decimal. O correto será: dois, zero, três, quatro na base cinco).

**03. Resposta: $1023_{(8)}$**

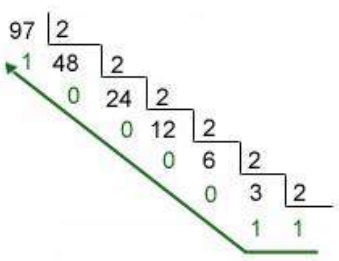
Efetuamos a divisão sucessiva de 531 por 8 até chegar a um quociente menor que o divisor.




Efetuamos a leitura do número de trás para frente, e considerando, apenas o último quociente e os demais restos, teremos a nossa solução: $531 = 1023_{(8)}$. (um, zero, dois, três na base 8).

**04. Resposta: $1100001_{(2)}$**

Efetuamos a divisão sucessiva de 97 por dois até chegar a um quociente menor que o divisor.





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Efetuamos a leitura do número de trás para frente, e considerando, apenas o último quociente e os demais restos, teremos a nossa solução: 97 = $1100001_{(2)}$. (um, um, zero, zero, zero, zero, um na base 2).

**05. Resposta: 475**

Neste caso é para passar base 7 para base 10, temos que multiplicar uma potência de 7 pelos respectivos algarismos 1, 2, 4 e 6. Como o número $1246_{(7)}$ tem 4 algarismos, a primeira potência de 7 será 4 – 1.

$1.7^{4-1} + 2.7^{4-2} + 4.7^{4-3} + 6.7^{4-4} = 1.7^3 + 2.7^2 + 4.7^1 + 6.7^0 =$

$= 343 + 2.49 + 4.7 + 6.1 = 343 + 98 + 28 + 6 = 475$ (base 10 não é necessário escrever $475_{(10)}$).

**06. Resposta: 104**

Neste caso é para passar base 3 para base 10, temos que multiplicar uma potência de 3 pelos respectivos algarismos 1, 0, 2, 1 e 2. Como o número $10212_{(3)}$ tem 5 algarismos, a primeira potência de 3 será 5 – 1.

$1.3^{5-1} + 0.3^{5-2} + 2.3^{5-3} + 1.3^{5-4} + 2.3^{5-5} = 1.3^4 + 0.3^3 + 2.3^2 + 1.3^1 + 2.3^0 =$

$= 1.81 + 0.27 + 2.9 + 1.3 + 2.1 = 81 + 0 + 18 + 3 + 2 = 104$

## CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS – C

Quantas vezes, ao calcularmos o valor de Delta ($b^2$- 4ac) na resolução da equação do 2º grau, nos deparamos com um valor negativo (Delta < 0). Nesse caso, sempre dizemos ser impossível a raiz no universo considerado (normalmente no conjunto dos reais- ***R***).

No século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler passou a representar $\sqrt{-1}$ por **i**, convenção que utilizamos até os dias atuais.

Assim: $\sqrt{-1}$ = i , que passamos a chamar de **unidade imaginária**.

A partir daí, vários matemáticos estudaram este problema, sendo Gauss e Argand os que realmente conseguiram expor uma interpretação geométrica num outro conjunto de números, chamado de números complexos, que representamos por ***C***.

**Números Complexos**

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por ***C***, o conjunto de pares ordenados, ou seja:

**z = (x, y)**

onde x ∈ a **R** e y ∈ a **R**.

Então, por definição, se z = (x, y) = (x,0) + (y, 0)(0,1) onde i = (0,1), podemos escrever que:

**z = (x, y) = x + yi**

Exemplos:

(5, 3) = 5 + 3i

(2, 1) = 2 + i

(-1, 3) = - 1 + 3i

Dessa forma, todo o números complexo **z = (x, y)** pode ser escrito na forma **z = x + yi**, conhecido como forma algébrica, onde temos:

**x = Re(z)**, parte real de z

**y = Im(z)**, parte imaginária de z

**Igualdade entre números complexos:** Dois números complexos são iguais se, e somente se, apresentam simultaneamente iguais a parte real e a parte imaginária. Assim, se $z_1$ = a + bi e $z_2$ = c + di, temos que:

**$z_1 = z_2$ <==> a = c e b = d**



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Adição de números complexos:** Para somarmos dois números complexos basta somarmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$\mathbf{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$

**Subtração de números complexos:** Para subtrairmos dois números complexos basta subtrairmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$

**Multiplicação de números complexos:** Para multiplicarmos dois números complexos basta efetuarmos a multiplicação de dois binômios, observando os valores das potência de **i**. Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$z_1.z_2 = a.c + a.di + b.ci + b.di^2$

Como $i^2 = -1$, temos:

$z_1.z_2 = ac + adi + bci - bd$

Agrupando os membros:

$z_1.z_2 = ac - bd + adi + bci$ ➔ $(ac - bd) + (ad + bc)i$

Nota: As propriedades da adição, subtração e multiplicação válidas para os Reais são válidas para os números complexos.

**Conjugado de um número complexo:** Dado $z = a + bi$, define-se como conjugado de z (representa-se por $\bar{z}$) ==> $\bar{z} = a - bi$

Exemplo:

$z = 3 - 5i$ ==> $\bar{z} = 3 + 5i$

$z = 7i$ ==> $\bar{z} = -7i$

$z = 3$ ==> $\bar{z} = 3$

Propriedade:

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é sempre um número real.

$$z.\bar{z} \in R$$

**Divisão de números complexos:** Para dividirmos dois números complexos basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + dic - d^2i^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + db}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$$

**Potências de i**

Se, por definição, temos que $i = -(-1)^{1/2}$, então:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = -1.-1 = 1$

$i^5 = i^4.\ 1 = 1.i = i$

$i^6 = i^5.\ i = i.i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6.\ i = (-1).i = -i$ .....

Observamos que no desenvolvimento de $i^n$ (**n** pertencente a ***N***, com **n** variando, os valores repetem-se de **4** em **4** unidades. Desta forma, para calcularmos $i^n$ basta calcularmos $\mathbf{i^r}$ onde **r** é o resto da divisão de **n** por **4**.

Exemplo: $i^{63}$ => 63 / 4 dá resto 3, logo $i^{63} = i^3 = -i$

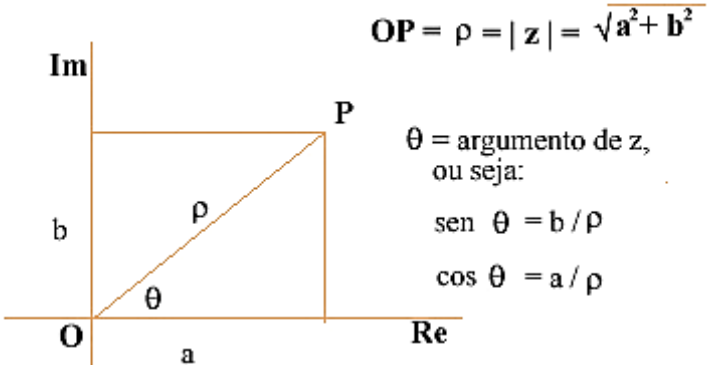


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Módulo de um número complexo:** Dado z = a+bi, chama-se módulo de z, indicado por |z| ou $\rho$ , a distância entre a origem (O) do plano de Gauss e o afixo de z (P).

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Interpretação geométrica:** Como dissemos, no início, a interpretação geométrica dos números complexos é que deu o impulso para o seu estudo. Assim, representamos o complexo z = a+bi da seguinte maneira




Em particular temos que:

$$a \neq 0 \ e \ b = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = 0°, se \ a > 0 \\ \theta = 180°, se \ a < 0 \end{cases}$$

$$a = 0 \ e \ b \neq 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = 90°, se \ b > 0 \\ \theta = 270°, se \ b < 0 \end{cases}$$

**Forma polar dos números complexos:** Da interpretação geométrica, temos que:

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

Que é conhecida como forma polar ou trigonométrica de um número complexo.

Exemplo:

$$1º)\ z = \sqrt{3} + i \Longrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Longrightarrow z = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$$

A multiplicação de dois números complexos na forma polar:
A = |A| [cos(a)+i sen(a)]
B = |B| [cos(b)+i sen(b)]

É dada pela Fórmula de De Moivre:
AB = |A||B| [cos(a+b)+i sen(a+b)]
Isto é, para multiplicar dois números complexos em suas formas trigonométricas, devemos multiplicar os seus módulos e somar os seus argumentos.
Se os números complexos A e B são unitários então |A|=1 e |B|=1, e nesse caso
A = cos(a) + i sen(a)
B = cos(b) + i sen(b)

Multiplicando A e B, obtemos
AB = cos(a+b) + i sen(a+b)


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Existe uma importantíssima relação matemática, atribuída a Euler (lê-se "óiler"), garantindo que para todo número complexo z e também para todo número real z:

$e^{iz} = \cos(z) + i\,\text{sen}(z)$

Tal relação, normalmente é demonstrada em um curso de Cálculo Diferencial, e, ela permite uma outra forma para representar números complexos unitários A e B, como:

$A = e^{ia} = \cos(a) + i\,\text{sen}(a)$

$B = e^{ib} = \cos(b) + i\,\text{sen}(b)$

Onde a é o argumento de A e b é o argumento de B. Assim, $e^{i(a+b)} = \cos(a+b)+i\text{sen}(a+b)$

Por outro lado $e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} = [\cos(a)+i\text{sen}(a)]\,[\cos(b)+i\text{sen}(b)]$

E desse modo $e^{i(a+b)} = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b) + i\,[\cos(a)\text{sen}(b) + \cos(b)\text{sen}(a)]$

Para que dois números complexos sejam iguais, suas partes reais e imaginárias devem ser iguais, logo

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$

$\text{sen}(a+b) = \cos(a)\text{sen}(b) + \cos(b)\text{sen}(a)$

Para a diferença de arcos, substituímos b por -b nas fórmulas da soma

$\cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \text{sen}(a)\text{sen}(-b)$

$\text{sen}(a+(-b)) = \cos(a)\text{sen}(-b) + \cos(-b)\text{sen}(a)$

Para obter

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$

$\text{sen}(a-b) = \cos(b)\text{sen}(a) - \cos(a)\text{sen}(b)$



**Operações na forma polar**

Sejam $z_1=\rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)$ e $z_2=\rho_1(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)$. Então, temos que:

**a) Multiplicação**

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

**b) Divisão**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

**c) Potenciação**

$$z^n = \rho^n\,[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)]$$

**d) Radiciação**

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\,\{\cos[(\theta + 2k\pi)/n] + i\,\text{sen}[(\theta + 2k\pi)/n]\}$$

para n = 0, 1, 2, 3, ..., n-1



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01. (PM/SP – CABO – CETRO/2012)** Assinale a alternativa que apresenta o módulo do número complexo abaixo.

$$z = \frac{(1+2i)^2}{i}$$

(A) 36.
(B) 25.
(C) 5.
(D) 6.

**02. (TRF 2ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012)** Considere a igualdade x + (4 + y) . i = (6 − x) + 2yi , em que x e y são números reais e i é a unidade imaginária. O módulo do número complexo z = x + yi, é um número
(A) maior que 10.
(B) quadrado perfeito.
(C) irracional.
(D) racional não inteiro.
(E) primo.

**03. (CPTM – ALMOXARIFE – MAKIYAMA/2013)** Assinale a alternativa correspondente à forma trigonométrica do número complexo z=1+i:

(A) $\boldsymbol{z} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$

(B) $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$

(C) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$

(D) $z = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$

(E) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\pi}{3})$

**04. (CPTM – ALMOXARIFE – MAKIYAMA/2013)** O valor do módulo do número complexo ($i^{62}+i^{123}$) é:
(A) Um número natural.
(B) Um número irracional maior que 5.
(C) Um número racional menor que 2.
(D) Um número irracional maior que 3.
(E) Um número irracional menor que 2.

**05. (Professor/Pref Itaboraí)** O inverso do número complexo $\frac{1+\sqrt{5i}}{2}$ é:

$(A)\ \frac{1+\sqrt{5i}}{2}$

$(B)\ \frac{1-\sqrt{5i}}{2}$

(C) $1-\sqrt{5i}$

$(D)\ \frac{1+\sqrt{5i}}{3}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(E) $\frac{1-\sqrt{5i}}{3}$

**06. (UFPA)** A divisão $\frac{1+2i}{1-i}$ dá como resultado

(A) $\frac{-1}{2}-\frac{3}{2}i$

(B) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

(C) $\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}i$

(D) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

**07. (PUC-SP)** Se f(z) = $z^2$ – z +1, então f(1– i) é igual a:
(A) i
(B) – i +1
(C) – i
(D) i –1
(E) i +1

**08. (UCMG)** O complexo z, tal que 5z + $z^-$ = 12 +16i , é igual a :
(A) - 2 + 2i
(B) 2 - 3i
(C) 1 + 2i
(D) 2 + 4i
(E) 3 + i

**09. (Viçosa – MG)** A parte real de $\frac{2+3i}{2-3i}$ é:

(A) -2/13
(B) -5/13
(C) -1/13
(D) -4/13

**10. (Mack – SP)** O conjugado de $\frac{2-i}{i}$ , vale:
(A) 1 - 2i
(B) 1 + 2i
(C) 1 + 3i
(D) -1 + 2i
(E) 2 - i

**Respostas**

**01. Resposta: C.**

$$z=\frac{1+4i-4}{i}=\frac{-3+4i}{i}\cdot\frac{i}{i}=3i+4$$

$$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

**02. Resposta: E.**
x=6-x
x=3
4+y=2y
y=4
$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**03. Resposta: A.**

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = sen\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$

**04. Resposta: E.**

62/4=15 e resto 2 então $i^{62}=i^2= -1$

123/4=30 e resto 3 então $i^{123}=i^3=-i$, como $i = \sqrt{-1}$

$i^{62} + i^{123} = -1 - \sqrt{-1}$

**05. Resposta: E.**

O inverso de z é 1/z :

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}i} = \frac{2}{1+\sqrt{5}i}.\frac{1-\sqrt{5}i}{1-\sqrt{5}i} = \frac{2-2\sqrt{5}i}{1^2-(\sqrt{5}i)^2} = \frac{2-2\sqrt{5}i}{1-5i^2} = \frac{2-2\sqrt{5}i}{6} = \frac{1-\sqrt{5}i}{3}$$

**06. Resposta: C.**

Temos q a = 1; b = 2 ; c = 1; d = - 1

Através da fórmula já vista vamos efetuar a divisão:

$\left(\frac{ac+db}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i \rightarrow \left(\frac{1.1+(-1).2}{1^2+(-1)^2}\right) + \left(\frac{2.1-(1.(-1))}{1^2+(-1)^2}\right)i \rightarrow$

$\frac{1-2}{2} + \frac{2+1}{2}i \rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$

**07. Resposta: C.**

f(z) = $z^2$ – z + 1 ➔ (1 - i)² – (1 - i) + 1 ➔ 1 - 2i + $i^2$ – 1 + i +1 ➔ $i^2$ – i + 1 ; como $i^2$ = - 1, então: - 1 – i + 1 = - i

**08. Resposta: D.**

A formula do número complexo é z=a+bi

Logo temos:

5.(a + bi) + (a - bi) = 12 + 16i ➔ 5a + 5bi + a – bi = 12 + 16i ➔ 6a + 4bi = 12 + 16i , para um número complexo ser igual ao outro, vamos igualar a parte real com a imaginária:

6a = 12 ➔ a = 2 ; 4bi = 16i ➔ b = 4

Montando o complexo: z=a+bi ➔ z= 2 + 4i

**09. Resposta: B.**

$\left(\frac{ac+db}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

Como queremos a parte real, vamos utilizar a primeira parte da fórmula:

$\left(\frac{2.2+3.(-3)}{2^2+(-3)^2}\right) = \frac{4-9}{4+9} = \frac{-5}{13}$

**10. Resposta: D.**

Vamos multiplicar o denominador e numerador pelo conjugado do denominador – i. Lembre-se que $i^2$ = - 1

$$\frac{2-i}{i}.\frac{-i}{-i} \rightarrow \frac{-2i+i^2}{-i^2} \rightarrow \frac{-2i-1}{-(-1)} \rightarrow -2i-1$$

Temos que o conjugado de um número complexo é: a+bi ➔ a-bi, logo

-1 – 2i ➔ -1 + 2i



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

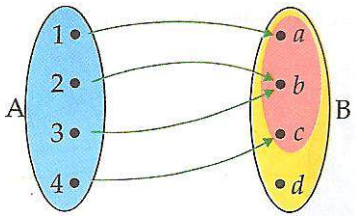


**2) Funções: - Definição, domínio, imagem, contradomínio, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, funções pares e ímpares, funções periódicas funções compostas; relações; raiz de uma função; função constante, função crescente, função decrescente; função definida por mais de uma sentença; as funções y=k/x, y= raiz quadrada de x e seus gráficos; função inversa e seu gráfico; e translação, reflexão de funções.**

**3) Função linear, função afim e função quadrática: - Gráficos, domínio, imagem e características; - Variações de sinal; - Máximos e mínimos; e inequação produto e inequação quociente.**

## FUNÇÃO DO 1º GRAU

Dados dois conjuntos *A* e *B*, não-vazios, função é uma relação binária de *A* em *B* de tal maneira que todo elemento *x*, pertencente ao conjunto *A*, tem para si um **único** correspondente *y*, pertencente ao conjunto *B*, que é chamado de imagem de *x*.




Notemos que, para uma relação binária dos conjuntos *A* e *B*, nesta ordem, representarem uma função é preciso que:

- Todo elemento do conjunto *A* tenha algum correspondente (imagem) no conjunto *B*;
- Para cada elemento do conjunto *A* exista um único correspondente (imagem) no conjunto *B*.

Assim como em relação, usamos para as funções, que são relações especiais, a seguinte linguagem:

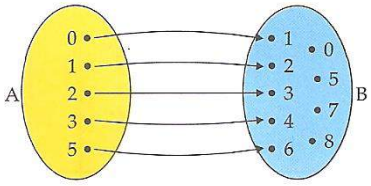
**Domínio**: Conjunto dos elementos que possuem imagem. Portanto, todo o conjunto *A*, ou seja, D = *A*.

**Contradomínio**: Conjunto dos elementos que se colocam à disposição para serem ou não imagem dos elementos de *A*. Portanto, todo conjunto *B*, ou seja, CD = *B*.

**Conjunto Imagem**: Subconjunto do conjunto *B* formado por todos os elementos que são imagens dos elementos do conjunto *A*, ou seja, no exemplo anterior: Im = {a, b, c}.

**Exemplo**

Consideremos os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 5} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.
Vamos definir a função *f* de A em B com $f(x) = x + 1$.
Tomamos um elemento do conjunto A, representado por *x*, substituímos este elemento na sentença $f(x)$, efetuamos as operações indicadas e o resultado será a imagem do elemento *x*, representada por *y*.

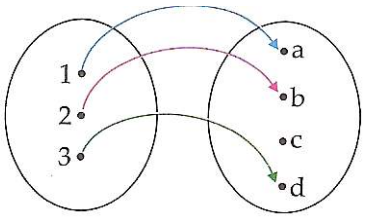



$f: A \rightarrow B$
$y = f(x) = x + 1$

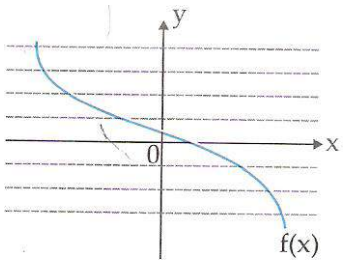

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Tipos de Função**

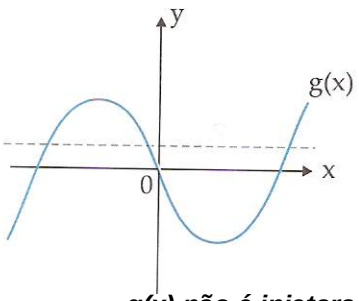
**Injetora**: Quando para ela elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio.




Reconhecemos, graficamente, uma função injetora quando, uma reta horizontal, qualquer que seja interceptar o gráfico da função, uma única vez.

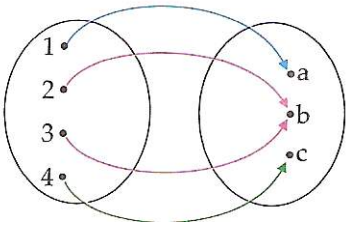



***f(x) é injetora***

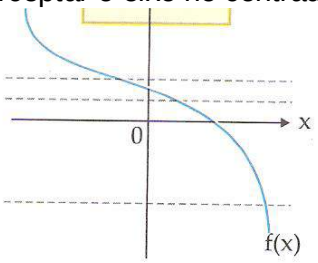



***g(x) não é injetora***
***(Interceptou o gráfico mais de uma vez)***

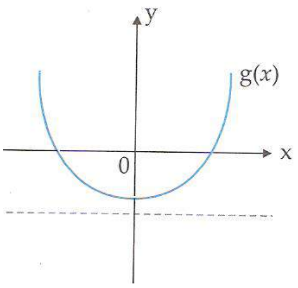
**Sobrejetora**: Quando todos os elementos do contradomínio forem imagens de pelo menos um elemento do domínio.




Reconhecemos, graficamente, uma função sobrejetora quando, qualquer que seja a reta horizontal que interceptar o eixo no contradomínio, interceptar, também, pelo menos uma vez o gráfico da função.



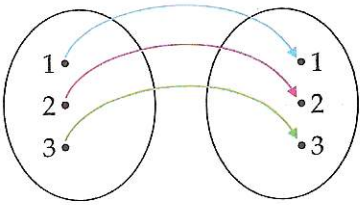

***f(x) é sobrejetora***



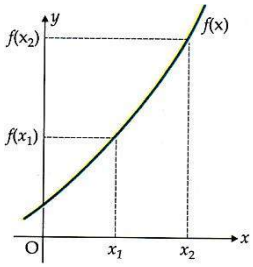

***g(x) não é sobrejetora***
***(não interceptou o gráfico)***

**Bijetora**: Quando apresentar as características de função injetora e ao mesmo tempo, de sobrejetora, ou seja, elementos distintos têm sempre imagens distintas e todos os elementos do contradomínio são imagens de pelo menos um elemento do domínio.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

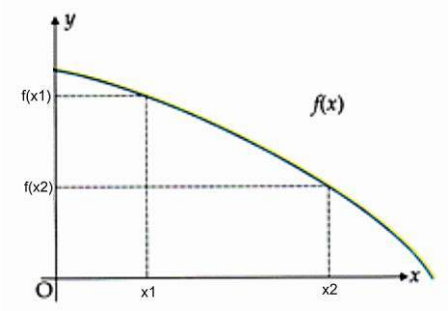



**Função crescente:** A função $f(x)$, num determinado intervalo, é crescente se, para quaisquer $x_1$ e $x_2$ pertencentes a este intervalo, com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)<f(x_2)$.



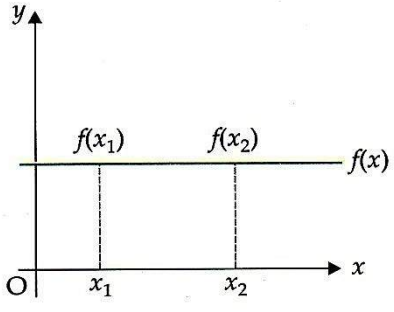

$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

**Função decrescente:** Função $f(x)$, num determinado intervalo, é decrescente se, para quaisquer $x_1$ e $x_2$ pertencente a este intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1)>f(x_2)$.




$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

**Função constante:** A função $f(x)$, num determinado intervalo, é constante se, para quaisquer $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$.




**Gráficos de uma Função**

A apresentação de uma função por meio de seu gráfico é muito importante, não só na Matemática como nos diversos ramos dos estudos científicos.

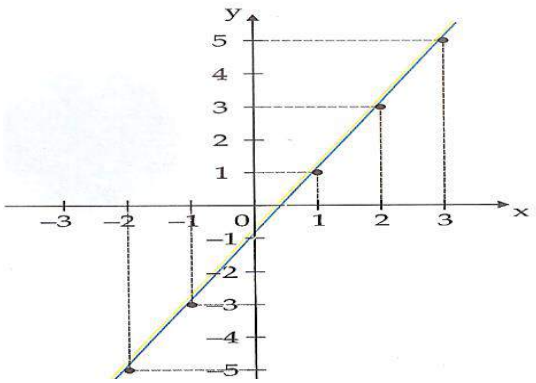
**Exemplo**

Consideremos a função real $f(x) = 2x – 1$. Vamos construir uma tabela fornecendo valores para $x$ e, por meio da sentença $f(x)$, obteremos as imagens $y$ correspondentes.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

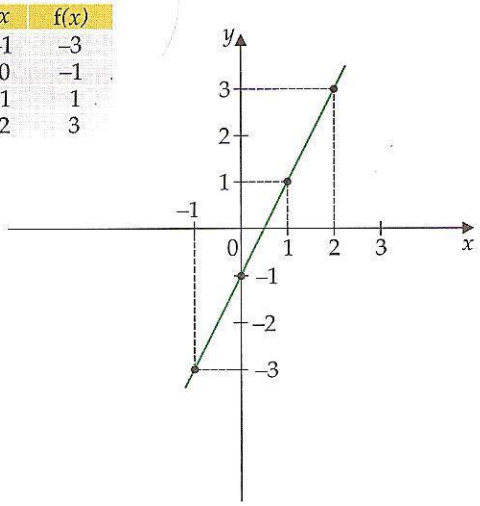
| $x$ | $y = 2x - 1$ |
|---|---|
| –2 | –5 |
| –1 | –3 |
| 0 | –1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |

Transportados os pares ordenados para o plano cartesiano, vamos obter o gráfico correspondente à função $f(x)$.



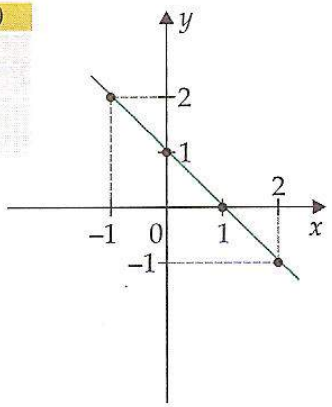

**Exemplo** para $a > 0$
Consideremos $f(x) = 2x - 1$.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| –1 | –3 |
| 0 | –1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |



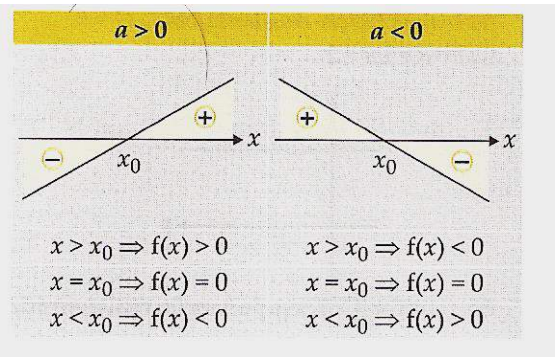

**Exemplo** para $a < 0$
Consideremos $f(x) = -x + 1$.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| –1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | –1 |




Consideremos a função $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, em que $x_0$ é a raiz da função $f(x)$.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




Conclusão: O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta crescente para a > 0 e uma reta decrescente para a < 0.

**Zeros da Função do 1º grau**:

Chama-se zero ou raiz da função do 1º grau $y = ax + b$ o valor de $x$ que anula a função, isto é, o valor de $x$ para que $y$ seja igual à zero.

Assim, para achar o zero da função $y = ax + b$, basta resolver a equação $ax + b = 0$.

**Exemplo**

Determinar o zero da função:

$y = 2x – 4$.

$2x – 4 = 0$

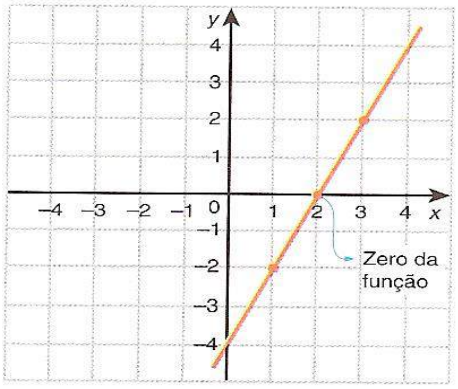
$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

O zero da função $y = 2x – 4$ é 2.

No plano cartesiano, o zero da função do 1º grau é representado pela abscissa do ponto onde a reta corta o eixo x.




| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 1 | –2 | (1, –2) |
| 3 | 2 | (3,2) |

Observe que a reta y = 2x – 4 intercepta o eixo x no ponto (2,0), ou seja, no ponto de abscissa 2, que é o zero da função.

Conhecido o zero de uma função do 1º grau e lembrando a inclinação que a reta pode ter, podemos esboçar o gráfico da função.

**Estudo do sinal da função do 1º grau**:

Estudar o sinal da função do 1º grau $y = ax + b$ é determinar os valores reais de x para que:

- A função se anule (y = 0);
- A função seja positiva (y > 0);
- A função seja negativa (y < 0).


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplo**

Estudar o sinal da função y = 2x – 4 (a = 2 > 0).

a) Qual o valor de x que anula a função?

y = 0
2x – 4 = 0
2x = 4
$x = \frac{4}{2}$
x = 2

A função se anula para x = 2.

b) Quais valores de x tornam positiva a função?

y > 0
2x – 4 > 0
2x > 4
$x > \frac{4}{2}$
x > 2

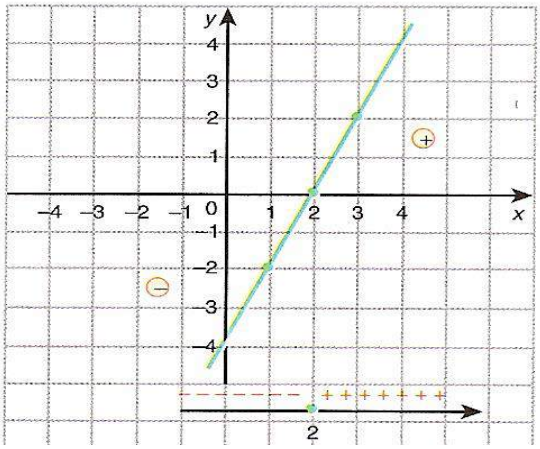
A função é positiva para todo x real maior que 2.

c) Quais valores de x tornam negativa a função?
y < 0
2x – 4 < 0
2x < 4
$x < \frac{4}{2}$
x < 2

A função é negativa para todo x real menor que 2.

Podemos também estudar o sinal da função por meio de seu gráfico:

- Para x = 2 temos y = 0;
- Para x > 2 temos y > 0;
- Para x < 2 temos y < 0.





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Relação Binária**

**Par Ordenado**

Quando representamos o conjunto (*a, b*) ou (*b, a*) estamos, na verdade, representando o mesmo conjunto. Porém, em alguns casos, é conveniente distinguir a ordem dos elementos.

Para isso, usamos a idéia de par ordenado. A princípio, trataremos o par ordenado como um conceito primitivo e vamos utilizar um exemplo para melhor entendê-lo. Consideremos um campeonato de futebol e que desejamos apresentar, de cada equipe, o total de pontos ganhos e o saldo de gols. Assim, para uma equipe com 12 pontos ganhos e saldo de gols igual a 18, podemos fazer a indicação (12, 18), já tendo combinado, previamente, que o primeiro número se refere ao número de pontos ganhos, e o segundo número, ao saldo de gols.

Portanto, quando tivermos para outra equipe a informação de que a sua situação é (2, -8) entenderemos, que esta equipe apresenta 2 pontos ganhos e saldo de gols -8. Note que é importante a ordem em que se apresenta este par de números, pois a situação (3, 5) é totalmente diferente da situação (5,3). Fica, assim, estabelecida a idéia de par ordenado: um par de valores cuja ordem de apresentação é importante.

Observações: (*a, b*) = (*c, d*) se, e somente se, $a = c$ e $b = d$
(*a, b*) = (*b, a*) se, o somente se, $a = b$

**Produto Cartesiano**

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chamamos de produto cartesiano *A x B* ao conjunto de todos os possíveis pares ordenados, de tal maneira que o 1º elemento pertença ao 1º conjunto (*A*) e o 2º elemento pertença ao 2º conjunto (*B*).

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A e\, y \in B\}$$

Quando o produto cartesiano for efetuado entre o conjunto *A* e o conjunto *A*, podemos representar *A* x *A* = $A^2$. Vejamos, por meio de o exemplo a seguir, as formas de apresentação do produto cartesiano.

**Exemplo**

Sejam *A* = {1, 4, 9} e *B* = {2, 3}. Podemos efetuar o produto cartesiano *A* x *B*, também chamado *A* cartesiano *B*, e apresentá-lo de várias formas.

**a) Listagem dos elementos**

Apresentamos o produto cartesiano por meio da listagem, quando escrevemos todos os pares ordenados que constituam o conjunto. Assim, no exemplo dado, teremos:

*A* e *B* = {(1, 2),(1, 3),(4, 2),(4, 3),(9, 2),(9, 3)}

Vamos aproveitar os mesmo conjuntos *A* e *B* e efetuar o produto *B* e *A* (*B* cartesiano *A*): *B* x *A* = {(2, 1),(2, 4),(2, 9),(3, 1),(3, 4),(3, 9)}.

Observando *A* x *B* e *B* x *A*, podemos notar que o produto cartesiano não tem o privilégio da propriedade comutativa, ou seja, *A* x *B* é diferente de *B* x *A*. Só teremos a igualdade *A* x *B* = *B* x *A quando A* e *B* forem conjuntos iguais.

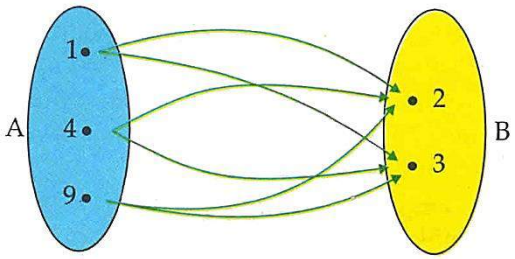
Observação: Considerando que para cada elemento do conjunto *A* o número de pares ordenados obtidos é igual ao número de elementos do conjunto *B,* teremos: *n(A* x *B) = n(A)* x *n(B).*

**b) Diagrama de flechas**

Apresentamos o produto cartesiano por meio do diagrama de flechas, quando representamos cada um dos conjuntos no diagrama de Euler-Venn, e os pares ordenados por “flechas” que partem do 1º elemento do par ordenado (no 1º conjunto) e chegam ao 2º elemento do par ordenado (no 2º conjunto).

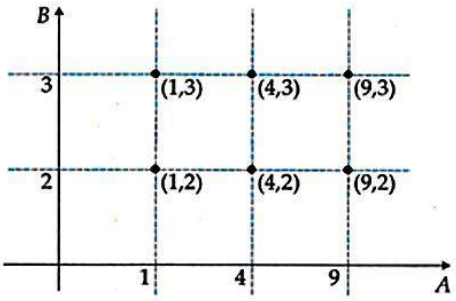

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Considerando os conjuntos *A* e *B* do nosso exemplo, o produto cartesiano *A* x *B* fica assim representado no diagrama de flechas:




**c) Plano cartesiano**

Apresentamos o produto cartesiano, no plano cartesiano, quando representamos o 1º conjunto num eixo horizontal, e o 2º conjunto num eixo vertical de mesma origem e, por meio de pontos, marcamos os elementos desses conjuntos. Em cada um dos pontos que representam os elementos passamos retas (horizontais ou verticais). Nos cruzamentos dessas retas, teremos pontos que estarão representando, no plano cartesiano, cada um dos pares ordenados do conjunto *A* cartesiano *B (B* x *A).*




**Domínio de uma Função Real**

Para uma função de *R* em *R*, ou seja, com elementos no conjunto dos números reais e imagens também no conjunto dos números reais, será necessária, apenas, a apresentação da sentença que faz a "ligação" entre o elemento e a sua imagem.

Porém, para algumas sentenças, alguns valores reais não apresentam imagem real.

Por exemplo, na função $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ , o número real 0 não apresenta imagem real e, portanto, *f(x)* características de função, precisamos limitar o conjunto de partida, eliminando do conjunto dos números reais os elementos que, para essa sentença, não apresentam imagem. Nesse caso, bastaria estabelecermos como domínio da função *f(x)* o conjunto $D = \{x \in R / x \geq 1\}$.

Para determinarmos o domínio de uma função, portanto, basta garantirmos que as operações indicadas na sentença são possíveis de serem executadas. Dessa forma, apenas algumas situações nos causam preocupação e elas serão estudadas a seguir.

1ª) $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ $\qquad f(x) \geq (n \in N^*)$

2ª) $y = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x) \neq 0$

Vejamos alguns exemplos de determinação de domínio de uma função real.

**Exemplos:**

Determine o domínio das seguintes funções reais.

A) $f(x) = 3x^2 + 7x - 8$

$D = R$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

*B)* $f(x)=\sqrt{x+7}$
$x - 7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7$
$D = \{x \in R / x \geq 7\}$

C) $f(x)= \sqrt[3]{x+1}$
$D = R$

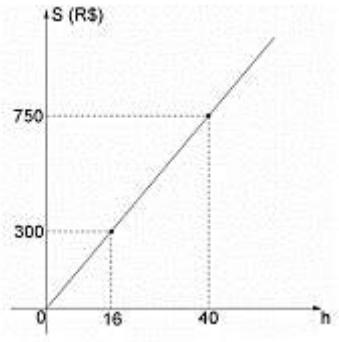
Observação: Devemos notar que, para raiz de índice impar, o radicando pode assumir qualquer valor real, inclusive o valor negativo.

D) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x+8}}$
$x + 8 > 0 \rightarrow x > -8$
$D = \{x \in R / x > -8\}$

E) $f(x)= \frac{\sqrt{x+5}}{x-8}$
$x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$
$x - 8 \geq 0 \rightarrow x \neq 8$
$D = \{x \in R / x \geq 5$ e $x \neq 8\}$

**Questões**

**01. (PM/SP – CABO – CETRO/2012)** O gráfico abaixo representa o salário bruto (S) de um policial militar em função das horas (h) trabalhadas em certa cidade. Portanto, o valor que este policial receberá por 186 horas é




(A) R$ 3.487,50.
(B) R$ 3.506,25.
(C) R$ 3.534,00.
(D) R$ 3.553,00.

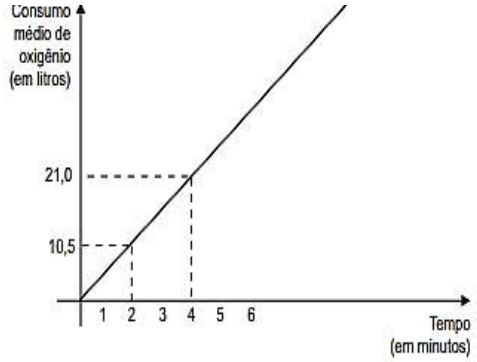
**02. (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013)** Em determinado estacionamento cobra-se R$ 3,00 por hora que o veículo permanece estacionado. Além disso, uma taxa fixa de R$ 2,50 é somada à tarifa final. Seja t o número de horas que um veículo permanece estacionado e T a tarifa final, assinale a seguir a equação que descreve, em reais, o valor de T:
(A) T = 3t
(B) T = 3t + 2,50
(C) T = 3t + 2.50t
(D) T = 3t + 7,50
(E) T = 7,50t + 3

**03. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012)** Dada a função f(x) = −4x +15 , sabendo que f(x) = 35, então
(A) x = 5.
(B) x = 6.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(C) x = -6.
(D) x = -5.

**04. (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013)** O gráfico abaixo apresenta o consumo médio de oxigênio, em função do tempo, de um atleta de 70 kg ao praticar natação.



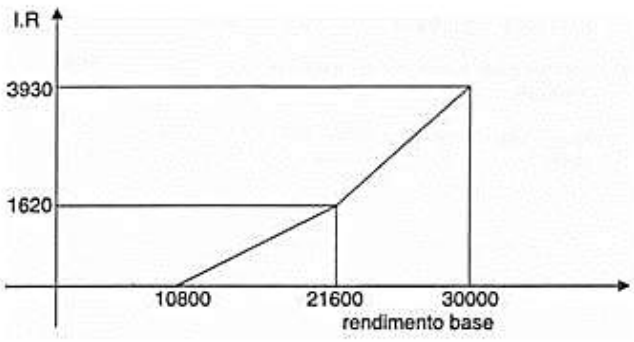

Considere que o consumo médio de oxigênio seja diretamente proporcional à massa do atleta.
Qual será, em litros, o consumo médio de oxigênio de um atleta de 80 kg, durante 10 minutos de prática de natação?
(A) 50,0
(B) 52,5
(C) 55,0
(D) 57,5
(E) 60,0

**05. (PETROBRAS – TÉCNICO AMBIENTAL JÚNIOR – CESGRANRIO/2012)**

$$\text{Se } f(x)=\begin{cases}2x-p, & \text{se } x\le 1\\ mx-1, & \text{se } 1<x<6\\ \dfrac{7x+4}{2}, & \text{se } x\ge 6\end{cases} \text{ é uma função contínua,}$$

de domínio real, então, m − p é igual a
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 64
(E) 7

**06. (TRT – Técnico Judiciário)** O imposto de renda (IR) a ser pago, em função do rendimento-base, durante o ano de 2000, está representado pelo gráfico abaixo:




Considere, com base no gráfico, as proposições abaixo:

I) A pessoa com rendimento-base menor que R$ 10800,00 está isenta de IR;
II) Sendo x o rendimento base e o y o imposto e se 10800 ≤ x < 21600 então y = 0,15x – 1620, considerando x e y em reais.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

III) O imposto a pagar é sempre o produto do rendimento-base por uma constante.

Quais são verdadeiras, levando-se em conta somente as informações do gráfico e as afirmações subsequentes?

(A) apenas I
(B) apenas II
(C) apenas III
(D) apenas I e II
(E) apenas I e III

**07. (BRDE-RS)** – Numa firma, o custo para produzir x unidades de um produto é C(x) = $\frac{x}{2}$ + 10000, e o faturamento obtido com a comercialização dessas x unidades é f(x) = $\frac{2}{3}$ $x$. Para que a firma não tenha prejuízo, o faturamento mínimo com a comercialização do produto deverá ser de:

(A) R$ 10.000,00
(B) R$ 13.000,00
(C) R$ 15.000,00
(D) R$ 18.000,00
(E) R$ 20.000,00

**08.** A função f de R em R é tal que, para todo x ∈ R, f(5x) = 5f(x). Se f(25) = 75, então f(1) é igual a:

(A) 15
(B) 10
(C) 5
(D) 3
(E) 1

**09.** Sabendo que a função $f:\Re \to \Re$ é tal que para qualquer x e y pertencentes ao seu domínio f(x+y) = f(x) + f(y) e f(3) = 1, podemos afirmar que:

(A) f(4) = 3 + f(1)
(B) f(4) = f(3) + 1
(C) f(4) = f(3) . (1)
(D) f(4) = 3 . f(1)
(E) f(4) = 1 + $\frac{1}{3}$

**10. (PM/AM - Soldado da Polícia Militar – ISAE)** Se f(x) = 3 – 2x, x real, então f(–5) é igual a:

(A) – 7;
(B) – 2;
(C) 7;
(D) 13.

## Respostas

**01. Resposta: A.**

$$\frac{300}{16} = \frac{750}{40} = \frac{x}{186}$$

$$40x = 750 \cdot 186$$
$$x = 3487{,}50$$

**02. Resposta: B.**

Equacionando as informações temos: 3 deve ser multiplicado por t, pois depende da quantidade de tempo, e acrescentado 2,50 fixo

T = 3t + 2,50

**03. Resposta: D.**

35 = - 4x + 15
- 4x = 20
x = - 5


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**04. Resposta: E.**
A proporção de oxigênio/tempo:

$$\frac{10,5}{2} = \frac{21,0}{4} = \frac{x}{10}$$

4x = 210
x = 52,5 litros de oxigênio em 10 minutos para uma pessoa de 70 kg

52,5litros----70kg
x----------80kg
x = 60 litros

**05. Resposta: C.**
Aplicando segundo as condições mencionadas:
x = 1
f(1) = 2.1 - p
f(1) = m - 1
x = 6
f(6) = 6m - 1
$f(6) = \frac{7.6+4}{2} = \frac{42+4}{2} = 23$ ; igualando as duas equações:
23 = 6m - 1
m = 4
Como queremos m – p , temos:
2 - p = m - 1 ; igualando as duas novamente.
2 – p = 4 - 1
p = - 1
m – p = 4 - (- 1) = 5

**06. Resposta: D.**
I – Verdadeira
II – Verdadeira
y = 0,15x – 1620
y = 0,15 . 21600 – 1620
y = 3240 – 1620
y = 1620
y = 0,15 . 10800 – 1620
y = 1620 – 1620
y = 0

III – Falsa
São duas funções (2 constantes)

**07. Resposta: E.**
C(x) = $\frac{x}{2}$ + 10000
F(x) = $\frac{2}{3}\ x$
f(x) > c(x)

$\frac{2}{3}\ x > \frac{x}{2}$ + 10000

$\frac{2}{3}\ x - \frac{x}{2} > 10000 \rightarrow \frac{4x-3x}{6}$ x > 10000 → $\frac{4x-3x}{6}$ x > 10000→ x > $\frac{10000}{\frac{1}{6}}$ → x > 60000
Substituindo
C(x) = $\frac{x}{2}$ + 10000 = $\frac{60000}{2}$ + 10000 = 30000 – 10000 = 20000

F(x) = $\frac{2}{3}$ 60000 = 40000


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Fm = 40000 – 20000
Fm = 20000

Portanto o resultado final é de R$ 20.000,00.

**08. Resposta: D.**

Sabendo que *f(25) = 75*, podemos dizer que *f(5 . 5) = 75* e agora, utilizando a regra dada no exercício, que diz que ***f(5x) = 5f(x)*** então *f(5 . 5) = 5.f(5)* pois o nosso x é 5, portanto,

f(5 . 5) = 75
75 = 5f(5)

$f(5) = \frac{75}{5}$

f(5) = 15
Agora podemos utilizar novamente a regra dada.
f(5) = 15
f(5.1) = 15
Agora o nosso x é 1. Utilizando a regra novamente
5f(1) = 15
f(1)=3

**09. Resposta: E.**

Olhando para as respostas, vemos que o que o exercício quer na verdade, é o valor de f(4).

É dado o valor de f(3), podemos dizer que f(3) = f(2 + 1) e utilizando a regra dada, que é f(x + y) = f(x) + f(y) podemos escrever *f(2 + 1) = f(2) + f(1)*, portanto:

*f(3) = 1*
*f(2 + 1) = 1*
*f(2) + f(1) = 1*

E ainda podemos dizer que f(2) = f(1 + 1), e utilizando a regra, temos:

$$f(2)+f(1)=1$$
$$f(1+1)+f(1)=1$$
$$f(1)+f(1)+f(1)=1$$
$$3f(1)=1$$
$$f(1)=\frac{1}{3}$$

O que o exercício quer é o valor de f(4), podemos escrever f(4) como sendo f(3 + 1) e utilizando a regra dada no exercício, temos

f(4) = f(3 + 1) = f(3) + f(1)

Sabemos o valor de f(3), pois é dado no exercício f(3)=1 e o valor de f(1) já calculamos, portanto:

$$f(4)=f(3)+f(1)$$
$$f(4)=1+\frac{1}{3}$$

**10. Resposta: D.**

Se f(x) = 3 – 2x ➔ f(-5) = 3 – 2.(-5) = 3 + 10 = 13

## FUNÇÃO DO 2º GRAU

Chama-se função do 2º grau ou função quadrática toda função *f* de R em R definida por um polinômio do 2º grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$ , com *a*, *b* e *c* reais e $a \neq 0$.

**Exemplo**

- $y = x^2 – 5x + 4$, sendo a = 1, b = – 5 e c = 4
- $y = x^2 – 9$, sendo a = 1, b = 0 e c = – 9


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

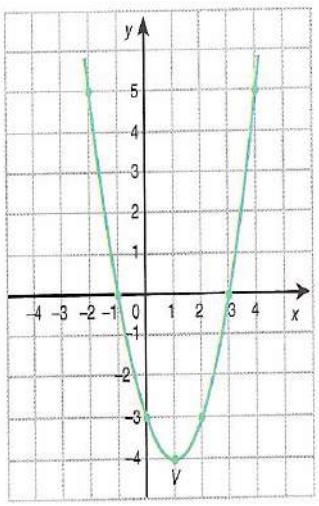
- $y = x^2$, sendo a = 1, b = 0 e c = 0

**Representação gráfica da Função do 2º grau**

**Exemplo**

Se a função *f* de R em R definida pela equação $y = x^2 – 2x – 3$. Atribuindo à variável *x* qualquer valor real, obteremos em correspondência os valores de *y*:

Para x = –2 temos $y = (–2)^2 – 2(–2) –3 = 4 + 4 – 3 = 5$
Para x = –1 temos $y = (–1)^2 – 2(–1) –3 = 1 + 2 – 3 = 0$
Para x = 0 temos $y = (0)^2 – 2(0) –3 = – 3$
Para x = 1 temos $y = (1)^2 – 2(1) –3 = 1 – 2 – 3 = –4$
Para x = 2 temos $y = (2)^2 – 2(2) –3 = 4 – 4 – 3 = –3$
Para x = 3 temos $y = (3)^2 – 2(3) –3 = 9 – 6 – 3 = 0$
Para x = 4 temos $y = (4)^2 – 2(4) –3 = 16 – 8 – 3 = 5$

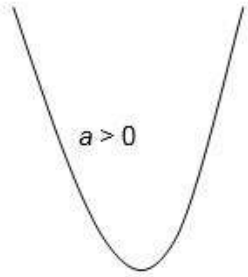


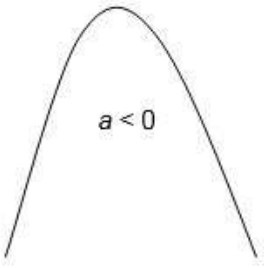

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| –2 | 5 | (–2,5) |
| –1 | 0 | (–1,0) |
| 0 | –3 | (0, –3) |
| 1 | –4 | (1, –4) |
| 2 | –3 | (2, –3) |
| 3 | 0 | (3,0) |
| 4 | 5 | (4,5) |

O gráfico da função de 2º grau é uma curva aberta chamada parábola.
O ponto V indicado na figura chama-se vértice da parábola.

**Concavidade da Parábola**

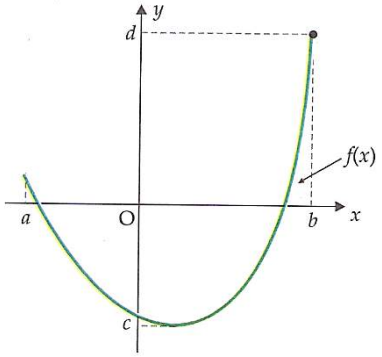
No caso das funções do 2º grau, a parábola pode ter sua concavidade voltada para cima (a > 0) ou voltada para baixo (a < 0).




Podemos por meio do gráfico de uma função, reconhecer o seu domínio e o conjunto imagem.

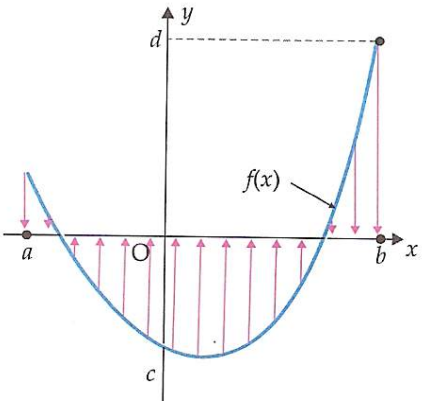
Consideremos a função *f*(*x*) definida por A = [a, b] em R.



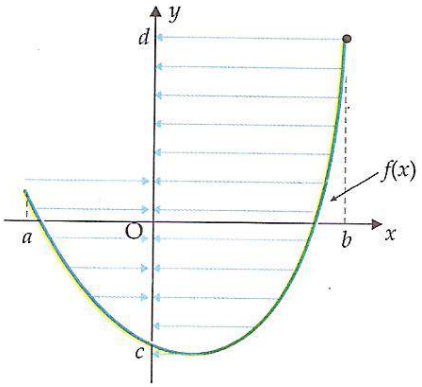


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Domínio:** Projeção ortogonal do gráfico da função no eixo *x*. Assim, D = [a, b] = A




**Conjunto Imagem:** Projeção ortogonal do gráfico da função no eixo *y*. Assim, Im = [c, d].




**Zeros da Função do 2º grau**

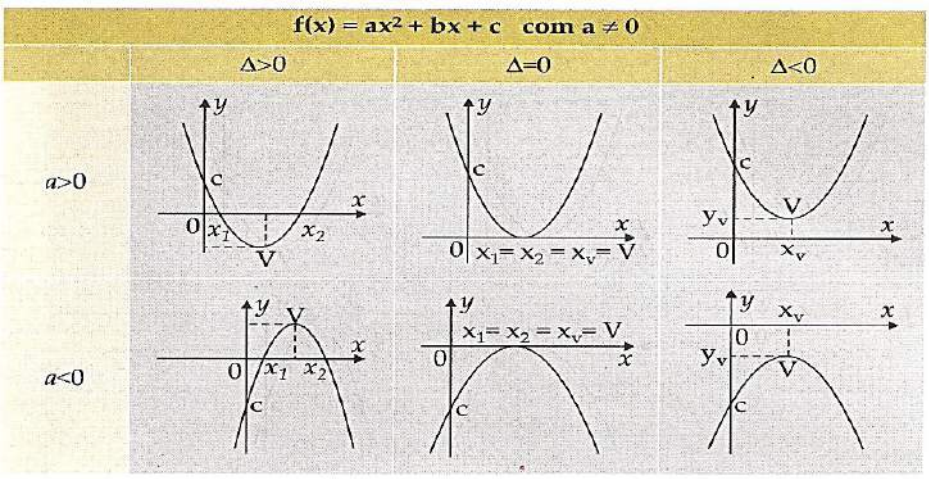
As raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do 2º grau.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A resolução de uma equação do 2º grau é feita com o auxílio da chamada "fórmula de Bháskara".

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$ **, onde,** $\Delta = b^2 - 4.a.c$

As raízes (quando são reais), o vértice e a intersecção com o eixo y são fundamentais para traçarmos um esboço do gráfico de uma função do 2º grau.





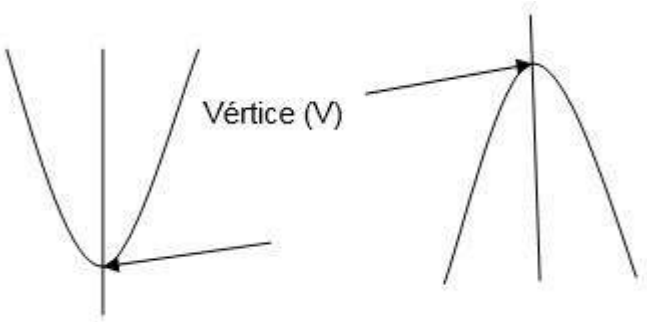
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

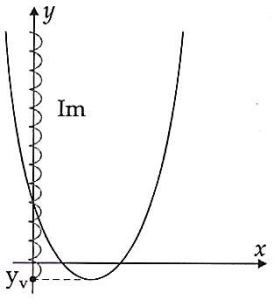
**Coordenadas do vértice da parábola**

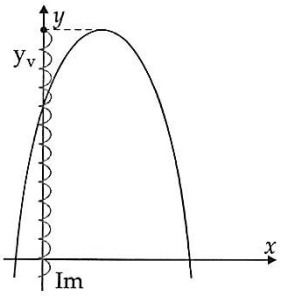
A parábola que representa graficamente a função do 2º grau apresenta como eixo de simetria uma reta vertical que intercepta o gráfico num ponto chamado de vértice.

As coordenadas do vértice são:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$




***O Conjunto Imagem de uma função do 2º grau está associado ao seu ponto extremo, ou seja, à ordenada do vértice ($y_v$).***

**Exemplo:**

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola da seguinte função quadrática: $y = x^2 – 8x + 15$.

Cálculo da abscissa do vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

Cálculo da ordenada do vértice:

Substituindo x por 4 na função dada:

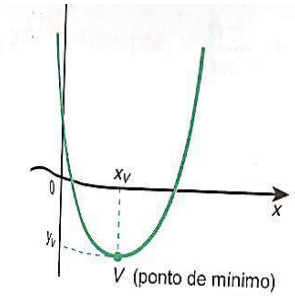
$y_V = (4)2 – 8(4) + 15 = 16 – 32 + 15 = –1$

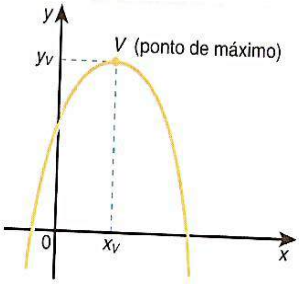
Logo, o ponto V, vértice dessa parábola, é dado por V (4, –1).

**Valor máximo e valor mínimo da função do 2º grau**

- Se a > 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado ponto de mínimo e a ordenada do vértice é chamada valor mínimo da função;
- Se a < 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é ponto de máximo e a ordenada do vértice é chamada valor máximo da função.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Construção do gráfico da função do 2º grau**

- Determinamos as coordenadas do vértice;
- Atribuímos a *x* valores menores e maiores que $x_v$ e calculamos os correspondentes valores de *y*;
- Construímos assim uma tabela de valores;
- Marcamos os pontos obtidos no sistema cartesiano;
- Traçamos a curva.

**Exemplo**

$y = x^2 - 4x + 3$

Coordenadas do vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{V } (2, -1)$$

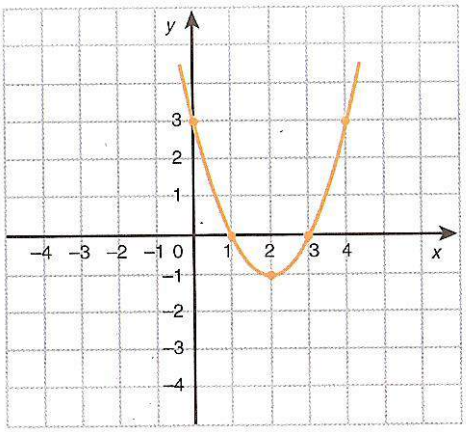
$$y_V = (2).2 - 4.(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Tabela:

Para x = 0 temos $y = (0)^2 - 4(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$
Para x = 1 temos $y = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$
Para x = 3 temos $y = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$
Para x = 4 temos $y = (4)^2 - 4(4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 0 | 3 | (0,3) |
| 1 | 0 | (1,0) |
| 2 | –1 | (2,–1)Vértice |
| 3 | 0 | (3,0) |
| 4 | 3 | (4,3) |

Gráfico:





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Estudos do sinal da função do 2º grau**

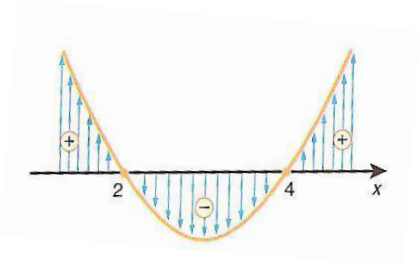
Estudar o sinal de uma função quadrática é determinar os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

**Exemplo**

$y = x^2 – 6x + 8$

Zeros da função:
$y = x^2 – 6x + 8$
$\triangle = (–6)^2 – 4(1)(8)$
$\triangle = 36 – 32 = 4$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Esboço do gráfico:




Estudo do sinal:

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \nearrow \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \searrow \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para $x < 2$ ou $x > 4$ temos $y > 0$

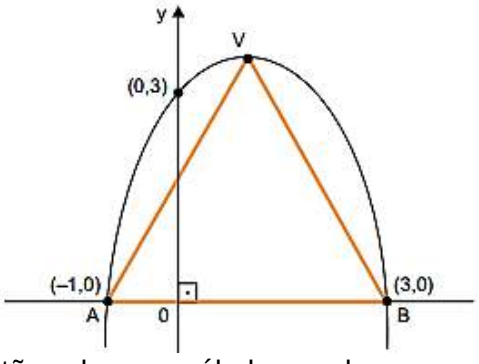
Para $x = 2$ ou $x = 4$ temos $y = 0$

Para $2 < x < 4$ temos $y < 0$

**Questões**

**01. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012)** Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura h atingida por uma bala, em metros, em função do tempo t, em segundos, é dada por $h(t)=-3t^2+15t$. Portanto, é correto afirmar que, depois de 3s, a bala atingirá:
(A) 18 metros.
(B) 20 metros.
(C) 27 metros.
(D) 32 metros.

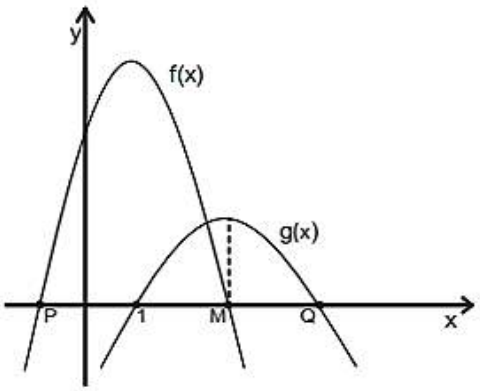
**02. (PM/SP – OFICIAL – VUNESP/2013)** Na figura, tem-se o gráfico de uma parábola.




Os vértices do triângulo AVB estão sobre a parábola, sendo que os vértices A e B estão sobre o eixo das abscissas e o vértice V é o ponto máximo da parábola. A área do triângulo AVB, cujas medidas dos lados estão em centímetros, é, em centímetros quadrados, igual a
(A) 8.
(B) 9.
(C) 12.
(D) 14.
(E) 16.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

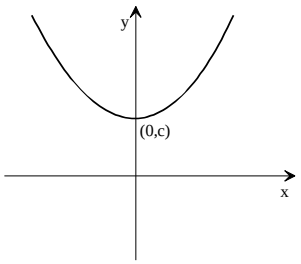
**03. (PETROBRAS – TÉCNICO AMBIENTAL JÚNIOR – CESGRANRIO/2012-Adpatado)** Sejam f(x) = - $2x^2$ + 4x + 16 e g(x) = $ax^2$ + bx + c funções quadráticas de domínio real, cujos gráficos estão representados abaixo. A função f(x) intercepta o eixo das abscissas nos pontos P($x_P$,0) e M($x_M$,0) e g(x), nos pontos (1,0) e Q($x_Q$,0).




Se g(x) assume valor máximo quando x = $x_M$, conclui-se que $x_Q$ é igual a
(A) 3
(B) 7
(C) 9
(D) 11
(E) 13

**04.** O lucro mensal L de uma empresa, em reais, obtido com a venda de uma unidade de certo produto é dado pela função L(x) = x – 5, sendo x o preço de venda do produto e R$ 5,00 o preço de custo. A quantidade Q vendida mensalmente depende do preço x do produto e é dada por Q(x) = 120 – x. Para a empresa obter o lucro máximo no mês, em reais, o preço de venda do produto é um número do intervalo de
(A) 33 à 50.
(B) 51 à 65.
(C) 66 à 72.
(D) 73 à 80.

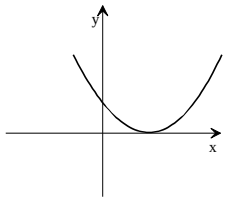
**05.** Seja f uma função real de variável real definida por f(x) = $x^2$ + c, c > 0 e c $\in$ R, cujo gráfico é:

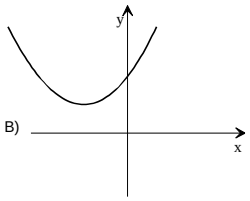


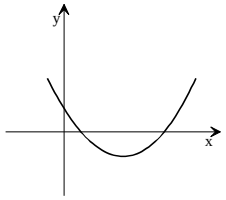


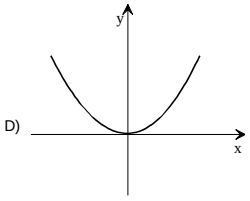
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

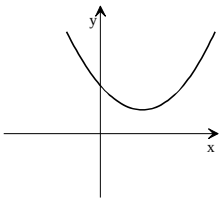
Então o gráfico que melhor representa f(x + 1) é:

A)



B)



C)



D)



E)



**06.** Seja $f$ a função real dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a>0$. Determine $a$, $b$ e $c$ sabendo que as raízes da equação $|f(x)|=12$ são $-2$, $1$, $2$ e $5$.

(A) a = 1; b = - 6; c = 17
(B) a = 1; b = 6; c = - 17
(C) a = - 1; b = 6; c = 17
(D) a = - 1; b = - 6; c = 17
(E) a = 1; b = - 6; c = - 17

**07. (Docente I/Pref.Coronel Fabricio)** Seja uma função do segundo grau $f(x)=x^2+ax+b$, cujos zeros são números naturais consecutivos. Considerando que f(1)=2 o produto de a.b, é igual a

(A) -40
(B) -30
(C) -20
(D) -10
(E) 10

**08. (Professor/Pref. de Itaboraí)** Seja *f* a função que associa a cada número real *x* o menor elemento do conjunto {(1 - x).(2x + 4)}.O valor máximo de f(x) é:

(A) -1
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

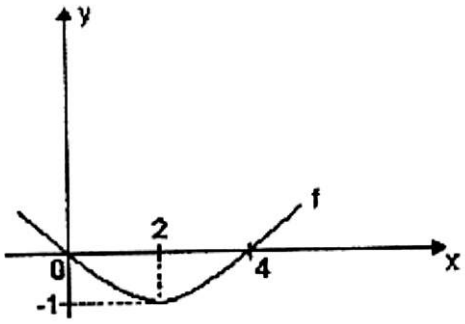
**09. (TÉC.JUD./FCC)** Uma empresa de prestação de serviços usa a expressão $p(x) = - x^2 + 80x + 5$, para calcular o preço, em reais, a ser cobrado pela manutenção de x aparelhos em um mesmo local. Nessas condições, a quantia máxima a ser cobrada por essa empresa é:

(A) R$ 815,00
(B) R$ 905,00
(C) R$ 1215,00
(D) R$ 1605,00


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(E) R$ 1825,00

**10. (CEF)** Seja a função do 2º grau representada no gráfico abaixo:




Essa função é dada por:
(A) ¼ $x^2$ + x
(B) – $x^2$ + 4x
(C) ¼ $x^2$ – x
(D) ½ $x^2$ - 2x

**Respostas**

**01. Resposta: A.**
$h(3) = -3 \cdot (3)^2 + 15 \cdot 3 = -27 + 45 = 18$
A bala atingirá 18 metros.

**02. Resposta: A.**
As raízes são -1 e 3
Sendo função do 2º grau: - ($x^2$ - Sx + P) = 0 ; (concavidade pra baixo a < 0)
-$x^2$ + Sx – P = 0
S = - 1 + 3 = 2
P = - 1·3 = - 3
$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$

$h_{triângulo} = V_y = -\frac{\Delta}{4a}$
$h_{triângulo} = 4$

Base: -1 até 0 e 0 até 3
Base: 1 + 3 = 4

$A_{triÂngulo} = b \cdot \frac{h}{2} = 4 \cdot \frac{4}{2} = 8cm^2$

**03. Resposta: B.**
- $2x^2$ + 4x + 16 = 0 ; a = - 2 , b = 4 , c = 16
$\Delta = 16 + 128 = 144$

$x = \frac{-4 \pm 12}{-4}$

$x_1 = -2$
$x_2 = 4$

$ax^2 + bx + c$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$x = xm = -\frac{b}{2a} = 4$

$-b = 8a$

A soma das raízes é –b/a

$-\frac{b}{a} = 8$

Se já sabemos que uma raiz é 1:

$1 + x_Q = 8$

$x_Q = 7$

**04. Resposta: B.**

Vamos lá, o lucro total é dado pelo produto das funções, pois cada unidade de um lucro L(x) e eles vendem Q(x) unidades, então: Lucro total= L(x) . Q(x) = (x - 5)(120 - x) = 120x - x² - 600 + 5x = -x² + 125x - 600 essa é uma função do segundo grau e como o coeficiente do x² é negativo ela admite um valor máximo e como queremos saber o preço de venda de x que admite um lucro máximo calculamos o x do vértice:

$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-125}{2.(-1)} = \frac{-125}{-2} = 62{,}5$

O valor de 62,5 esta entre o intervalo de 51 à 65.

**05. Resposta: B.**

A questão requer habilidade no uso de gráficos de funções quadráticas.

f(x + 1) = (x + 1)² + c = x² + 2x + 1 + c.

O discriminante $\Delta = 4 - 4\,(1 + c) = -4c$ é menor que zero.

$xv = \frac{-b}{2.a} = \frac{-2}{2.1} = -1$

$yv = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-(-4c)}{4.1} = c$

Por isso, o gráfico que melhor representa f(x + 1) está na alternativa B.

**06. Resposta: A.**

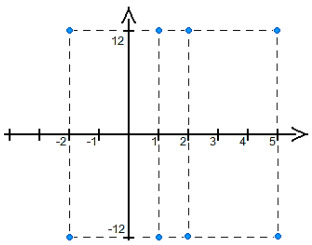
Começamos interpretando as informações dadas a respeito de $f(x)$.

Se $-2$ é raiz de $|f(x)| = 12$, então temos que $|f(-2)| = 12$ e isso implica que $f(-2)$ vale $12$ ou $-12$.

Com esse mesmo raciocínio vemos que $f(1)$ também só pode valer $12$ ou $-12$.

Isso também acontece para $f(2)$ e $f(5)$ (todas as raízes de $|f(x)| = 12$).

Assim, podemos desenhar estas possibilidades em um gráfico cartesiano:

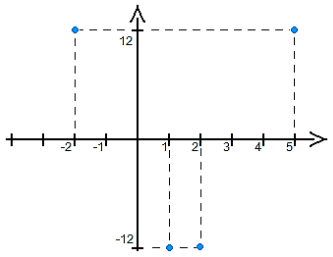



Os pontos assinalados em azul na figura acima são as possibilidades descritas anteriormente. Agora, para desenhar uma parábola nestes pontos, note que não podemos escolher todos igual a 12. Pois, assim, teríamos quatro pontos com mesmo valor de Y, e em uma parábola só é possível ter dois pontos com mesma ordenada.

Veja que a única configuração que poderia gerar uma parábola com concavidade para cima (pois o enunciado diz que a > 0), é como mostrado abaixo:



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




Com esta constatação, temos as informações:

$$f(-2)=12$$
$$f(1)=-12$$
$$f(2)=-12$$
$$f(5)=12$$

E, agora, substituindo estas quatro informações na equação dada no enunciado $f(x)=ax^2+bx+c$, podemos montar um sistema para descobrir a, b e c.

Efetuando os cálculos:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=12 \\ a+b+c=-12 \\ 4a+2b+c=-12 \\ 25a+5b+c=12 \end{cases}$$

Fazemos a terceira equação menos a primeira:

$$4b=-24$$
$$b=\frac{-24}{4}$$
$$b=-6$$

Agora substituímos este valor de b na segunda e na quarta equações:

$$\begin{cases} a-6+c=12 \\ 25a+5(-6)+c=12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a+c=18 \\ 25a+c=42 \end{cases}$$

Fazendo, agora, a segunda equação menos a primeira:

$$24a=24$$
$$a=1$$

Agora substituímos este valor de "a" na equação $a+c=18$:

$$1+c=18$$
$$c=17$$

**07. Resposta: B.**

Façamos f(1) = 2

2 = 1 + a + b ➔ a + b = 1

Como as raízes são números naturais consecutivos temos que $x_1 = n$ e $x_2 = n + 1$

Pela propriedade Soma e Produto temos:

S = - a ➔ $x_1 + x_2 = -a$ ➔ $n + n + 1 = -a$ ➔ $-a = 2n + 1 .(-1)$ ➔ $a = -2n - 1$

P= b ➔ $x_1 .x_2 = b$ ➔ $n.(n - 1) = b$ ➔ $b = n^2 + n$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Como a + b = 1, temos:
- $2n - 1 + n^2 + n = 1$ ➔ $n^2 - n - 2 = 0$
S = 1/1 = 1 ➔ dois números que somados de 1 ➔ 2 - 1 = 1
P = -2/1 = - 2 ➔ dois números que multiplicados de -2 ➔ 2.(-1) = - 2
Logo $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$
Como o enunciado fala de números naturais, descartamos o - 1.
As raízes naturais consecutivas: n = 2 e n + 1 = 3
As soma das raízes S = a = - 2n - 1 ➔ - 2.2 - 1 = - 5 ou 2 + 3(soma das raízes)
O produto é P = b = $n^2 + n$ ➔ $(2)^2 + 2$ ➔ 4 + 2 = 6 ou 2.3 (produto das raízes)
Calculando o que o enunciado pede : a.b = (-5).6 = -30

**08. Resposta: C.**
Vamos resolver a função dada por f(x)=(1 – x).(2x + 4) ➔ $f(x) = 2 - 2x^2$ , como o valor de *a* é negativo, temos que a concavidade é para baixo, se procuramos o valor máximo, procuramos o valor do *y* do vértice, dado pela fórmula:

$$yv = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \frac{-(b^2-4ac)}{4a} \rightarrow \frac{-(0^2-4.(-2).2)}{4.(-2)} \rightarrow \frac{-(16)}{-8} \rightarrow 2$$

**09. Resposta: D.**
Como queremos o máximo, sabemos que utilizaremos os valores dos vértices($y_v$), dado por: (a = - 1, b = 80 , c = 5)

$$yv = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \frac{-(b^2-4ac)}{4a} \rightarrow \frac{-((80)^2-4.(-1).5)}{4.(-1)} \rightarrow \frac{-(6400+20)}{-4} \rightarrow 1605$$

Logo, a quantia máxima a ser cobrada é de R$ 1605,00.

**10. Resposta: C.**
A forma geral de uma função do segundo grau é f(x)= y = $ax^2 + bx + c$
Sabemos (do gráfico acima) que 0 e 4 são raízes da equação(onde os valores se anulam),temos que:
- $0 = a . (0) + b . (0) + c$, donde retiramos o valor de 'c': c = 0. Este ponto também poderia ter sido retirado diretamente do gráfico, pois 'c' é o ponto em que a curva corta o eixo y.
- $0 = a. (4)^2 + b . (4)$, ou seja: 16a + 4b = 0 (equação 1)
- Uma outra equação poderá ser retirada a partir do vértice da parábola:
$-1 = a. (2)^2 + b . (2)$, ou: 4a + 2b = -1 (equação 2)
Com as equações 1 e 2 acima, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = 0\ (:-4) \\ 4a + 2b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - b = 0 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow$$ Somando obtemos b = - 1 , substituímos em uma expressão:

4a + 2.(-1) = - 1 ➔ 4a - 2 = - 1 ➔ 4a = -1 + 2 ➔ 4a = 1 ➔ $a = \frac{1}{4}$
Montando a expressão da função temos:

$$f(x) = y = \frac{1}{4}x^2 - x$$

## INEQUAÇÃO PRODUTO E QUOCIENTE

### ➔ Inequação Produto

Chama-se inequação-produto toda inequação do tipo:

$$\boldsymbol{f(x).g(x) < 0,\ \ f(x).g(x) \leq 0,\ \ f(x).g(x) > 0\ ou\ f(x).g(x) \geq 0}$$

Resolver uma inequação produto consiste em encontrar os valores de x que satisfazem a condição estabelecida pela inequação. Para isso devemos estudar o sinal de cada função e também do conjunto solução:

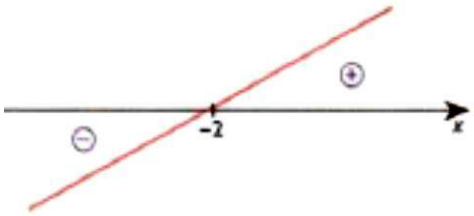
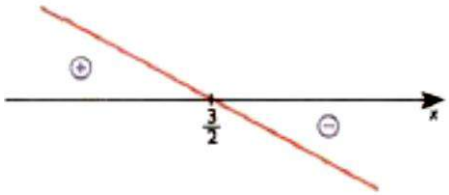

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplos:**

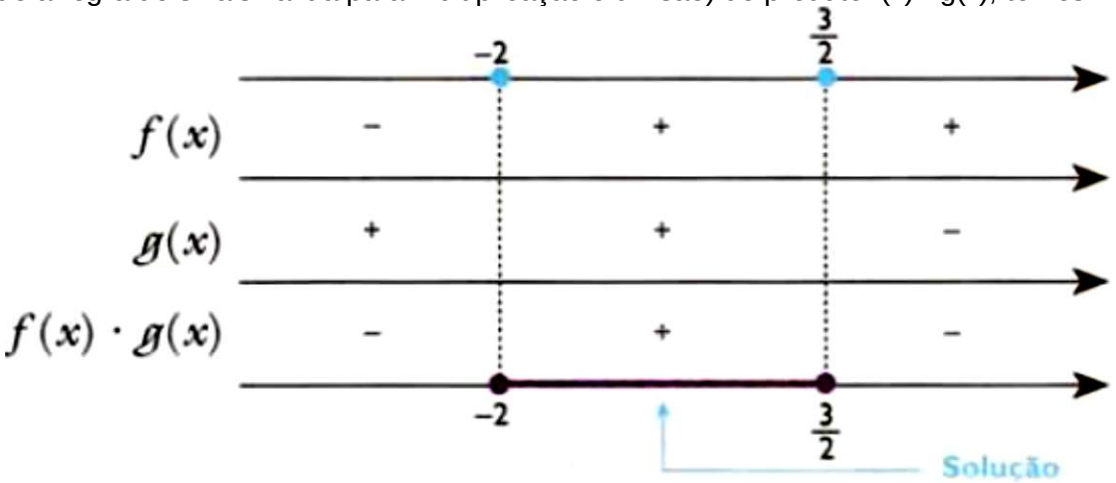
**1)** Resolver a inequação (x + 2) . (-2x + 3)≥0.

**Método para resolução:**

**1º)** Vamos resolver cada função (encontrar o zero de cada função):

| **f(x) = x + 2** | **g(x) = -2x + 3** |
|---|---|
| x + 2 = 0 ➔ x = -2<br>Como o valor de **a > 0**, logo a função é crescente.<br>Sinais de $f(x)$<br>  <br> | -2x + 3 = 0 ➔ -2x = -3 ➔ x = -3 / -2 ➔ x = 3/2<br>Como o valor de **a < 0**, logo a função é decrescente.<br>Sinais de $g(x)$<br>  <br> |

**2º)** Colocamos em um chamado quadro de sinais, cada função e resolvemos através do sinal (aplicando a regra do sinais válida para multiplicação e divisão) do produto f(x) . g(x), temos:



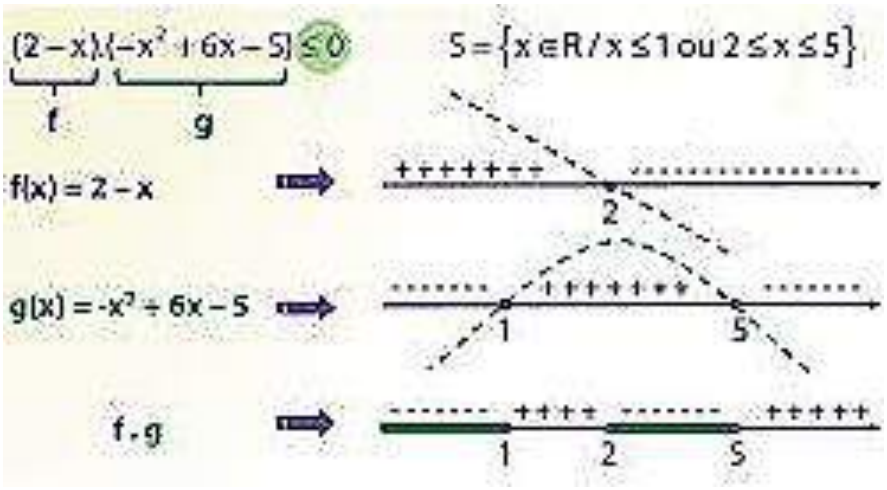

**Solução:** $S = \{x \in R | -2 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$




**Observar os intervalos, se são aberto (< ou >) / fechados (≤ ou ≥) , para que a resolução satisfaça a solução.**

**2)** (2 - x) . ($-x^2$ + 6x - 5) ≤ 0


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




➔ **Inequação Quociente**

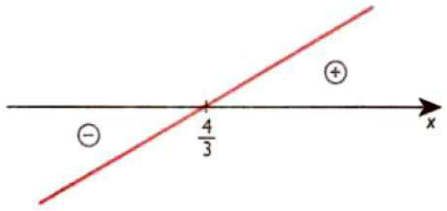
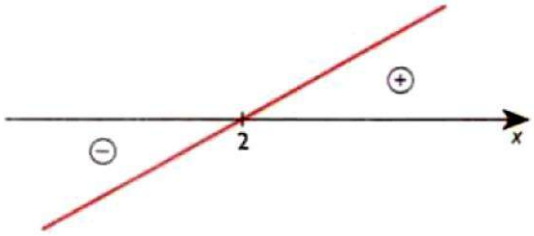
Chama-se inequação-quociente toda inequação do tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \ ou \ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \ , com \ g(x) \neq 0.$$

A regra de resolução e sinais da inequação produto é a mesma para quociente.

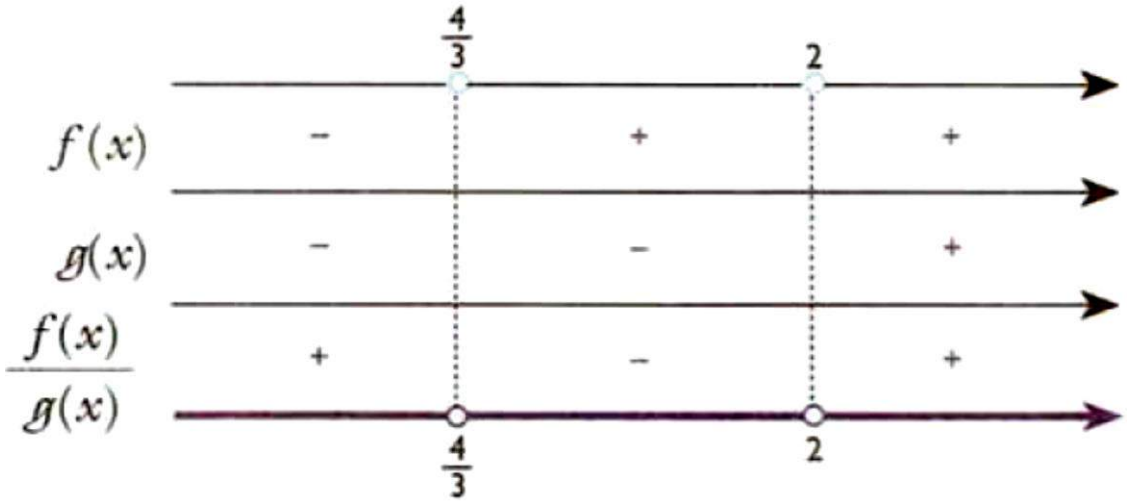
**Exemplos:**

**1)** $\frac{3x-4}{x-2} > 0$

| **f(x) = 3x - 4** | **g(x) = x - 2** |
|---|---|
| 3x – 4 = 0 ➔ 3x = 4 ➔ x = 4/3<br>Como o valor de **a > 0**, logo a função é crescente.<br>Sinais de $f(x)$<br>  <br> | x – 2 = 0 ➔ x = 2<br>Como o valor de **a > 0**, logo a função é crescente.<br>Sinais de $g(x)$<br>  <br> |

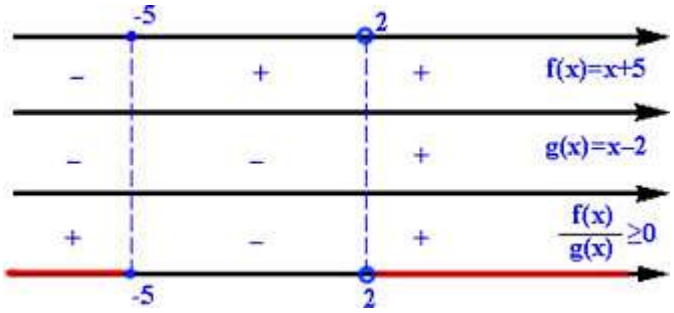
No quadro de sinais:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




2) $\frac{x+5}{x-2} \geq 0$

f(x) = x + 5 = 0 ➔ x = -5
g(x) = x – 2 = 0 ➔ x = 2




Observe que no 2 a “bolinha fica aberta”, pois se incluirmos o mesmo na resolução teremos g(x) = 0, e como por lei de formação, nosso denominador não pode ser zero.

Solução: S= {x ϵ R | x ≤ -5 e x > 2}

**Questões**

**01. (PUC – PR)** Determine a solução da inequação ( x – 2 ) . ( – x² + 3x + 10 ) > 0, em relação ao conjunto dos números reais.

**02. (FGV–SP)** Determine os valores reais de x para os quais (x² – 8x +12) . (x² – 5x) < 0.

**03. (PRODAM/AM – Assistente – FUNCAB/2014)** O maior número inteiro que pertence ao conjunto

$$\frac{x^2+9x+18}{-x-3} > 0$$

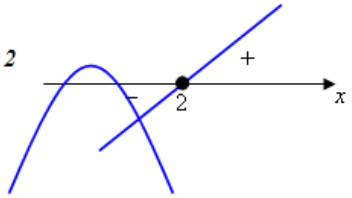
Solução da inequação é:
(A) 0
(B) -1
(C) - 3
(D) - 6
(E) - 7


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Respostas

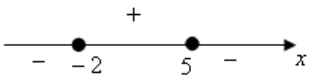
**01.**

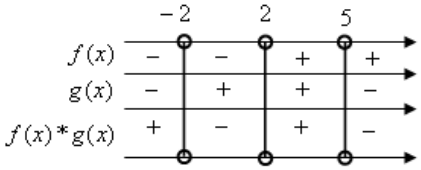
$f(x) = x - 2$
$f(x) = 0$
$x - 2 = 0$
$x = 2$




$g(x) = -x^2 + 3x + 10$

$\Delta = 49$
$x' = -2$ ou $x'' = 5$

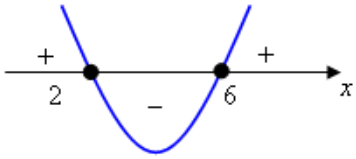


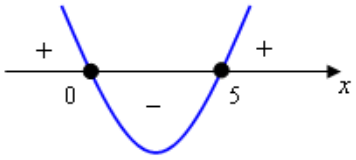

Solução: $\{x \in R / x < -2 \text{ ou } 2 < x < 5\}$

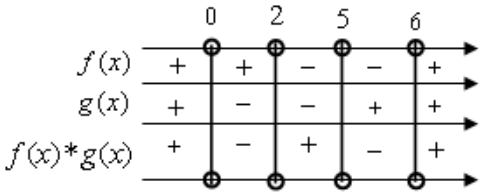
**02.**

$f(x) = x^2 - 8x + 12$
$\Delta = 16$
$x' = 2$
$x'' = 6$




$g(x) = x^2 - 5x$
$x * (x - 5) = 0$
$x' = 0$
$x'' = 5$




Solução: $\{x \in R / 0 < x < 2 \text{ ou } 5 < x < 6\}$

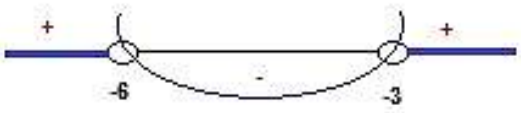
**03. Resposta: E.**

Resolvendo: f(x) = $x^2 + 9x + 18$ ➔

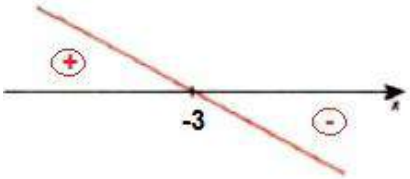
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.1.18}}{2.1} \rightarrow \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} \rightarrow \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2} \rightarrow \frac{-9 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{-9 + 3}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad ou \quad x'' = \frac{-9 - 3}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

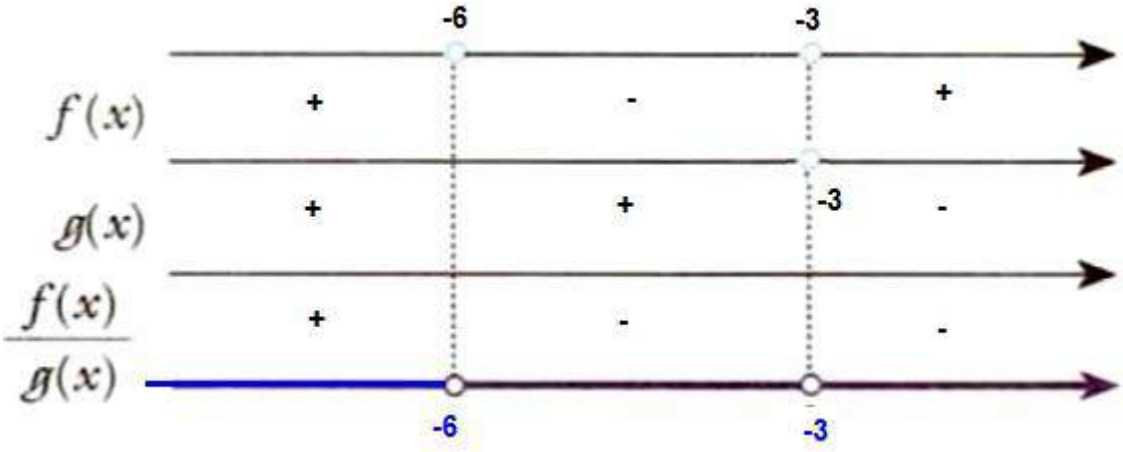

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




g(x) = -x – 3 ➔ -x – 3 = 0 ➔ -x = 3 .(-1) ➔ x = - 3




No quadro de sinais:




**Solução:** S = {x ϵ R | x < -6}, então o inteiro maior da resolução é -7, pois -6 não faz parte do intervalo.



## 4) Função Modular: - O conceito e propriedades do módulo de um número real; - Definição, gráfico, domínio e imagem da função modular; - Equações modulares; - Inequações modulares.

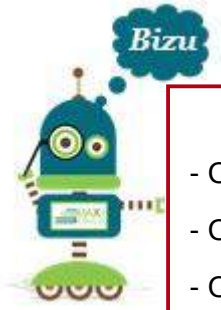
### FUNÇÃO MODULAR

Chama-se função modular a função f: R → R, definida por: **f(x) = |x|**.
Por definição:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}, temos: f(x) = |x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

A função modular é definida por duas sentenças: f(x) = x, se x≥0 e f(x) = -x, se x<0.

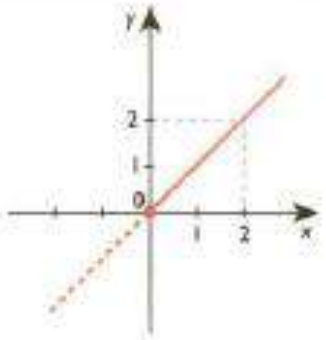
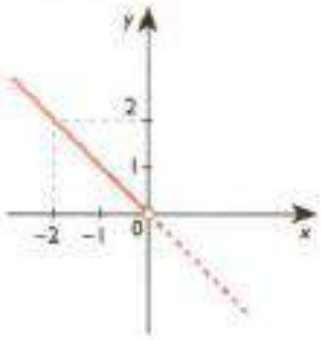
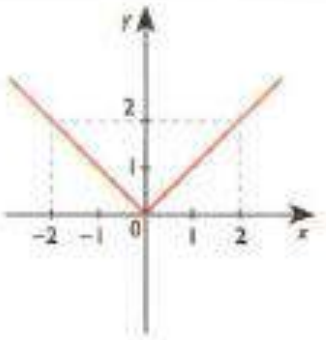

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Módulo de um número**

- O módulo de um número real **não negativo** é **igual ao próprio número**;
- O módulo de um número real **negativo** é igual ao **oposto desse número**;
- O módulo de **um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero**: $|x| \geq 0$, para todo x.

**- Construção do Gráfico da f(x) = |x|.**

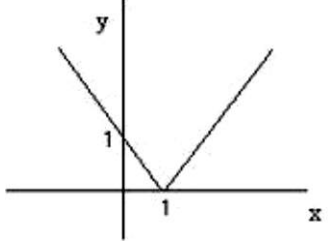
| $f(x) = x$, se $x \geq 0$ | $f(x) = -x$, se $x < 0$ | $f(x) = \|x\|$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| O gráfico é uma semi-reta fechada com origem no ponto $O(0, 0)$. Ela é bissetriz do 1º quadrante. | O gráfico é uma semi-reta aberta com origem no ponto $O(0, 0)$. Ela é bissetriz do 2º quadrante. | O gráfico é a reunião das duas semi-retas. |

**- Imagem de uma função Modular**

O conjunto imagem da função Modular é $R_+$, isto é, a função assume valores reais **não negativos**.

**Questões**

**01. (PREFEITURA MUNICIPAL DE SÃO BORJA/RS – Agente Administrativo Auxiliar/Agente Operacional da Saúde/ Monitor – MS CONCURSOS)** Observe a figura:




Este gráfico é representação de uma função:
(A) Quadrática.
(B) Exponencial.
(C) Modular.
(D) Afim.

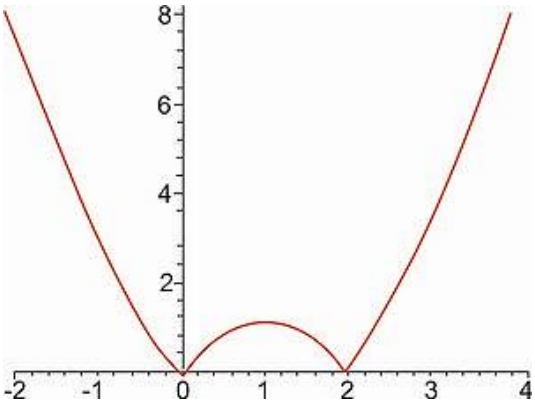

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**02. (UFJF)** O número de soluções negativas da equação $| 5x-6 | = x^2$ é:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

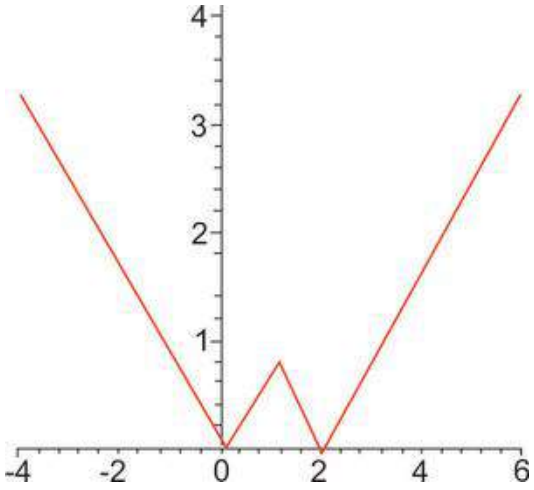
**03. (UTP)** As raízes reais da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$ são tais que:
(A) a soma delas é – 1.
(B) o produto delas é – 6.
(C) ambas são positivas.
(D) o produto delas é – 4.
(E) n.d.a.

**04. (UFCE)** Sendo $f(x) = |x^2-2x|$, o gráfico que melhor representa f é:

(A)

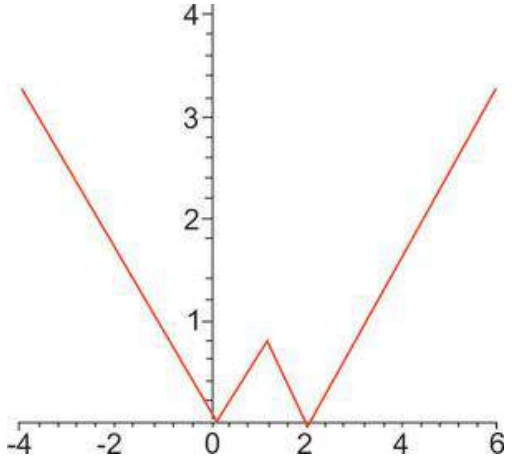



(B)

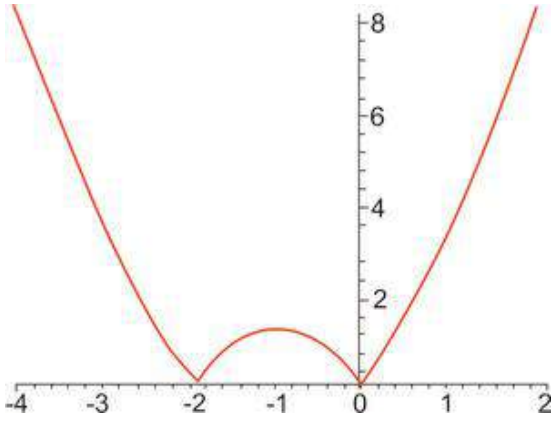




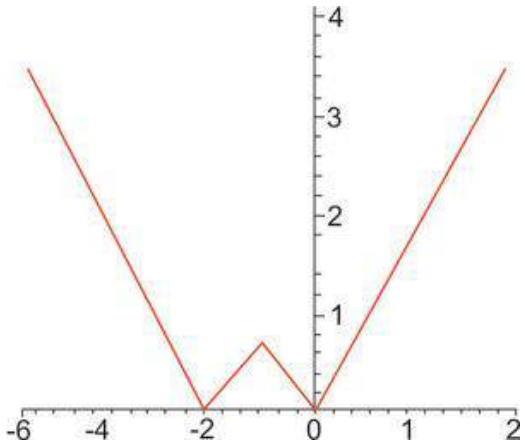
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




(C)




(D)




**Respostas**

**01. Resposta: C.**
O gráfico é simétrico o caracteriza a uma função modular.

**02. Resposta: B.**
Temos então que $5x-6 = x^2$ ou $5x-6 = -x^2$. Assim, temos que resolver cada uma dessas equações:
$5x – 6 = x^2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
S = -5 , P = 6
(x - 2)(x - 3) = 0
x = 2 ou x = 3
$5x – 6 = -x^2$
$x^2 + 5x – 6 = 0$
S = 5, P = -6


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(x + 6)(x - 1) = 0
x = -6 ou x = 1
Assim, teremos uma solução negativa: -6.

**03. Resposta: D.**
Aqui, usamos um recurso muito comum na Matemática, chame |x| de y. Então a equação ficará $y^2 + y – 6 = 0$. Resolvendo-a:
$y^2 + y – 6 = 0$
S = 1, P = -6
(y + 3)(y - 2) = 0
y = -3 ou y = 2
Assim, |x| = -3 ou |x| = 2. Como não existe módulo negativo, |x| = 2. Então, x = -2 ou x = 2. Portanto, seu produto (2 multiplicado por -2) é igual a 4.

**04. Resposta: A.**
Repare que a função, sem o módulo, é do segundo grau. Portanto, as letras c e d não podem ser. A diferença entre as alternativas a e b são as raízes, com isso, basta calcularmos:
$|x^2-2x| = 0$
$x^2 - 2x = 0$
x (x-2) = 0
x = 0 ou x = 2

## EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES MODULARES

**- Equação modular**

Sua resolução está baseada nas seguintes propriedades:

- Se $|x| = a$ e $a > 0$, então $x = a$ ou $x = -a$.
- Se $|x| = a$ e $a = 0$, então $x = 0$.

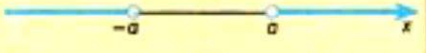
Tendo como conjunto universo: U = R.

**Exemplo:**
Resolver a equação |2x + 1| = 5.
De acordo com as propriedades, temos:
2x + 1 = 5 ➔ 2x = 4 ➔ x = 2 ou
2x + 1 = -5 ➔ 2x = -6 ➔ x = -3
S = {-3,2}.

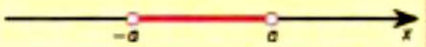
**- Inequação Modular**

A resolução de inequações modulares se baseia nas seguintes propriedades:

$P_1) |x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$; graficamente, temos:




$P_2) |x| < a \iff -a < x < a$; graficamente, temos:




**Exemplo:**

Resolvendo a inequação |2x + 1| > 5.
De acordo com P1, podemos escrever:
2x + 1 < -5 ➔ 2x < -6 ➔ x < -3 (I) ou
2x + 1 > 5 ➔ 2x > 4 ➔ x > 2 (II)
Fazendo a união:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Propriedades:** Sendo **a** um número real positivo e **x** e **y** números reais quaisquer, demonstra-se que:

**a)** $\sqrt{x^2} = |x|$

**b) |x| = a ⇔ x = - a ou x = a**

**c) |x| < a ⇔ - a < x < a**

**d) |x| > a ⇔ x < - a ou x > a**

**e) |x| = | - x|**

**f) $x^2 = |x|^2 = |x^2|$**

**g) |x.y| = |x|.|y|**

**h)** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

**i) |x + y| ≤ |x| + |y|**

## Questões

**01.** Resolver, em R, a equação |2x – 3| = 5.

**02.** Resolver, em R, a inequação |2x – 5| < 3

**03.** Resolver, em R, a inequação $\sqrt{(2x-5)^2} \geq 1$.

**04. (UEL)** Quaisquer que sejam os números reais x e y:
(A) se |x| < |y|, então x < y.
(B) |x.y| = |x|.|y|
(C) |x + y| = |x| + |y|
(D) | - |x|| = - x
(E) se x < 0, então |x| < x

**05. (FEI)** Os valores reais de x que satisfazem a inequação |2x – 1| < 3 são tais que:
(A) x < 2
(B) x > - 1
(C) ½ < x < 2
(D) x > 2


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(E) – 1 < x < 2

**Respostas**

**01.** |2x – 3| = 5

| | | |
|---|---|---|
| 2x – 3 = 5 | ou | 2x – 3 = - 5 |
| 2x = 5 + 3 | | 2x = - 5 + 3 |
| 2x = 8 | | 2x = - 2 |
| x = 8 : 2 | | x = - 2 : 2 |
| x = 4 | | x = - 1 |

V = {- 1, 4}

**02.** |2x – 5| < 3
Pela propriedade c:

- 3 < 2x – 5 < 3
- 3 + 5 < 2x < 3 + 5
2 < 2x < 8 (dividindo por 2)
1 < x < 4

V = {x ∈ R| 1 < x < 4}

**03.** Pela propriedade a:

$\sqrt{(2x-5)^2} \geq 1$ ➔ |2x – 5| ≥ 1
Pela propriedade d:

| | | |
|---|---|---|
| 2x – 5 ≤ - 1 | ou | 2x – 5 ≥ 1 |
| 2x ≤ - 1 + 5 | | 2x ≥ 1 + 5 |
| 2x ≤ 4 | | 2x ≥ 6 |
| x ≤ 4 : 2 | | x ≥ 6 : 2 |
| x ≤ 2 | | x ≥ 3 |

V = {x ∈ R| x ≤ 2 ou x ≥ 3}

**04. Resposta: B.**
Resolução: teórico, basta observar as propriedades.

**05. Resposta: E.**
|2x – 1| < 3
Pela propriedade c:
- 3 < 2x – 1 < 3
- 3 + 1 < 2x < 3 + 1
- 2 < 2x < 4 (dividindo por 2)
- 1 < x < 2


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



## 5) Função Exponencial: - Gráficos, domínio, imagem e características da função exponencial; logaritmos decimais, característica e mantissa; e as equações e inequações exponenciais.

### FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x um único valor da função f(x). Isto pode ser feito especificando através de uma fórmula um relacionamento gráfico entre diagramas representando os dois conjuntos, e/ou uma regra de associação, mesmo uma tabela de correspondência pode ser construída; entre conjuntos numéricos é comum representarmos funções por seus gráficos, cada par de elementos relacionados pela função determina um ponto nesta representação, a restrição de unicidade da imagem implica em um único ponto da função em cada linha de chamada do valor independente x.

Como um termo matemático, "função" foi introduzido por Leibniz em 1694, para descrever quantidades relacionadas a uma curva; tais como a inclinação da curva ou um ponto específico da dita curva. Funções relacionadas à curvas são atualmente chamadas funções diferenciáveis e são ainda o tipo de funções mais encontrado por não-matemáticos. Para este tipo de funções, pode-se falar em limites e derivadas; ambos sendo medida da mudança nos valores de saída associados à variação dos valores de entrada, formando a base do cálculo infinitesimal.

A palavra função foi posteriormente usada por Euler em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos; i.e:y = F(x). Ampliando a definição de funções, os matemáticos foram capazes de estudar "estranhos" objetos matemáticos tais como funções que não são diferenciáveis em qualquer de seus pontos. Tais funções, inicialmente tidas como puramente imaginárias e chamadas genericamente de "monstros", foram já no final do século XX, identificadas como importantes para a construção de modelos físicos de fenômenos tais como o movimento Browniano.

Durante o Século XIX, os matemáticos começaram a formalizar todos os diferentes ramos da matemática. Weierstrass defendia que se construisse o cálculo infinitesimal sobre a Aritmética ao invés de sobre a Geometria, o que favorecia a definição de Euler em relação à de Leibniz (veja aritmetização da análise). Mais para o final do século, os matemáticos começaram a tentar formalizar toda a Matemática usando Teoria dos conjuntos, e eles conseguiram obter definições de todos os objetos matemáticos em termos do conceito de conjunto. Foi Dirichlet quem criou a definição "formal" de função moderna.

***Função Exponencial***

Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 263, o que corresponde a aproximadamente 9 223 300 000 000 000 000 = 9,2233.1018. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido!

A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais, especialmente da função y = 2x.

As funções exponenciais são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Definição**

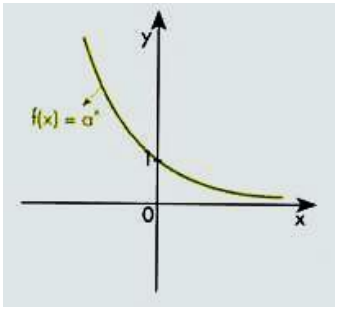
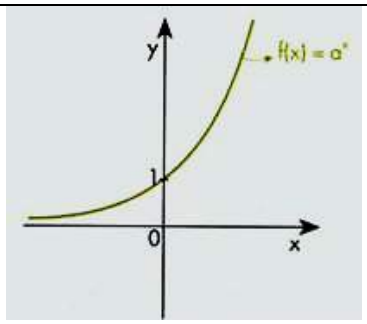
A função exponencial é a definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, isto é:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Podemos concluir, então, que a função exponencial é definida por:

$$y = a^x, \ com \ 1 \neq a > 0$$

➔ **Gráficos da Função Exponencial**

| **Função exponencial 0 < a < 1** | **Função exponencial a > 1** |
|---|---|
|  |  |
| - Domínio = IR<br>- Contradomínio = $IR^+$<br>- f é injetora<br>- f(x) > 0 , $\forall$ x Є IR<br>- f é continua e diferenciável em IR<br>- A função é estritamente decrescente.<br>- $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$<br>- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$<br>- y = 0 é assimptota horizontal | - Domínio = IR<br>- Contradomínio = $IR^+$<br>- f é injectiva<br>- f(x) > 0 , $\forall$ x Є IR<br>- f é continua e diferenciável em IR<br>- A função é estritamente crescente.<br>- $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$<br>- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$<br>- y = 0 é assimptota horizontal |

➔ **Propriedades da Função Exponencial**

Se a, x e y são dois números reais quaisquer e k é um número racional, então:

- $a^x \ a^y = a^{x+y}$
- $a^x / a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x.y}$
- $(a \ b)^x = a^x \ b^x$
- $(a / b)^x = a^x / b^x$
- $a^{-x} = 1 / a^x$

Estas relações também são válidas para exponenciais de base e (e = número de Euller = 2,718...)

- $y = e^x$ se, e somente se, $x = \ln(y)$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{x+y} = e^x.e^y$
- $e^{x-y} = e^x/e^y$
- $e^{x.k} = (e^x)^k$

➔ **A Constante de Euler**

Existe uma importantíssima constante matemática definida por

e = exp(1)

O número e é um número irracional e positivo e em função da definição da função exponencial, temos que:

Ln(e) = 1

Este número é denotado por e em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), um dos primeiros a estudar as propriedades desse número.

O valor deste número expresso com 40 dígitos decimais, é:



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**e = 2,71828182845904523536028747135266249775 7**

Se x é um número real, a função exponencial exp(.) pode ser escrita como a potência de base e com expoente x, isto é:

$e^x = \exp(x)$

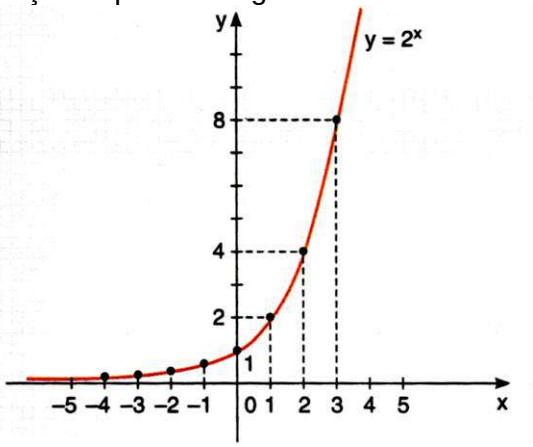
➔ **Construção do Gráfico de uma Função Exponencial**

Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = 2^x$

Vamos atribuir valores a x, para que possamos traçar os pontos no gráfico.

| x | y |
|---|---|
| –3 | $\frac{1}{8}$ |
| –2 | $\frac{1}{4}$ |
| –1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |




## Questões

**01. (Corpo de Bombeiros Militar/MT – Oficial Bombeiro Militar – COVEST – UNEMAT/2014)** As funções exponenciais são muito usadas para modelar o crescimento ou o decaimento populacional de uma determinada região em um determinado período de tempo. A função $P(t) = 234 \,.\, (1{,}023)^t$ modela o comportamento de uma determinada cidade quanto ao seu crescimento populacional em um determinado período de tempo, em que P é a população em milhares de habitantes e t é o número de anos desde 1980.

Qual a taxa média de crescimento populacional anual dessa cidade?

(A) 1,023%
(B) 1,23%
(C) 2,3%
(D) 0,023%
(E) 0,23%

**02. (Polícia Civil/SP – Desenhista Técnico-Pericial – VUNESP/2014)** Uma população P cresce em função do tempo t (em anos), segundo a sentença $\boldsymbol{P = 2000 \,.\, 5^{0{,}1\,.t}}$. Hoje, no instante t = 0, a população é de 2 000 indivíduos. A população será de 50 000 indivíduos daqui a

(A) 20 anos.
(B) 25 anos.
(C) 50 anos.
(D) 15 anos.
(E) 10 anos.

## Respostas

**01. Resposta: C.**

$P(t) = 234 \,.\, (1{,}023)^t$

Primeiramente, vamos calcular a população inicial, fazendo t = 0:

$P(0) = 234 \,.\, (1{,}023)^0 = 234 \,.\, 1 = 234$ mil

Agora, vamos calcular a população após 1 ano, fazendo t = 1:

$P(1) = 234 \,.\, (1{,}023)^1 = 234 \,.\, 1{,}023 = 239{,}382$

Por fim, vamos utilizar a Regra de Três Simples:

População %

234 ---------- 100


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

239,382 ---------- x
234.x = 239,382 . 100
x = 23938,2 / 234
x = 102,3%
102,3% = 100% (população já existente) + 2,3% (crescimento)

**02. Resposta: A.**

$\mathbf{50000 = 2000 \,.\, 5^{0,1\,.t}}$

$\mathbf{5^{0,1\,.t} = \frac{50000}{2000}}$

$\mathbf{5^{0,1\,.t} = 5^2}$

Vamos simplificar as bases (5), sobrando somente os expoentes. Assim:
0,1 . t = 2
t = 2 / 0,1
t = 20 anos

## LOGARITMO

Sendo **a** um número real, positivo e diferente de 1 e **N** um número real positivo, chama-se logaritmo de **N** na base **a** o número ao qual devemos elevar a base **a** para obtermos **N**.

**Definição**: $\log_a N = x \iff a^x = N$, onde:

- **N** é chamado de logaritmando e N > 0.
- **a** é chamado de base e a > 0 e a ≠ 1.

Exemplo: $\log_8 64 = 2 \iff 8^2 = 64$

**- Casos particulares**:

1) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

2) $\log_a a^n = n$, pois na = na

3) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

**- Propriedades dos logaritmos**

I) Logaritmo do Produto: o logaritmo de um produto é igual à soma de logaritmos.

$$\text{Log}_a M.N = \log_a M + \log_a N$$

II) Logaritmo da Divisão: o logaritmo da divisão é igual à subtração de dois logaritmos.

$$\text{Log}_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

III) Logaritmo da Potência: o expoente passa multiplicando.

$$\text{Log}_a N^m = m.\log_a N$$

**- Mudança de Base**

Em alguns casos é necessário efetuar uma mudança na base que foi dada, para isto temos a seguinte fórmula:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

**- Mantissa**

Não há nenhum processo estabelecido para se obter a mantissa, ela deve ser concedida ou encontrada na tabela de Tábua de Logaritmos.

**Propriedade:**

A diferença entre logaritmos decimais de dois números está na posição da vírgula, pois a mantissa é a mesma.

**Exemplo:**

Sabendo que log 13 = 1.1139, agora vamos calcular o logaritmo decimal de: 0,013; 0,13; 1,3; 130; 13000.

Resolução:

| N | Característica | Mantissa | log N |
|---|---|---|---|
| 0,013 | $-2$ | 0.1139 | log 0,013 = $-2$ + 0.1139 = $\overline{2}$,1139 |
| 0,13 | $-1$ | 0.1139 | log 0, 13 = $-1$ + 0.1139 = $\overline{1}$,1139 |
| 1,3 | 0 | 0.1139 | log 1,3 = 0 + 0.1139 = 0,1139 |
| 130 | 2 | 0.1139 | log 130 = 2 + 0.1139 = 2,1139 |
| 13000 | 4 | 0.1139 | log 13000 = 4 + 0.1139 = 4,1139 |

## Questões

**01. (CPTM - Médico do trabalho – Makiyama/2011)** Uma bactéria se espalhava no ambiente em que estava seguindo uma função logarítmica $f(x) = \log_2 x$(x >1), em que x é o tempo medido em minutos e F(x) é a área que possui a presença da bactéria em m². Após 32 minutos, a área ocupada será de:

(A) 1 m².
(B) 2 m².
(C) 3 m².
(D) 4 m².
(E) 5 m².

**02. (BRB – Escriturário – CESPEUnB/2011)** Um estudo constatou que a população de uma comunidade é expressa pela função P(t) = 5.000$e^{0,18t}$, em que P(t) é a população t anos após a contagem inicial, que ocorreu em determinado ano, e considerado t = 0. Com referência a esse estudo e considerando 1,2 e 1,8 como os valores aproximados para $e^{0,18}$e ln 6, respectivamente, julgue o item a seguir. A população será de 30.000 indivíduos 5 anos após a contagem inicial.

(certo) (errado)

**03. (BRB – Escriturário – CESPEUnB/2011)** Um estudo constatou que a população de uma comunidade é expressa pela função P(t) = 5.000$e^{0,18t}$, em que P(t) é a população t anos após a contagem inicial, que ocorreu em determinado ano, e considerado t = 0. Com referência a esse estudo e considerando1,2 e 1,8 como os valores aproximados para $e^{0,18}$e ln 6, respectivamente, julgue o item a seguir.

Um ano após a contagem inicial, a população da comunidade aumentou em 20%.

(certo) (errado)

**04. (SAEB-BA – Professor – Matemática – CESPE/2011)**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



Pablo Picasso. **Nude, green leaves and bust.**

A obra acima foi pintada por Pablo Picasso em um único dia do ano de 1932. Em 1951, a tela foi adquirida por US$ 20 milhões e, em maio de 2010, foi vendida, em Nova Iorque, em um leilão que durou apenas 9 minutos, por US$ 95 milhões, sem incluir as comissões.

A respeito dessa situação, considere que o investimento tenha evoluído a uma taxa de juros R, compostos continuamente, de acordo com o modelo $C(t) = C_0 e^{Rt}$, em que C(t) é o valor da tela, em milhões de dólares, t anos após 1951. Nesse caso, assumindo 1,56 como o valor aproximado de ln(4,75), é correto afirmar que a taxa de juros de tal investimento foi

(A) superior a 5% e inferior a 10%.
(B) inferior a 5%.
(C) superior a 20%.
(D) superior a 10% e inferior a 20%.

**05. (CBM/ES – Oficial Bombeiro Militar Combatente – CESPE/2011)** A soma dos logaritmos na base 10 de 2 números é 6, e o dobro de um desses logaritmos é 4. Com relação a esses números, julgue o item a seguir.

O produto desses números é igual a 1 milhão.

(certo) (errado)

**06. (CBM/ES - Oficial Bombeiro Militar Combatente – CESPE/2011)** A soma dos logaritmos na base 10 de 2 números é 6, e o dobro de um desses logaritmos é 4. Com relação a esses números, julgue o item a seguir.

A soma desses números é igual a 2.000.

(certo) (errado)

**07. (EsSA - Sargento - Conhecimentos Gerais - Todas as Áreas – EB/2011)** Se $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x^2$, com x real e maior que zero, então o valor de f(f(5)) é:

(A) $\frac{2log2}{1+log2}$

(B) $\frac{log2}{log2+2}$

(C) $\frac{5log2}{log2+1}$

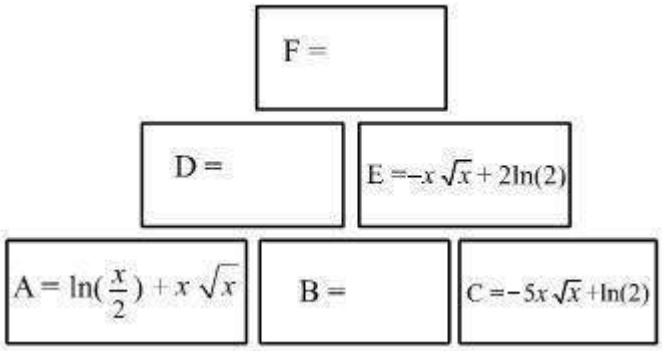
(D) $\frac{8log2}{1-log2}$

(E) $\frac{5log2}{1-log2}$

**08. (PREVIC – Técnico Administrativo – Básicos – CESPEUnB/2011)** Com o objetivo de despertar mais interesse de seus alunos para a resolução das expressões algébricas que com frequência ocorrem nos problemas, um professor de matemática propôs uma atividade em forma de desafio. Os estudantes deveriam preencher retângulos dispostos em forma triangular de modo que cada retângulo fosse o


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

resultado da soma das expressões contidas nos dois retângulos imediatamente embaixo dele, exceto para aqueles da base do triângulo. Portanto, na figura a seguir, D = A + B, E = B + C e F = D + E.




Com base nos dados acima, julgue o item que se segue.

Os estudantes que preencheram corretamente os retângulos em branco encontraram F = ln (4x) + 4x $\sqrt{x}$.

(certo) (errado)

**09. (Petrobras – Engenheiro de Petróleo Júnior – CESGRANRIO/2011)** Dado $\log_3(2) = 0{,}63$, tem-se que $\log_6(24)$ é igual a

(A) 1,89.
(B) 1,77.
(C) 1,63.
(D) 1,51.
(E) 1,43.

**10. (Pref. Chupinguaia/RO - Professor – Matemática – MSCONCURSOS/2011)** O conjunto solução da equação $\log (x^2 - 8) = 0$:

(A) ∅.
(B) {0}.
(C) {– 3, 3}.
(D) {– 9, 9}.

## Respostas

**01. Resposta: E.**

Fazendo x = 32, temos:

$F(x) = \log_2 32$ , fatorando o 32 temos $2^5$. Então:
$F(x) = \log_2 2^5$ , pela propriedade $\log_a a^n = n$, temos que F(x) = 5 m²

**02. Resposta: CERTO.**

Pelo enunciado que saber o valor de t quando P(t) = 30.000:

P(t) = 30.000

$5.000.e^{0,18t} = 30.000$
$e^{0,18t} = \frac{30.000}{5.000}$

$e^{0,18t} = 6$ , colocando logaritmo (ln) nos dois membros:
$\ln e^{0,18t} = \ln 6$ , pela propriedade $\log_b a^n = n.\log_b a$

0,18t = 1,8 ➔ t = 1,8 : 0,18 = 10

**03. Resposta: CERTO.**

Se após u 1 ano houve um aumento de 20% temos 100% + 20% = 120% = 120 : 100 = 1,2. Fazendo t = 1 nós teremos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

P(1) = 1,2.P(0)
$5000.e^{0,18.1} = 5000.e^{0,18.0}$

$e^{0,18} = 1,2.e^0$
1,2 = 1,2 – Certo

**04. Resposta: B.**

Do enunciado: preço em 2010 (final) 95 mi, preço em 1951 (inicial) 20 mi, tempo t = 2010 – 1951 = 59 anos e C(t) é preço final e $C_0$ preço inicial.

$C(t) = C_0.e^{Rt}$
$95 = 20.e^{R.59}$
$95 : 20 = e^{59R}$
$4,75 = e^{59R}$ , neste ponto para calcularmos o valor de R temos que utilizar logaritmo, já que temos a seguinte propriedade $\log_a N^m = m.\log_a N$, então colocaremos logaritmo nos dois membros da equação. E, pelo enunciado, usaremos ln (log. Neperiano de base **e**). Então:

$\ln 4,75 = \ln e^{59R}$
1,56 = 59R
R = 1,56 : 59 = 0,02644 (x100) ➔ R = 2,644%

**05. Resposta: CERTO.**

Sendo x e y os logaritmandos, temos:
$\log x + \log y = 6$
$2.\log x = 4$

Para este exercício só precisamos para soma (1ª equação) e da propriedade que diz: a soma de dois logaritmos é igual ao logaritmo do produto. Então:

$\log x + \log y = 6$ ➔ $\log xy = 6$ ➔ como a base é 10 ➔ $10^6$ = x.y
x.y = 1.000.000

**06. Resposta: ERRADO.**

Sendo x e y os logaritmandos, temos:
$\log x + \log y = 6$
$2.\log x = 4$

$\log x = \frac{4}{2}$ ➔ $\log x = 2$ ➔ $10^2$ = x ➔ x = 100

Do exercício anterior xy = 1.000.000, então:
100.y = 1.000.000 ➔ y = 1.000.000 : 100 ➔ y = 10.000
x + y = 100 + 10.000 = 10.100

**07. Resposta: D.**

f(x) = $\log_{\sqrt{5}} x^2$ calcular f(f(5)), primeiro vamos calcular f(5):

f(5) = $\log_{\sqrt{5}} 5^2 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2.2 = 4$

f(f(5)) = f(4) = $\log_{\sqrt{5}} 4^2 = 2.\log_{\sqrt{5}} 4$, agora usamos a mudança de base $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$, mudando para base 10:

$2.\log_{\sqrt{5}} 4 = 2.\left(\frac{\log 4}{\log \sqrt{5}}\right) = 2.\left(\frac{\log 2^2}{5^{\frac{1}{2}}}\right) = 2.\left(\frac{2.\log 2}{\frac{1}{2}.\log 5}\right) = 2.\left(\frac{2.\log 2}{\frac{1}{2}.\log \frac{10}{2}}\right)$ ➔ lembrando que $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$:

$2.\left(\frac{4.\log 2}{\log 10 - \log 2}\right) = \frac{8.\log 2}{1-\log 2}$

**08. Resposta: CERTO.**

D = A + B ➔ $D = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{x} + B$
E = B + C


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$-x\sqrt{x} + 2.\ln(2) = B - 5x\sqrt{x} + \ln(2)$
$-x\sqrt{x} + 2.\ln(2) + 5x\sqrt{x} - \ln(2) = B$
$B = 4x\sqrt{x} + \ln(2)$

$F = D + E$
$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{x} + B - x\sqrt{x} + 2.\ln(2)$
$F = \ln(x) - \ln(2) + 4x\sqrt{x} + \ln(2) + \ln(2^2)$

$F = 4x\sqrt{x} + \ln(x) + \ln(4)$
$F = \ln(4x) + 4x\sqrt{x}$

**09. Resposta: B.**

Sabemos que $\log_3 2 = 0{,}6$. O log que foi dado está na base 3 e o que pede para calcular na base 6. Primeiro precisamos mudar de base e para isto temos a fórmula $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

$\log_6 24 = \frac{\log_3 24}{\log_3 6} =$

$= \frac{\log_3 2^3.3}{\log_6 2.3} = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3} =$

$= \frac{3.\log_3 2 + 1}{0{,}63 + 1} = \frac{3.0{,}63 + 1}{1{,}63} = \frac{2{,}89}{1{,}63} \cong 1{,}77$

**10. Resposta: C.**

Temos um logaritmo de base 10.

$\log_{10}(x^2 - 8) = 0$ , pela definição de logaritmo, temos:

$10^0 = x^2 - 8$
$1 = x^2 - 8$
$1 + 8 = x^2$
$x^2 = 9$ ➔ $x = \pm\sqrt{9}$ ➔ x = 3 ou x = - 3.

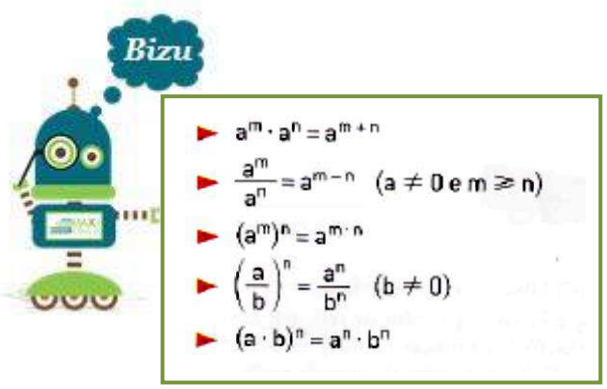
## EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Chama-se equação exponencial, toda equação onde a variável x se encontra no expoente.

**Exemplos:**

$$3^x = 1\,; \quad 5.2^{2x+2} = 20$$

Para resolução precisamos achar os valores da variável que a tornem uma sentença numérica verdadeira. Vamos relembrar algumas das propriedades da potenciação para darmos continuidade:





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Vamos ver o passo a passo para resolução de uma equação exponencial:

**Exemplos:**

**1) $2^x = 8$**

1º) Algumas equações podem ser transformadas em outras equivalentes, as quais possuem nos dois membros potências de mesma base. Neste caso o 8 pode ser transformado em potência de base 2. Fatorando o 8 obtemos $2^3 = 8$

2º) Aplicando a propriedade da potenciação: $2^x = 2^3$ ➔ base iguais, igualamos os expoentes, logo $x = 3$

**2) $2^m \cdot 2^4 = 2^{10}$**

$2^{m+4} = 2^{10}$ ➔ $m + 4 = 10$ ➔ $m = 10 - 4$ ➔ $m = 6$

$S = \{6\}$

**3) $6^{2m-1} : 6^{m-3} = 6^4$**

$6^{(2m-1)-(m-3)} = 6^4$ ➔ $2m - 1 - m + 3 = 4$ ➔ $2m - m = 4 + 1 - 3$ ➔ $m = 5 - 3$ ➔ $m = 2$

$S = \{2\}$

**4) $(3x)^2 + 4.3x + 3 = 0$.**

A expressão dada pode ser escrita na forma:

$(3x)^2 - 4.3x + 3 = 0$

Criamos argumentos para resolução da equação exponencial.

Fazendo $3x = y$, temos:

$y^2 - 4y + 3 = 0$ $y = 1$ ou $y = 3$

Como $3^x = y$, então $3^x = 1 = 0$ ou

$3^x = 3^x = 1$

$S = \{0,1\}$

## Questões

**01. (PM/SP – CABO – CETRO/2012)** O valor de x na equação é $5 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-2} = 408$ é

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

**02. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012)** É correto afirmar que a solução da equação exponencial $3 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ é

(A) S = {0, 1}.

(B) S = {-1, 0}.

(C) S = {-2, 1}.

(D) S = {1/3,1}

**03. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS – COMBATENTE/LOGÍSTICA – TÉCNICA/AVIAÇÃO – EXÉRCITO BRASILEIRO/2012)** Se $5^{x+2}=100$, então $5^{2x}$ é igual a:

(A) 4.

(B) 8.

(C) 10.

(D) 16.

(E) 100.

**04. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS –MÚSICA– EXÉRCITO BRASILEIRO/2012)** O conjunto solução da equação exponencial $4^x-2^x=56$ é:

(A) {-7,8}

(B) {3,8}

(C) {3}



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(D) {2,3}
(E) {8}

**05. (BANESE – TÉCNICO BANCÁRIO I – FCC/2012**) Uma empresa utiliza a função $y = (1,2)^x - 1$ para estimar o volume de vendas de um produto em um determinado dia. A variável y representa o volume de vendas em milhares de reais. A variável x é um número real e representa a quantidade de horas que a empresa dedicou no dia para vender o produto ($0 \leq x \leq 6$). Em um dia em que o volume de vendas estimado foi de R$ 500,00, o valor utilizado para x, em horas, é tal que
(A) $1 < x \leq 2$.
(B) $2 < x \leq 3$.
(C) $3 < x \leq 4$.
(D) $4 < x \leq 5$.
(E) $5 < x \leq 6$.

**06. (PREF. ARARAQUARA/SP – AGENTE DA ADMINISTRAÇÃO DOS SERVIÇOS DE SANEAMENTO – CETRO/2012)** O conjunto solução da equação: $(16^{x-1})^{x+1} = 4^{x^2+x+4}$ é
(A) S = {-2, 3}
(B) S = {-1, 4}
(C) S = {0, 6}
(D) S = {-4, 1}

**07. (TJ/PR - Técnico Judiciário – TJ/PR/2014)** Após o processo de recuperação de uma reserva ambiental, uma espécie de aves, que havia sido extinta nessa reserva, foi reintroduzida. Os biólogos responsáveis por essa área estimam que o número P de aves dessa espécie, t anos após ser reintroduzida na reserva, possa ser calculado pela expressão

$$P = \frac{300}{7 + 8 \times (0,5)^t}$$

De acordo com essa estimativa, quantos anos serão necessários para dobrar a população inicialmente reintroduzida?
(A) 2 anos.
(B) 4 anos.
(C) 8 anos.
(D) 16 anos.

**08. (CREA/PR – ADMINISTRADOR – FUNDATEC/2013)** Se $5^n + 5^{-n} = 10$, o valor de $25^n + 25^{-n}$ é
(A) 100.
(B) 98.
(C) 75.
(D) 50.
(E) 68.

**09. (SANEAR – FISCAL - FUNCAB/2013)** Sendo $2^{3X+1} = 128$ e $y = 5 . x - 3$, o valor de $y^2$ , é:
(A) 49
(B) 36
(C) 25
(D) 16
(E) 9

## Respostas

**01. Resposta: C.**

$3^{x+1}(5 + 3^{-3}) = 408$

$3^{x+1}\left(5 + \frac{1}{27}\right) = 408$

$3^{x+1}\left(\frac{136}{27}\right) = 408$

$3^{x+1} = 408 \cdot \frac{27}{136}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$3^{x+1} = 81$
$3^x . 3 = 81$
$3^x = 27$
$3^x = 3^3$
$x = 3$

**02. Resposta: B.**
$3.(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$
$3^x = y$
$3y^2 - 4y + 1 = 0$
$\Delta = 16 - 12 = 4$
$y = \frac{(4 \pm 2)}{6}$
$y_1 = 1\ y_2 = \frac{1}{3}$
Voltando:
$3^x = 1$
$3^x = 3^0$
$x = 0$
$3^x = \frac{1}{3}$
$3^x = 3^{-1}$
$x = -1$

**03. Resposta: E.**
$\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = 8$

$\frac{(X_2 + X_1)}{X_1 \cdot X_2} = 8$

Sendo x1+x2=-b/a
E x1.x2=c/a
$\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = 8$

-b = 8
b = -8

**04. Resposta: D.**
$5^x \cdot 25 = 100$
$5^x = 4$
$5^{2x} = (5^x)^2 = 4^2 = 16$

**05. Resposta: B.**
$0{,}5 = (1{,}2)^x - 1$
$1{,}5 = 1{,}2^x$
$1{,}2^2 = 1{,}44$
$1{,}2^3 = 1{,}728$
Portanto, $2 < x \leq 3$.

**06. Resposta: A.**
$(4^{2x-2})^{x+1} = 4^{x^2+x+4}$
$(2x-2)(x+1) = x^2+x+4$
$2x^2+2x-2x-2 = x^2+x+4$
$x^2-x-6 = 0$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$\Delta$=1+24=25

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

**07.Resposta: B.**
Vamos verificar quantos animais foram reintroduzidos inicialmente (t = 0):
$P = \frac{300}{7+8\times(0,5)^0} = \frac{300}{7+8\ X\ 1} = \frac{300}{15} = 20$ (população inicial)

População dobrada: 2. 20 = 40
Assim:
$40 = \frac{300}{7+8\times(0,5)^t}$
$40\,.(7+8\,.\,0,5^t) = 300$
$7+8\,.\,0,5^t = \frac{300}{40}$
$8\,.\,0,5^t = 7,5-7$
$0,5^t = \frac{0,5}{8}$
$0,5^t = 0,0625 = 0,5^4$
Excluindo as bases (0,5), temos que t = 4 anos.

**08. Resposta: B.**
Elevando ao quadrado:

$$(5^n + 5^{-n})^2 = 10^2$$
$$5^{2n} + 2.5^n.5^{-n} + 5^{-2n} = 100$$
$$5^n.5^{-n} = 5^0 = 1$$
$$5^{2n} + 5^{-2n} = 100 - 2$$
$$5^{2n} + 5^{-2n} = 98$$

25=$5^2$

**09. Resposta: A.**
128=$2^7$
$2^{3X+1} = 2^7$
3X-1=7
X=2
Y=5.2-3=7
$Y^2=7^2=49$

## INEQUAÇÂO EXPONENCIAL

Assim como as equações exponenciais, as inequações são aquelas cujo a variável se encontra no expoente. São representadas por uma desigualdade > , < , ≤ ou ≥.

**Exemplos:**

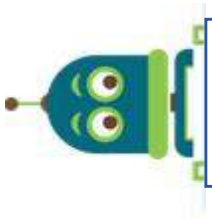
- $2^x \geq 128$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$
- $4^x + 4 > 5\,.\,2^x$
- $\begin{cases} 2^x \leq 8 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Resolução de inequação exponencial**

Resolver uma inequação exponencial é achar valores para variável que satisfaça a sentença matemática.

Antes de resolver uma inequação exponencial, deve-se observar a situação das bases nos dois membros, caso as bases sejam diferentes, reduza-as a uma mesma base e, em seguida, forme uma inequação com os expoentes. Atente-se as regras dos sinais:



**Caso a > 1, mantenha o sinal original.**

**Exemplos:**

**A) $2^x \geq 128$**

Por fatoração, $128 = 2^7$.

$2^x \geq 2^7$ ➔ como as bases são iguais e a > 1, basta formar uma inequação com os expoentes ➔ $x \geq 7$

$S = \{x \in R \mid x \geq 7\}$

$$\boldsymbol{B)}\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

Como as bases são iguais então igualamos os expoentes: x < 2. E como as bases estão compreendidas entre 0 e 1, inverte-se o sinal, logo: x > 2.

$S = \{x \in R \mid x > 2\}$

**C) $4^x + 4 > 5 \cdot 2^x$**

Perceba que, por fatoração, $4^x = 2^{2x}$ e $2^{2x}$ é o mesmo que $(2^x)^2$. Vamos reescrever a inequação, temos:

$(2^x)^2 + 4 > 5 \cdot 2^x$

Chamando $2^x$ de t, para facilitar a resolução, ficamos com:

$t^2 + 4 > 5t$

$t^2 - 5t + 4 > 0$, observe que caímos em uma equação do 2º grau, resolvendo a equação encontramos as raízes da mesma t' = 1 e t'' = 4. Como a > 0, concavidade fica para cima; e isto também significa que estamos procurando valores que tornem a inequação positiva, ficamos com:

t < 1 ou t > 4

Retornando a equação inicial:

$t = 2^x$

$2^x < 1$ ➔ x < 0 ➔ lembre-se que todo número elevado a 1 é igual ao próprio número, e que todo número elevado a zero é igual a 1.

$2^x > 4$ ➔ $2^x > 2^2$ ➔ x > 2.

$S = \{x \in R \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

**Questões**

**01.** A soma das raízes da equação $5^{x^2 - 2x + 1} = 5625$ é:

(A) -4
(B) -2
(C) -1
(D) 2
(E) 4

**02. (PUC-SP)** Na função exponencial

$y = 2^{x^2 - 4x}$ , determine os valores de x para os quais $1<y<32$.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Respostas**

**01. Resposta: D.**

$$5^{x^2-2x+1} = 5^4 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow A\ soma\ das\ raízes\ é\ dada\ por - \frac{b}{a} \rightarrow -\frac{-2}{1} = 2$$

**02 .** Devemos determinar esta inequação obtendo números em mesma base numérica.

$$1 < 2^{x^2-4x} < 32$$

$$1 = 2^0 \quad e\ 32 = 2^5 \quad com\ isso\ teremos\ que:$$

$$2^0 < 2^{x^2-4x} < 2^5$$

Como agora temos somente números na base numérica 2, podemos escrever essa desigualdade em relação aos expoentes.

$0 < x^2 - 4x < 5$ ➔ Vamos fazer cada desigualdade separadamente:

$0 < x^2 - 4x$ ➔ Devemos encontrar as raízes da equação do segundo grau $x^2-4x=0$ e comparar o intervalo de valores em relação à desigualdade.

$x^2 - 4x = 0$ ➔ x' = 0 e x'' = 4

Devemos comparar a desigualdade em três intervalos, (o intervalo menor que o x', o intervalo entre x' e x'' e o intervalo maior que x'').

Para valores menores que x'', teremos o seguinte:

$$x = -1 \rightarrow 0 < (-1)^2 - 4.(-4) \rightarrow 0 < 5 \quad (desiguladade\ verdadeira)$$

Portanto, os valores menores que x = 0 satisfazem essa inequação. Vejamos valores entre 0 e 4.

$$x = 2 \rightarrow 0 < 2^2 - 4.2 \rightarrow 0 < -4\ (Falso)$$

Portanto, não é um intervalo válido. Agora os valores maiores que 4.

$$x = 5 \rightarrow 0 < 5^2 - 4.5 \rightarrow 0 < 5\ (verdadeiro)$$

Portanto para a desigualdade $0 < x^2 - 4x$ a solução é:

$S = \{ x \in R | x < 0 \text{ e } x > 4\}$




## 6) Função Logarítmica: - Definição de logaritmo, propriedades operatórias; - Gráficos, domínio, imagem e características da função logarítmica; - Equações e inequações logarítmicas.

Toda equação que contém a **incógnita** na **base** ou no **logaritmando** de um logaritmo é denominada **equação logarítmica**. Abaixo temos alguns exemplos de equações logarítmicas:

$\log_2 x = 3$

$\log_x 100 = 2$

$7\log_5 625x = 42$

$3\log_{2x} 64 = 9$

$\log_{-6-x} 2x = 1$

Perceba que nestas equações a **incógnita** encontra-se ou no **logaritmando**, ou na **base** de um logaritmo. Para solucionarmos **equações logarítmicas** recorremos a muitas das propriedades dos logaritmos.

➔ **Solucionando Equações Logarítmicas**

Vamos solucionar cada uma das equações acima, começando pela primeira: $\log_2 x = 3$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Segundo a definição de logaritmo nós sabemos que: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x$

Logo **x** é igual a **8**: $2^3 = x \Rightarrow x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 8$

De acordo com a definição de logaritmo o **logaritmando** deve ser um número real positivo e já que **8** é um número real positivo, podemos aceitá-lo como solução da equação. A esta restrição damos o nome de **condição de existência**.

$$\log_x 100 = 2$$

Pela definição de logaritmo a **base** deve ser um número real e positivo além de ser diferente de **1**. Então a nossa condição de existência da equação acima é que: $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Em relação a esta segunda equação nós podemos escrever a seguinte sentença:
$\log_x 100 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 100$

Que nos leva aos seguintes valores de **x**:

$$x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{100} \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 10 \end{cases}$$

Note que **x = -10** não pode ser solução desta equação, pois este valor de **x** não satisfaz a condição de existência, já que **-10** é um número negativo.

Já no caso de **x = 10** temos uma solução da equação, pois **10** é um valor que atribuído a **x** satisfaz a condição de existência, visto que **10** é positivo e diferente de **1**.

$$7\log_5 625x = 42$$

Neste caso temos a seguinte condição de existência:

$$625x > 0 \Rightarrow x > \frac{0}{625} \Rightarrow x > 0$$

Voltando à equação temos:

$$7\log_5 625x = 42 \Rightarrow \log_5 625x = \frac{42}{7} \Rightarrow \log_5 625x = 6$$

Aplicando a mesma propriedade que aplicamos nos casos anteriores e desenvolvendo os cálculos temos: Como **25** satisfaz a condição de existência, então **S = {25}** é o conjunto solução da equação. Se quisermos recorrer a outras propriedades dos logaritmos também podemos resolver este exercício assim:

$$\Rightarrow \log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x \Rightarrow x = 25$$

Lembre-se que $\log_b (M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$ e que **$\log_5$ 625 = 4, pois $5^4$ = 625**.

$$3\log_{2x} 64 = 9$$

Neste caso a condição de existência em função da base do logaritmo é um pouco mais complexa: $2x > 0 \Rightarrow x > \frac{0}{2} \Rightarrow x > 0$

E, além disto, temos também a seguinte condição: $2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Portanto a condição de existência é: $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Agora podemos proceder de forma semelhante ao exemplo anterior: Como **x = 2** satisfaz a condição de existência da equação logarítmica, então **2** é solução da equação. Assim como no exercício anterior, este também pode ser solucionado recorrendo-se à outra propriedade dos logaritmos:

$$\log_{-6-x} 2x = 1$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Neste caso vamos fazer um pouco diferente. Primeiro vamos solucionar a equação e depois vamos verificar quais são as condições de existência: Então **x = -2** é um valor candidato à solução da equação. Vamos analisar as condições de existência da base **-6 - x**:

Veja que embora **x ≠ -7**, **x** não é menor que **-6**, portanto **x = -2** não satisfaz a condição de existência e não pode ser solução da equação. Embora não seja necessário, vamos analisar a condição de existência do logaritmando **2x**:

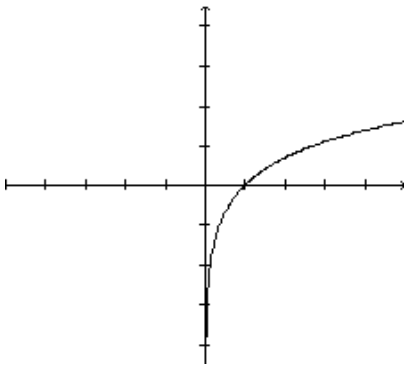
$$2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Como **x = -2**, então **x** também não satisfaz esta condição de existência, mas não é isto que eu quero que você veja. O que eu quero que você perceba, é que enquanto uma condição diz que **x < -6**, a outra diz que **x > 0**. Qual é o número real que além de ser menor que **-6** é também maior que **0**?

Como não existe um número real negativo, que sendo menor que **-6**, também seja positivo para que seja maior que zero, então sem solucionarmos a equação nós podemos perceber que a mesma não possui solução, já que nunca conseguiremos satisfazer as duas condições simultaneamente. O conjunto solução da equação é portanto **S = {}**, já que não existe nenhuma solução real que satisfaça as condições de existência da equação.

### ➔ Função Logarítmica

A função logaritmo natural mais simples é a função $y=f_0(x)=\ln x$. Cada ponto do gráfico é da forma (x, lnx) pois a ordenada é sempre igual ao logaritmo natural da abscissa.



O domínio da função ln é $\mathbb{R}_+^* = ]0, \infty[$ e a imagem é o conjunto $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$. O eixo vertical é uma assíntota ao gráfico da função. De fato, o gráfico se aproxima cada vez mais da reta x=0

O que queremos aqui é descobrir como é o gráfico de uma função logarítmica natural geral, quando comparado ao gráfico de y=ln x, a partir das transformações sofridas por esta função. Consideremos uma função logarítmica cuja expressão é dada por $y=f_1(x)=\ln x+k$, onde k é uma constante real. A pergunta natural a ser feita é: qual a ação da constante k no gráfico dessa nova função quando comparado ao gráfico da função inicial $y=f_0(x)=\ln x$ ?

Ainda podemos pensar numa função logarítmica que seja dada pela expressão $y=f_2(x)=a.\ln x$ onde a é uma constante real, a $\neq 0$. Observe que se a=0, a função obtida não será logarítmica, pois será a constante real nula. Uma questão que ainda se coloca é a consideração de funções logarítmicas do tipo $y=f_3(x)=\ln(x+m)$, onde m é um número real não nulo. Se $g(x)=3.\ln(x-2) + 2/3$, desenhe seu gráfico, fazendo os gráficos intermediários, todos num mesmo par de eixos.

y=a.ln(x+m)+k

Conclusão: Podemos, portanto, considerar funções logarítmicas do tipo $y = f_4(x) = a \ln (x + m) + k$, onde o coeficiente a não é zero, examinando as transformações do gráfico da função mais simples $y = f_0(x) = \ln x$, quando fazemos, em primeiro lugar, y=ln(x+m); em seguida, y=a.ln(x+m) e, finalmente, y=a.ln(x+m)+k.

Analisemos o que aconteceu:

- em primeiro lugar, y=ln(x+m) sofreu uma translação horizontal de -m unidades, pois x=-m exerce o papel que x=0 exercia em y=ln x;


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- a seguir, no gráfico de y=a.ln(x+m) ocorreu mudança de inclinação pois, em cada ponto, a ordenada é igual àquela do ponto de mesma abscissa em y=ln(x+m) multiplicada pelo coeficiente a;
- por fim, o gráfico de y=a.ln(x+m)+k sofreu uma translação vertical de k unidades, pois, para cada abscissa, as ordenadas dos pontos do gráfico de y=a.ln(x+m)+k ficaram acrescidas de k, quando comparadas às ordenadas dos pontos do gráfico de y=a.ln(x+m).

O estudo dos gráficos das funções envolvidas auxilia na resolução de equações ou inequações, pois as operações algébricas a serem realizadas adquirem um significado que é visível nos gráficos das funções esboçados no mesmo referencial cartesiano.

**Função logarítmica de base a** é toda função $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Podemos observar neste tipo de função que a variável independente **x** é um logaritmando, por isto a denominamos **função logarítmica**. Observe que a base **a** é um valor real constante, não é uma variável, mas sim um número real.

A **função logarítmica** de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é inversa da função exponencial de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ e vice-versa, pois:
$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

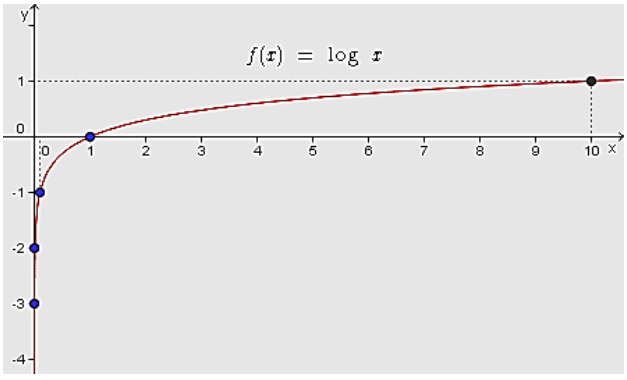
➔ **Representação da Função Logarítmica no Plano Cartesiano**

Podemos representar graficamente uma função logarítmica da mesma forma que fizemos com a função exponencial, ou seja, escolhendo alguns valores para **x** e montando uma tabela com os respectivos valores de **f(x).** Depois localizamos os pontos no plano cartesiano e traçamos a curva do gráfico. Vamos representar graficamente a função $f(x) = \log x$ e como estamos trabalhando com um logaritmo de base **10**, para simplificar os cálculos vamos escolher para **x** alguns valores que são potências de **10**:

**0,001**, **0,01**, **0,1**, **1**, **10** e **2**.

Temos então seguinte a tabela:

| x | y = log x |
|---|---|
| 0,001 | y = log 0,001 = -3 |
| 0,01 | y = log 0,01 = -2 |
| 0,1 | y = log 0,1 = -1 |
| 1 | y = log 1 = 0 |
| 10 | y = log 10 = 1 |




Ao lado temos o gráfico desta **função logarítmica**, no qual localizamos cada um dos pontos obtidos da tabela e os interligamos através da curva da função: Veja que para valores de **y < 0,01** os pontos estão quase sobre o **eixo das ordenadas**, mas de fato nunca chegam a estar. Note também que neste tipo de função uma grande variação no valor de **x** implica numa variação bem inferior no valor de **y**. Por exemplo, se passarmos de **x = 100** para **x = 1000000**, a variação de **y** será apenas de **2** para **6**. Isto porque:

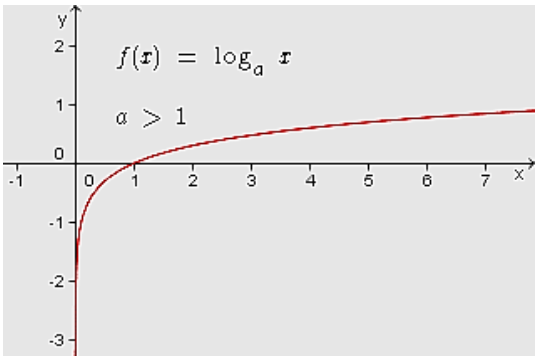

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} f(100) = \log 100 = 2 \\ f(1000000) = \log 1000000 = 6 \end{cases}$$

➔ **Função Crescente e Decrescente**

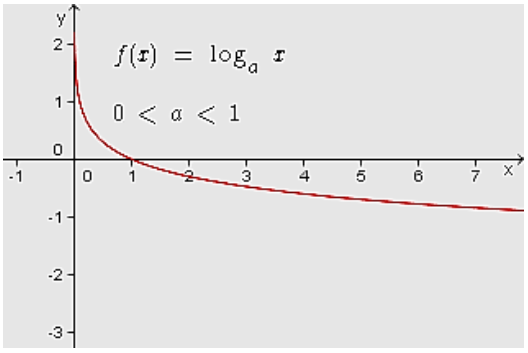
Assim como no caso das funções exponenciais, as **funções logarítmicas** também podem ser classificadas como **função crescente** ou **função decrescente**. Isto se dará em função da base **a** ser maior ou menor que **1**. Lembre-se que segundo a definição da **função logarítmica** $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, temos que $a > 0$ e $a \neq 1$.

➔ **Função Logarítmica Crescente**




Se $a > 1$ temos uma **função logarítmica crescente**, qualquer que seja o valor real positivo de **x**. No gráfico da função ao lado podemos observar que à medida que **x** aumenta, também aumenta **f(x)** ou **y**. Graficamente vemos que a curva da função é **crescente**. Também podemos observar através do gráfico, que para dois valor de **x** ($x_1$ e $x_2$), que $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, isto para $x_1$, $x_2$ e **a** números reais positivos, com **a > 1**.

➔ **Função Logarítmica Decrescente**




Se $0 < a < 1$ temos uma **função logarítmica decrescente** em todo o domínio da função. Neste outro gráfico podemos observar que à medida que **x** aumenta, **y** diminui. Graficamente observamos que a curva da função é **decrescente**. No gráfico também observamos que para dois valores de **x** ($x_1$ e $x_2$), que $\log_a x_2 < \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, isto para $x_1$, $x_2$ e **a** números reais positivos, com **0 < a < 1**. É importante frisar que independentemente de a função ser crescente ou decrescente, o gráfico da função sempre cruza o eixo das abscissas no ponto **(1, 0)**, além de nunca cruzar o **eixo das ordenadas** e que o $\log_a x_2 = \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1$, isto para $x_1$, $x_2$ e **a** números reais positivos, com **a ≠ 1**.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Questões**

**01. (PETROBRAS-GEOFISICO JUNIOR – CESGRANRIO)** Se log x representa o logaritmo na base 10 de x, então o valor de n tal que log n = 3 - log 2 é:

(A) 2000
(B) 1000
(C) 500
(D) 100
(E) 10

**02. (MF – Assistente Técnico Administrativo – ESAF/2014)** Sabendo-se que log x representa o logaritmo de x na base 10, calcule o valor da expressão log 20 + log 5.

(A) 5
(B) 4
(C) 1
(D) 2
(E) 3

**Respostas**

**01. Resposta: C.**

log n = 3 - log 2
log n + log 2 = 3 * 1
onde 1 = log 10 então:
log (n * 2) = 3 * log 10
log(n*2) = log 10 ^3
2n = 10^3
2n = 1000
n = 1000 / 2
n = 500

**02. Resposta: D.**

E = log20 + log5
E = log(2 x 10) + log5
E = log2 + log10 + log5
E = log10 + log (2 x 5)
E = log10 + log10
E = 2 log10
E = 2

**EQUAÇÃO LOGARÍTIMICA**

Existem equações que não podem ser reduzidas a uma igualdade de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências. A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na definição de logaritmo.

$$a^x = b \rightarrow \log_a b, com\ 0 < a \neq 1\ e\ b > 0.$$

Existem quatro tipos de equações logarítmicas:

**1º) Equações redutíveis a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base:**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

A solução pode ser obtida impondo-se f(x) = g(x) > 0.

Exemplo:

$\log_5 2x + 4 = \log_5 3x + 1$

Temos que:

2x + 4 = 3x + 1
2x – 3x = 1 – 4


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

– x = – 3
x = 3
Portanto, S = {3}

**2º) Equações redutíveis a uma igualdade entre dois logaritmos e um número real:**

$$\log_a f(x) = r$$

A solução pode ser obtida impondo-se f(x) = $a^r$.

Exemplo:
$\log_3 5x + 2 = 3$
Pela definição de logaritmo temos:
$5x + 2 = 3^3$
$5x + 2 = 27$
$5x = 27 - 2$
$5x = 25$
$x = 5$
Portanto S = {5}.

**3º) Equações que são resolvidas por meio de uma mudança de incógnita:**

Exemplo:
$(\log_4 x)^2 - 3.\log_4 x = 4$
Vamos fazer a seguinte mudança de incógnita:

$$\log_4 x = y.$$

Substituindo na equação inicial, ficaremos com:

$y^2 - 3y = 4$
ou
$y^2 - 3y - 4 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$y = 4$ *ou* $y = -1$

Como $\log_4 x = y$, então:

$\log_4 x = 4 \rightarrow x = 4^4 \rightarrow x = 256$

Ou

$\log_4 x = -1 \rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

Portanto, $S = \{\frac{1}{4}, 256\}$

**4º) Equações que envolvem utilização de propriedades ou de mudança de base:**

Exemplo:
$\log(2x + 3) + \log(x + 2) = 2\log x$

Usando as propriedades do logaritmo, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\log[(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

Note que para isso utilizamos as seguintes propriedades:

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$
$$\log x^n = n \cdot \log x$$

Vamos retornar à equação:

$$\log[(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

Como ficamos com uma igualdade entre dois logaritmos, segue que:
$(2x + 3)(x + 2) = x^2$
ou
$2x^2 + 4x + 3x + 6 = x^2$
$2x^2 - x^2 + 7x + 6 = 0$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

x = -1 ou x = - 6

Lembre-se que para o logaritmo existir o logaritmando e a base devem ser positivos. Com os valores encontrados para x, o logaritmando ficará negativo. Sendo assim, a equação não tem solução ou S = ø.

## INEQUAÇÃO LOGARITMICA

A forma de se resolver a inequação logarítmica é a mesma da equação, mas é preciso ter muito cuidado quando a base for 0 < a < 1.

São dois tipos de inequação logarítmica.

**1º) Inequações redutíveis a uma desigualdade entre logaritmos de mesma base:**

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

Neste caso há ainda dois casos a considerar

| a > 1 | 0 < a < 1 |
|---|---|
| Nesse caso, a relação entre f(x) e g(x) tem o mesmo sentido que a desigualdade entre os logaritmos. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$ | Nesse caso, a relação entre f(x) e g(x) tem sentido contrário a desigualdade entre os logaritmos. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$ |

Exemplo:

**A inequação $\log_3(3x - 2) \leq \log_3 x$**

Temos a seguinte condição: 0 < 3x – 2 ≤ x.

Fazendo cada membro da equação separadamente:

0 < 3x – 2 ➔ x > 2/3 (I)

3x – 2 ≤ x ➔ 2x ≤ 2 ➔ x ≤ 1 (II)

Da interseção de (I) com (II), resulta:

S = { x ϵ R| 2/3 < x ≤ 1}.

**2º) Inequações redutíveis a uma desigualdade entre um logaritmo e um número real:**

$$\log_a f(x) > r \quad \text{ou} \quad \log_a f(x) < r$$

Para resolver uma inequação desse tipo, basta substituir *r* por $\log_a a^r$; assim teremos:

$$\log_a f(x) < r \text{ equivale a } \log_a f(x) < \log_a a^r$$

$$\log_a f(x) > r \text{ equivale a } \log_a f(x) > \log_a a^r$$

Exemplo:

**A inequação $\log_3(4x - 1) < 3$.**

$$\log_3(4x - 1) < 3 \rightarrow \log_3(4x - 1) < \log_3 3^3 \rightarrow 0 < 4x - 1 < 27 \rightarrow 1 < 4x < 28 \rightarrow \frac{1}{4} < x < 7$$

S = { x ϵ R| 1/4 < x < 7}.

## Questões

**01. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS – COMBATENTE/LOGÍSTICA – TÉCNICA/AVIAÇÃO – EXÉRCITO BRASILEIRO/2013)** O logaritmo de um produto de dois fatores é igual à soma dos logaritmos de cada fator, mantendo-se a mesma base. Identifique a alternativa que representa a propriedade do logaritmo anunciada.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) Logb(a.c )= logba + logbc
(B) Logb(a.c) = logb(a + c)
(C) Logb(a + c) = logba.logbc
(D) Logb(a + c) = logb(a.c)
(E) Loge(a.c) = logba + logfc

**02. (FUSA/PR – AGENTE COMUNITÁRIO DE SAÚDE – UNIUV/2013)** Aplicando as propriedades de logaritmo na equação log A - log B = 0, teremos:
(A) A . B = 0
(B) A . B > 0
(C) A = B
(D) A / B = 0
(E) A é o inverso de B

**03. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS –MÚSICA – EXÉRCITO BRASILEIRO/2012)** Sabendo que log P = 3loga - 4logb + 1/2logc, assinale a alternativa que representa o valor de P.
(dados: a = 4, b = 2 e c = 16)
(A) 12
(B) 52
(C) 16
(D) 24
(E) 73

**04. (SESI/PA – NUTRICIONISTA – FIDESA/2012)** Para calcular o pH de um efluente, os técnicos do departamento de controle ambiental utilizam a fórmula: $pH = \log\left(\frac{1}{|H^+|}\right)$, onde $|H^+|$é a concentração de íons H+ nas amostras do efluente. Considerando que a concentração de íons é $|H^+|=5x10^{-5}$ e log 2 = 0,3, o pH das amostras coletadas desse efluente é de:
(A) 3,6
(B) 4,3
(C) 6,4
(D) 7,2

**05. (LIQUIGÁS – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2012**) Qual é o produto das raízes da equação $[\log(x)]^2 - \log(x^2) - 3 = 0$ ?
(A) - 3.000
(B) - 3
(C) 0,001
(D) 100
(E) 1.000

**Respostas**

**01. Resposta: A.**

**02. Resposta: C.**
log(A/B)=0
Pela propriedade do log:
A/B=1
A=B

**03. Resposta: C.**

$$\log P = \log a^3 - \log b^4 + \log c^{\frac{1}{2}}$$

$$\log P = \log\left(a^3 . \frac{c^{\frac{1}{2}}}{b^4}\right)$$

$$P = \frac{4^3\sqrt{16}}{2^4} = 16$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**04. Resposta: B.**

$$\text{pH} = \log\left(\frac{1}{|5\text{x}10^{-5}|}\right)$$

$$\text{pH} = \log(0{,}2\text{x}10^{5})$$
$$\text{pH} = \log 0{,}2 + \log 10^{5}$$

$$\text{pH} = \log\left(\frac{2}{10}\right) + 5\log 10$$

$$\text{pH} = \log 2 - \log 10 + 5\log 10$$
pH=0,3-1+5=4,3

**05. Resposta: D.**
$[\log(x)]^2 - 2\log x - 3 = 0$
Fazendo logx=y
$y^2-2y-3=0$
$\Delta=4+12=16$

$$y = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$y_1 = 3$$
$$y_2 = -1$$

Substituindo:
Log x=3
$X=10^3=1000$
Log x=-1
$X=10^{-1}=0{,}1$
Produto das raízes: 1000·0,1=100



**7) Trigonometria: - Trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer); - Lei dos senos e lei dos cossenos; - Unidades de medidas de arcos e ângulos: o grau e o radiano; - Círculo trigonométrico, razões trigonométricas, redução ao 1º quadrante; - Funções trigonométricas, transformações, identidades trigonométricas fundamentais, equações e inequações trigonométricas em R; - Fórmulas de adição de arcos, arcos duplos, arco metade e transformação em produto; - As funções trigonométricas inversas e seus gráficos, arcos notáveis; e sistemas de equações e inequações trigonométricas e resolução de triângulos.**

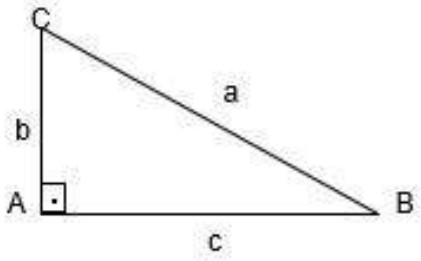
## TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A palavra trigonometria significa: tri (três), gono (ângulo) e metria (medida), traduzido mais ou menos para estudo das medidas de três ângulos. A figura que tem três ângulos chama-se Triângulo. No início estudaremos a trigonometria no triângulo retângulo, ao final deste estudo temos duas leis: Lei dos senos e Lei dos cossenos que "jogam" a trigonometria para os demais triângulos que não são retângulos.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Em todo triângulo retângulo os lados recebem nomes especiais. O maior lado (oposto do ângulo de 90°) é chamado de **Hipotenusa** e os outros dois lados menores (opostos aos dois ângulos agudos) são chamados de **Catetos**.

Observe a figura:



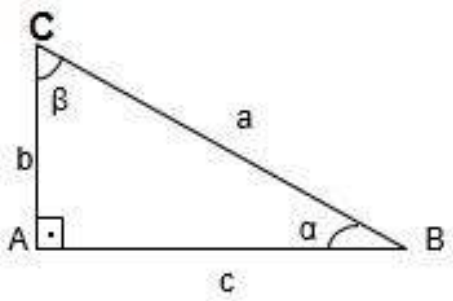

- **a** é a hipotenusa.
- **b** e **c** são os catetos.

Para estudo de Trigonometria, são definidos no triângulo retângulo, três razões chamadas trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

- $sen = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa}$

- $cos = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}$

- $tg = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$




No triângulo acima, temos:

- $sen\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad$ $sen\beta = \frac{c}{a}$
- $cos\alpha = \frac{c}{a}$ $\quad$ $cos\beta = \frac{b}{a}$
- $tg\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad$ $tg\beta = \frac{c}{b}$

Como podemos notar, $sen\alpha = cos\beta$ e $sen\beta = cos\alpha$.

Em todo triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180°.

No triângulo retângulo um ângulo mede 90°, então:

90° + α + β = 180°

α + β = 180° - 90°

α + β = 90°


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Quando a soma de **dois** ângulos é igual a 90°, eles são chamados de Ângulos Complementares. E, neste caso, sempre o seno de um será igual ao cosseno do outro.

➔ **Valores Notáveis**

A tabela a seguir representa os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°, considerados os três ângulos notáveis da trigonometria.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sen | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

➔ **Relações Fundamentais da Trigonometria (ou Identidades Trigonométricas)**

I) $sen^2 + cos^2 = 1$

II) $tgx = \frac{sen}{cosx}$

III) $cotgx = \frac{cosx}{senx}$

VI) $secx = \frac{1}{cosx}$

V) $cossecx = \frac{1}{senx}$

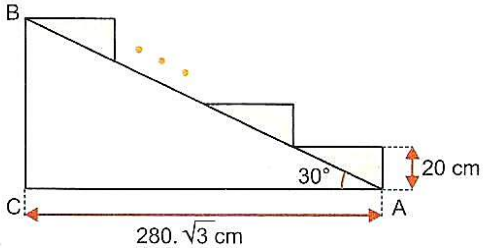
Nestas relações, além do senx e cosx, temos: tg (tangente), cotg (cotangente), sec (secante) e cossec (cossecante).

**Questões**

**01.** Um avião levanta voo formando um ângulo de 30° com a horizontal. Sua altura, em metros, após ter percorridos 600 m será:

(A) 100
(B) 200
(C) 300
(D) 400
(E) 500

**02. (UDESC)** Sobre um plano inclinado deverá ser construída uma escadaria.

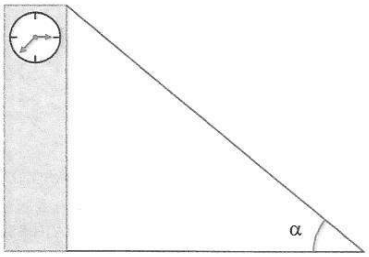



Sabendo-se que cada degrau da escada deverá ter um altura de 20 cm e que a base do plano inclinado medem $280\sqrt{3}$ cm, conforme mostra a figura acima, então, a escada deverá ter:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) 10 degraus
(B) 28 degraus
(C) 14 degraus
(D) 54 degraus
(E) 16 degraus

**03. (FUVEST)** A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo $\alpha$, como mostra a figura.



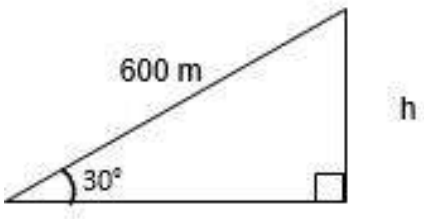

Sabendo que sen20° = 0,342 e cos20° = 0,940, a altura da torre, em metros, será aproximadamente:
(A) 14,552
(B) 14,391
(C) 12,552
(D) 12,391
(E) 16,552

**04. (U. Estácio de Sá)** Simplificando a expressão $y = sen17º.cotg17°.cotg73°.sec73°$, encontramos:
(A) – 2
(B) – 1
(C) 2
(D) 1
(E) 5

**05.** Qual das afirmativas abaixo é falsa:
(A) $sen^3x + cos^3x = 1$
(B) $tgx = \frac{senx}{cosx}$
(C) $sen^2x + cos^2x = 1$
(D) $secx = \frac{1}{cosx}$
(E) $cossecx = \frac{1}{senx}$

**Respostas**

**01. Resposta: C.**
Solução: do enunciado temos a seguinte figura.




600 m é a hipotenusa e h é o cateto oposto ao ângulo dado, então temos que usar o seno.
$\text{sen}30° = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$\frac{1}{2} = \frac{h}{600}$ ➔ 2h = 600 ➔ h = 600 : 2 = 300 m

**02. Resposta: C.**

Solução: para saber o número de degraus temos que calcular a altura $\overline{BC}$ do triângulo e dividir por 20 (altura de cada degrau). No triângulo ABC, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são catetos, a relação entre os dois catetos é a tangente.

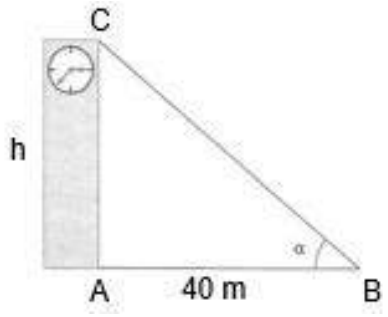
$$tg30° = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{BC}}{280\sqrt{3}}$ ➔ $3.\overline{BC} = 280\sqrt{3}.\sqrt{3}$ ➔ $3.\overline{BC} = 280.3$ ➔ $\overline{BC}$ = 280 cm

Número de degraus = 280 : 20 = 14

**03. Resposta: A.**

Solução: observando a figura, nós temos um triângulo retângulo, vamos chamar os vértices de A, B e C.




Como podemos ver h e 40 m são catetos, a relação a ser usada é a tangente. Porém no enunciado foram dados o sen e o cos. Então, para calcular a tangente, temos que usar a relação fundamental:

$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{co\alpha x}$ ➔ $tg\alpha = \frac{0,342}{0,940}$ ➔ tg$\alpha$ = 0,3638

$tg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ➔ $0,363 = \frac{h}{40}$ ➔ h = 40.0,363 ➔ h = 14,552 m

**04. Resposta: D.**

Solução: temos que usar as relações fundamentais.

$$y = sen17°.\frac{cos17°}{sen17°}.\frac{cos73°}{sen73°}.\frac{1}{cos73°}$$

$$y = \frac{cos17°}{sen73°}$$

Sendo 17° + 73° = 90° (ângulos complementares), lembrando que quando dois ângulos são complementares o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, resulta que sen73° = cos17°. Então:

$$y = \frac{cos17°}{cos17°} = 1$$

**05. Resposta: A.**

Solução: teórico.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## TRIGONOMETRIA EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

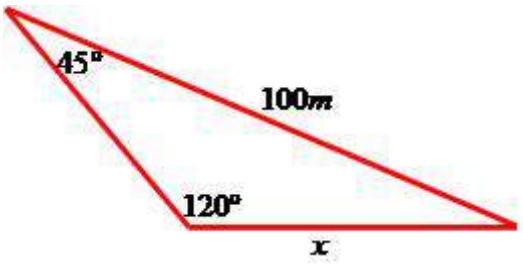
As relações trigonométricas se restringem somente a situações que envolvem triângulos retângulos.

Na situação abaixo, PÔR é um triângulo obtusângulo, então não podemos utilizar das relações trigonométricas conhecidas. Para situações como essa, utilizamos a lei dos senos ou a lei dos cossenos, de acordo com o mais conveniente.

Importante sabermos que:

sen x = sen (180º - x)

cos x = - cos (180º - x)




➔ **Lei dos senos:**

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Resolvendo a situação da figura, temos:

Iremos aplicar a lei dos senos:

$$\frac{100}{sen120^o} = \frac{x}{sen45^o}$$

$$\frac{100}{sen60^o} = \frac{x}{sen45^o}$$

Pela tabela de razões trigonométricas:

$$sen45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

➔ **Lei dos cossenos**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*cosA$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2*a*c*cosB$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2*a*b*cosC$

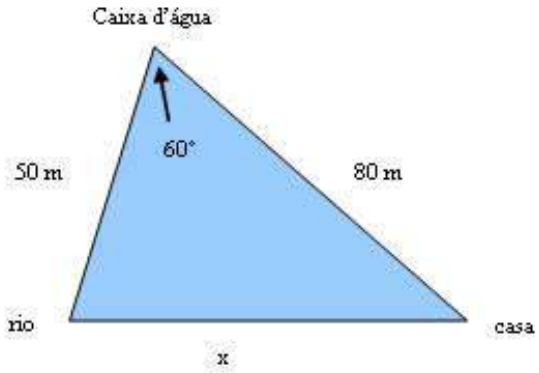
**Exemplo:**

Analise o esquema abaixo:

Se optarmos pelo bombeamento da água direto para a casa, quantos metros de cano seriam gastos?



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

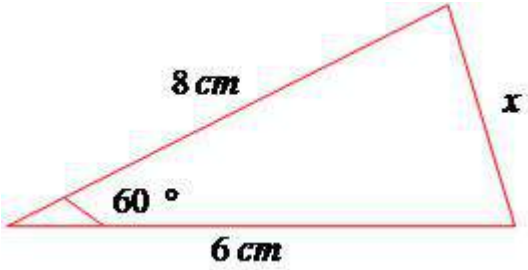



$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2*50*80*\cos 60^o$
$x^2 = 2500 + 6400 – 8000*0,5$
$x^2 = 8900 – 4000$
$x^2 = 4900$
$x = 70$ m
Seriam gastos 70 metros de cano.

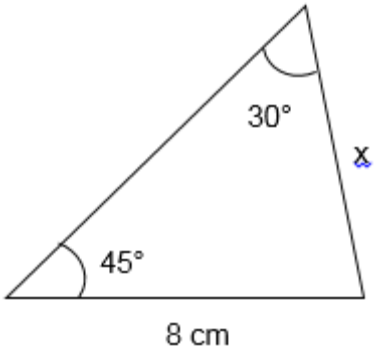
## Questões

**01.** Em um triângulo, os lados de medidas $6\sqrt{3}$ cm e 8 cm formam um ângulo de 30º. Determine a medida do terceiro lado.

**02.** Determine o valor do lado oposto ao ângulo de 60º. Observe figura a seguir:




**03.** No triângulo abaixo, pede-se determinar o valor de x:




## Respostas

**01.** De acordo com a situação, o lado a ser determinado é oposto ao ângulo de 30º. Dessa forma, aplicamos a fórmula da lei dos cossenos da seguinte maneira:
$x^2 = (6\sqrt{3})^2 + 8^2 - 2 * 6\sqrt{3} * 8 * \cos 30^o$
$x^2 = 36 * 3 + 64 – 2 * 6\sqrt{3} * 8 * \sqrt{3}/2$
$x^2 = 108 + 64 – 96 * \sqrt{3} * \sqrt{3}/2$
$x^2 = 172 – 48 * 3$
$x^2 = 172 – 144$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$x^2 = 28$
$x = 2\sqrt{7}$ cm

**02.** Pela lei dos cossenos
$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 * 6 * 8 * \cos 60^o$
$x^2 = 36 + 64 – 96 * 1/2$
$x^2 = 100 – 48$
$x^2 = 52$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{52}$
$x = 2\sqrt{13}$

**03.** Pela lei dos senos:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{8}{sen30°}$$

$$x.sen30° = 8.sen45°$$

$$x.\frac{1}{2} = 8.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

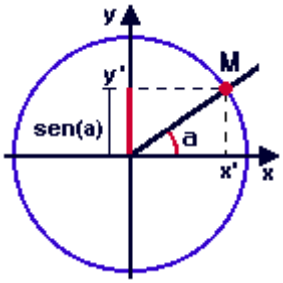
$$x = 8\sqrt{2}\ cm$$

## CICLO TRIGONOMÉTRICO

Dada uma circunferência trigonométrica contendo o ponto A=(1,0) e um número real x, existe sempre um arco orientado AM sobre esta circunferência, cuja medida algébrica corresponde a x radianos.

Seno: No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja M=(x',y') um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto C=(x',0) e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto B=(0,y').

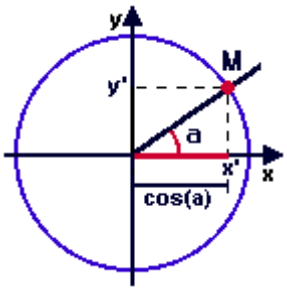
A medida do segmento OB coincide com a ordenada y' do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a, denotado por sen(AM) ou sen(a).




Como temos várias determinações para o mesmo ângulo, escreveremos sen(AM)=sen(a)=sen(a+2k$\pi$)=y'

Para simplificar os enunciados e definições seguintes, escreveremos sen(x) para denotar o seno do arco de medida x radianos.

Cosseno: O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo a, denotado por cos(AM) ou cos(a), é a medida do segmento 0C, que coincide com a abscissa x' do ponto M.



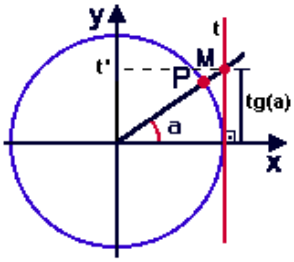


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Como antes, existem várias determinações para este ângulo, razão pela qual, escrevemos cos(AM) = cos(a) = cos(a+2k$\pi$) = x'

## Tangente

Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto A=(1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1,t'). A ordenada deste ponto T, é definida como a tangente do arco AM correspondente ao ângulo a.




Assim a tangente do ângulo a é dada pelas suas várias determinações: tan(AM) = tan(a) = tan(a+k$\pi$) = μ(AT) = t'

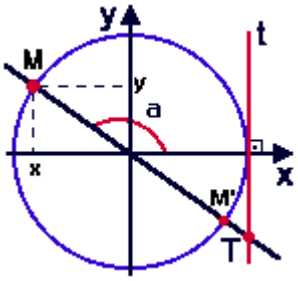
Podemos escrever M=(cos(a),sen(a)) e T=(1,tan(a)), para cada ângulo a do primeiro quadrante. O seno, o cosseno e a tangente de ângulos do primeiro quadrante são todos positivos.

Um caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo horizontal OX. Neste caso: cos(0)=1, sen(0)=0 e tan(0)=0

Ampliaremos estas noções para ângulos nos outros quadrantes

## Ângulos no segundo quadrante

Se na circunferência trigonométrica, tomamos o ponto M no segundo quadrante, então o ângulo a entre o eixo OX e o segmento OM pertence ao intervalo $\pi/2<a<\pi$. Do mesmo modo que no primeiro quadrante, o cosseno está relacionado com a abscissa do ponto M e o seno com a ordenada deste ponto. Como o ponto M=(x,y) possui abscissa negativa e ordenada positiva, o sinal do seno do ângulo a no segundo quadrante é positivo, o cosseno do ângulo a é negativo e a tangente do ângulo a é negativa.

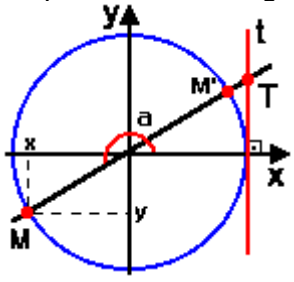



Outro caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo vertical OY e neste caso: cos($\pi$/2)=0 e sen($\pi$/2)=1

A tangente não está definida, pois a reta OM não intercepta a reta t, pois elas são paralelas.

## Ângulos no terceiro quadrante

O ponto M=(x,y) está localizado no terceiro quadrante, o que significa que o ângulo pertence ao intervalo: $\pi<a<3\pi/2$. Este ponto M=(x,y) é simétrico ao ponto M'=(-x,-y) do primeiro quadrante, em relação à origem do sistema, indicando que tanto a sua abscissa como a sua ordenada são negativos. O seno e o cosseno de um ângulo no terceiro quadrante são negativos e a tangente é positiva.



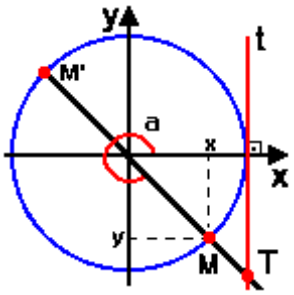


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Em particular, se a=$\pi$ radianos, temos que cos($\pi$)=-1, sen($\pi$)=0 e tg($\pi$)=0

**Ângulos no quarto quadrante**

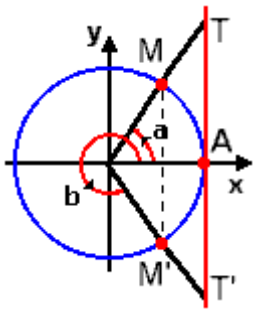
O ponto M está no quarto quadrante, 3$\pi$/2<a< 2$\pi$. O seno de ângulos no quarto quadrante é negativo, o cosseno é positivo e a tangente é negativa.




Quando o ângulo mede 3$\pi$/2, a tangente não está definida pois a reta OP não intercepta a reta t, estas são paralelas. Quando a=3$\pi$/2, temos: cos(3$\pi$/2)=0, sen(3$\pi$/2)=-1

**Simetria em relação ao eixo OX**

Em uma circunferência trigonométrica, se M é um ponto no primeiro quadrante e M' o simétrico de M em relação ao eixo OX, estes pontos M e M' possuem a mesma abscissa e as ordenadas possuem sinais opostos.

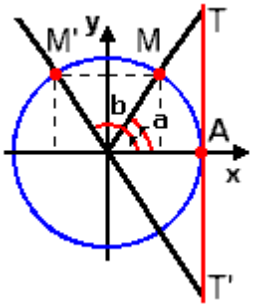



Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM', obtemos:

sen(a) = - sen(b)
cos(a) = cos(b)
tg(a) = - tg(b)

**Simetria em relação ao eixo OY**

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico a M em relação ao eixo OY, estes pontos M e M' possuem a mesma ordenada e as abscissa são simétricas.




Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

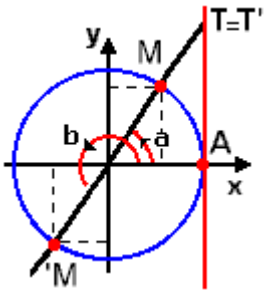
sen(a) = sen(b)
cos(a) = - cos(b)


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

tg(a) = - tg(b)

## Simetria em relação à origem

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico de M em relação a origem, estes pontos M e M' possuem ordenadas e abscissas simétricas.

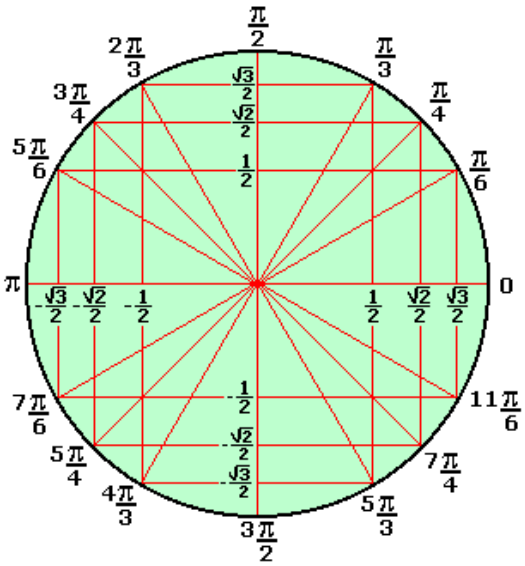



Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

sen(a) = -sen(b)
cos(a) = - cos(b)
tg(a) = tg(b)

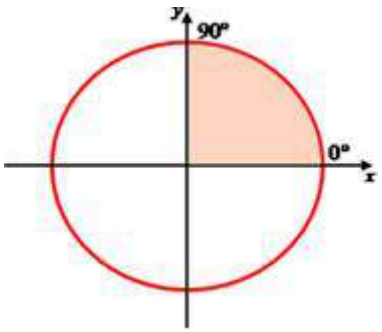
## Senos e cossenos de alguns ângulos notáveis

Uma maneira de obter o valor do seno e cosseno de alguns ângulos que aparecem com muita frequência em exercícios e aplicações, sem necessidade de memorização, é através de simples observação no círculo trigonométrico.




Considerando x a medida de um arco no ciclo trigonométrico, então os valores de x, tais que 0º < x < 360º, estão presentes nos seguintes quadrantes:

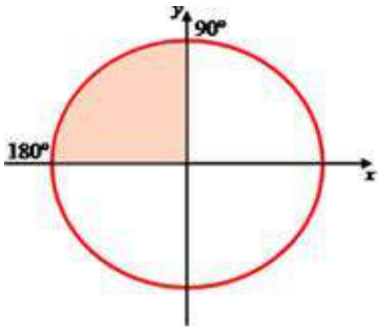
**Primeiro quadrante: 0º < x < 90º**



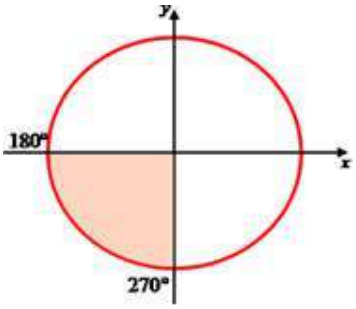


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

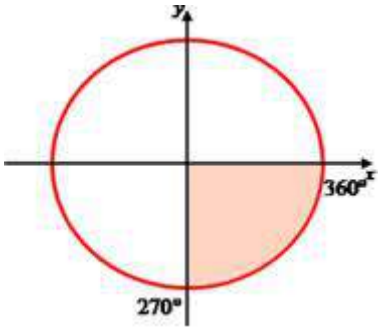
**Segundo quadrante: 90º < x < 180º**




**Terceiro quadrante: 180º < x < 270º**

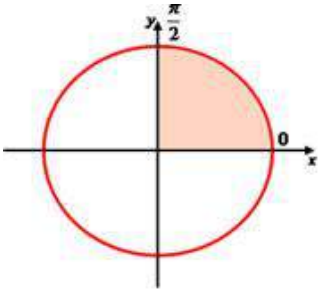



**Quarto quadrante: 270º < x < 360º**



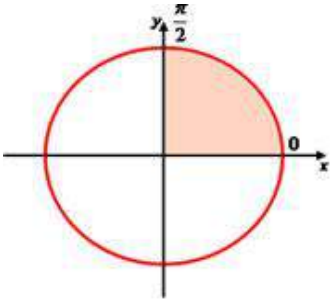

Os valores dos arcos também podem aparecer em radianos, $0 < x < 2\pi$

**Primeiro quadrante: $0 < x < \pi/2$**

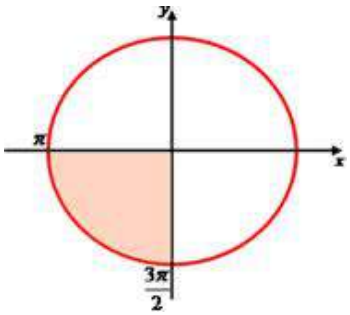



**Segundo quadrante: $\pi/2 < x < \pi$**

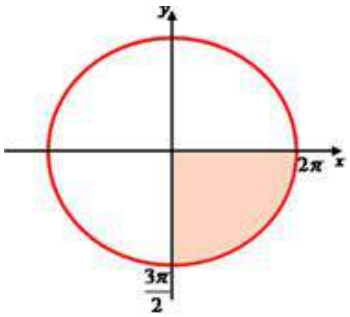

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Terceiro quadrante: π < x < 3π/2**




**Quarto quadrante: 3π/2 < x < 2π**




É importante conhecer a localização dos ângulos nos quadrantes, isto facilitará a construção dos arcos trigonométricos, pois cada ponto no ciclo está associado a um arco.

**Por exemplo:**

- O arco de medida π/6 rad ou 30º está localizado no 1º quadrante.
- O arco de medida 3π/4 rad ou 135º está localizado no 2º quadrante.
- O arco de medida 7π/6 rad ou 210º está localizado no 3º quadrante.
- O arco de medida 5π/3 rad ou 300º está localizado no 4º quadrante.
- O arco de medida π/3rad ou 60º está localizado no 1º quadrante.

## Questões

**01.**Unindo as extremidades dos arcos da forma (3n+2)π/6, para n=0,1,2,..., obtém-se qual dos polígonos regulares?

(A) Quadrado
(B) Hexágono
(C) Octógono

**02.** Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida: A= 810 graus.

## Respostas

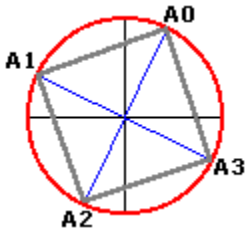
**01. Resposta: A.**

Quadrado, pois tomando An como os arcos para n=0,1,2,..., teremos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

A0= 5pi/6, A1= 8pi/6, A2=11pi/6, A3=14pi/6, A4=17pi/6=5/6+2.

Isto quer dizer que para n=4 temos a segunda determinação do arco 5pi/6 e para n>4 os arcos coincidem com os arcos determinados anteriormente Além disso, estes 4 pontos dividem a circunferência em 4 partes iguais pois eles estão 3/6=pi/2 (rad) distantes um do outro. Assim as extremidades dos arcos determinam um quadrado.




**02.** Para o arco de 810° devemos obter quantas voltas completas este arco tem pois 810°>360°.

$$\begin{array}{r|l} 810 & 360 \\ 90 & 2 \end{array}$$

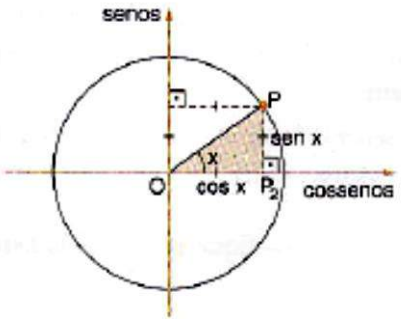
Este resultado significa que precisaremos dar duas voltas completas e mais 90° para completarmos o arco de 810°. Assim a primeira determinação positiva será 90°.

## IDENTIDADES OU RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

Aqui aprenderemos relações que são fundamentais para a resolução de questões trigonométricas.

**Relação I – $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$, para todo $x \in [0 , 2\pi[$**

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $OPP_2$, obtermos a fórmula acima.




**Exemplo:**

Dado sem x = 1/3 , com π/2 < x < π , obter cos x.

Usando a relação fundamental, temos:

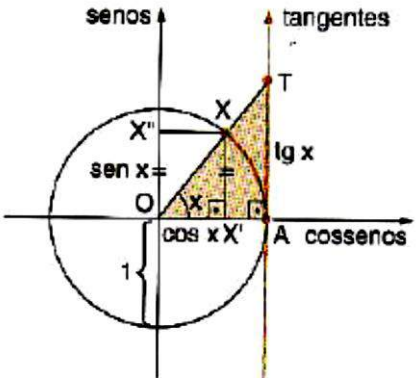
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + cos^2x = 1 \rightarrow cos^2x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow cosx = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como o intervalo esta compreendido π/2 < x < π, notamos que x está no 2º quadrante, e consequentemente, cos x < 0. , assim teremos $cosx = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

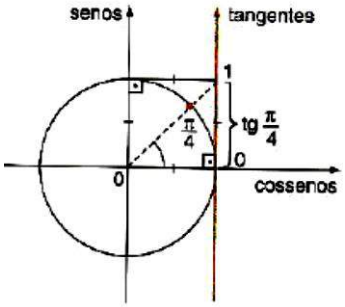
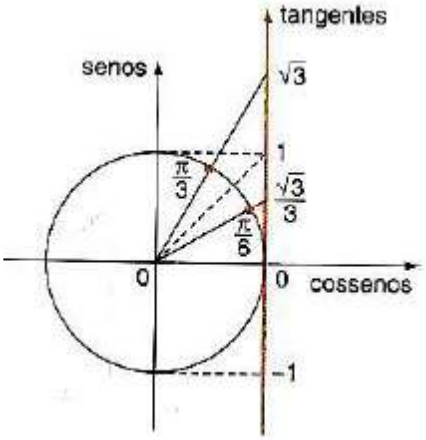
**Relação II - $tgx = \frac{sen\, x}{\cos x}$, $para\ todo\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$**

O eixo (vertical) das tangentes é obtido ao se tangenciar, por uma reta, o ciclo no ponto A, origem da contagem dos arcos.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

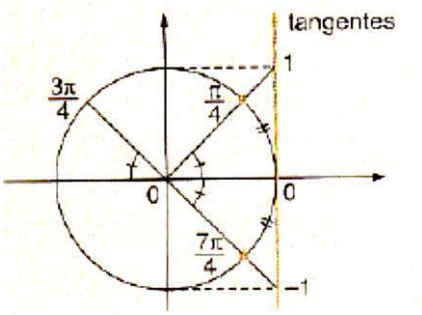



➔ **Valores Notáveis**

| | |
|---|---|
| **$tg\frac{\pi}{4}$**<br>Pela relação fundamental II, temos:<br>$$tg\frac{\pi}{4} = \frac{sen\frac{\pi}{4}}{cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$<br>Se observamos a figura ao lado, o quadrilátero formado confirma o valor acima encontrado. |  |
| **$tg\frac{\pi}{3}$ e $tg\frac{\pi}{6}$**<br>Pela relação fundamental II, temos:<br>$$tg\frac{\pi}{3} = \frac{sen\frac{\pi}{3}}{cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$<br>$$tg\frac{\pi}{6} = \frac{sen\frac{\pi}{6}}{cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ |  |

**Exemplo:**

Para calcular $tg\frac{3\pi}{4}$, devemos unir o centro à extremidade do arco, prolongando esse segmento até o eixo das tangentes.




Notando a congruência entre os três ângulos assinalados, concluímos que:

$$tg\frac{3\pi}{4} = -tg\frac{\pi}{4} = -1$$

Podemos resolver também pela relação fundamental II:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

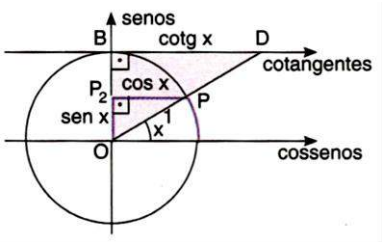
$$tg\frac{3\pi}{4} = \frac{sen\frac{3\pi}{4}}{cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$tg\frac{7\pi}{4} = \frac{sen\frac{7\pi}{4}}{cos\frac{7\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

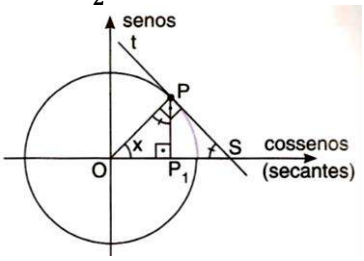
## OUTRAS IDENTIDADES OU RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

**Relação III -** $\boldsymbol{cotgx = \frac{cos\,x}{sen\,x},\ para\ todo\ x \neq k\pi, k \epsilon Z}$

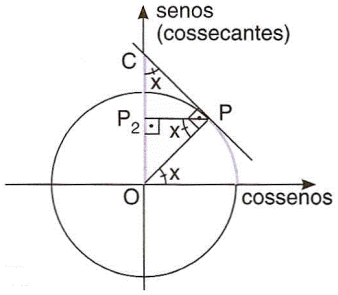
Assim como para a tangente para a cotangente também é necessário acoplar um eixo externo, porém ele é feito no ponto B, que corresponde a π/2 radianos.




**Relação IV –** $\boldsymbol{\sec x = \frac{1}{cosx},\ para\ todo\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \epsilon Z}$




**Relação V –** $\text{cossec}\,x = \frac{1}{senx},\ para\ todo\ x \neq k\pi, k \epsilon Z$




**Exemplos:**

1) $cossec\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{sen\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$

2) $sec\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

3) $cotg\frac{5\pi}{6} = \frac{cos\frac{5\pi}{6}}{sen\frac{5\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01. (SAMAE – CONTADOR – FUNTEF/PR/2013)** Considerando que $sen\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, o valor de $cos\ \frac{\pi}{10}$ é:

$(A)\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$(B)\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$(C)\frac{\sqrt{12\sqrt{5}}}{4}$

(D) -1/2

(E) 1/4

**02. (SANEAR – FISCAL - FUNCAB/2013)** Sendo cos x =1/2 com 0° < x < 90°, determine o valor da expressão E = sen² x + tg² x.

(A) 9/4

(B) 11/4

(C) 13/4

(D) 15/4

(E) 17/4

**03. (SABESP – ANALISTA DE GESTÃO I -CONTABILIDADE – FCC/2012)** O gráfico da função f(x) = cos²x – sen²x + cos x, no intervalo [0,2π], intercepta o eixo das abscissas em três pontos distintos (a,0), (b,0) e (c,0), sendo a < b < c. Nessas condições, a diferença (c − b) vale

(A) π /3

(B) 2π /3

(C) π

(D) π /6

(E) 5π /6

**04. (COBRA TECNOLOGIA – TÉCNICO DE OPERAÇÕES – DOCUMENTOS/QUALIDADE - ESPP/2012)** O valor da expressão sec(180º) +[ sen(-45º)]² cossec(450º)+ cos²(315º) é igual a:

(A) 2

(B) -1

(C) 1

(D) 0

**05. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS – COMBATENTE/LOGÍSTICA – TÉCNICA/AVIAÇÃO – EXÉRCITO BRASILEIRO/2012)** A soma dos valores de m que satisfazem a ambas as igualdades senx=(m+1)/m e cos x=(m+2)/m é

(A) 5

(B) 6

(C) 4

(D) -4

(E) -6

## Respostas

**01. Resposta: A.**

Sen²x + cos²x = 1

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + cos^2x = 1$$

$$cos^2x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$cos^2x = 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}$$
$$cos^2x = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$$
$$cos^2x = \frac{16}{16} - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$$
$$cos^2x = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$
$$cosx = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

**02. Resposta: D.**

Sen²x + cos²x = 1

$$sen^2x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
$$sen^2x = 1 - \frac{1}{4}$$
$$sen^2x = \frac{3}{4}$$
$$senx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como está no primeiro quadrante

$$senx = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E = sen^2x + tg^2x = sen^2x + \frac{sen^2x}{cos^2x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}$$

**03. Resposta: B.**

$sen^2x + cos^2x = 1$

$sen^2x = 1 - cos^2x$

Substituindo na função:

f(x) = cos²x - (1 - cos²x) + cosx

f(x)=cos²x + cos²x + cosx - 1

f(x)=2cos²x + cosx - 1

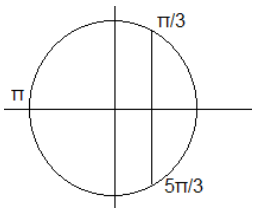
f(x)=0=2cos²x + cosx -1

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$cosx = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$\cos x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{-1-3}{4} = -1$




$c = \frac{5\pi}{3}$

$b = \pi$

$c - b = \frac{5\pi}{3} - \pi = \frac{2\pi}{3}$

**04. Resposta: D.**

$$\sec 180° = \frac{1}{\cos 180°} = -1$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$sen(-45) = -sen\ 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$450 \mid 360$
$90 \quad 1$

$cossec\ 450° = \frac{1}{sen450} = \frac{1}{sen90} = 1$

360 – 315 = 45

$\cos 315° = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Substituindo:

$-1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 . 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = -1 + 1 = 0$

**05. Resposta: E.**

$sen^2x + cos^2x = 1$

$\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 = 1$

$\frac{m^2 + 2m + 1}{m^2} + \frac{m^2 + 4m + 4}{m^2} - 1 = 0$

$m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 - m^2 = 0$

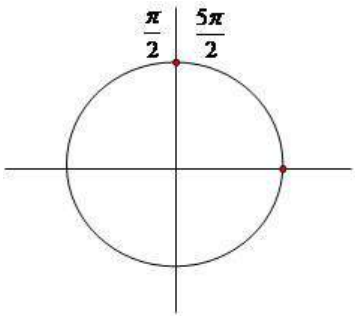
$m^2 + 6m + 5 = 0$

S = -b/a

S = -6/1 = -6

## FUNÇÃOTRIGONOMÉTRICA

No círculo trigonométrico temos arcos que realizam mais de uma volta, considerando que o intervalo do círculo é [0, 2π], por exemplo, o arco dado pelo número real x = 5π/2, quando desmembrado temos: x = 5π/2 = 4π/2 + π/2 = 2π + π/2. Note que o arco dá uma volta completa (2π = 2*180º = 360º), mais um percurso de 1/4 de volta (π/2 = 180º/2 = 90º). Podemos associar o número x = 5π/2 ao ponto P da figura, o qual é imagem também do número π/2. Existem outros infinitos números reais maiores que 2π e que possuem a mesma imagem. Observe:




9π/2 = 2 voltas e 1/4 de volta
13π/2 = 3 voltas e 1/4 de volta
17π/2 = 4 voltas e 1/4 de volta

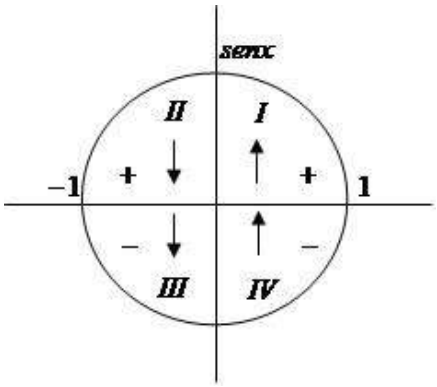
Podemos generalizar e escrever todos os arcos com essa característica na seguinte forma: π/2 + 2kπ, onde k Є Z. E de uma forma geral abrangendo todos os arcos com mais de uma volta, x + 2kπ.

Estes arcos são representados no plano cartesiano através de funções circulares como: função seno, função cosseno e função tangente.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Características da função seno**

É uma função f : R → R que associa a cada número real x o seu seno, então f(x) = senx. O sinal da função f(x) = senx é positivo no 1º e 2º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 3º e 4º quadrantes. Observe:



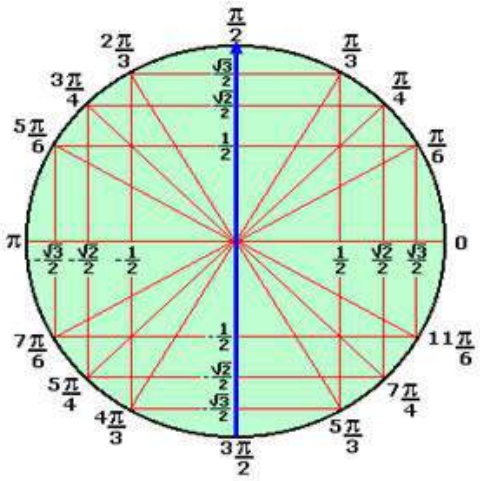
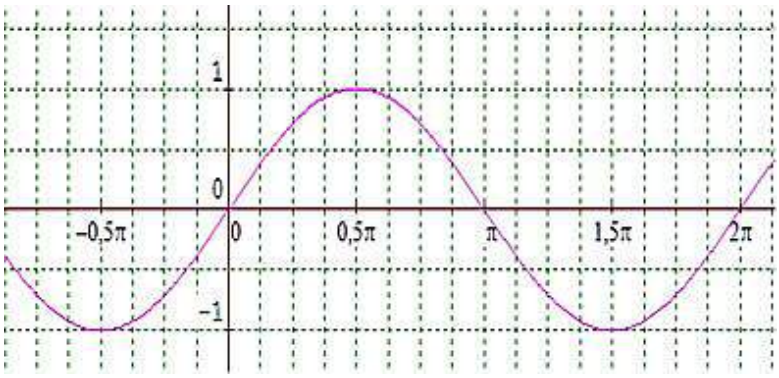
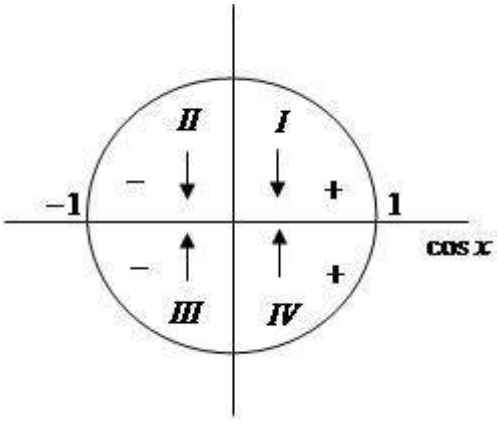



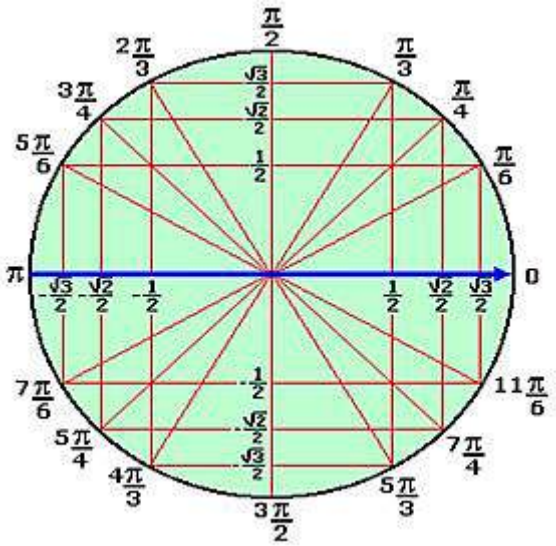
**Gráfico da função f(x) = senx**




➔ **Características da função cosseno**

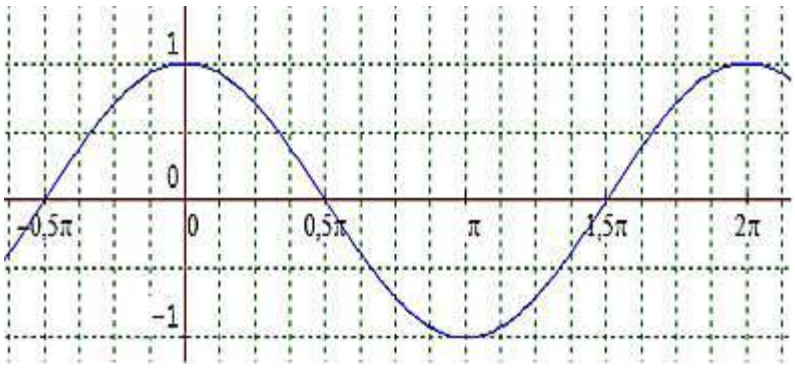
É uma função f : R → R que associa a cada número real x o seu cosseno, então f(x) = cosx. O sinal da função f(x) = cosx é positivo no 1º e 4º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 2º e 3º quadrantes. Observe:



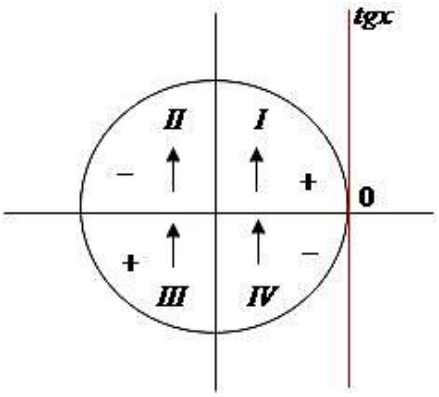

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Gráfico da função f(x) = cosx**




**➔ Características da função tangente**

É uma função f : R → R que associa a cada número real x a sua tangente, então f(x) = tgx.
Sinais da função tangente:
- Valores positivos nos quadrantes ímpares.
- Valores negativos nos quadrantes pares.
- Crescente em cada valor.



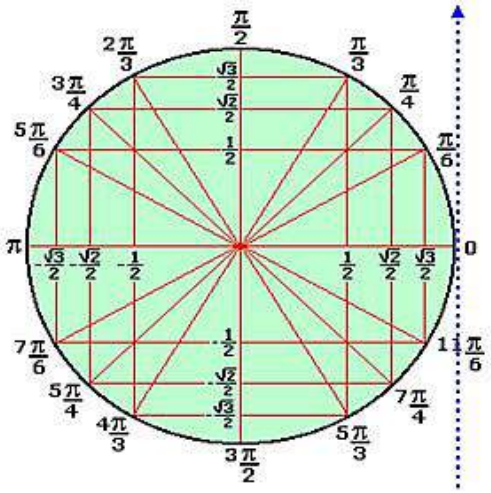
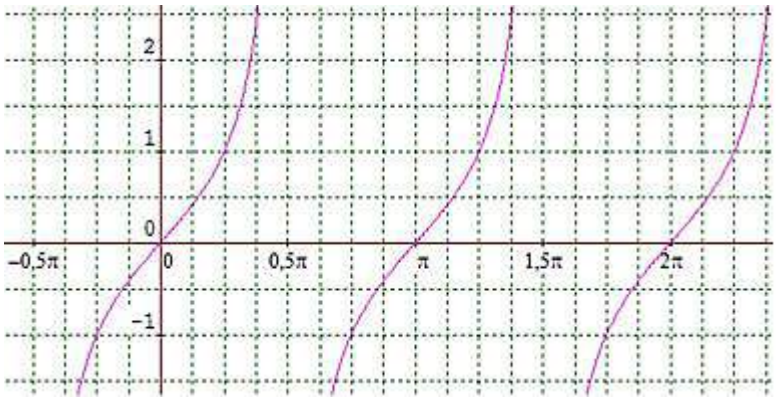



**Gráfico da função tangente**



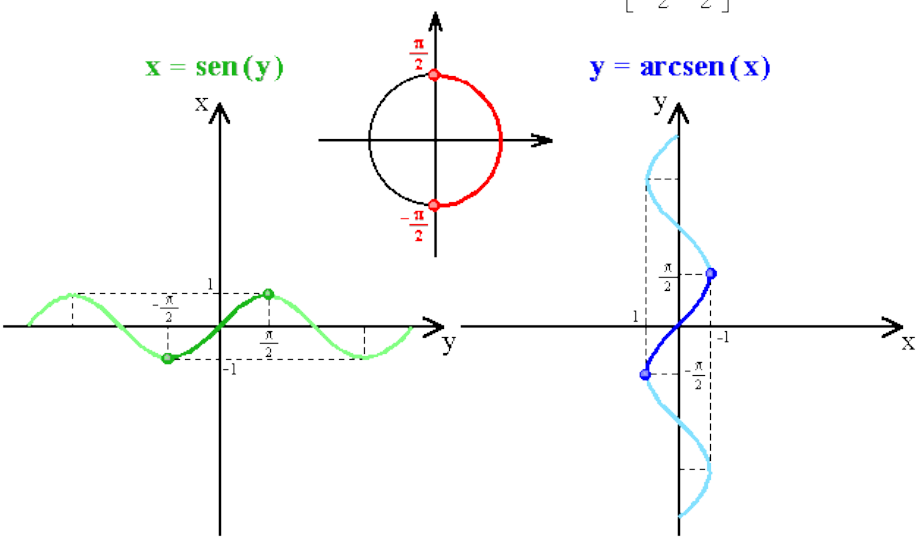

**➔ Função trigonométrica inversa**

As funções trigonométricas não são invertíveis em todo o seu domínio. Mas, para cada uma delas, podemos restringir o domínio de forma conveniente e definir uma função inversa.

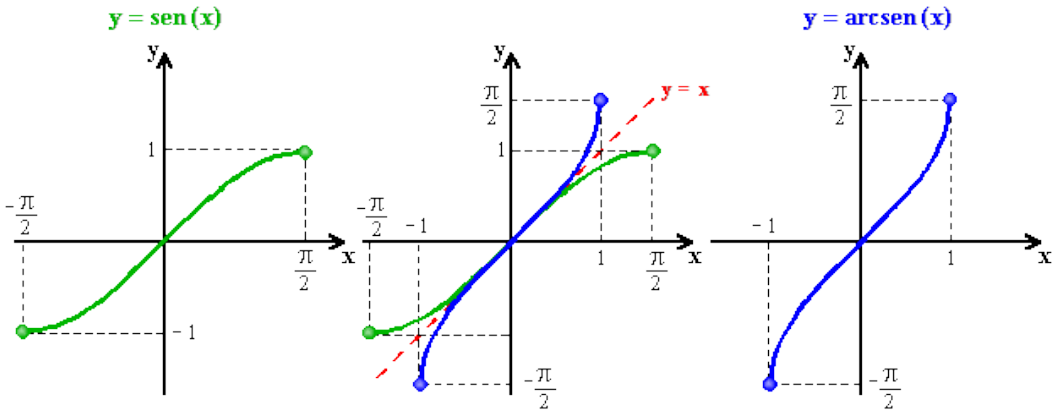
- A função inversa do seno, denotada por arcsen, é definida como:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$y = \arcsen(x) \iff x = \operatorname{sen}(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

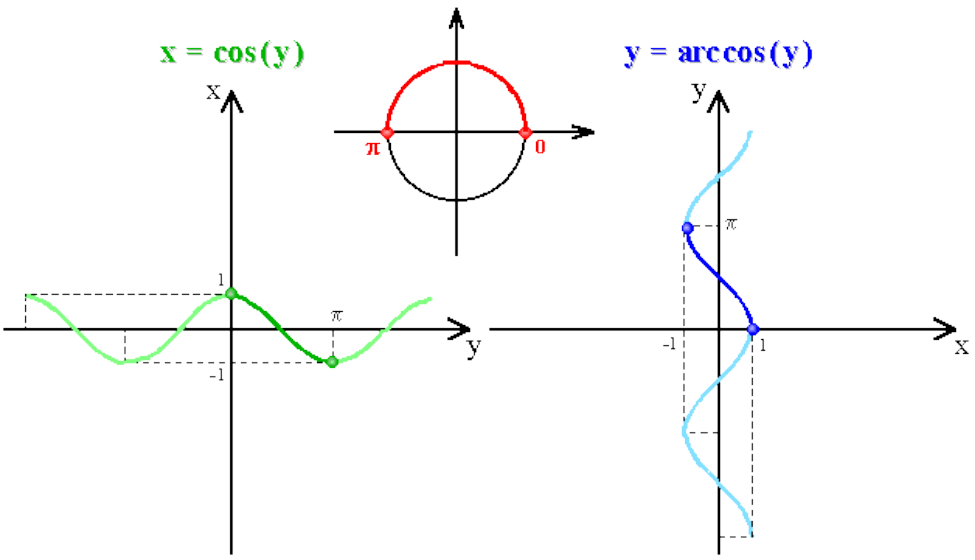



- Gráfico do Domínio e Imagem do Arsec



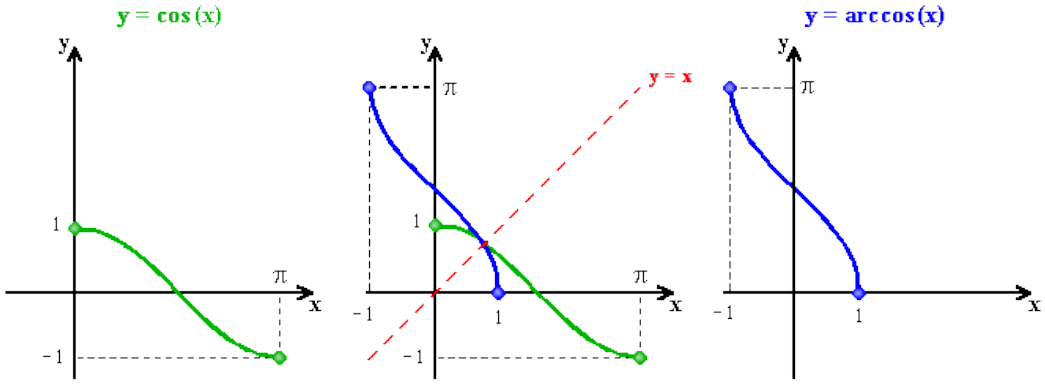

- A função inversa do cosseno, denotada por arccos, é definida como:

$$y = \arccos(x) \iff x = \cos(y) \quad \text{e} \quad y \in [0, \pi]$$



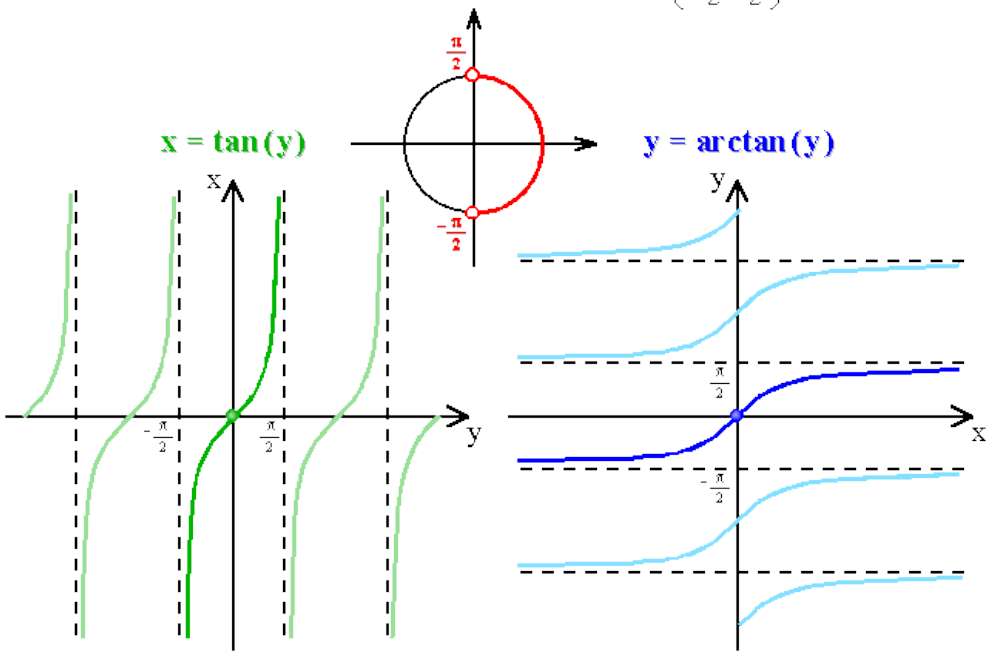

- Gráfico do Domínio e Imagem do Arccos


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




- A função inversa da tangente, denotada por arctan, é definida como:

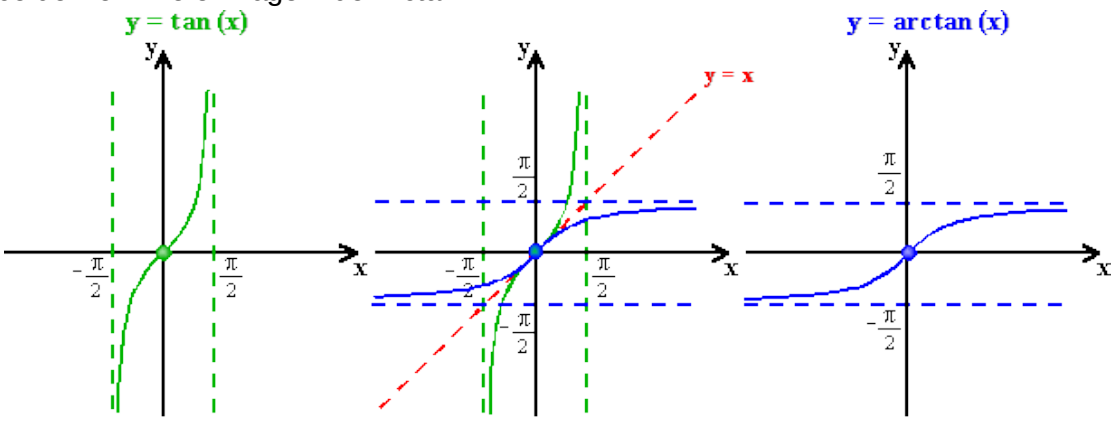
$$y = \arctan(x) \iff x = \tan(y) \quad \text{e} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- Gráfico do Domínio e Imagem do Arctan




$Dom = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$Im = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$

$Dom = \mathbb{R}$

$Im = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

## Questões

**01**. Qual o domínio e o conjunto imagem da função y = arcsen 4x?

**02.** Calcule y = tg(arcsen 2/3)

**03.** Resolver a equação 2*sen(3x) + 1 = 0

**04.** Ache o o conjunto solução da equação sen (5x) + sen (2x) = 0

## Respostas

**01.** Podemos escrever: 4x = seny. Daí, vem:

Para x: -1 £ 4x £ 1 Þ -1/4 £ x £ 1/4. Portanto, Domínio = D = [-1/4, 1/4].Para y: Da definição vista acima, deveremos ter -p /2 £ y £ p /2.

Resposta: D = [-1/4, 1/4] e Im = [-p /2, p /2].

Analogamente definiríamos as funções arco coseno e arco tangente.

**02.** Seja w = arcsen 2/3.

Podemos escrever senw = 2/3. Precisamos calcular o cosw. Vem: sen2w + cos2w = 1 (Relação Fundamental da Trigonometria). Substituindo o valor de senw vem:

(2/3)2 + cos2w = 1 de onde conclui-se: cos2w = 1 – 4/9 = 5/9.

Logo:

cosw = ± Ö 5 / 3. Mas como w = arcsen 2/3, sabemos que o arco w pode variar de –90º a +90º, intervalo no qual o coseno é positivo. Logo: cosw = +Ö 5 /3.

Temos então: y = tg(arcsen 2/3) = tgw = senw / cosw = [(2/3) / (Ö 5/3)] = 2/Ö 5

Racionalizando o denominador, vem finalmente y = (2Ö 5)/ 5 que é o valor de y procurado.

**03.** Seja 2*sen(3x) + 1 = 0

A solução é 3x = 7π/6 rad, pois sen 7π/6 = - 1/2. Assim, temos: sen 3x = sen 7π/6

Entao: 3x = 7π/6 + 2kπ ou 3x = - π/6 + 2kπ , k E R.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

x = 7π/18 + 2kπ/3 ou x = - π/18 + 2kπ/3
Concluímos que o conjunto solução é:
S = {x E R/x = 7π/18 + 2kπ/3 ou x = - π/18 + 2kπ/3, k E Z}

**04.** Observe que é possível transformar o 1º membro em um produto; além disso, o 2º membro é zero. Assim sendo, lembrando que sen p + sen q = 2*sen p + q / 2* cos p - q / 2, temos:
2*sen 5x + 2x /2*cos 5x - 2x /2 = 0 ➔ sen 7x / 2*cos3x /2 = 0 ➔ sen 7x/ 2 = 0 ou cos 3x /2 = 0
Para sen 7x/ 2 = sen 0, temos: 7x/ 2 = kπ, k E Z. Portanto: 7x = 2kπ ➔ x = 2kπ / 7, k E Z
Para cos 3x/ 2 = cos π/2, temos: 3x / 2 = π/ 2 + kπ, k E Z.
Entao: 3x = π + 2kπ ➔ x = π/ 3 + 2kπ/ 3, k E Z.
O conjunto solução é: S = {x E R/ x = π/3 + 2kπ/ 3 ou x = 2kπ/ 7, k E Z}
Obs: esse mesmo problema poderia ser resolvido assim:
sen (5x) + sen (2x) = 0 ➔ sen (5x) = - sen (2x)
como: - sen (2x) = sen (- 2x) desse modo temos:
5x = - 2x + 2kπ ou 5x = π - (-2x) + 2kπ, k E Z, daí obtemos:
x = 2kπ/ 7 ou x = π/ 3 + 2kπ/ 3, k E Z

## EQUAÇÕES TRIGNOMÉTRICAS

Para que exista uma equação qualquer é preciso que tenha pelo menos uma incógnita e uma igualdade.

Agora, para ser uma equação trigonométrica é preciso que, além de ter essas características gerais, é preciso que a função trigonométrica seja a função de uma incógnita.

sen x = cos 2x
sen 2x – cos 4x = 0
4 . sen3 x – 3 . sen x = 0

São exemplos de equações trigonométricas, pois a incógnita pertence à função trigonométrica.
x2 + sen 30° . (x + 1) = 15
Esse é um exemplo de equação do segundo grau e não de uma equação trigonométrica, pois a incógnita não pertence à função trigonométrica.

Grande parte das equações trigonométricas é escrita na forma de equações trigonométricas elementares ou **equações trigonométricas fundamentais,** representadas da seguinte forma:

**sen x = sen α**
**cos x = cos α**
**tg x = tg α**

Cada uma dessas equações acima possui um tipo de solução, ou seja, de um conjunto de valores que a incógnita deverá assumir em cada equação.

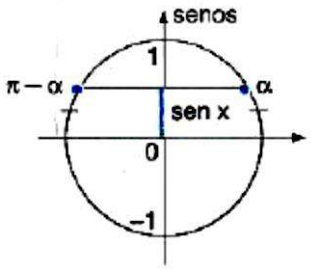
### ➔ Resolução da 1ª equação fundamental

**- Sen x = sen α**

Para que dois arcos x e α da primeira volta possuam o mesmo seno, é necessário que suas extremidades estejam sobre uma única horizontal. Podemos dizer também que basta que suas extremidades coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo dos senos.

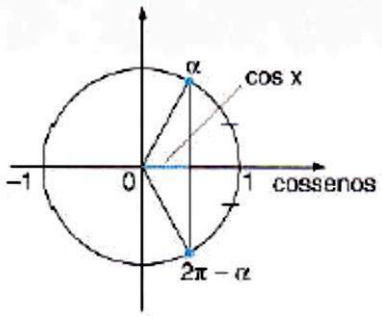
Assim, os valores de x que resolvem a equação sen x = sen α (com α conhecido) são x = α ou x = π- α. Veja a figura:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**- Cos x = cos α**

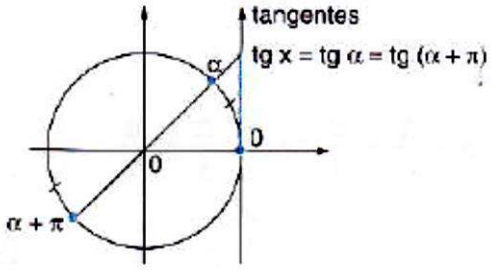
Para que x e α possuam o mesmo cosseno, é necessário que suas extremidades coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo dos cossenos, ou, em outras palavras, que ocupem no ciclo a mesma vertical.




Nessas condições, com α dado, os valores de x que resolvem a equação cos x = cos α são: x = a ou x = 2π- α.

**- Tg x = tg α**

Dois arcos possuem a mesma tangente quando são iguais ou diferem π radianos, ou seja, têm as extremidades coincidentes ou simétricas em relação ao centro do ciclo.




Assim temos x = α ou x = α ±π como raízes da equação tg x = tg α

**➔ Solução geral de uma equação**

Quando resolvemos uma equação considerando o conjunto universo mais amplo possível, encontramos a sua solução geral. Essa solução é composta de todos os valores que podem ser atribuído à incógnita de modo que a sentença se torne verdadeira.

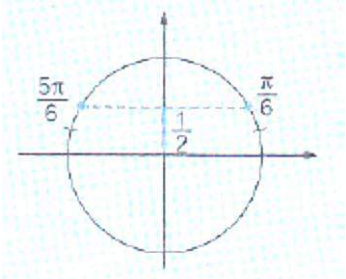
**Exemplo:**

Ao resolver a equação sen x = ½ no conjunto dos reais ( U=R), fazemos:

Sen x = ½ ➔ sen x = sen π/6 ➔ $\left| x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ou\, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \right.$

Obtendo todos os arcos x( por meio da expressão geral dos arcos x) que tornam verdadeira a sentença sen x = ½


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




Portanto: S= { x ϵ R | x = π/6 + 2kπ ou x = 5π/6 + 2kπ, k ϵ Z)

**Questão**

**01. (Bombeiros MG)** As soluções da equação trigonométrica sen2x – 1/2 = 0, que estão na primeira determinação são:

(A) x = π/12 ou x = 3π/24
(B) x = π/12 ou x = 5π/12
(C) x = π/6 ou x = 3π/12
(D) x = π/6 ou x = 5π/24

**Resposta**

**01**.Temos então: sen2x = 1/2
Os arcos cujo seno é 1/2 são π/6 e 5π/6.
Resolvendo:
2x = π/6
x = π/12
ou
2x = 5π/6
x = 5π/12

**INEQUAÇÕES TRIGNOMÉTRICAS**

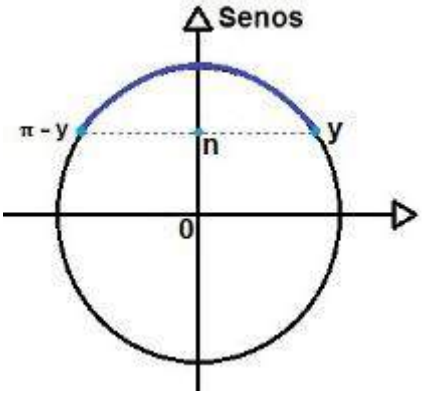
Semelhantemente ao que ocorre com as equações trigonométricas do tipo sen x = sen y e cos x = cos y ou com equações trigonométricas do tipo tg x = tg y, uma inequação é dita inequação trigonométrica quando é verificada a ocorrência de alguma função trigonométrica em pelo menos um dos lados da desigualdade. Ao trabalhar com esse tipo de inequação, normalmente é possível reduzi-la a alguma inequação conhecida, que é chamada de inequação trigonométrica fundamental.

Vejamos os seis tipos de inequações trigonométricas fundamentais:

**1° tipo) sen x > n (sen x ≥ n)**

Seja n o seno de um arco y qualquer, tal que 0 ≤ n < 1. Se sen x > n, então todo x entre y e π – y é solução da inequação, assim como podemos ver na parte destacada de azul na figura a seguir:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

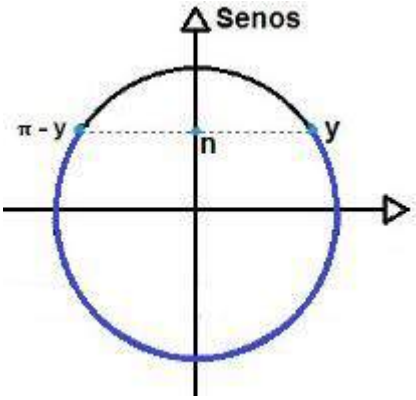



*Representação da solução da inequação trigonométrica do tipo sen x > n*

A solução dessa inequação pode ser dada na primeira volta do ciclo trigonométrico como S = { x | y < x < π – y}. Para estender essa solução para o conjunto dos reais, podemos afirmar que S = { x | y + 2kπ < x < π – y + 2kπ, k } ou S = { x | y + 2kπ < x < (2k + 1)π – y, k }

**2° tipo) sen x < n (sen x ≤ n)**

Se sen x < n, então a solução é dada por dois intervalos. A figura a seguir representa essa situação:

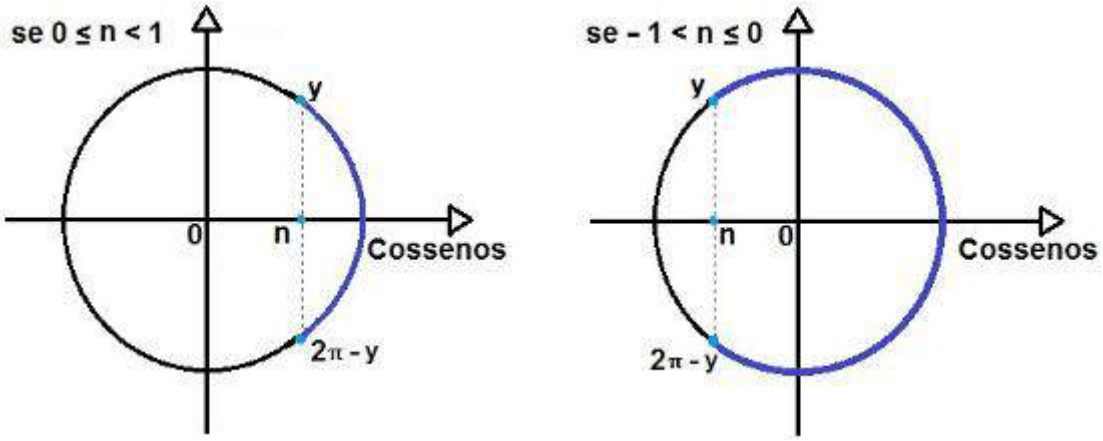



*Representação da solução da inequação trigonométrica do tipo sen x < n*

Na primeira volta do ciclo, a solução pode ser dada como S = { x | 0 ≤ x ≤ y ou π – y ≤ x ≤ 2π} . No conjunto dos reais, podemos afirmar que S = { x | 2kπ ≤ x < y + 2kπ ou π – y + 2kπ ≤ x ≤ (k + 1).2π, k }.

**3° tipo) cos x > n (cos x ≥ n)**

Seja n o cosseno de um arco y, tal que – 1 < n < 1. A solução deve ser dada a partir de dois intervalos: 0 ≤ n < 1 ou – 1 < n ≤ 0. Veja a figura a seguir:



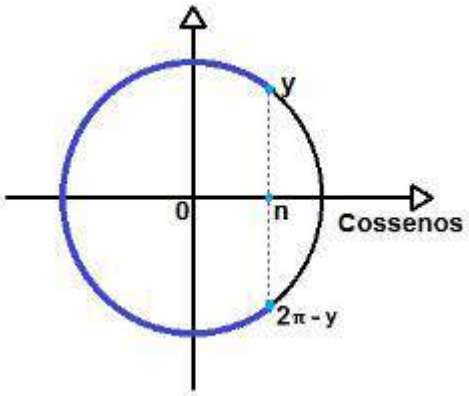

*Representação da solução da inequação trigonométrica do tipo cos x > n*

Para que a solução dessa inequação esteja na primeira volta do ciclo trigonométrico, devemos apresentar S = { x | 0 ≤ x < y ou 2π – y ≤ x < 2π }. Para estender essa solução para o conjunto dos reais, podemos dizer que S = { x | 2kπ ≤ x < π + 2kπ ou 2π – y + 2kπ < x < (k + 1).2π, k }.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**4° tipo) cos x < n (cos x ≤ n)**

Nesses casos, há apenas um intervalo e uma única solução. Observe a figura a seguir:

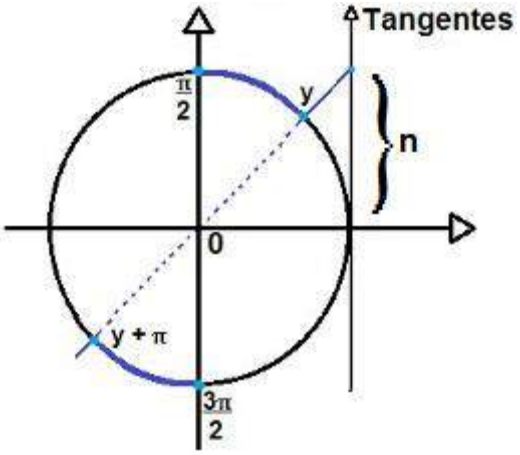



*Representação da solução da inequação trigonométrica do tipo cos x < n*

Na primeira volta do ciclo, a solução é S = { x | y < x < 2π – y}. No conjunto dos reais, a solução é S = { x | y + 2kπ < x < 2π – y + 2kπ, k }.

**5° tipo) tg x > n (tg x ≥ n)**

Seja n a tangente de um arco y qualquer, tal que n > 0. Se tg x > n, há duas soluções como podemos ver na figura:

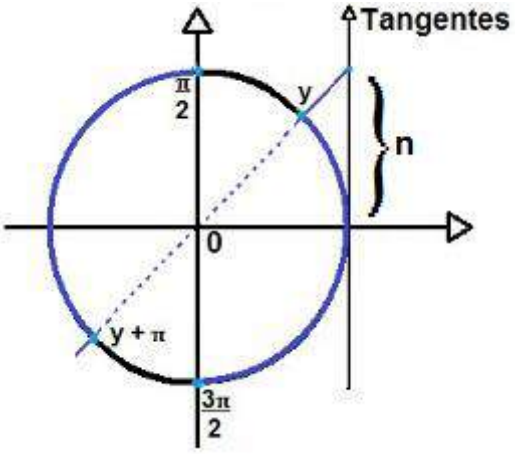



*Representação da solução da inequação trigonométrica do tipo tg x > n*

A solução dessa inequação pode ser dada no conjunto dos reais como S = { x | y + 2kπ < x < π/2 + 2kπ ou y + π + 2kπ < x < 3π/2 + 2kπ}. Na primeira volta do ciclo, temos: S = { x | y < x < π/2 ou y + π < x < 3π/2, k }.

**6° tipo) tg x < n (tg x ≤ n)**

Esse caso é semelhante ao anterior. Se n > 0, temos:




*Representação da solução da inequação trigonométrica do tipo tg x < n*


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Na primeira volta do ciclo, temos como solução: S = { x | 0 ≤ x < y ou π/2 < x < y + π ou 3π/2 < x < 2π}. No conjunto dos reais a solução é S = { x | kπ ≤ x < y + kπ ou π/2 + kπ < x < (k + 1).π, k }.

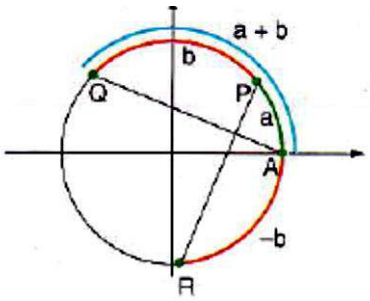
## TRANSFORMAÇÕES

Estaremos aqui obtendo fórmulas que possibilitem encontrar funções circulares da soma e diferença de dois arcos, dobro (ou triplo) de arco e transformações em produto.

**- Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos**

Observe a figura abaixo:

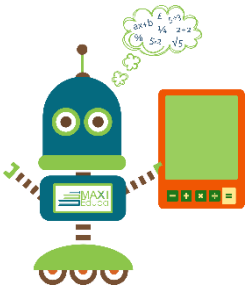
Considerando dois arcos, a e b, **cos (a + b):**




Os arcos $\widehat{APQ}$ e $\widehat{RAP}$ possuem a mesma medida (a + b) e, consequentemente, as cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ também têm medidas iguais.

As coordenadas dos pontos acimas são:
A (1,0);
P (cos a, sen a);
Q (cos (a + b), sen (a + b) e
R (cosb, - sen b).

Aplicando as fórmulas da distância entre dois pontos chegamos a:



$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(a+b) \equiv \operatorname{sen}a\cdot\cos b + \operatorname{sen}b\cdot\cos a \xrightarrow[a=b=x]{} \operatorname{sen}2x \equiv 2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x\\
&\operatorname{sen}(a-b) \equiv \operatorname{sen}a\cdot\cos b - \operatorname{sen}b\cdot\cos a\\
&\cos(a+b) \equiv \cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}a \xrightarrow[a=b=x]{} \cos 2x \equiv \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\
&\cos(a-b) \equiv \cos a\cdot\cos b + \operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}a\\
&\operatorname{tg}(a+b) \equiv \frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b} \xrightarrow[a=b=x]{} \operatorname{tg}2x \equiv \frac{2\cdot\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\\
&\operatorname{tg}(a-b) \equiv \frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}
\end{aligned}$$

**Exemplos:**

1) sen 105º = sen (60º + 45º) = sen 60º . cos 45º + sen 45º . cos 60º

$$\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2) cos 135º = cos (90º + 45º) = cos 90º . cos 45º – sen 90º . sen 45º

$$0*\frac{\sqrt{2}}{2}-1*\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**3)** Demonstre que cos (2π + x) = cos x.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

cos (2π + x) = cos 2π . cos x – sen 2π . sen x = 1 . cos x – 0 . sen x = cos x

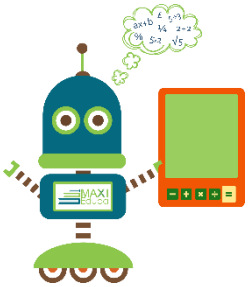
**4)** Utilizando as fórmulas da adição, desenvolva a expressão tg (π + x).

$$tg(\pi + x) = \frac{sen}{cos}(\pi + x) = \frac{sen\ \pi * cos\ x + sen\ x * cos\ \pi}{cos\ \pi * cos\ x - sen\ \pi * senx} =$$

$$= \frac{0 * cos\ x + sen\ x * (-1)}{-1 * cos\ x - 0 * sen\ x} = \frac{-sen\ x}{-cos\ x} = tg\ x$$

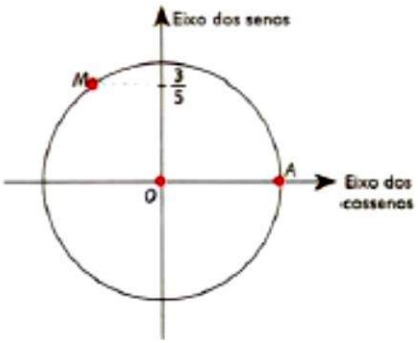
**- Arcos Duplos**

Utilizado quando as fórmulas do seno, cosseno e tangente do arco (a + b), fazemos b = a.



$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \quad \left(a \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

**Exemplos:**
Observe o ciclo trigonométrico:




Nele é mostrado um arco $\widehat{AM}$ que mede a.

Vamos determinar:
1) sen 2a.
2) cos 2a.
3) O quadrante que está o arco que mede 2a.
4) sen 3a.

Resolvendo temos:
1) sen 2ª.
Como sen 2a = 2.sen a. cos a e sabemos que sen a = 3/5 , com a no 2º quadrante, encontramos o cos através de: $sen^2\ a + cos^2\ a = 1$ ➔ $cos^2\ a = 1 - 9/25$ ➔ $cos^2\ a = 16/25$, como sabemos que a pertence ao 2º quadrante, logo o seu cosseno é negativo: cos a = -4/5.
Com isso fazemos:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} 2a = -\frac{24}{25}$$

2) cos 2a.
Como $cos\ 2a = cos^2\ a - sen^2\ a$, teremos:

$$\cos 2a = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2a = \frac{7}{25}$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

3) O quadrante que está o arco que mede 2a.

Vamos analisar, como sen 2a < 0 e cos 2a >o , podemos concluir que o arco que mede 2ª tem extremidade no 4º quadrante.

4) sen 3a.

Como sen 3a = sen (2a + a) ➔ sen 3a = sen 2a . cos a + sen a . cos 2a ➔

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 3a = \left(-\frac{24}{25}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{25}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} 3a = \frac{117}{125}$$

**- Arco Metade**

Vamos achar valores que mede a/2, conhecendo os valores das funções trigonométricas do arco que mede a.

Vamos determinar os valores partindo do cos a, partindo dele determinamos os valores de $sen\ \frac{a}{2}, cos\frac{a}{2}\ e\ tg\ \frac{a}{2}$.

Para isso utilizaremos a seguinte fórmula: **cos 2x = cos² x – sen² x**

Vamos primeiramente ajusta-la ao nosso problema fazendo 2x = a ➔ cos a = cos² a/2 – sen² a/2 (I)

Como temos que o cos² a/2 = 1 – sen² a/2:

$$\cos a = 1 - sen^2\frac{a}{2} \rightarrow 2sen^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a \rightarrow sen^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2} = \boldsymbol{sen\ \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}$$

Se em (I) substituirmos **sen² a/2** por **1 – cos² a/2**

$$\cos a = cos^2\frac{a}{2} - \left(1 - cos^2\frac{a}{2}\right) \rightarrow \cos a = 2cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2} \rightarrow \boldsymbol{cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$$

E como:

$tg\frac{a}{2} = \frac{sen\frac{a}{2}}{cos\frac{a}{2}}\left(com\ \frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi, k\ \epsilon\ Z\right), temos$:

$$\boldsymbol{tg\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}}$$

**- Funções trigonométricas de arco que mede a, em função da tangente do arco metade.**

$$\operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos a = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

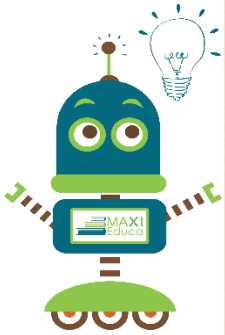


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

**- Transformação da soma em produto**

As fórmulas abaixo relacionadas nos permitirão transformar somas em produtos.



$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \cdot \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

**Exemplos:**
Vamos transformar em produtos:

1) N = sen 4x + sen 6x
Vamos chamar 4x = p e 6x = q
Usando a primeira das fórmulas vistas, obtemos:

$$N = 2.sen\ \frac{4x+6x}{2}.cos\frac{4x-6x}{2} \rightarrow N = 2.sen(5x).\cos(-x) \rightarrow N = 2.sen5x.cosx$$

2) N = 1 – sen 4x
Vamos substituir 1 por sen π/2, obtemos: $N = sen\frac{\pi}{2} - sen\ 4x$
Onde: π/2 = p e 4x = q

$$N = 2.sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}-4x}{2}\right).cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4x}{2}\right) \rightarrow N = 2.sen\left(\frac{\pi}{4}-2x\right).cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$$

**Questões**

**01. (PREF. ÁGUAS DE CHAPECÓ/SC – FARMACÊUTICO – ALTERNATIVE CONCURSOS/2013)** O valor de (sen 90º + cos 180º) é igual a:
(A) 0
(B) 3
(C) -1
(D) -2

**02. (SANEAR – FISCAL - FUNCAB/2013)** Sendo cos x =1/2 com 0° < x < 90°, determine o valor da expressão E = sen² x + tg² x.
(A) 9/4
(B) 11/4
(C) 13/4
(D) 15/4
(E) 17/4


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**03. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS – COMBATENTE/LOGÍSTICA – TÉCNICA/AVIAÇÃO – EXÉRCITO BRASILEIRO/2012)** A soma dos valores de m que satisfazem a ambas as igualdades senx=(m+1)/m e cos x=(m+2)/m é

(A) 5
(B) 6
(C) 4
(D) -4
(E) -6

**04. (PUC – SP)** Se tg (x + y) = 33 e tg x = 3, então tg y é igual a:

(A) 0,2
(B) 0,3
(C) 0,4
(D) 0,5
(E) 0,6

**Respostas**

**01. Resposta: A.**

sen 90°=1
cos〖180°〗 = -1
1+(-1)=0

**02. Resposta: D.**

Sen²x+cos²x=1

$$sen^2x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$sen^2x=1-\frac{1}{4}$$

$$sen^2x=\frac{3}{4}$$

$$senx=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como está no primeiro quadrante

$$senx=+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E=sen^2x+tg^2x=sen^2x+\frac{sen^2x}{cos^2x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{4}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$$

**03. Resposta: E.**

$$sen^2x+cos^2x=1$$

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^2+\left(\frac{m+2}{m}\right)^2=1$$

$$\frac{m^2+2m+1}{m^2}+\frac{m^2+4m+4}{m^2}-1=0$$

$$m^2+2m+1+m^2+4m+4-m^2=0$$
$$m^2+6m+5=0$$

S=-b/a
S=-6/1=-6


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**04. Resposta: B.**
O cálculo da adição de arcos da tangente é dado por:

$$tg(x+y) = \frac{\text{tg x} + \text{tg y}}{1 - \text{tg x} \,.\, \text{tg y}}$$

Sabendo que tg (x + y) = 33 e tg x = 3, temos:

$$33 = \frac{3 + \text{tg y}}{1 - 3 \,.\, \text{tg y}}$$

33 – 99.tg y = 3 + tg y
100.tg y = 30
tg y = 30/100
tg y = 0,3



## 8) Contagem e Análise Combinatória: - Fatorial: definição e operações; - Princípios multiplicativo e aditivo da contagem; - Arranjos, combinações e permutações; - Binômio de Newton: desenvolvimento, coeficientes binomiais, termo geral.

***Princípio fundamental da contagem:*** é o mesmo que a Regra do Produto, um princípio combinatório que indica quantas vezes e as diferentes formas que um acontecimento pode ocorrer. O acontecimento é formado por dois estágios caracterizados como sucessivos e independentes:

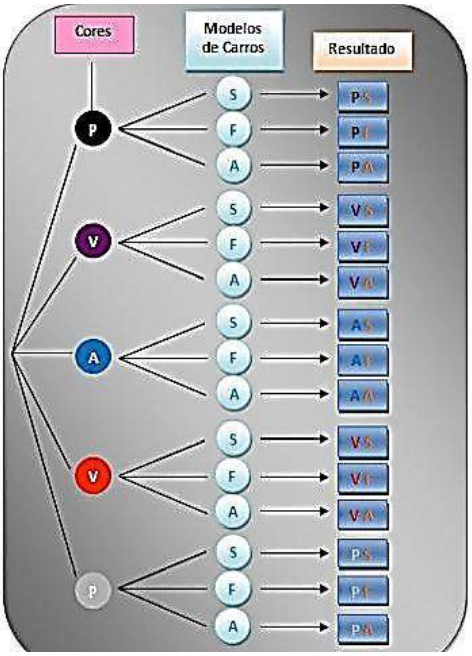
- O ***primeiro estágio*** pode ocorrer de m modos distintos.
- O ***segundo estágio*** pode ocorrer de n modos distintos.

Desse modo, podemos dizer que o número de formas diferente que pode ocorrer em um acontecimento é igual ao produto ***m . n***

**Exemplo:** Alice decidiu comprar um carro novo, e inicialmente ela quer se decidir qual o modelo e a cor do seu novo veículo. Na concessionária onde Alice foi há 3 tipos de modelos que são do interesse dela: Siena, Fox e Astra, sendo que para cada carro há 5 opções de cores: preto, vinho, azul, vermelho e prata. Qual é o número total de opções que Alice poderá fazer?

**Resolução:** Segundo o Principio Fundamental da Contagem, Alice tem 3×5 opções para fazer, ou seja,ela poderá optar por 15 carros diferentes. Vamos representar as 15 opções na árvore de possibilidades:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




***Generalizações:*** Um acontecimento é formado por k estágios sucessivos e independentes, com $n_1$, $n_2$, $n_3$, … , $n_k$ possibilidades para cada. O total de maneiras distintas de ocorrer este acontecimento é $n_1$, $n_2$, $n_3$, … , $n_k$

***Técnicas de contagem:*** Na Técnica de contagem não importa a ordem.

Considere A = {a; b; c; d; …; j} um conjunto formado por 10 elementos diferentes, e os agrupamentos **ab, ac e ca**".

**ab e ac** são agrupamentos sempre distintos, pois se diferenciam pela natureza de um dos elemento.
**ac e ca** são agrupamentos que podem ser considerados distintos ou não distintos pois se diferenciam somente pela ordem dos elementos.

Quando os elementos de um determinado conjunto *A* forem algarismos, *A* = {0, 1, 2, 3, …, 9}, e com estes algarismos pretendemos obter números, neste caso, os agrupamentos de 13 e 31 são considerados distintos, pois indicam números diferentes.

Quando os elementos de um determinado conjunto *A* forem pontos, *A* = {$A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$…, $A_9$}, e com estes pontos pretendemos obter retas, neste caso os agrupamentos $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_2A_1}$ são iguais, pois indicam a mesma reta.

***Conclusão:*** Os agrupamentos...

1. Em alguns problemas de contagem, quando os agrupamentos se diferirem pela natureza de pelo menos um de seus elementos, os agrupamentos serão considerados distintos.
**ac = ca,** neste caso os agrupamentos são denominados combinações.

Pode ocorrer: O conjunto *A* é formado por pontos e o problema é saber quantas retas esses pontos determinam.

2. Quando se diferir tanto pela natureza quanto pela ordem de seus elementos, os problemas de contagem serão agrupados e considerados distintos.
**ac ≠ ca,** neste caso os agrupamentos são denominados arranjos.

Pode ocorrer: O conjunto *A* é formado por algarismos e o problema é contar os números por eles determinados.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## FATORIAL (!)

Na matemática, o fatorial de um número natural *n*, representado por n!, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a *n*. A notação n!

Por definição temos:

- 0! = 1
- 1! = 1
- n! = n.(n – 1).(n – 2).(n – 3).....3.2.1

Exemplo: 5! = 5.4.3.2.1 =120

## TÉCNICAS DE CONTAGEM

A matemática estuda, em particular, três técnicas de contagem:

- **Arranjo**: a ordem dos elementos é importante.

- **Combinação**: a ordem dos elementos não importa.

- **Permutação**: é um arranjo de ordem máxima.

**Fórmulas**:

- Sendo **n** o total de elementos e **k** o número de elementos utilizados, temos (fórmulas de arranjo, combinação e permutação simples):

**ARRANJO**

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**COMBINAÇÃO**

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

**PERMUTAÇÃO**

$$P_n = n!$$

## Questões

**01.** Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 7?

**02.** Uma caixa automática de banco só trabalha com notas de 5 reais e 10 reais. Um usuário deseja fazer um saque de 100 reais. De quantas maneiras diferentes a caixa eletrônica poderá fazer esse pagamento?

(A) 5
(B) 6
(C) 11
(D) 15
(E) 20

**03.** Quantos números diferentes e de três algarismos distintos existem no sistema decimal de numeração?

**04.** Quantos números diferentes e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 8?


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**05**. Quantos são os anagramas da palavra BONITA?

**06**. Quantos são os anagramas da palavra BONITA que começam com vogal e terminam por consoante?

**07**. Quantos anagramas da palavra REPITO tem as letras REP juntas?

**08**. Quantos anagramas da palavra REPITO tem as letras REP juntas e nessa ordem?

**09.** Num plano são dados 10 pontos, três a três não colineares. Pergunta-se:

a) Qual o número total de retas determinadas por esses pontos?

b) Qual o número total de triângulos com vértices nesses pontos?

**10.** Cada seleção participante da copa do mundo de futebol inscreve 23 jogadores, sendo necessariamente três goleiros. Em cada partida, dois jogadores de cada seleção são escolhidos entre 0s 23 inscritos para o exame anti-doping, mas são descartadas as possibilidades de que os dois jogadores escolhidos sejam goleiros. De quantas maneiras possíveis estes dois jogadores podem ser escolhidos?

**11. (ENEM)** Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida, entre os times do grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser, respectivamente, calculadas através de:

(A) Um arranjo e uma combinação.
(B) Uma combinação e um arranjo.
(C) Um arranjo e uma permutação.
(D) Duas combinações.
(E) Dois arranjos.

**12. (ENEM)** Uma família de 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Se apenas uma pessoa dirige, de quantas maneiras diferentes os passageiros podem se acomodar no carro para uma viagem?

(A) 6
(B) 12
(C) 24
(D) 36
(E) 120

## Respostas

**01. Resposta: 125.**

O enunciado diz que temos que formar número de três algarismos e não diz que são distintos (diferentes), então podemos repetir os algarismos.

Temos 5 algarismos. Para escolher a centena temos 5 chances, para a dezena 5 chances e para a unidades 5 chances ➔ 5.5.5 = 125.

**02. Resposta: C.**

Para sacar R$ 100,00 o número de notas de R$ 5,00 não pode ser ímpar. Então:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

| Notas de R$ 5,00 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Notas de R$ 10,00 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Contando na tabela acima temos 11 chances para sacar o dinheiro.

**03. Resposta: 648.**
O enunciado diz que temos que formar número de três algarismos distintos (sem repetição).
No sistema decimal temos 10 algarismos (0 a 9). Para escolher a centena temos somente 9 chances (não podemos começar um número por zero, 023 = 23) , para a dezena 9 chances (não podemos repetir o primeiro algarismo escolhido, mas podemos colocar o zero) e para a unidades 8 chances ➔ 9.9.8 = 648.

**04. Resposta: 120.**
Formar números de três algarismos distintos (sem repetição).
Temos 6 algarismos. Para escolher a centena temos 6 chances, para a dezena 5 chances e para a unidade 4 chances ➔ 6.5.4 = 120

**05. Resposta: 720.**
A palavra BONITA tem seis letras, para formar anagramas (palavras com ou sem sentido usando todas as letras de uma outra) teremos uma permutação de 6 ➔ $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

**06. Resposta: 216.**
A palavra BONITA tem três vogais e três consoantes. Como os anagramas tem que começar por vogal e terminar por consoante: Para a 1ª letras 3 chances (Vogais) e para a última 3 chances (Consoantes) e sobra uma permutação de 4 letras no meio. V _ _ _ _ C ➔ $3.3.P_4 = 9.4.3.2.1 = 216$.

**07. Resposta: 144.**
A palavra REPITO tem seis letras. No enunciado foi dito que as letras REP tem que ficar juntas, então consideramos estas três letras como um bloco só, sobrando outras 3. [REP]_ _ _, portanto temos uma permutação de 4, porém as letras REP podem permutar entre si, ➔ $P_4.P_3 = 4!.3! = 4.3.2.1.3.2.1 = 144$.

**08. Resposta: 24.**
Mesmo raciocínio da questão anterior, REP formam um bloco, porém agora estas três letras tem que ficar nesta ordem então não haverá permutação entre elas. ➔ Temos somente $P_4 = 4.3.2.1 = 24$.

**09. Respostas: a) 45 retas e b) 120 triângulos.**
a) para formar retas temos que unir 2 pontos distintos entre os 10 dados. A ordem para unir estes 2 pontos não é importante, então temos uma combinação onde n = 10 e k = 3, basta substituir na fórmula.

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{2.1.8!} = \frac{90}{2} = 45$$

b) para formar triângulos temos que unir 3 pontos distintos entre os 10 dados, temos como no item anterior uma combinação onde n = 10 e k = 3.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = \frac{720}{6} = 120$$

**10. Resposta: 250.**
A ordem para sorteio de antidoping não é importante (João ou Jose; José ou João são os mesmos dois jogadores) então temos uma combinação onde n = 23 e k = 2; porém temos que descontar a possibilidade de sorteio de dois goleiros; outra combinação onde n = 3 e k = 2:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$C_{23,2} - C_{3,2} = \frac{23!}{2!\,(23-2)!} - \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{23.22.21!}{2.1.21!} - \frac{3.2.1!}{2.1.1!} = \frac{506}{2} - 3 = 253 - 3 = 250$$

**11. Resposta: B.**

Para a escolha do Grupo a ordem dos 4 clubes sorteados não é importante, pois o grupo será o mesmo, então temos uma combinação.

Para a escolha dos dois times para o jogo de abertura a ordem é importante, pois o primeiro sorteado fará o jogo em seu estádio, então temos um arranjo.

**12. Resposta: C.**

Temos 5 pessoas para permutar em cinco lugares dentro do carro, porém só uma delas dirigi e obrigatoriamente será o motorista, logo sobram 4 pessoas para permutar os outros 4 lugares.

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

## NÚMERO BINOMIAL

Sendo n e k dois números naturais, o número binomial de ordem n e classe k, ou simplesmente o binomial n sobre k é um novo número natural representado por:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, se n ≥ k

$\binom{n}{k} = 0$, se n < k

- Propriedades dos binomiais:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, como consequência dessa propriedade, temos que se os números naturais n, k e p forem tais que n ≥ k e n ≥ p ➔ $\binom{n}{k} = \binom{n}{p}$ ⇔ k = p ou k + p = n.

b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

c) $\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k+1}$

d) Temos que $\binom{n}{0} = 1$ , $\binom{n}{n} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$

## TRIÂNGULO DE PASCAL

**Definição**: é uma tabela formada por números binomiais dispostos de tal forma que os binomiais de mesmo numerador situam-se na mesma linha e os mesmo denominador na mesma coluna.

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$

.
.
.
.

$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \binom{n}{4} \cdots \binom{n}{n}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Resolvendo os números binomiais, temos:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
.
.
.

## BINÔMIO DE NEWTON

Denomina-se Binômio de Newton, a todo binômio da forma $(a + b)^n$, sendo *n* um número natural.

Exemplo:
$B = (3x - 2y)^4$ ( onde a = 3x, b = -2y e n = 4 [grau do binômio] ).

Exemplos de desenvolvimento de binômios de Newton:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$
c) $(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
d) $(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Nota:

Não é necessário memorizar as fórmulas acima, já que elas possuem uma lei de formação bem definida, senão vejamos:

Vamos tomar, por exemplo, o item (d) acima:

Observe que o expoente do primeiro e últimos termos são iguais ao expoente do binômio, ou seja, igual a **5**.

A partir do segundo termo, os coeficientes podem ser obtidos a partir da seguinte regra prática de fácil memorização:

Multiplicamos o coeficiente de *a* pelo seu expoente e dividimos o resultado pela ordem do termo. O resultado será o coeficiente do próximo termo. Assim por exemplo, para obter o coeficiente do terceiro termo do item (d) acima teríamos:

$5 \times 4 = 20$; agora dividimos 20 pela ordem do termo anterior (2 por se tratar do segundo termo) $20 \div 2 = 10$ que é o coeficiente do terceiro termo procurado.

Observe que os expoentes da variável *a* decrescem de *n* até 0 e os expoentes de *b* crescem de 0 até *n*. Assim o terceiro termo é $10\,a^3b^2$ (observe que o expoente de *a* decresceu de 4 para 3 e o de *b* cresceu de 1 para 2).

Usando a regra prática acima, o desenvolvimento do binômio de Newton $(a + b)^7$ será:

$(a + b)^7 = a^7 + 7\,a^6b + 21\,a^5b^2 + 35\,a^4b^3 + 35\,a^3b^4 + 21\,a^2b^5 + 7\,ab^6 + b^7$

Como obtivemos, por exemplo, o coeficiente do 6º termo $(21\,a^2b^5)$**?**

Pela regra: Coeficiente do termo anterior = 35. Multiplicamos 35 pelo expoente de *a* que é igual a 3 e dividimos o resultado pela ordem do termo que é 5.

Então, $35 \times 3 = 105$ e dividindo por 5 (ordem do termo anterior) vem $105 \div 5 = 21$, que é o coeficiente do sexto termo, conforme se vê acima.

**Observações:**

1) O desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$ é um polinômio.
2) O desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui $n + 1$ termos .
3) Os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos , no desenvolvimento de $(a + b)^n$ são iguais .
4) A soma dos coeficientes de $(a + b)^n$ é igual a $2^n$ .


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Fórmula do termo geral de um Binômio de Newton**

Um termo genérico $T_{k+1}$ do desenvolvimento de $(a + b)^n$, sendo *k* um número natural, é dado por:

a) $T_{k+1} = \binom{n}{k} . a^{n-k} . b^k$, feito segundo os expoentes **decrescentes de a**.

b) $T_{k+1} = \binom{n}{k} . a^k . b^{n-k}$, feito segundo os expoentes **crescentes de a**.

Sendo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

**Questões**

**01.** Determine o 7º termo do binômio $(2x + 1)^9$, desenvolvido segundo as potências decrescentes de x.

**02.** Qual o termo médio do desenvolvimento de $(2x + 3y)^8$?

**03.** Desenvolvendo o binômio $(2x - 3y)^{3n}$, obtemos um polinômio de 16 termos. Qual o valor de *n*?

**04.** Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $(x + \frac{1}{x})^6$.

**05.** Calcular 5!.

**06.** Calcular $\binom{5}{3}$.

**07.** Resolver a equação $\binom{2x}{x-1} = \binom{2x}{3}$.

**Respostas**

**01. Resposta: $672x^3$.**
Solução: Primeiro temos que aplicar a fórmula do termo geral de $(a + b)^n$, onde:
*a = 2x*
*b = 1*
*n = 9*
Como queremos o sétimo termo, fazemos *p = 6* na fórmula do termo geral e efetuamos os cálculos indicados.
Temos então:

$T_{6+1} = T_7 = \binom{9}{6} . (2x)^{9-6} . (1)^6 = \frac{9!}{[(9-6)! \times 6!]} . (2x)^3 . 1 = \frac{9 .8 .7 .6!}{3 .2.1 .6!} .8x^3 = 672x^3$
Portanto o sétimo termo procurado é $672x^3$.

**02. Resposta: $90720x^4y^4$.**
Solução: Temos:
*a = 2x*
*b = 3y*
*n = 8*
Sabemos que o desenvolvimento do binômio terá 9 termos, porque *n = 8*. Ora sendo $T_1$ $T_2$ $T_3$ $T_4$ **$T_5$** $T_6$ $T_7$ $T_8$ $T_9$ os termos do desenvolvimento do binômio, o termo do meio (termo médio) será o **$T_5$** (quinto termo).

Logo, o nosso problema resume-se ao cálculo do $T_5$. Para isto, basta fazer *k = 4* na fórmula do termo geral e efetuar os cálculos decorrentes. Teremos:

$T_{4+1} = T_5 = \binom{8}{4} . (2x)^{8-4} . (3y)^4 = \frac{8!}{[(8-4)! .4!]} . (2x)^4 . (3y)^4 = \frac{8 .7 .6 .5 .4!}{(4! .4 .3 .2 .1} . 16x^4 . 81y^4$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Fazendo as contas vem:

$T_5 = 70.16.81.x^4 \,.\, y^4 = 90720x^4y^4$ , que é o termo médio procurado.

**03. Resposta: 5.**

Solução: Ora, se o desenvolvimento do binômio possui 16 termos, então o expoente do binômio é igual a 15.

Logo,

3n = 15 de onde se conclui que *n = 5*.

**04. Resposta: 20.**

Solução: Sabemos que o termo independente de x é aquele que não depende de x, ou seja, aquele que não possui x.

Temos no problema dado:

a = x

b = $\frac{1}{x}$

n = 6.

Pela fórmula do termo geral, podemos escrever:

$T_{k+1} = \binom{6}{k}. x^{6-k} \,.\, (\frac{1}{x})^k = \binom{6}{k}. x^{6-k} \,.\, x^{-k} = \binom{6}{k}. x^{6-2p}$ .

Ora, para que o termo seja independente de x, o expoente desta variável deve ser zero, pois $x^0 = 1$.

Logo, fazendo 6 – 2k = 0, obtemos k = *3*. Substituindo então k por 6, teremos o termo procurado. Temos então:

$T_{3+1} = T_4 = \binom{6}{3}. x^0 = \frac{6!}{[(6-3)!\,.3!]} = \frac{6\,.5\,.4\,.3!}{3!\,.2\,.1} = 20$

Logo, o termo independente de x é o $T_4$ (quarto termo) que é igual a 20.

**05. Resposta: 120.**

Resolução: 5! = 5.4.3.2.1 = 120

**06. Resposta: 10.**

Resolução: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = \frac{5.4}{2.1} = \frac{20}{2} = 10$

**07. Resposta: x = 2 ou x = 4.**

Resolução

esses dois números binomiais são iguais se:

x – 1 = 3 ou x – 1 + 3 = 2x

x = 3 + 1 ou 2 = 2x – x

x = 4 ou x = 2



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



# 9) Probabilidade: - Experimento aleatório, experimento amostral, espaço amostral, evento; - Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis; - Probabilidade da união de dois eventos; - Probabilidade condicional; - Propriedades das probabilidades; e a Probabilidade de dois eventos sucessivos e experimentos binomiais.

O estudo da probabilidade vem da necessidade de em certas situações, prevermos a possibilidade de ocorrência de determinados fatos.

A história da teoria das probabilidades, teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

**Experimento Aleatório**

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Se lançarmos uma moeda ao chão para observarmos a face que ficou para cima, o resultado é imprevisível, pois tanto pode dar cara, quanto pode dar coroa.

Se ao invés de uma moeda, o objeto a ser lançado for um dado, o resultado será mais imprevisível ainda, pois aumentamos o número de possibilidades de resultado.

A experimentos como estes, ocorrendo nas mesmas condições ou em condições semelhantes, que podem apresentar resultados diferentes a cada ocorrência, damos o nome de experimentos aleatórios.

**Espaço Amostral**

Ao lançarmos uma moeda não sabemos qual será a face que ficará para cima, no entanto podemos afirmar com toda certeza que ou será cara, ou será coroa, pois uma moeda só possui estas duas faces. Neste exemplo, ao conjunto

{ cara, coroa } damos o nome de espaço amostral, pois ele é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer neste experimento.

Representamos um espaço amostral, ou espaço amostral universal como também é chamado, pela letra S. No caso da moeda representamos o seu espaço amostral por:

S = { cara, coroa }

Se novamente ao invés de uma moeda, o objeto a ser lançado for um dado, o espaço amostral será:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

**Evento**

Quando lançamos um dado ou uma moeda, chamamos a ocorrência deste fato de evento. Qualquer subconjunto de um espaço amostral é um evento.

Em relação ao espaço amostral do lançamento de um dado, veja o conjunto a seguir:

A = { 2, 3, 5 }

Note que $A \subset S$ ( A está contido em S, A é um subconjunto de S ). O conjunto A é a representação do evento do lançamento de um dado, quando temos a face para cima igual a um número primo.

**Classificação de Eventos**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Podemos classificar os eventos por vários tipos. Vejamos alguns deles:

**Evento Simples**

Classificamos assim os eventos que são formados por um único elemento do espaço amostral.
A = { 5 } é a representação de um evento simples do lançamento de um dado cuja face para cima é divisível por5. Nenhuma das outras possibilidades são divisíveis por 5.

**Evento Certo**

Ao lançarmos um dado é certo que a face que ficará para cima, terá um número divisor de 720. Este é um evento certo, pois 720 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1, obviamente qualquer um dos números da face de um dado é um divisor de 720, pois 720 é o produto de todos eles.
O conjunto A = { 2, 3, 5, 6, 4, 1 } representa um evento certo pois ele possui todos os elementos do espaço amostral S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

**Evento Impossível**

No lançamento conjunto de dois dados qual é a possibilidade de a soma dos números contidos nas duas faces para cima, ser igual a 15?
Este é um evento impossível, pois o valor máximo que podemos obter é igual a doze. Podemos representá-lo por $A = \emptyset$, ou ainda por A = {}.

**Conceito de probabilidade**

Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

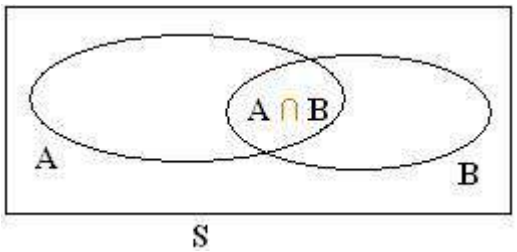
$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por, exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis, portanto, P = 3/6= 1/2 = 50%

**Probabilidade da União de dois Eventos**

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S a probabilidade de ocorrer A ou B é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$




**Verificação:**

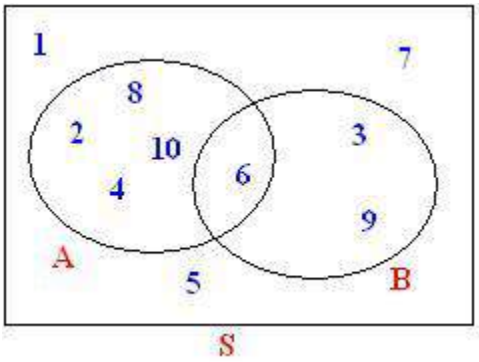
O Número de elementos de A U B é igual à soma do número de elementos de A com o número de elementos de B, menos uma vez o número de elementos de A ∩ B que foi contado duas vezes (uma em A e outra em B). Assim temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Ex: Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou múltiplos de 3?




A é o evento “múltiplo de 2”.
B é o evento “múltiplo de 3”.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$.

**Probabilidade da intersecção de dois eventos**

A probabilidade da intersecção de dois eventos ou probabilidade de eventos sucessivos determina a chance, a possibilidade, de dois eventos ocorrerem simultânea ou sucessivamente. Para o cálculo desse tipo de probabilidade devemos interpretar muito bem os problemas, lendo com atenção e fazendo o uso da seguinte fórmula:

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S. A probabilidade de $A \cap B$ é dada por:

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A) = p(B) \cdot p(A|B)$$

Onde
$p(A \cap B)$ → é a probabilidade da ocorrência simultânea de A e B
$p(A)$ → é a probabilidade de ocorrer o evento A
$p(B|A)$ → é a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo da ocorrência de A (**probabilidade condicional)**

Se os eventos A e B forem independentes (ou seja, se a ocorrência de um não interferir na probabilidade de ocorrer outro), a fórmula para o cálculo da probabilidade da intersecção será dada por:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Ex. 1. Em dois lançamentos sucessivos de um mesmo dado, qual a probabilidade de sair um número ímpar e o número 4?

Resolução: O que determina a utilização da fórmula da intersecção para resolução desse problema é a palavra “e” na frase “a probabilidade de sair um número ímpar e o número 4”. Lembre-se que na matemática “e” representa intersecção, enquanto “ou” representa união.

Note que a ocorrência de um dos eventos não interfere na ocorrência do outro. Temos, então, dois eventos independentes. Vamos identificar cada um dos eventos.

Evento A: sair um número ímpar = {1, 3, 5}
Evento B: sair o número 4 = {4}


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Espaço Amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Temos que:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

Assim, teremos:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Ex. 2. Numa urna há 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Retiram-se duas bolinhas dessa urna, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ter saído um número par e um múltiplo de 5?

Solução: Primeiro passo é identificar os eventos e o espaço amostral.

Evento A: sair um número par = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
Evento B: sair um múltiplo de 5 = {5, 10, 15, 20}
Espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

Como as duas bolinhas foram retiradas uma após a outra e não houve reposição, ou seja, não foram devolvidas à urna, a ocorrência do evento A interfere na ocorrência do B, pois haverá na urna somente 19 bolinhas após a retirada da primeira.

Assim, temos que:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

Mas

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Após a retirada da primeira bola, ficamos com 19 bolinhas na urna. Logo, teremos:

$$p(B|A) = \frac{n(B)}{n(S) - 1} = \frac{4}{19}$$

Assim, obtemos:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{19} = \frac{2}{19}$$

## Questões

**01.** Três irmãos Pedro, João e Luís foram brincar na rua. Supondo-se que as condições de retorno para casa são as mesmas para cada um deles, qual é a probabilidade de Luís voltar para casa primeiro?

**02.** Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de obtermos um número divisor de 6?

**03.** Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 amarelas. Qual a probabilidade dessa bola ser verde?


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**04.** Em uma empresa, o risco de alguém se acidentar é dado pela razão 1 em 30. Determine a probabilidade de ocorrer nessa empresa as seguintes situações relacionadas a 3 funcionários:

a) a probabilidade de todos se acidentarem

b) a probabilidade de nenhum se acidentar

**05.** Um casal planeja ter 5 filhos. Qual a probabilidade de nascerem 3 meninos e 2 meninas?

## Respostas

**01.** Como 3 é o número total de irmãos, então Luís tem 1 chance em 3 de voltar para casa primeiro, por isto a probabilidade de Luís voltar para casa antes dos seus irmãos é igual a $^1/_3$.

**02.** Como vimos acima, o espaço amostral do lançamento de um dado é:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Como estamos interessados apenas nos resultados divisores de 6, o evento E é representado por:

E = { 1, 2, 3, 6 }

Então n(E) = 4 e n(S) = 6, portanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{6} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{3}$$

Podemos também apresentar o resultado na forma de uma porcentagem:

$$P(E) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{3} \cdot 100\% \Rightarrow P(E) = 66{,}67\%$$

A probabilidade de se obter um número divisor de 6 é $^2/_3$ ou 66,67%.

**03.** Neste exercício o espaço amostral possui 12 elementos, que é o número total de bolas, portanto a probabilidade de ser retirada uma bola verde está na razão de 5 para 12.

Sendo S o espaço amostral e E o evento da retirada de uma bola verde, matematicamente podemos representar a resolução assim:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{5}{12}$$

A probabilidade de esta bola ser verde é $^5/_{12}$

**04.** a) Probabilidade de todos se acidentarem

Como o risco é de 1 em 30 temos que:

$$P = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30}$$

$$P = \frac{1}{27000}$$

P = 0,000037

P = 0,0037%

b) Probabilidade de nenhum se acidentar

Para os acidentados temos a probabilidade de 1 em 30. Nesse caso para os não acidentados temos a probabilidade de 29 em 30. Então:

$$P = \frac{29}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{29}{30}$$

$$P = \frac{24389}{27000}$$

P = 0,9033

P = 90,33%

**05.** Primeiramente, devemos observar que não importa a ordem de nascimento, assim, temos 6 opções:

- 5 meninos
- 4 meninos e 1 menina
- 3 meninos e 2 meninas
- 2 meninos e 3 meninas
- 1 menino e 4 meninas
- 5 meninas

Logo, a probabilidade de nascerem 3 meninos e 2 meninas é:

P = 1/6 = 0,1666 = 16,66%



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



# 10) Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: - Operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar, transposição produto); - Matriz inversa; - Determinante de uma matriz: definição e propriedades; e os sistemas de equações lineares.

## MATRIZ

A tabela seguinte mostra a situação das equipes no Campeonato Paulista de Basquete masculino.

| **Campeonato Paulista – Classificação** | | |
|---|---|---|
| | **Time** | **Pontos** |
| **1º** | Tilibra/Copimax/Bauru | 20 |
| **2º** | COC/Ribeirão Preto | 20 |
| **3º** | Unimed/Franca | 19 |
| **4º** | Hebraica/Blue Life | 17 |
| **5º** | Uniara/Fundesport | 16 |
| **6º** | Pinheiros | 16 |
| **7º** | São Caetano | 16 |
| **8º** | Rio Pardo/Sadia | 15 |
| **9º** | Valtra/UBC | 14 |
| **10º** | Unisanta | 14 |
| **11º** | Leitor/Casa Branca | 14 |
| **12º** | Palmeiras | 13 |
| **13º** | Santo André | 13 |
| **14º** | Corinthians | 12 |
| **15º** | São José | 12 |

*Fonte: FPB (Federação Paulista de Basquete)*
*Folha de S. Paulo – 23/10/01*

Observando a tabela, podemos tirar conclusões por meio de comparações das informações apresentadas, por exemplo:

→ COC/Ribeirão lidera a classificação com 20 pontos juntamente com Tilibra/Bauru
→ Essa informação encontra-se na 2ª linha e 3ª coluna.

**➔ Definições**

Chamamos de matriz m x n ($m \in N^*$ e $n \in N^*$) qualquer tabela formada por $m \cdot n$ elementos (informações) dispostos em m linhas e n colunas

**Exemplos:**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

1º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 x 4

2º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3 x 3

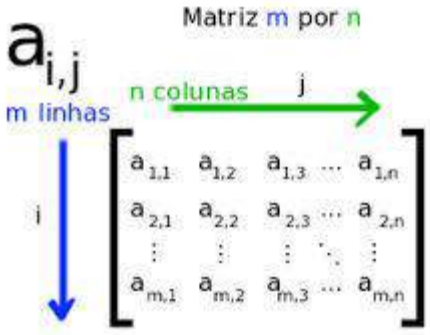
3º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz 1 x 3

4º) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 x 1

O nome de uma matriz é dado utilizando letras maiúsculas do alfabeto latino, A, por exemplo, enquanto os elementos da matriz são indicados por letras latinas minúsculas, a mesma do nome de matriz, afetadas por dois índices, que indicam a linha e a coluna que o elemento ocupa na matriz.

Assim, um elemento genérico da matriz A é representado por *aij.*

O primeiro índice, i, indica a linha que esse elemento ocupa na matriz, e o segundo índice, j, a coluna desse comando.




**Exemplo:**

Na matriz B de ordem 2 x 3 temos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = 1$; $b_{12} = 0$; $b_{13} = 3$;
$b_{21} = 2$; $b_{22} = -1$; $b_{23} = 4$

Observação: O elemento $b_{23,}$ por exemplo, lemos assim: “b dois três”

De uma forma geral, a matriz A, de ordem m x n, é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ou com a notação abreviada: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

➔ **Matrizes Especiais**

Apresentamos aqui a nomenclatura de algumas matrizes especiais:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**- Matriz Linha**

É a matriz que possui uma única linha.
**Exemplos:**
$A = [2 \quad 3 \quad 5]$
$B = [-1 \quad 0]$

**- Matriz Coluna**

É a matriz que possui uma única coluna.

**Exemplos:**
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$

**- Matriz Nula**

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

**Exemplos:**
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

**- Matriz Quadrada**

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de linhas igual ao número de colunas.

**Exemplo:**

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 2.

Observações: Quando uma matriz não é quadrada, ela é chamada de retangular.
Dada uma matriz quadrada de ordem n, chamamos de diagonal principal da matriz ao conjunto dos elementos que possuem índices iguais.

**Exemplos:**

**1)** $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\}$ é a diagonal principal da matriz A.
3ª) Dada a matriz quadrada de ordem n, chamamos de diagonal secundária da matriz ao conjunto dos elementos que possuem a soma dos dois índices igual a n + 1.

**2)** $\{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}\}$ é a diagonal secundária da matriz A.

**- Matriz Diagonal**

É a matriz quadrada que apresenta todos os elementos, não pertencentes à diagonal principal, iguais a zero.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplo:**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**- Matriz Identidade**

É a matriz diagonal que apresenta todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.
Representamos a matriz identidade de ordem n por $\mathbf{I_n}$.

**Exemplos:**

1º) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2º) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observação: Para uma matriz identidade $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$

**- Matriz Transposta**

Dada uma matriz A, chamamos de matriz transposta de A à matriz obtida de A trocando-se "ordenadamente", suas linhas por colunas. Indicamos a matriz transposta de A por $A^t$.

**Exemplo:**

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}$$

Observação: Se uma matriz A é de ordem m x n, a matriz $A^t$, transposta de A, é de ordem n x m.

**➔ Igualdade de Matrizes**

Sendo A e B duas matriz de mesma ordem, dizemos que um elemento de matriz A é correspondente a um elemento de B quando eles ocupam a mesma posição nas respectivas matrizes.

**Exemplo:**

Sendo A e B duas matrizes de ordem 2 x 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ e\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

São elementos correspondentes de A e B, os pares:

$a_{11}$ e $b_{11}$; $a_{12}$ e $b_{12}$; $a_{21}$ e $b_{21}$; $a_{22}$ e $b_{22}$.

**- Definição**

Duas matrizes A e B são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais.
Indica-se:
A = B
Então:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$

Observações: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, dizemos que uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é oposta de A quando $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo $i$, $1 \leq i \leq m$, e todo j, $1 \leq j \leq n$.
Indicamos que B = -A.

**Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

- Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, $1 \leq i \leq m$, e todo j, $1 \leq j \leq n$. Isto é, $A = A^t$.
- Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é anti-simétrica quando $a_{ij} = -a_{ij}$ para todo i, $1 \leq i \leq m$, e todo j, $1 \leq j \leq n$. Isto é, A é anti-simétrica quando $A^t = -A$.

➔ **Adição e Subtração de Matrizes**

**- Definição da Adição**
Dadas duas matrizes A e B, de mesma ordem *m x n*, denominamos soma da matriz A com a matriz B à matriz C, de ordem m x n, cujos elementos são obtidos quando somamos os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indicamos:

C = A + B

Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**- Propriedades da Adição**
Sendo A, B e C matrizes m x n e O a matriz nula m s n, valem as seguintes propriedades.
- A + B = B + A (comutativa)
- (A + B) + C = A + (B + C) (associativa)
- A + O = O + A = A (elemento neutro)
- A + (-A) = (-A) + A = O (elemento oposto)
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

**- Definição da Subtração**
Consideremos duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem m x n. Chamamos de diferença entre A e B (indicamos com A – B) a soma de A com a oposta de B.

A – B = A + (B)


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplo:**

Sendo: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação: Na prática, para obtermos a subtração de matrizes de mesma ordem, basta subtrairmos os elementos correspondentes.

➔ **Multiplicação de Matrizes por um Número Real**

**- Definição**

Consideremos uma matriz A, de ordem m x n, e um número real. O produto de por A é uma matriz B, de ordem m x n, obtida quando multiplicamos cada elemento de A por.

Indicamos:

$B = \alpha \cdot A$

**Exemplo:**

Sendo $A$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, temos

$2 \cdot A$ $\begin{bmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 \\ 2\cdot2 & 2\cdot5 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

➔ **Matrizes – Produtos**

**- Multiplicação de Matrizes**

O produto (linha por coluna) de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times p}$ por uma matriz $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é uma matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, de modo que cada elemento $c_{ij}$ é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B, e somando-se os produtos assim obtidos. Indicamos:

$B = \alpha \cdot A$

Da definição, decorre que:

- Só existe o produto de uma matriz A por uma matriz B se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

- A matriz C, produto de $A_{m \times p}$ por $B_{P \times n}$, é do tipo m x n.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Propriedades**

Sendo A uma matriz de ordem m x n, B e C matrizes convenientes e, são válidas as seguintes propriedades.

- ( A · B) · C = A · (B · C) (associativa)
- C · (A + B) = C · A + C · B (distributiva pela esquerda)
- (A + B) · C = A · C + B (distributiva pela direita)
- $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ (elemento neutro)
- $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \quad \cdot (A \cdot B)$
- $A \cdot O_{n\,x\,p} = O_{m\,x\,p}$ e $O_{p\,x\,m} \cdot A = O_{p\,x\,n}$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Observação: Para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa ($A \cdot B \neq B \cdot A$). Esta propriedade só é verdadeira em situações especiais, quando dizemos que as matrizes são comutáveis.

Devemos levar em consideração os fatos seguintes:

1º) $(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$, pois $(A + B)^2 = (A + B)(A+B) + A^2 + AB + BA + B^2$

2º) $(A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t$, pois, pela 7ª propriedade, devemos ter $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

➔ **Matriz Inversa**

No conjunto dos números reais, para todo $a \neq 0$, existe um número $b$, denominado inverso de $a$, satisfazendo a condição:

a . b = b . a = 1

Normalmente indicamos o inverso de $a$ por $\frac{1}{a}$ ou $a^{-1}$.

Analogamente para as matrizes temos o seguinte:

**- Definição**

Uma matriz A, quadrada de ordem n, diz-se inversível se, e somente se, existir uma matriz B, quadrada de ordem n, tal que:

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$

A matriz $B$ é denominada inversa de $A$ e indicada por $A^{-1}$.

**Exemplos:**

- Verifique que a matriz $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

**Resolução**

$$A.B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot B = B \cdot A = 1_2$, a matriz $B$ é a inversa de $A$, isto é, $B = A^{-1}$.

Observação: É bom obser4varmos que, de acordo com a definição, a matriz $A$ também é a inversa de $B$, isto é, $A=B^{-1}$, ou seja, $A=(A^{-1})^{-1}$.

- Encontre a matriz inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, se existir.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Resolução**

Supondo que $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de *A*, temos:

$$A.B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{cases} 3a+c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b+d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, encontramos:
$A = 1, b = -1, c = -2$ e $d = 3$

Assim, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Por outro lado:

$$B.A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz *A* é inversível e sua inversa é a matriz:

$$B=A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Observação: Quando uma matriz é inversível, dizemos que ela é uma matriz não-singular; caso a matriz não seja inversível, dizemos que ela é uma matriz singular.

**Propriedades**

Sendo *A* e *B* matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, temos as seguintes propriedades:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^t = A^t)^{-1}$
- $(A.B)^{-1}=B^{-1}..A^{-1}$
- Dada *A,* se existir $A^{-1}$, então $A^{-1}$ é única.

**Exemplo**

Sendo *A, B* e X matrizes inversíveis de ordem n, isolar X em $(X.A)^{-1}=B$.

**Resolução**

$(X.A)^{-1}=B \Rightarrow A^{-1}.X^{-1}=B$
Multiplicando os dois membros à esquerda por *A*, encontramos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$A.A^{-1}.X^{-1}=A.B$
Como $A.A^{-1}=I_n$, então:

$I_n.X^{-1}=A.B$
Como $I_n$ é elemento neutro na multiplicação de matrizes, temos:

$X^{-1}=A.B$
Elevando os dois membros da igualdade, ao expoente -1, temos:

$(X^{-1})^{-1}=(A.B)^{-1}$

Assim, $X=(A.B)^{-1}$, ou então $X=B^{-1}.A^{-1}$
O sistema obtido está escalonado e é do 2º

## Questões

**01. (PM/SE – Soldado 3ª Classe – FUNCAB/2014)** A matriz abaixo registra as ocorrências policiais em uma das regiões da cidade durante uma semana.

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 11 & 10 & 13 & 17 & 19 \\ 15 & 18 & 12 & 11 & 12 & 10 & 11 \\ 10 & 10 & 19 & 10 & 18 & 25 & 16 \end{pmatrix}$$

Sendo $M=(a_{ij})_{3x7}$ com cada elemento $a_{ij}$ representando o número de ocorrência no turno i do dia j da semana.
O número total de ocorrências no 2º turno do 2º dia, somando como 3º turno do 6º dia e com o 1º turno do 7º dia será:
(A) 61
(B) 59
(C) 58
(D) 60
(E) 62

**02. (SEAP /PR – PROFESSOR DE MATEMÁTICA – PUC/PR/2013)** As planilhas eletrônicas facilitaram vários procedimentos em muitas áreas, sejam acadêmicas ou profissionais. Na matemática, para obter o determinante de uma matriz quadrada, com um simples comando, uma planilha fornece rapidamente esse valor. Em uma planilha eletrônica, temos os valores armazenados em suas células:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | -2 | 0 | 1 | |
| 2 | 0 | 3 | -2 | 1 | |
| 3 | -3 | -1 | 5 | -4 | |
| 4 | -2 | 4 | -1 | 5 | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |

Para obter o determinante de uma matriz utiliza-se o comando "=MATRIZ.DETERM(A1:D4)" e essa planilha fornece o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -4 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Se em uma outra planilha forem armazenados os valores representados a seguir,


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -12 | 0 | 6 | |
| 2 | 18 | -12 | 6 | |
| 3 | -6 | 30 | -24 | |
| 4 | | | | |

ao acionar o comando "=MATRIZ.DETERM(A1:C3)" o valor do determinante é:
(A) 1512
(B) 7
(C) 4104
(D) 2376
(E) 8424

**02. (ESPCEX – CADETES DO EXÉRCITO – EXÉRCITO BRASILEIRO/2013)** O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 0

(D) -2

(E) $-\frac{1}{3}$

**03. (CPTM – ANALISTA DE COMUNICAÇÃO JÚNIOR – MAKIYAMA/2013)** Para que a soma de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e sua respectiva matriz transposta At em uma matriz identidade, são condições a serem cumpridas:
(A) a=0 e d=0
(B) c=1 e b=1
(C) a=1/c e b=1/d
(D) $a^2-b^2=1$ e $c^2-d^2=1$
(E) b=-c e a=d=1/2

**04. (CPTM – ALMOXARIFE – MAKIYAMA/2013)** Assinale a alternativa que apresente o resultado da multiplicação das matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(A) $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 1 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & -11 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -15 & 11 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 1 & 15 & -11 \end{pmatrix}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**05. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012)** Considere a seguinte sentença envolvendo matrizes:

$$\begin{pmatrix} 6 & y \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta o valor de y que torna a sentença verdadeira.
(A) 4.
(B) 6.
(C) 8.
(D) 10.

**06. (TRANSPETRO – ENGENHEIRO JÚNIOR – AUTOMAÇÃO – CESGRANRIO/2012)** Um sistema dinâmico, utilizado para controle de uma rede automatizada, forneceu dados processados ao longo do tempo e que permitiram a construção do quadro abaixo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 2 | 1 | 3 |

A partir dos dados assinalados, mantendo-se a mesma disposição, construiu-se uma matriz M. O valor do determinante associado à matriz M é
(A) 42
(B) 44
(C) 46
(D) 48
(E) 50

## Respostas

**01. Resposta: E.**
Turno i –linha da matriz
Turno j- coluna da matriz
2º turno do 2º dia – a22=18
3º turno do 6º dia-a36=25
1º turno do 7º dia-a17=19
Somando:18+25+19=62

**02. Resposta: A.**

A.B=I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 2a+2d & 2b+e & 2c+f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como queremos saber o elemento da segunda linha e terceira coluna(f):

$$\begin{cases} c+i=0 \\ 2c+f=0 \\ f+i=1 \end{cases}$$

Da primeira equação temos:
c=-i
substituindo na terceira:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

f-c=1

$$\begin{cases} 2c + f = 0(x-1) \\ f - c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2c - f = 0 \\ f - c = 1 \end{cases}$$

Somando as equações:
-3c=1
C=-1/3
f=2/3

**03. Resposta: E.**

$$A + A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2a=1
a=1/2
b+c=0
b=-c
2d=1
D=1/2

**04. Resposta: B.**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 4 + 1\cdot(-3) & 2\cdot(-2) + 1\cdot 5 \\ 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) & 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & -11 \end{pmatrix}$$

**05. Resposta: D.**

$$\begin{pmatrix} 6+1=7 & y-3=7 \\ 7+8=15 & 2+5=7 \end{pmatrix}$$

y=10

**06. Resposta: D.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Como é uma matriz 4x4 vamos achar o determinante através do teorema de Laplace. Para isso precisamos, calcular os cofatores. Dica: pela fileira que possua mais zero. O cofator é dado pela fórmula: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D$. Para o determinante é usado os números que sobraram tirando a linha e a coluna.

$$C_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$C_{13} = 27 + 8 - 6 - 6 = 23$
$A_{13}$=2.23=46


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$C_{43} = -(1 + 12 - 6 - 9) = 2$
$A_{43}$=1.2=2
D=46+2=48

## DETERMINANTES

Chamamos de determinante a teoria desenvolvida por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, como Leibniz e Seki Shinsuke Kowa, que procuravam uma fórmula para determinar as soluções de um "Sistema linear", assunto que estudaremos a seguir.

Esta teoria consiste em associar a cada matriz quadrada *A*, um único número real que denominamos determinante de *A* e que indicamos por det *A* ou colocamos os elementos da matriz *A* entre duas barras verticais, como no exemplo abaixo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

### Definições

### Determinante de uma Matriz de Ordem 1

Seja a matriz quadrada de ordem 1: $A=[a_{11}]$
Chamamos determinante dessa matriz o número:
$\det A=[a_{11}]= a_{11}$

### Exemplos

- $A=[-2] \rightarrow \det A=-2$
- $B=[5] \rightarrow \det B=5$
- $C=[0] \rightarrow \det C=0$

### Determinante de uma Matriz de ordem 2

Seja a matriz quadrada de ordem 2:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Chamamos de determinante dessa matriz o número:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$$

Para facilitar a memorização desse número, podemos dizer que o determinante é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Esquematicamente:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplos**

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

det $A$=1.3-5.2=-7

- $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

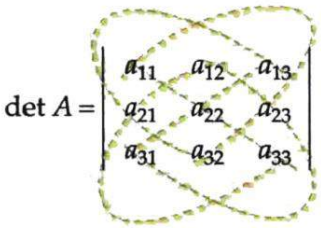
det $B$=2.3-2.(-1)=8

**Determinante de uma Matriz de Ordem 3**

Seja a matriz quadrada de ordem 3:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

Chamamos determinante dessa matriz o número:



$\det A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{32}\,a_{21}\,a_{13} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} +$

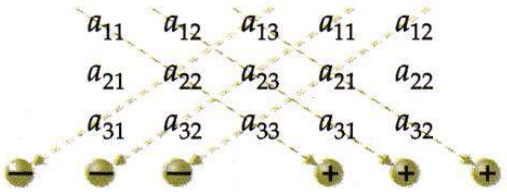
$-a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11}$

Para memorizarmos a definição de determinante de ordem 3, usamos a regra prática denominada Regra de Sarrus:

- Repetimos a 1º e a 2º colunas às direita da matriz.

$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{11}\ a_{12}$
$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{21}\ a_{22}$
$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{31}\ a_{32}$

- Multiplicando os termos entre si, seguindo os traços em diagonal e associando o sinal indicado dos produtos, temos:



$\det A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} +$

$-a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Observação: A regra de Sarrus também pode ser utilizada repetindo a 1º e 2º linhas, ao invés de repetirmos a 1º e 2º colunas.

**Determinantes – Propriedades - I**

Apresentamos, a seguir, algumas propriedades que visam a simplificar o cálculo dos determinantes:

**Propriedade 1:** O determinante de uma matriz *A* é igual ao de sua transposta $A^t$.

**Exemplo**

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det A = ad-bc \\ \det A^t = ad-bc \end{array}\right\} \Rightarrow \det A^t = \det A$$

**Propriedade 2:** Se B é a matriz que se obtém de uma matriz quadrada A, quando trocamos entre si a posição de duas filas paralelas**,** então:
det*B* = -det*A*

**Exemplo**

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

*B* foi obtida trocando-se a 1º pela 2º linha de *A.*
det*A* = ad-bc
debt = BC-ad = -(ad-bc) = -det*A*

Assim,
det*B* = -det*A*

**Consequência da Propriedade 2:** Uma matriz *A* que possui duas filas paralelas "iguais"tem determinante igual a zero.

Justificativa: A matriz que obtemos de *A*, quando trocamos entre si as duas filas (linha ou coluna "iguais", é igual a *A*. Assim, de acordo com a propriedade 2, escrevemos que det*A* = -det*A*

Assim: det*A* = 0

**Propriedade 3:** Sendo *B* uma matriz que obtemos de uma matriz quadrada *A*, quando multiplicamos uma de sua filas (linha ou coluna) por uma constante k, então det*B* = k.det*A*

**Consequência da Propriedade 3:** Ao calcularmos um determinante, podemos "colocar em evidência"um "fator comum" de uma fila (linha ou coluna).

**Exemplo**

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Sendo *A* uma matriz quadrada de ordem *n*, a matriz k. *A* é obtida multiplicando todos os elementos de *A* por k, então:

$\det(k.A)=k^n.\det A$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplo**

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{k.}A=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{k.}A)=\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}=\text{k.k.k.}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Assim:
$\det(\text{k.}A)=k^3.\det A$

**Propriedade 4:** Se *A, B* e *C* são matrizes quadradas de mesma ordem, tais que os elementos correspondentes de *A, B* e *C* são iguais entre si, exceto os de uma fila, em que os elementos de *C* são iguais às somas dos seus elementos correspondentes de *A* e *B*, então.

$$\det C = \det A + \det B$$

**Exemplos:**

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ e & f & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ e & f & t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & x+r \\ c & d & y+s \\ e & f & z+t \end{vmatrix}$$

**➔ Propriedades dos Determinantes**

**- Propriedades 5 (Teorema de Jacobi)**

O determinante não se altera, quando adicionamos uma fila qualquer com outra fila paralela multiplicada por um número.

**Exemplo:**

Considere o determinante $\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Somando a 3ª coluna com a 1ª multiplicada por m, teremos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} \underset{\equiv}{(P4)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & ma \\ d & e & md \\ g & h & mg \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix}=\det A+m\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}}_{\text{Igual a zero}}$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} = \det A$$

**Exemplo:**

Vamos calcular o determinante *D* abaixo.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$D = 8 + 0 + 0 – 60 – 0 – 0 = -52$

Em seguida, vamos multiplicar a 1ª coluna por 2, somar com a 3ª coluna e calcular:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 12 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$D_1 = 48 + 0 + 0 – 100 – 0 – 0 = -52$

Observe que $D_1=D$, de acordo com a propriedade.

**- Consequência**

Quando uma fila de um determinante é igual à soma de múltiplos de filas paralelas (combinação linear de filas paralelas), o determinante é igual a zero.

**Exemplo:**

Seja $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & -1 & 05 \end{vmatrix}$

Observe que cada elemento de 3ª coluna é igual à 1ª coluna multiplicada por 2 somada com a 2ª coluna multiplicada por 3.

8 = 2(1) + 3(2) = 2 + 6
12 = 2(3) + 3(2) = 6 + 6
5 = 2(4) + 3(-1) = 8 - 3
Portanto, pela consequência da propriedade 5, *D* = 0
Use a regra de Sarrus e verifique.

**- Propriedade 6 (Teorema de Binet)**

Sendo *A* e *B* matrizes quadradas de mesma ordem, então:
$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$

**Exemplo:**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det A=3$

$B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det B=-2$

$A.B=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 6 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A.B)=-6$

Logo, $\det(AB)=\det A.\ \det B$

Consequências: Sendo $A$ uma matriz quadrada e $n \in N^*$, temos:
$\det(Na) = (\det A)^n$

Sendo $A$ uma matriz inversível, temos:

$$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$$

Justificativa: Seja $A$ matriz inversível.
$A^{-1}.A=I$
$\det(A^{-1}.A) = \det I$
$\det A^{-1}.\det A = \det I$

$$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$$

Uma vez que $\det I=1$, onde i é a matriz identidade.

**➔ Determinantes – Teorema de Laplace**

**- Menor complementar e Co-fator**

Dada uma matriz quadrada $A=(a_{ij})_{nxn}$ $(n \geq 2)$, chamamos menor complementar do elemento $a_{ij}$ e indicamos por $M_{ij}$ o determinante da matriz quadrada de ordem n-1, que se obtém suprimindo a linha *i* e a coluna *j* da matriz *A*.

**Exemplo:**

Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$, temos:

$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2$

$M_{12}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8$

$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$

Chamamos co-fatorn do elemento $a_{ij}$ e indicamos com $A_{ij}$ o número $(-1)^{i+j}.M_{ij}$, em que $M_{ij}$ é o menor complementar de $a_{ij}$.

**Exemplo:**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Sendo $A\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

$A_{11}=(-1)^{1+1}.M_{11}=(-1)^2.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-9$

$A_{12}=(-1)^{1+2}.M_{12}=(-1)^3.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-3$

$A_{33}=(-1)^{3+3}.M_{33}=(-1)^6.\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5$

Dada uma matriz $A=(a_{ij})_{nxm}$, com $n\geq 2$, chamamos matriz co-fatora de $A$ a matriz cujos elementos são os co-fatores dos elementos de $A$; indicamos a matriz co-fatora por cof $A$. A transposta da matriz co-fatora de $A$ é chamada de matriz adjunta de $A$, que indicamos por adj. $A$.

**Exemplo:**

Sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$A_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2$

$A_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-5$

$A_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2$

$A_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$

$A_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-7$

$A_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=10$

$A_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-3$

$A_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3$

$A_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3$

Assim:

cof $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -7 & 10 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ e adj $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & -7 & 3 \\ 2 & 10 & -3 \end{bmatrix}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

➔ **Determinante de uma Matriz de Ordem *n***

**-Definição**
Vimos até aqui a definição de determinante para matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3.

Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n*.

Então:

- Para $n = 1$
$A=[a_{11}] \Rightarrow \det A=a_{11}$

- Para $n \geq 2$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... & a_{2n} \\ ..... & & \\ a_{n1} & a_{n2} ... & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}.A_{1j}$$

ou seja:
$\det A = a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+\ldots+a_{1n}.A_{1n}$

Então, o determinante de uma matriz quadrada de ordem *n*, $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha da matriz pelos respectivos co-fatores.

**Exemplos:**

Sendo $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos:

$\det A = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12}$, *onde:*
$A_{11} = (-1)^{1+1}.|a_{22}| = a_{22}$
$A_{12} = (-1)^{1+2}.|a_{21}| = a_{21}$

Assim:
$\det A = a_{11}.a_{22} + a_{12}.(-a_{21})$

$\det A = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$

Nota: Observamos que esse valor coincide com a definição vista anteriormente.

- Sendo $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 23 & 5 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = 3.A_{11} + \underbrace{0.A_{12}+0.A_{13}+0.A_{14}}_{zero}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -11$$

Assim:

$\det A = 3.(-11) \Rightarrow$ $\boxed{\det A=-33}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Nota: Observamos que quanto mais “zeros” aparecerem na primeira linha, mais o cálculo é facilitado.

**- Teorema de Laplace**

Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$, $n \Rightarrow 2$, seu determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos co-fatores.

**Exemplo:**

Sendo $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Devemos escolher a 4ª coluna para a aplicação do teorema de Laplace, pois, neste caso, teremos que calcular apenas um co-fator.

Assim:

$\det A = 2.A_{14} + 0.A_{24} + 0.A_{34} + 0.A_{44}$

$A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}=+21$

$\det A = 2 \cdot 21 = 42$

Observações Importantes: No cálculo do determinante de uma matriz de ordem $n$, recaímos em determinantes de matrizes de ordem $n-1$, e no cálculo destes, recaímos em determinantes de ordem $n-2$, e assim sucessivamente, até recairmos em determinantes de matrizes de ordem 3, que calculamos com a regra de Sarrus, por exemplo.

- O cálculo de um determinante fica mais simples, quando escolhemos uma fila com a maior quantidade de zeros.
- A aplicação sucessiva e conveniente do teorema de Jacobi pode facilitar o cálculo do determinante pelo teorema de Laplace.

**Exemplo:**

Calcule $\det A$ sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

A 1ª coluna ou 2ª linha tem a maior quantidade de zeros. Nos dois casos, se aplicarmos o teorema de Laplace, calcularemos ainda três co-fatores.

Para facilitar, vamos “fazer aparecer zero”em $A_{31}$=-2 e $A_{41}$=3 multiplicando a 1ª linha por 2 e somando com a 3ª e multiplicando a 1ª linha por -3 e somando com a 4ª linha; fazendo isso, teremos:

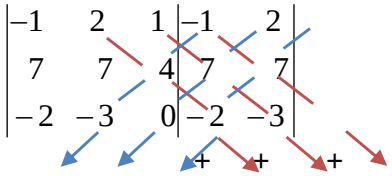
$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Agora, aplicamos o teorema de Laplace na 1ª coluna:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$\det A = 1.(-1)^{1+1}.\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Aplicamos a regra de Sarrus,




$\det A = (0 - 16 - 21) - (-14 + 12 + 0)$
$\det A = 0 - 16 - 21 + 14 - 12 - 0 = -49 + 14$
$\det A = -35$

**- Uma aplicação do Teorema de Laplace**

Sendo *A* uma matriz triangular**,** o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal; podemos verificar isso desenvolvendo o determinante de *A* através da 1ª coluna, se ela for triangular superior, e através da 1ª linha, se ela for triangular superior, e através da 1ª linha, se ela for triangular inferior.

Assim:

**1ª. *A* é triangular superior**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33}. \ldots .a_{nn}$

**2ª. *A* é triangular inferior**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33}. \ldots .a_{nn}$

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\det I_n = 1$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**- Determinante de Vandermonde e Regra de Chió**

Uma determinante de ordem $n \geq 2$ é chamada determinante de Vandermonde ou determinante das potências se, e somente se, na 1ª linha (coluna) os elementos forem todos iguais a 1; na 2ª, números quaisquer; na 3ª, os seus quadrados; na 4ª, os seus cubos e assim sucessivamente.

**Exemplos:**

- Determinante de Vandermonde de ordem 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

- Determinante de Vandermonde de ordem 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Os elementos da 2ª linha são denominados **elementos característicos.**

**- Propriedade**

Um determinante de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças que se obtêm subtraindo-se de cada um dos elementos característicos os elementos precedentes, independente da ordem do determinante.

**Exemplo:**

Calcule o determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 7 & 49 \end{vmatrix}$$

Sabemos que $\det A = \det A^t$, então:

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 16 & 49 \end{vmatrix}$$

Que é um determinante de Vandermonde de ordem 3, então:
$\det A = (4 - 2).(7 - 2).(7 - 4) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$

**Questões**

**01. (COBRA Tecnologia S-A (BB) - Analista Administrativo - ESPP/2013)** O valor de b para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & \frac{b}{2} \\ 2 & y \end{bmatrix}$ seja igual a 8, em que x e y são as coordenadas da solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, é igual a:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) 2.
(B) –2.
(C) 4.
(D) –1.

**02. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012)** É correto afirmar que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ é igual a zero para x igual a
(A) 1.
(B) 2.
(C) -2.
(D) -1.

**03. (CGU – ADMINISTRATIVA – ESAF/2012)** Calcule o determinante da matriz:
$\begin{pmatrix} cos\, x & sen\, x \\ sen\, x & \cos x \end{pmatrix}$

(A) 1
(B) 0
(C) cos 2x
(D) sen 2x
(E) sen x/2

**04. (PREF. ARARAQUARA/SP – AGENTE DA ADMINISTRAÇÃO DOS SERVIÇOS DE SANEAMENTO – CETRO/2012)** Dada a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 2, se\ i > j \\ -1, se\ i \leq j \end{cases}$, assinale a alternativa que apresenta o valor do determinante de A é
(A) -9.
(B) -8.
(C) 0.
(D) 4.

**05. (COBRA TECNOLOGIA – TÉCNICO DE OPERAÇÕES – DOCUMENTOS/QUALIDADE - ESPP/2012)** O valor de b para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & \frac{b}{2} \\ 2 & y \end{bmatrix}$ seja igual a 8, em que x e y são as coordenadas da solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ é igual a:
(A) 2.
(B) -2.
(C) 4.
(C) -1.

**Respostas**

**01. Resposta: B.**

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \ \ (x - 2) \\ \quad 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -14 \\ \quad 2x + y = 8 \end{cases}$$

-3y=-6
Y=2
X=7-2y
x=7-4=3


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{vmatrix} 3 & \frac{b}{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

6-b=8
B=-2

**02. Resposta: C.**
D=4-(-2x)
0=4+2x
X=-2

**03. Resposta: C.**
det=cos²x-sen²x
det=cos 2x

**04. Resposta: A.**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

detA=-1-4+2-(2+2+2)=-9

**05. Resposta: B.**

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \ \ (x-2) \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Somando as equações:
-3y=-6
Y=2
X=7-4=3

$$Det = \begin{vmatrix} 3 & \frac{b}{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

6-b=8
B=-2

## SISTEMA LINEAR

O estudo dos sistemas de equações lineares é de fundamental importância em Matemática e nas ciências em geral. Você provavelmente já resolveu sistemas do primeiro grau, mais precisamente aqueles com duas equações e duas incógnitas.

Vamos ampliar esse conhecimento desenvolvendo métodos que permitam resolver, quando possível, sistemas de equações do primeiro grau com qualquer número de equações e incógnitas. Esses métodos nos permitirão não só resolver sistemas, mas também classificá-los quanto ao número de soluções.

**Equações Lineares**

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, onde $a_1$, $a_2$, $a_3$,.., $a_n$ e b são números reais e $x_1$, $x_2$, $x_3$,.., $x_n$ são as incógnitas.

Os números reais $a_1$, $a_2$, $a_3$,.., $a_n$ são chamados de coeficientes e b é o termo independente.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplos**

- São equações lineares:

$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$

$2x – y\ 2z = 1$

$0x + 0y + 0z = 2$

$0x + 0y + 0z = 0$

- Não são equações lineares:

$x^3-2y+z = 3$

($x^3$ é o impedimento)

$2x_1 – 3x_1x_2 + x_3 = -1$

($-3x_1x_2$ é o impedimento)

$2x_1 – 3\frac{3}{x_2} + x_3 = 0$

($\frac{3}{x_2}$ é o impedimento)

Observação: Uma equação é linear quando os expoentes das incógnitas forem iguais a l e em cada termo da equação existir uma única incógnita.

**Solução de ama Equação Linear**

Uma solução de uma equação linear $a_1x_l + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, é um conjunto ordenado de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ para o qual a sentença $a_1\{\alpha_1) + a_2\{\alpha a_2) + a_3(\alpha_3) + ... + a_n(\alpha_n) = b$ é verdadeira.

**Exemplos**

- A terna (2, 3, 1) é solução da equação:

$x_1 – 2x_2 + 3x_3 = -1$ pois:

$(2) – 2.((3) + 3.(1) = -1$

- A quadra (5, 2, 7, 4) é solução da equação:

$0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ pois:

$0.(5) + 0.(2) + 0.(7) + 0.(4) = 0$

**Conjunto Solução**

Chamamos de conjunto solução de uma equação linear o conjunto formado por todas as suas soluções.

Observação: Em uma equação linear com 2 incógnitas, o conjunto solução pode ser representado graficamente pelos pontos de uma reta do plano cartesiano.

Assim, por exemplo, na equação

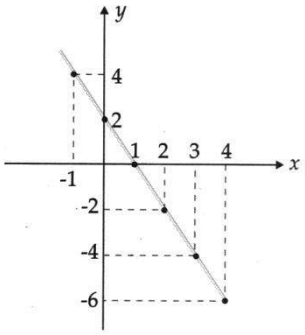
$2x + y = 2$

Algumas soluções são (1, 0), (2, -2), (3, -4), (4, -6), (0, 2), (-1,4), etc.

Representando todos os pares ordenados que são soluções da equação dada, temos:



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Equação Linear Homogênea**

Uma equação linear é chamada homogênea quando o seu termo independente for nulo.

**Exemplo**

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0$

Observação: Toda equação homogênea admite como solução o conjunto ordenado de "zeros" que chamamos solução nula ou solução trivial.

**Exemplo**

(0, 0, 0) é solução de $3x + y - z - 0$

**Equações Lineares Especiais**

Dada a equação:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, temos:

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = na = b = 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n$, e, neste caso, qualquer seqüências $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ será solução da equação dada.

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$ e $b \neq 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = b \neq 0$, e, neste caso, não existe seqüências de reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ que seja solução da equação dada.

**Sistema Linear 2 x 2**

Chamamos de sistema linear 2 x 2 o conjunto de equações lineares a duas incógnitas, consideradas simultaneamente.

Todo sistema linear 2 x 2 admite a forma geral abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2 + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Um par $(\alpha_1, \alpha_2)$ é solução do sistema linear 2 x 2 se, e somente se, for solução das duas equações do sistema.

**Exemplo**

(3, 4) é solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

pois é solução de suas 2 equações:

(3) - (4) = -1 e 2.(3) + (4) = 10

**Resolução de um Sistema 2 x 2**

Resolver um sistema linear 2 x 2 significa obter o conjunto solução do sistema.

Os dois métodos mais utilizados para a resolução de um sistema linear 2x2 são o método da substituição e o método da adição.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Para exemplificar, vamos resolver o sistema 2 x 2 abaixo usando os dois métodos citados.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

**1. Método da Substituição:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \quad (I) \\ x - y = -1 \quad (II) \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos x = y -1, que substituímos na equação (I)
$2(y- 1) +3y = 8 \rightarrow 5y = 10 \rightarrow y = 2$

Fazendo y = 2 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

**2. Método da Adição:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \quad (I) \\ x - y = -1 \quad (II) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação II por 3 e a adicionamos, membro a membro, com a equação I.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 3y = -3 \\ \hline 5x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{5} = 1 \end{cases}$$

Fazendo x = 1 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

**Sistema Linear 2 x 2 com infinitas soluções**

Quando uma equação de um sistema linear 2 x 2 puder ser obtida multiplicando-se a outra por um número real, ao tentarmos resolver esse sistema, chegamos numa igualdade que é sempre verdadeira, independente das incógnitas. Nesse caso, existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

**Exemplo**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 (I) \\ -4x - 6y = -16 (II) \end{cases}$$

Note que se multiplicando a equação (I) por (-2) obtemos a equação (II).
Resolvendo o sistema pelo método da substituição temos:

Da equação (I), obtemos $y = \dfrac{8 - 2x}{3}$, que substituímos na equação (II).

$$-4x - 6 . \left( \frac{8 - 2x}{3} \right) = -16 \rightarrow -4x - 2(8 - 2x) = -16$$

$$-4x - 16 + 4x = -16 \rightarrow -16 = -16$$

- 16= -16 é uma igualdade verdadeira e existem infinitos pares ordenados que sejam soluções do sistema.

Entre outros, (1, 2), (4, 0), $\left( \frac{5}{2}, 1 \right)$ e $\left( 0, \frac{8}{3} \right)$ são soluções do sistema.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Sendo $\alpha$, um número real qualquer, dizemos que $\left(\alpha, \frac{8-2\alpha}{3}\right)$ é solução do sistema.

(Obtemos $\frac{8-2\alpha}{3}$ substituindo x =α na equação (I)).

**Sistema Linear 2 x 2 com nenhuma solução**

Quando duas equações lineares têm os mesmos coeficientes, porém os termos independentes são diferentes, dizemos que não existe solução comum para as duas equações, pois substituindo uma na outra, obtemos uma igualdade sempre falsa.

**Exemplo**

2x + 3y = 6 (I) e 2x + 3y = 5 (II)

Substituindo 2x + 3y da equação (I) na equação (II) obtemos:

6 = 5 que é uma igualdade falsa. Se num sistema 2 x 2 existir um número real que, multiplicado por uma das equações, resulta uma equação com os mesmos coeficientes da outra equação do sistema, porém com termos independentes diferentes, dizemos que não existe par ordenado que seja solução do sistema.

**Exemplo**

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(II) \end{cases}$$

Multiplicando-se equação (I) por 2 obtemos:

2x + 4y = 10

Que tem os mesmo coeficientes da equação (II), porém os termos independentes são diferentes.

Se tentarmos resolver o sistema dado pelo método de substituição, obtemos uma igualdade que é sempre falsa, independente das incógnitas.

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(II) \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos $\left(y=\frac{5-x}{2}\right)$, que substituímos na equação (II)

$2x - 4.\left(\frac{5-x}{2}\right) = 7 \rightarrow 2x + 2(5 - x) = 7$

$2x + 10 - 2x = 7 \rightarrow 10 = 7$

10 = 7 é uma igualdade falsa e não existe par ordenado que seja solução do sistema.

**Classificação**

De acordo com o número de soluções, um sistema linear 2 x 2 pode ser classificado em:

- Sistemas Impossíveis ou Incompatíveis: são os sistemas que não possuem solução alguma.
- Sistemas Possíveis ou compatíveis: são os sistemas que apresentam pelo menos uma solução.
- Sistemas Possíveis Determinados: se possuem uma única solução.
- Sistemas Possíveis Indeterminados: se possuem infinitas soluções.

**Sistema Linear m x n**

Chamamos de sistema linear M x n ao conjunto de m equações a n incógnitas, consideradas simultaneamente, que podem ser escrito na forma:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde:
$X_1$, $x_2$, $x_3$,..., $x_n$ são as incógnitas;
$a_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq n$, são os coeficientes das incógnitas; $b_i$, com $1 \leq i \leq m$, são os termos independentes.

**Exemplos**

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - z + 2 \end{cases}$

(sistema 2 x 3)

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

(sistema 3 x 4)

3. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

(sistema 3 x 2)

**Matriz Incompleta**

Chamamos de matriz incompleta do sistema linear a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo**

No sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + \quad z = 0 \\ -x + y \quad = 5 \end{cases}$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

A matriz incompleta é:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Forma Matricial**

Consideremos o sistema linear M x n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sendo A a Matriz incompleta do sistema chamamos, respectivamente, as matrizes:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

de matriz incógnita e matriz termos independentes.

E dizemos que a forma matricial do sistema é A . X = B, ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

**Sistemas Lineares – Escalonamento (I)**

**Resolução de um Sistema por Substituição**

Resolvemos um sistema linear *m* x *n* por substituição, do mesmo modo que fazemos num sistema linear 2 x 2. Assim, observemos os exemplos a seguir.

**Exemplos**

- Resolver o sistema pelo método da substituição.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \quad (I) \\ 2x-y+z=5 \quad (II) \\ x+3y-2z=-4 (III) \end{cases}$$

**Resolução**
Isolando a incógnita *x* na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:

$x + 2y - z - 1 \rightarrow x = -2y + z - 1$

Na equação (II)

$2(-2y + z - 1) - y + z = 5 \rightarrow -5y + 3z = 7$ (IV)

Na equação (III)

$(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 \rightarrow y - z = -3$ (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y+3z=7 \quad (IV) \\ y-z=-3 \quad (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita *y* na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:

$y - z = -3 \rightarrow y = z - 3$
$-5 (z - 3) + 3z = 7 \rightarrow z = 4$

Substituindo $z = 4$ na equação (V)

$y - 4 = -3 \rightarrow y = 1$

Substituindo $y = 1$ e $z = 4$ na equação (I)

$x + 2 (1) - (4) = -1 \rightarrow x = 1$

Assim:

$S=\{(1, 1, 4)\}$

- Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \quad (I) \\ y+2z=10 \quad (II) \\ 3z=12 \quad (III) \end{cases}$$

**Resolução**
Isolando a incógnita *x* na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:

$x + 2y - z = -1 \rightarrow x = -2y + z - 1$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Na equação (II)

2(-2y + z - 1) – y + z = 5 →5y + 3z = 7 (IV)

Na equação (III)

(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 → y – z = -3 (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y+3z=7 \quad (IV) \\ y-z=-3 \quad (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita *y* na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:

*y* – *z* = -3 → *y* = *z* - 3
-5(*z* - 3) + 3*z* = 7 → *z* = 4

Substituindo *z* = 4 na equação (V)

*y* – 4 = -3 → *y* = 1

Substituindo *y* = 1 e *z* = 4 na equação (I)

*x* + 2(1) - (4) = -1 → *x* = 1

Assim:

*S*={(1, 1, 4)}

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \quad (I) \\ y+2z=10 \quad (II) \\ 3z=12 \quad (III) \end{cases}$$

**Resolução**
Na equação (III), obtemos:

3*z* = 12 → *z* = 4

Substituindo *z* = 4 na equação (II), obtemos:

*y* + 2 . 4 = 10 → *y* = 2

Substituindo *z* = 4 e *y* = 2 na equação (I), obtemos:

*x* + 3 . 2 – 4 = 1 → *x* = -1

Assim:

*S*{(-1, 2, 4)}


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Observação: Podemos observar que a resolução de sistemas pelo método da substituição pode ser demasiadamente longa e trabalhosa, quando os sistemas não apresentam alguma forma simplificada como no primeiro exemplo. No entanto, quando o sistema apresenta a forma simples do segundo exemplo, que denominamos "forma escalonada", a resolução pelo método da substituição é rápida e fácil.

Veremos, a seguir, como transformar um sistema linear *m* x *n* qualquer em um sistema equivalente na "forma escalonada".

**Sistemas Lineares Escalonados**

Dizemos que um sistema linear é um **sistema escalonado** quando:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não-nulo;
- O número de coeficiente nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, cresce "da esquerda para a direita, de equação para equação".

**Exemplos:**

1. $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 2y+3z=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=3 \\ z=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ y-t=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_4=5 \end{cases}$

Existem dois tipos de sistemas escalonados:

**Tipo:** Número de equações igual ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{33}x_{33}+\cdots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Notamos que os sistemas deste tipo podem ser analisados pelo método de Cramer, pois são sistemas *n* x *n.* Assim, sendo *D* o determinante da matriz dos coeficientes (incompleta), temos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n} \\ 0 \quad a_{22}a_{23}\cdots a_{2n} \\ 0 \quad 0 \quad a_{33}\cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad 0 \quad 0\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = D = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\cdots.a_{nn} \neq 0$$

Como $D \neq 0$, os sistemas deste tipo são possíveis e determinados e, para obtermos a solução única, partimos da n-ésima equação que nos dá o valor de $x_n$; por substituição nas equações anteriores, obtemos sucessivamente os valores de $x_{n-1}$, $x_{n-2}$,..., $x_3$, $x_2$ e $x_1$.

**Exemplo:**
Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=5(I) \\ y+z+3t=9(II) \\ 2z-t=0(III) \\ 3t=6(IV) \end{cases}$$

**Resolução**
Na equação (IV), temos:
$3t = 6 \rightarrow t = 2$
Substituindo $t = 2$ na equação (III), temos:
$2z - 2 = 0 \rightarrow z = 1$
Substituindo $t = 2$ e $z = 1$ na equação (II), temos:
$y + 1 + 3 . 2 = 9 \rightarrow y = 2$
Substituindo $t = 2$, $z = 1$ e $y = 2$, na equação (I), temos:
$2x + 2 - 1 + 2 = 5 \rightarrow x = 1$
Assim:
$S$ {(1, 2, 1, 2)}

**Tipo**: Número de equações menor que o número de incógnitas.
Para resolvermos os sistemas lineares deste tipo, devemos transformá-los em sistemas do 1º tipo, do seguinte modo:
- As incógnitas que não aparecem no inicio de nenhuma das equações do sistema, chamadas variáveis livres**,** devem ser "passadas" para os segundos membros das equações. Obtemos, assim, um sistema em que consideramos incógnitas apenas as equações que "sobraram" nos primeiros membros.
- Atribuímos às variáveis livres valores literais, na verdade "valores variáveis", e resolvemos o sistema por substituição.

**Exemplo**
Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2y-z=2 \end{cases}$$

**Resolução**
A variável $z$ é uma "*variável livre*" no sistema.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Então:

$$\begin{cases} x+y=1-2z \\ 2y=2+z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x+y=1-2\alpha \\ 2y=2+\alpha \end{cases}$$

$2y = 2 + \alpha \rightarrow y = \frac{2+\alpha}{2}$

Substituindo $y = \frac{2+\alpha}{2}$ na 1ª equação, temos:

$$x+\frac{2+\alpha}{2}=1-2\alpha$$

Agora para continuar fazemos o mmc de 2, e teremos:

$$2x+2\alpha=2(1-2\alpha)$$
$$2x+2\alpha=2-4\alpha$$
$$4\alpha+2x+2+\alpha-2=0$$
$$5\alpha+2x=0$$
$$2x=-5\alpha)$$

$$x=\frac{-5\alpha}{2}$$

Assim:

$$S=\left\{\left(\frac{5\alpha}{2},\ \frac{2+\alpha}{2},\alpha\right),\alpha\in R\right\}$$

Observações: Para cada valor real atribuído a α, encontramos uma solução do sistema, o que permite concluir que o sistema é possível e indeterminado.

- A quantidade de variáveis livres que um sistema apresenta é chamada de grau de liberdade ou grau de indeterminação do sistema.

**Sistemas Lineares – Escalonamento (II)**

**Escalonamento de um Sistema**

Todo sistema linear possível pode ser transformado num sistema linear escalonado equivalente, através das transformações elementares a seguir:

- Trocar a ordem em que as equações aparecem no sistema.

**Exemplo**

$$(S)=\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases}\sim(S_1)\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

- Inverter a ordem em que as incógnitas aparecem nas equações.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplo**

$$(S)=\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x+2z=1 \\ 3x=5 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} 2y+z+x=5 \\ 2z+x=1 \\ 3x=5 \end{cases}$$

- Multiplicar (ou dividir) uma equação por um número real não-nulo.

**Exemplo**

$$(S)\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 6x-2y=3 \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação de *S* por 2, para obtermos $S_1$.

- Adicionar a uma equação outra equação do sistema, previamente multiplicada por um número real não-nulo.

**Exemplo**

$$(S)=\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+3y=5 \\ -5y=-7 \end{cases}$$

Multiplicamos a 1ª equação do *S* por -2 e a adicionamos à 2ª equação para obtermos $s_1$.

Para transformarmos um sistema linear (*S*) em outro, equivalente e escalonado ($S_1$), seguimos os seguintes passos:

- Usando os recursos das três primeiras transformações elementares, devemos obter um sistema em que a 1ª equação tem a 1ª incógnita com o coeficiente igual a 1.
- Usando a quarta transformação elementar, devemos "zerar" todos os coeficientes da 1ª incógnita em todas as equações restantes.
- "Abandonamos"a 1ª equação e repetimos os dois primeiros passos com as equações restantes, e assim por diante, até a penúltima equação do sistema.

**Exemplos**

- Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 3x-y2z=-2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

**Resolução**

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \\ 2x+y+z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \quad \leftarrow -3 \\ 2x+y+z=5 \quad \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -7y+z=-5 \\ -3y+3z=3: \quad -3 \end{cases}$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ -7y+z=5 \\ y-z=-1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -7y+z=-5 \quad \leftarrow 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -6z=-12 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (nº de equações igual ao nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e determinado.

- Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 8x+y+z=11 \end{cases}$$

**Resolução**

$$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 8x+y+z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ -y+2x+3z=5 \quad \leftarrow 1 \\ y+8x+z=11 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ 5x+2z=8 \\ 5x+2z=8(*) \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ 5x+2z=8 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º tipo (nº de equações menor que o nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e indeterminado.

(*) A terceira equação foi eliminada do sistema, visto que ela é equivalente à segunda equação. Se nós não tivéssemos percebido essa equivalência, no passo seguinte obteríamos na terceira equação: $0x + 0z = 0$, que é uma equação satisfeita para todos os valores reais de $x$ e $z$.

- Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ 4x+9y-z=8 \end{cases}$$

**Resolução**

$$\begin{cases} 2x+5y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ 4x+9y-z=8 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+5y+z=5 \quad \leftarrow -2 \\ 4x+9y-z=8 \quad \leftarrow -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=-1 \\ y+3z=-4 \quad \leftarrow -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=-1 \\ 0y+0z=-3 \quad \leftarrow -1 \end{cases}$$

O sistema obtido é impossível, pois a terceira equação nunca será verificada para valores reais de $y$ e $z$.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Observação: Dado um sistema linear, sempre podemos "tentar" o seu escalonamento. Caso ele seja impossível, isto ficará evidente pela presença de uma equação que não é satisfeita por valores reais (exemplo: $0x + 0y = 3$). No entanto, se o sistema é possível, nós sempre conseguimos um sistema escalonado equivalente, que terá nº de equações igual ao nº de incógnitas (possível e determinado), ou então o nº de equações será menor que o nº de incógnitas (possível e indeterminado).

Este tratamento dado a um sistema linear para a sua resolução é chamado de método de eliminação de Gauss.

**Sistemas Lineares – Discussão (I)**

Discutir um sistema linear é determinar; quando ele é:

- Possível e determinado (solução única);
- Possível e indeterminado (infinitas soluções);
- Impossível (nenhuma solução), em função de um ou mais parâmetros presentes no sistema.

Estudaremos as técnicas de discussão de sistemas com o auxílio de exemplos.

**Sistemas com Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas**

Quando o sistema linear apresenta nº de equações igual ao nº de incógnitas, para discutirmos o sistema, inicialmente calculamos o determinante *D* da matriz dos coeficientes (incompleta), e:

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

Para identificarmos se o sistema é possível, indeterminado ou impossível, devemos conseguir um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminação de Gauss.

**Exemplos**

- Discutir, em função de *a*, o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

**Resolução**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 6$$

$$D = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

Assim, para $a \neq 6$, o sistema é possível e determinado.

Para $a \neq 6$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 1 \quad \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = -9 \end{cases}$$

Que é um sistema impossível.

Assim, temos:

$a \neq 6 \rightarrow SPD$ (Sistema possível e determinado)

$a = 6 \rightarrow SI$ (Sistema impossível)

- Discutir, em função de *a*, o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Resolução**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + a - 2a + 3 - 6 - a^2$$

$D = 0 \rightarrow -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = -3$ ou $a = 2$

Assim, para $a \neq -3$ e $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.

Para $a = -3$, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \quad \leftarrow -2 \\ x - 3y + 3z = 2 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \quad \leftarrow 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases} \quad \textit{sistema impossível}$$

Para $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \quad \leftarrow -2 \\ x + 2y + 3z = 2 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \quad \textit{sistema possível indeterminado}$$

Assim, temos:

$a \neq -3$ e $a \neq 2 \rightarrow$ SPD

$a = -3 \rightarrow$ SI

$a = 2 \rightarrow$ SPI

- Discutir, em função de $m$ e $k$, o sistema:

$$\begin{cases} mx + y = k \\ x + my = k^2 \end{cases}$$

**Resolução**

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$D = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = +1$ ou $m = -1$

Assim, para $m \neq +1$ e $m \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x + y = K \\ x + y = K^2 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = K \\ 0x + 0y = -K + K^2 \end{cases}$$

Se $-k + k^2 = 0$, ou seja, $k = 0$ ou $k = 1$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $-K + k^2 \neq 0$, ou seja, $k \neq 0$ ou $k \neq 1$, o sistema é impossível.

Para $m = -1$, temos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} -x+y=K \\ x-y=k^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=K^2 \\ -x+y=K \end{cases} \leftarrow 1 \sim \begin{cases} x-y=k^2 \\ Ox+Oy=k^2+k \end{cases}$$

Se $k^2 + k = 0$, ou seja, $k = 0$ $k = -1$, o sistema é possível e indeterminado.
Se $k^2 + k \neq 0$, ou seja, $k \neq 0$ $k \neq -1$, o sistema é indeterminado.
Assim, temos:

$$m \neq +1 \quad e \quad m \neq -1, \quad \forall \quad k \in R \Rightarrow SPD$$

$$\left.\begin{array}{l} m=+1 \quad e \quad k=0 \quad ou \quad k=1 \\ \\ ou \\ m=-1 \quad e \quad k=0 \quad ou \quad k=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow SPI$$

$$\left.\begin{array}{l} m=+1 \quad e \quad k\neq 0 \quad ou \quad k\neq 1 \\ \\ ou \\ m=-1 \quad e \quad k\neq 0 \quad ou \quad k\neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow SI$$

**Sistemas com Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas**

Quando o sistema linear apresenta número de equações diferente do número de incógnitas, para discuti-lo, devemos obter um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminar de Gauss.

**Exemplos**

- Discutir, em função de $m$, o sistema:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \\ x-my=3 \end{cases}$$

**Resolução**

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2z+3y=8 \quad \rightarrow -2 \quad \sim \\ x-my=3 \quad \rightarrow -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ (-1-m)y=0 \quad \rightarrow 1+m \end{cases} \qquad \sim \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ 0y=2+2m \end{cases}$$

$2 + 2m = 0 \rightarrow m = -1$
Assim, temos:
$m \neq -1 \rightarrow$ SI
$m = -1 \rightarrow$ SPD

- Discutir, em função de k, o sistema:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 \\ 3x+7y-2z=17 \\ 5x+12y+kz=29 \end{cases}$$

**Resolução**

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 \quad \leftarrow -2 \\ 3x+7y-2z=17 \quad \leftarrow -3 \\ 5x+12y+kz=29 \quad \leftarrow -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ y+5z=2 \quad \leftarrow -1 \\ 2y+(5+K)z=4 \quad \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ 4z=0 \quad \div 4 \\ (3+K)z=0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \quad -3-K \\ (3+K)z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \\ 0z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, para $\forall k \in R$, o sistema é possível e determinado.

**Sistemas Lineares – Discussão (II)**

**Sistema Linear Homogêneo**

Já sabemos que sistema linear homogêneo é todo sistema cujas equações têm todos os termos independentes iguais a zero.

São homogêneos os sistemas:

1. $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 5x+3y-7z=0 \end{cases}$

Observe que a dupla (0, 0) é solução do sistema 01 e a terna (0, 0, 0) é solução do sistema 02.

Todo sistema linear homogêneo admite como solução uma sequência de zero, chamada solução nula ou solução trivial. Observamos também que todo sistema homogênea é sempre possível, podendo, eventualmente, apresentar outra solução além da solução trivial, que é chamada solução própria.

**Discussão e Resolução**

Lembre-se que: Todo sistema linear homogêneo tem ao menos a solução trivial, portanto será sempre possível.

Vejamos alguns exemplos:

- Classifique e resolva o sistema:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

**Resolução**

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado admitindo só a solução trivial, logo:

$$S = \{(0,0,0)\}$$

- Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3b - 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$$

**Resolução**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como $D = 0$, o sistema homogêneo é indeterminado.

Fazendo o escalonamento temos:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3b + -2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 0 - 4b - 4c = 0 \\ 0 - 3b - 3c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 0 + b + 4c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Teremos, então:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = t$, teremos:
$b = -c \rightarrow b = -t$
$a - t + 2t = 0 \rightarrow a = -t$

*Portanto:*

$$S = \{(-t,-t,t), t \in R\}$$

Note que variando $t$ obteremos várias soluções, inclusive a trivial para $t = 0$.

- Determine $K$ de modo que o sistema abaixo tenha solução diferente da trivial.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ky+z=0 \\ kx-y-z=0 \end{cases}$$

**Resolução**

O sistema é homogêneo e, para apresentar soluções diferentes da trivial, devemos ter $D = 0$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-k & 1 & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = k^2+2k+1=(k+1)^2=0 \Rightarrow k=-1$$

k = -1.

## Questões

**01.** Resolver e classificar o sistema: $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

**02.** Determinar *m* real, para que o sistema seja possível e determinado: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+my=2 \end{cases}$

**03.** Resolver e classificar o sistema: $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ x+3y=7 \\ 2x+y-2z=-4 \end{cases}$

**04.** Determinar *m* real para que o sistema seja possível e determinado. $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+2z=5 \\ 3x+y+mz+0 \end{cases}$

**05.** Se o terno ordenado (2, 5, p) é solução da equação linear 6x - 7y + 2z = 5, qual o valor de p?

**06.** Escreva a solução genérica para a equação linear 5x - 2y + z = 14, sabendo que o terno ordenado $(\alpha, \beta, \gamma)$ é solução.

**07.** Determine o valor de m de modo que o sistema de equações abaixo,
2x - my = 10
3x + 5y = 8, seja impossível.

**08.** Se os sistemas:

$S_1$: x + y = 1 e $S_2$: ax – by = 5
X – 2y = -5 ay – bx = -1

São equivalentes, então o valor de $a^2 + b^2$ é igual a:
(A) 1
(B) 4
(C) 5
(D) 9
(E) 10


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**09.** Resolva o seguinte sistema usando a regra de Cramer:
x + 3y - 2z = 3
2x - y + z = 12
4x + 3y - 5z = 6

**10.** Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$.

**11. (UNIOESTE – ANALISTA DE INFORMÁTICA – UNIOESTE/2013)** Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} x+2y+\frac{3}{2}z=\frac{3}{2} \\ 2x+y+z=2 \\ 2x+4y+3z=3 \end{pmatrix}$$

Assinale a alternativa correta.
(A) O determinante da matriz dos coeficientes do sistema é um número estritamente positivo.
(B) O sistema possui uma única solução (1, 1, -1).
(C) O sistema possui infinitas soluções.
(D) O posto da matriz ampliada associada ao sistema é igual a 3.
(E) Os vetores linha (1, 2, 3/2) e (2, 4, 3) não são colineares.

**Respostas**

**01. Resposta "*S*= {(1, 2)}".**
Solução: Calculemos inicialmente *D, Dx* e *Dy:*

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 3 = 13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 24 = -26$$

Como *D* =-13 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Assim: *S*= {(1, 2)} e o sistema são possíveis e determinados.

**02. Resposta "** $\left\{ m \in R / m \neq \frac{3}{2} \right\}$ **".**
Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter *D* ≠ 0, em que:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

Assim: $2m - 3 \neq 0 \rightarrow m \neq \frac{3}{2}$

Então, os valores reais de *m*, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\left\{ m \in R / m \neq \frac{3}{2} \right\}$$

**03. Resposta " S = {(1, 2, 4)}".**

Solução: Calculemos inicialmente D, $D_x$, $D_y$ e $D_z$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 1 - 6 - 0 - 2 = -25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 7 + 12 - 0 - 14 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -42 + 0 - 4 - 14 - 0 + 10 = -50$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -36 - 14 + 5 - 30 - 21 - 4 = -100$$

Como *D*= -25 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-25} = 1; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-25} = 2; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{100}{-25} = 4$$

Assim: *S* = {(1, 2, 4)} e o sistema são possíveis e determinados.

**04. Resposta "** $\{m \in R / m \neq 3\}$**".**

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter *D* ≠ 0.
Assim:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m + 12 + 2 + 3 - 2 - 4m$$

$D = -5m + 15$

Assim: $-5m + 15 \neq 0 \rightarrow m \neq 3$

Então, os valores reais de *m*, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$\{m \in R / m \neq 3\}$

**05· Resposta "14".**

Solução:

Teremos por simples substituição, observando que x = 2, y = 5 e z = p, 6 . 2 – 7 . 5 + 2 . p = 5.

Logo, 12 - 35 + 2p = 5.

Daí vem imediatamente que 2p = 28 e, portanto, p = 14.

**06.** Solução:

Podemos escrever: 5α - 2β + γ = 14. Daí, tiramos: γ = 14 - 5α + 2β. Portanto, a solução genérica será o terno ordenado (α, β, 14 - 5α + 2β ).

Observe que se arbitrando os valores para α e β, a terceira variável ficará determinada em função desses valores.

Por exemplo, fazendo-se α = 1, β = 3, teremos:

γ = 14 - 5 α + 2 β = 14 – 5 . 1 + 2 . 3 = 15,

ou seja, o terno (1, 3, 15) é solução, e assim, sucessivamente.

Verificamos, pois que existem infinitas soluções para a equação linear dada, sendo o terno ordenado (α, β, 14 - 5 α + 2 β) a solução genérica.

**07**. Solução:

Teremos, expressando x em função de m, na primeira equação:

x = (10 + my) / 2

Substituindo o valor de x na segunda equação, vem:

3[(10+my) / 2] + 5y = 8

Multiplicando ambos os membros por 2, desenvolvendo e simplificando, vem:

3(10+my) + 10y = 16

30 + 3my + 10y = 16

(3m + 10)y = -14

y = -14 / (3m + 10)

Ora, para que não exista o valor de y e, em consequência não exista o valor de x, deveremos ter o denominador igual a zero, já que , como sabemos, não existe divisão por zero.

Portanto, 3m + 10 = 0, de onde se conclui m = -10/3, para que o sistema seja impossível, ou seja, não possua solução.

**08. Resposta "E".**

Solução: Como os sistemas são equivalentes, eles possuem a mesma solução. Vamos resolver o sistema:

$S_1$: x + y = 1

x - 2y = -5

Subtraindo membro a membro, vem: x - x + y - (-2y) = 1 - (-5).

Logo, 3y = 6 \ y = 2.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Portanto, como x + y = 1, vem, substituindo: x + 2 = 1 \ x = -1.
O conjunto solução é, portanto S = {(-1, 2)}.

Como os sistemas são equivalentes, a solução acima é também solução do sistema $S_2$.
Logo, substituindo em $S_2$ os valores de x e y encontrados para o sistema $S_1$, vem:

a(-1) - b(2) = 5 → - a - 2b = 5
a(2) - b (-1) = -1 → 2 a + b = -1

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por 2, fica:
-2 a - 4b = 10

Somando membro a membro esta equação obtida com a segunda equação, fica:
-3b = 9 \ b = - 3

Substituindo o valor encontrado para b na equação em vermelho acima (poderia ser também na outra equação em azul), teremos:

2 a + (-3) = -1 \ a = 1.
Portanto, $a^2 + b^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$.

**09. Resposta "S = {(5, 2, 4)}".**
Solução: Teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:
$x_1 = D\,x_1 / D = 120 / 24 = 5$
$x_2 = D\,x_2 / D = 48 / 24 = 2$
$x_3 = D\,x_3 / D = 96 / 24 = 4$

Logo, o conjunto solução do sistema dado é S = {(5, 2, 4)}.

**10.** Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A = 11$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_1 = 33$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_2 = -11$$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$x = \frac{det\ A_1}{det\ A} = \frac{33}{11} = 3 \qquad y = \frac{det\ A_2}{det\ A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Resposta: $S = \{(3,-1)\}$

**11. Resposta: C.**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 12 + 4 - 3 - 4 - 12 = 0$$

O sistema pode ser SI(sistema impossível) ou SPI(sistema possível indeterminado)

Para ser SI Dx=0 e SPI Dx≠0

$$Dx = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{9}{2} + 6 + 24 - \frac{9}{2} - 6 - 12 = 12$$

Dx≠0, portanto o sistema tem infinitas soluções.



## 11) Sequências Numéricas e Progressões: - Sequências Numéricas; - Progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos, propriedades; - Progressões Geométricas: termo geral, soma dos termos, propriedades.

### PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Podemos, no nosso dia-a-dia, estabelecer diversas sequências como, por exemplo, a sucessão de cidades que temos numa viagem de automóvel entre Brasília e São Paulo ou a sucessão das datas de aniversário dos alunos de uma determinada escola.

Podemos, também, adotar para essas sequências uma ordem numérica, ou seja, adotando $a_1$ para o 1º termo, $a_2$ para o 2º termo até $a_n$ para o n-ésimo termo. Dizemos que o termo $a_n$ é também chamado termo geral das sequências, em que *n* é um número natural diferente de zero. Evidentemente, daremos atenção ao estudo das sequências numéricas.

As sequências podem ser finitas, quando apresentam um último termo, ou, infinitas, quando não apresentam um último termo. As sequências infinitas são indicadas por reticências no final.

**Exemplos:**

- Sequência dos números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 11$; $a_6 = 13$ etc.
- Sequência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 9$; $a_6 = 11$ etc.
- Sequência dos algarismos do sistema decimal de numeração: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Notemos que esta é uma sequência finita com $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$; $a_6 = 5$; $a_7 = 6$; $a_8 = 7$; $a_9 = 8$; $a_{10} = 9$.

**1. Igualdade**

As sequências são apresentadas com os seus termos entre parênteses colocados de forma ordenada. Sucessões que apresentarem os mesmos termos em ordem diferente serão consideradas sucessões diferentes.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Duas sequências só poderão ser consideradas iguais se, e somente se, apresentarem os mesmos termos, na mesma ordem.

**Exemplo**

A sequência (x, y, z, t) poderá ser considerada igual à sequência (5, 8, 15, 17) se, e somente se, x = 5; y = 8; z = 15; e t = 17.

Notemos que as sequências (0, 1, 2, 3, 4, 5) e (5, 4, 3, 2, 1) são diferentes, pois, embora apresentem os mesmos elementos, eles estão em ordem diferente.

**2. Formula Termo Geral**

Podemos apresentar uma sequência através de uma determina o valor de cada termo $a_n$ em função do valor de *n*, ou seja, dependendo da posição do termo. Esta formula que determina o valor do termo $a_n$ e chamada formula do termo geral da sucessão.

**Exemplos**

- Determinar os cincos primeiros termos da sequência cujo termo geral e igual a:

$a_n = n - 2n$,com $n \in N^* \Rightarrow$

Teremos:

$a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 1$
$a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 0$
$a_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 3$
$a_4 = 4^2 - 4 \cdot 2 \Rightarrow a_4 = 8$
$a_5 = 5^5 - 5 \cdot 2 \Rightarrow a_5 = 15$

- Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 3 \cdot n + 2$, com $n \in N^*$.

$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow a_1 = 5$
$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 \Rightarrow a_2 = 8$
$a_3 = 3 \cdot 3 + 2 \Rightarrow a_3 = 11$
$a_4 = 3 \cdot 4 + 2 \Rightarrow a_4 = 14$
$a_5 = 3 \cdot 5 + 2 \Rightarrow a_5 = 17$

- Determinar os termos $a_{12}$ e $a_{23}$ da sequência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 45 - 4 + n$, com $n \in N^*$.

Teremos:

$a_{12} = 45 - 4 \cdot 12 \Rightarrow a_{12} = -3$
$a_{23} = 45 - 4 \cdot 23 \Rightarrow a_{23} = -47$

**3. Lei de Recorrências**

Uma sequência pode ser definida quando oferecemos o valor do primeiro termo e um “caminho” (uma formula) que permite a determinação de cada termo conhecendo-se o seu antecedente. Essa forma de apresentação de uma sucessão é dita de recorrências.

**Exemplos**

- Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:

$a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 4$, em que $n \in N^*$.

Teremos:

$a_1 = 3$
$a_2 = 2 \cdot a_1 - 4 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow a_2 = 2$
$a_3 = 2 \cdot a_2 - 4 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 2 - 4 \Rightarrow a_3 = 0$
$a_4 = 2 \cdot a_3 - 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 0 - 4 \Rightarrow a_4 = -4$
$a_5 = 2 \cdot a_4 - 4 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot (-4) - 4 \Rightarrow a_5 = -12$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- Determinar o termo $a_5$ de uma sequência em que:
$a_1 = 12$ e $a_{n+1} = a_n - 2$, em que n € N*.

$a_2 = a_1 - 2 \rightarrow a_2 = 12 - 2 \rightarrow a_2 = 10$
$a_3 = a_2 - 2 \rightarrow a_3 = 10 - 2 \rightarrow a_3 = 8$
$a_4 = a_3 - 2 \rightarrow a_4 = 8 - 2 \rightarrow a_4 = 6$
$a_5 = a_4 - 2 \rightarrow a_5 = 6 - 2 \rightarrow a_5 = 4$

**Observação 1**

Devemos observar que a apresentação de uma sequência através do termo geral é mais pratica, visto que podemos determinar um termo no "meio" da sequência sem a necessidade de determinarmos os termos intermediários, como ocorre na apresentação da sequência através da lei de recorrências.

**Observação 2**

Algumas sequências não podem, pela sua forma "desorganizada" de se apresentarem, ser definidas nem pela lei das recorrências, nem pela formula do termo geral. Um exemplo de uma sequência como esta é a sucessão de números naturais primos que já "destruiu" todas as tentativas de se encontrar uma formula geral para seus termos.

**4. Artifícios de Resolução**

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PA, é possível, através de artifícios de resolução, tornar o procedimento mais simples:
PA com três termos: (a – r), a e (a + r), razão igual a r.
PA com quatro termos: (a – 3r), (a – r), (a + r) e (a + 3r), razão igual a 2r.
PA com cinco termos: (a – 2r), (a – r), a, (a + r) e (a + 2r), razão igual a r.

**Exemplo**

- Determinar os números a, b e c cuja soma é, igual a 15, o produto é igual a 105 e formam uma PA crescente.

Teremos:
Fazendo a = (b – r) e c = (b + r) e sendo a + b + c = 15, teremos:
$(b - r) + b + (b + r) = 15 \rightarrow 3b = 15 \rightarrow b = 5$.

Assim, um dos números, o termo médio da PA, já é conhecido.
Dessa forma a sequência passa a ser:
(5 – r), 5 e ( 5 + r ), cujo produto é igual a 105, ou seja:

$(5 - r) .5 . (5 + r) = 105 \rightarrow 5^2 - r^2 = 21$
$r^2 = 4 \rightarrow 2$ ou r = -2.

Sendo a PA crescente, ficaremos apenas com r= 2.
Finalmente, teremos a = 3, b = 5 e c= 7.

**5. Propriedades**

$P_1$: para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a média aritmética dos outros dois termos.

**Exemplo**

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA: $a_{n-1}$, $a_n$ e $a_{n+1}$. Podemos afirmar que:
I - $a_n = a_{n-1} + r$
II - $a_n = a_{n+1} - r$

Fazendo I + II, obteremos:
$2a_n = a_{n-1} + r + a_n + 1 - r$
$2a_n = a_{n-1+} a_n + 1$

Logo: $a_n = a_n\text{-}1 + \frac{an+1}{2}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Portanto, para três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

**6. Termos Equidistantes dos Extremos**

Numa sequência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_p, ..., a_k, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

$a_2$ e $a_{n-1}$ são termos equidistantes dos extremos;
$a_3$ e $a_{n-2}$ são termos equidistantes dos extremos;
$a_4$ $a_{n-3}$ são termos equidistantes dos extremos.

Notemos que sempre que dois termos são eqüudistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor de n + 1. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos $a_p$ e $a_k$ são equidistantes dos extremos, então: p + k = n+1.

**Propriedade**

Numa PA com *n* termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

**Exemplo**

Sejam, numa PA de n termos, $a_p$ e $a_k$ termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:
I - $a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r \Rightarrow ap = a_1 + p \cdot r - r$
II - $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r \Rightarrow ak = a_1 + k \cdot r - r$
Fazendo I + II, teremos:
$A_p + a_k = a_1 + p \cdot r - r + a_1 + k \cdot r - r$
$A_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 1 - 1) \cdot r$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n + 1 - 1) \cdot r$
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_p + a_k = a_1 + a_n$

Portanto numa PA com *n* termos, em que *n* é um número ímpar, o termo médios ($a_m$) é a média aritmética dos extremos. $A_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$

**7. Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PA**

Vamos considerar a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (igualdade I)

Podemos escrever também:

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (igualdade II)

Somando-se I e II, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Considerando que todas estas parcelas, colocadas entre parênteses, são formadas por termos equidistantes dos extremos e que a soma destes termos é igual à soma dos extremos, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) +$
$+ \ldots + (a_1 + a_n) \rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

E, assim, finalmente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

**Exemplo**

- Ache a soma dos sessenta primeiros termos da PA (2 , 5, 8,...).

Dados: $a_1 = 2$

$r = 5 - 2 = 3$

Calculo de $a_{60}$:

$A_{60} = a_1 + 59r \rightarrow a_{60} = 2 + 59 \cdot 3$

$a_{60} = 2 + 177$

$a_{60} = 179$

Calculo da soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2} \rightarrow S_{60} = \frac{(a_1 + a_{60}) \cdot 60}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(2 + 179) \cdot 60}{2}$$

$S_{60} = 5430$

Resposta: 5430

## PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q chamada razão da PG.

$a_{n+1} = a_n \cdot q$

Com $a_1$ conhecido e n € N*

**Exemplos**

- (3, 6, 12, 24, 48,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão q = 2.
- (-36, -18, -9, $\frac{-9}{2}$, $\frac{-9}{4}$,...) é uma PG de primeiro termo $a_1$= -36 e razão q = $\frac{1}{2}$.
- (15, 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 15$ e razão q = $\frac{1}{3}$.
- (-2, -6, -18, -54, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = -2$ e razão q = 3.
- (1, -3, 9, -27, 81, -243, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão q = -3.
- (5, 5, 5, 5, 5, 5,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão q = 1.
- (7, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 7$ e razão q = 0.
- (0, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão q qualquer.

Observação: Para determinar a razão de uma PG, basta efetuar o quociente entre dois termos consecutivos: o posterior dividido pelo anterior.

$$q = \frac{a_n+1}{a_n} \quad (a_n \neq 0)$$

**1.Classificação**

As classificações geométricas são classificadas assim:

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.
- Alternante: Quando cada termo apresenta sinal contrário ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- Constante: Quando todos os termos são iguais. Isto ocorre quando q = 1. Uma PG constante é também uma PA de razão r = 0. A PG constante é também chamada de PG estacionaria.
- Singular: Quando zero é um dos seus termos. Isto ocorre quando $a_1 = 0$ ou q = 0.

**2.Fórmula do Termo Geral**

A definição de PG está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, e nós já aprendemos nos módulos anteriores que a formula do termo geral é mais pratica. Por isso, estaremos, neste item, procurando estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Vamos considerar uma PG de primeiro termo a1 e razão q. Assim, teremos:

$a_2 = a_1 . q$
$a_3 = a_2 . q = a_1 . q^2$
$a_4 = a_3 . q = a_1 . q^3$
$a_5 = a_4 . q = a_1 . q^4$
. .
. .
. .
$a_n = a_1 . q^{n-1}$

**Exemplos**

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão q = 3, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 2 . 3^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo $a_5$ desta PG, faremos:
$A_5 = 2 . 3^4 \rightarrow a^5 = 162$

- Numa PG de termo $a_1 = 15$ e razão $q = \frac{1}{3}$, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 15 . \frac{1}{3}^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo $a_6$ desta PG, faremos:
$A_6 = 15 . \frac{(1) . 5}{2} \rightarrow a_6 = \frac{5}{81}$

- Numa PG de primeiro termo $a_1$ = 1 e razão = -3 temos o termo geral na igual a:
$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 . (-3)^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo $a_4$ desta PG, faremos:
$A_4 = 1 . (-3)^3 \rightarrow a_4 = -27$

**3.Artifícios de Resolução**

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PG, é possível através de alguns elementos de resolução, tornar o procedimento mais simples.

PG com três termos:
$\frac{a}{q}$ a; aq

PG com quatro termos:
$\frac{a}{q^3}; \frac{a}{q}$; aq; $aq^3$

PG com cinco termos:
$\frac{a}{q^2}; \frac{a}{q}$; a; aq; $aq^2$

**Exemplo**

Considere uma PG crescente formada de três números. Determine esta PG sabendo que a soma destes números é 13 e o produto é 27.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Vamos considerar a PG em questão formada pelos termos a, b e c, onde a = $\frac{b}{q}$ e c = b . q.

Assim,

$\frac{b}{q}$. b . bq = 27 → $b^3$ = 27 → b = 3.

Temos:

$\frac{3}{q}$ + 3 +3q = 13 → $3q^2$ – 10q + 3 = 0⇒

q = 3 ou q = $\frac{1}{3}$

Sendo a PG crescente, consideramos apenas q = 3. E, assim, a nossa PG é dada pelos números: 1, 3 e 9.

**4.Propriedades**

$P_1$**:** Para três termos consecutivos de uma PG, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

**Exemplo**

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PG: $a_{n-1}$, $a_n$ e $a_{n+1}$. Podemos afirmar que:

I – $a_n = a_{n-1} . q$ e

II – $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$

Fazendo I . II, obteremos:

$(a_n)^2 = (a_{n-1} . q).(\frac{a_{n+1}}{q}) \Rightarrow (a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Logo: $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Observação: Se a PG for positive, o termo médio será a média geométrica dos outros dois:
$a_n = \sqrt{a_{n-1} . a_{n+1}}$

$P_2$**:** Numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

**Exemplo**

Sejam, numa PG de n termos, $a_p$ e $a_k$ dois termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:

I – $a_p = a_1 . q^{p-1}$

II – $a_k = a_1 . q^{k-1}$

Multiplicando I por II, ficaremos com:

$a_p . a_k = a_1 . q^{p-1} . a_1 . q^{k-1}$

$a_p . a_k = a_1 . a_1 . q^{p-1+k-1}$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:

$a_p . a_k = a_1 . a_n$

Portanto, numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Observação**:** Numa PG positiva, com *n* termos, onde *n* é um número ímpar, o termo médio ($a_m$) é a média geométrica dos extremos ou de 2 termos equidistantes dos extremos.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$a_m = \sqrt{a_1} \cdot a_n$

**5.Soma dos termos de uma PG**

**-Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PG**

Vamos considerar a PG ($a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{n-2}$, $a_{n-1}$, $a_n$), com q diferente de 1 e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
( igualdade I)

Podemos escrever, multiplicando-se, membro a membro, a igualdade ( I ) por q:

$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + ... + q \cdot a_{n-2} +$
$+ q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$

Utilizando a formula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, teremos:
$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_1 \cdot q^n$
(igualdade II)

Subtraindo-se a equação I da equação II, teremos:

$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \rightarrow s_n \cdot (q - 1) =$
$= a_1 \cdot (q^n - 1)$

E assim: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Se tivéssemos efetuado a subtração das equações em ordem inversa, a fórmula da soma dos termos da PG ficaria:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

Evidentemente que por qualquer um dos “caminhos” o resultado final é o mesmo. É somente uma questão de forma de apresentação.

Observação: Para q = 1, teremos $s_n = n \cdot a_1$

**6.Série Convergente – PG Convergente**

Dada a sequência ( $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$,..., $a_{n-2}$, $a_{n-1}$, $a_n$), chamamos de serie a sequência $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$,..., $S_{n-2}$, $s_{n-1}$, $s_n$,tal que:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
.
.
.
$S_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2}$
$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Vamos observar como exemplo, numa PG com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $q = \frac{1}{2}$, à série que ela vai gerar.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Os termos que vão determinar a progressão geométrica são: (4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{128}$ , $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$, ...)

E, portanto, a série correspondente será:

$S_1 = 4$

$S_2 = 4 + 2 = 6$

$S_3 = 4 + 2 + 1 = 7$

$S_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7, 5$

$S_5 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4} = 7, 75$

$S_6 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{63}{8} = 7, 875$

$S_7 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{127}{16} = 7, 9375$

$S_8 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{255}{32} = 7, 96875$

$S_9 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{511}{64} = 7, 984375$

$S_{10} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{1023}{128} = 7, 9921875$

Devemos notar que a cada novo termo calculado, na PG, o seu valor numérico cada vez mais se aproxima de zero. Dizemos que esta é uma progressão geométrica convergente.

Por outro lado, na série, é cada vez menor a parcela que se acrescenta. Desta forma, o ultimo termos da série vai tendendo a um valor que parece ser o limite para a série em estudo. No exemplo numérico, estudado anteriormente, nota-se claramente que este valor limite é o número 8.

Bem, vamos dar a esta discussão um caráter matemático.

É claro que, para a PG ser convergente, é necessário que cada termo seja, um valor absoluto, inferior ao anterior a ele. Assim, temos que:

$$\text{PG convergente} \rightarrow |q| < 1$$

ou

$$\text{PG convergente} \rightarrow -1 < 1$$

Resta estabelecermos o limite da série, que é o $S_n$ para quando *n* tende ao infinito, ou seja, estabelecermos a soma dos infinitos termos da PG convergente.

Vamos partir da soma dos *n* primeiros termos da PG:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Estando q entre os números -1e 1 e, sendo n um expoente que tende a um valor muito grande, pois estamos somando os infinitos termos desta PG, é fácil deduzir que $q^n$ vai apresentando um valor cada vez mais próximo de zero. Para valores extremamente grandes de *n* não constitui erro considerar que $q^n$ é igual a zero. E, assim, teremos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

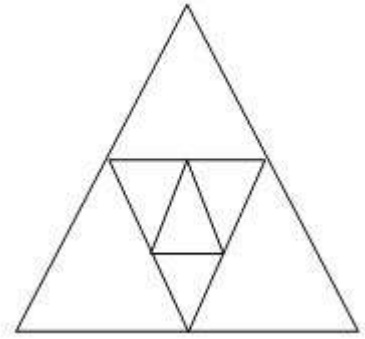
Observação: Quando a PG é não singular (sequência com termos não nulos) e a razão q é de tal forma que $|q| \geq 1$, a série é divergente. Séries divergentes não apresentam soma finita.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplos**

- A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se o segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triangulo equilátero, obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:



Temos: perímetro do 1º triangulo = 30
perímetro do 2º triangulo = 15
perímetro do 3º triangulo = $\frac{15}{2}$

Logo, devemos calcular a soma dos termos da PG infinita 30, 15, $\frac{15}{2}$,... na qual $a_1 = 30$ e $q = \frac{1}{2}$.

$S = \underline{a_1} \rightarrow s = \frac{30}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} = 60.$

## Questões

**01. (Pref. Amparo/SP – Agente Escolar – CONRIO/2014)** Descubra o 99º termo da P.A. (45, 48, 51,...)

(A) 339
(B) 337
(C) 333
(D) 331

**02. (Câmara de São Paulo/SP – Técnico Administrativo – FCC/2014)** Uma sequência inicia-se com o número 0,3. A partir do 2º termo, a regra de obtenção dos novos termos é o termo anterior menos 0,07. Dessa maneira o número que corresponde à soma do 4º e do 7º termos dessa sequência é

(A) **–**6,7.
(B) 0,23.
(C) **–**3,1.
(D) **–**0,03.
(E) **–**0,23.

03. Os termos da sequência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; …) obedecem a uma lei de formação. Se $a_n$, em que *n* pertence a N*, é o termo de ordem *n* dessa sequência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:

(A) 58
(B) 59
(C) 60
(D) 61
(E) 62

04. A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; …) é:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(A) 3,1
(B) 3,9
(C) 3,99
(D) 3, 999
(E) 4

**05. (EBSERH/ HUSM – UFSM/RS – Analista Administrativo – Administração – AOCP/2014)** Observe a sequência:

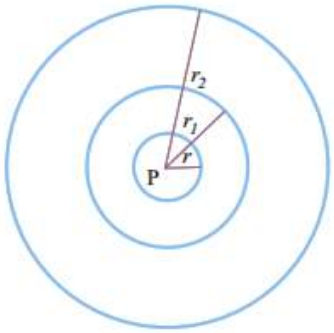
**1; 2; 4; 8;...**

Qual é a soma do sexto termo com o oitavo termo?
(A) 192
(B) 184
(C) 160
(D) 128
(E) 64

**06. (PREF. NEPOMUCENO/MG – TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO – CONSULPLAN/2013)** O primeiro e o terceiro termos de uma progressão geométrica crescente são, respectivamente, 4 e 100. A soma do segundo e quarto termos dessa sequência é igual a
(A) 210.
(B) 250.
(C) 360.
(D) 480.
(E) 520.

**07. (TRF 3ª – Analista Judiciário - Informática – FCC/2014)** Um tabuleiro de xadrez possui 64 casas. Se fosse possível colocar 1 grão de arroz na primeira casa, 4 grãos na segunda, 16 grãos na terceira, 64 grãos na quarta, 256 na quinta, e assim sucessivamente, o total de grãos de arroz que deveria ser colocado na 64ª casa desse tabuleiro seria igual a
(A) $2^{64}$.
(B) $2^{126}$.
(C) $2^{66}$.
(D) $2^{128}$.
(E) $2^{256}$.

**08. (Polícia Militar/SP – Aluno – Oficial – VUNESP/2014)** Planejando uma operação de policiamento ostensivo, um oficial desenhou em um mapa três círculos concêntricos de centro P, conforme mostrado na figura.




Sabe-se que as medidas dos raios r, $r_1$ e $r_2$ estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Se $r + r_1 + r_2 = 52$ cm, e $r \cdot r_2 = 144$ cm, então $r + r_2$ é igual, em centímetros, a
(A) 36.
(B) 38.
(C) 39.
(D) 40.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(E) 42.

**09. (EBSERH/HU-UFGD – Técnico em Informática – AOCP/2014)** Observe a sequência numérica a seguir:

11; 15; 19; 23;...

Qual é o sétimo termo desta sequência?

(A) 27.
(B) 31.
(C) 35.
(D) 37.
(E) 39

**10. (METRÔ/SP – USINADOR FERRAMENTEIRO – FCC/2014)** O setor de almoxarifado do Metrô necessita numerar peças de 1 até 100 com adesivos. Cada adesivo utilizado no processo tem um único algarismo de 0 a 9. Por exemplo, para fazer a numeração da peça número 100 são gastos três adesivos (um algarismo 1 e dois algarismos 0). Sendo assim, o total de algarismos 9 que serão usados no processo completo de numeração das peças é igual a

(A) 20.
(B) 10.
(C) 19.
(D) 18.
(E) 9.

**11. (MPE/AM – AGENTE DE APOIO- ADMINISTRATIVO – FCC/2013)** Considere a sequência numérica formada pelos números inteiros positivos que são divisíveis por 4, cujos oito primeiros elementos são dados a seguir. (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32,...)

O último algarismo do 234º elemento dessa sequência é

(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 6
(E) 8

## Respostas

**01. Resposta: A.**

r=48-45=3

$a_1 = 45$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{99} = 45 + 98 \cdot 3 = 339$

**02. Resposta: D.**

$a_n = a_1 - (n-1)r$

$a_4 = 0{,}3 - 3.0{,}07 = 0{,}09$

$a_7 = 0{,}3 - 6.0{,}07 = -0{,}12$

$S = a_4 + a_7 = 0{,}09 - 0{,}12 = -0{,}03$

**03. Resposta: B.**

Solução: Primeiro, observe que os termos ímpares da sequência é uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 - (10; 11; 12; 13; …). Da mesma forma os termos pares é uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 - (8; 9; 10; 11; …).

Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

(1) ai = a1 + (i - 1).1 = a1 + i – 1

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsecamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é ímpar temos que n = 2i - 1, ou seja, i = (n + 1)/2;
- Se n é par temos n = 2i ou i = n/2.

Daqui e de (1) obtemos que:

$a_n$ = 10 + [(n + 1)/2] - 1 se n é ímpar


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$a_n$ = 8 + (n/2) - 1 se n é par
Logo:
$a_{30}$ = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22 e
$a_{55}$ = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37
E, portanto:
$a_{30} + a_{55}$ = 22 + 37 = 59.

**04. Resposta: E.**
Solução: Sejam S as somas dos elementos da sequência e $S_1$ a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009;…) de razão q = 10 - 1 = 0,1. Assim:
$S = 3 + S_1$
Como -1 < q < 1 podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter $S_1$:
$S_1$ = 0,9/(1 - 0,1) = 0,9/0,9 = 1 → S = 3 + 1 = 4

**05.Resposta: C.**
Esta sequência é do tipo $a_n = 2^{n-1}$ .
Assim:
$a_6 = 2^{6-1} = 2^5 = 32$

$a_8 = 2^{8-1} = 2^7 = 128$
A soma fica: 32 + 128 = 160.

**06. Resposta: E.**
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$100 = 4 \cdot q^2$
$q^2 = 25$
$q = 5$

$a_2 = a_1 \cdot q = 4 \cdot 5 = 20$
$a_4 = a_3 \cdot q = 100 \cdot 5 = 500$
$a_2 + a_4 = 20 + 500 = 520$

**07.Resposta: B.**
Pelos valores apresentados, é uma PG de razão 4
$A_{64}$=?
$a_1$=1
q=4
n=64
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 1 \cdot 4^{63} = (2^2)^{63} = 2^{126}$

**08.Resposta: D.**
Se estão em Progressão Geométrica, então: $\frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r_1}$ , ou seja, $r_1 . r_1 = r . r_2$.
Assim: ${r_1}^2 = 144$
$r_1 = \sqrt{144} = 12\ cm$
Sabemos que r + $r_1$ + $r_2$ = 52. Assim:
$r + 12 + r_2 = 52$
$r + r_2 = 52 - 12$
$r + r_2 = 40$

**09.Resposta: C.**
Trata-se de uma Progressão Aritmética, cuja fórmula do termo geral é
$a_n = a_1 + (n-1).r$
$n = 7;\ \ a_1 = 11;\ \ r = 15 - 11 = 4$
Assim, $a_7 = 11 + (7-1).4 = 11 + 6.4 = 11 + 24 = 35$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**10.Resposta: A.**

$99 = 9 + (n-1)10$

$10n - 10 + 9 = 99$

$n = 10$

Vamos tirar o 99 pra ser contato a parte: 10-1=9

$99 = 90 + (n-1)$

$n = 99 - 90 + 1 = 10$

São 19 números que possuem o algarismo 9, mas o 99 possui 2

19+1=20

**11. Resposta: D.**

r=4

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{234} = 4 + 233 \cdot 4 = 936$

Portanto, o último algarismo é 6.



## 12) Geometria Espacial de posição: - Posições relativas entre duas retas; - Posições relativas entre dois planos; - Posições relativas entre reta e plano; - Perpendicularidade entre duas retas ou dois planos; e a Projeção ortogonal.

### GEOMETRIA DE POSIÇÃO

A geometria de posição estuda os três entes primitivos da geometria ponto, reta e plano no espaço. Temos o estudo dos postulado, das posições relativas entre estes entes.

Na matemática nós temos afirmações que são chamadas de postulados e outras são chamadas de teoremas.

**Postulado**: são afirmações que são aceitas **sem demonstração**. Isto é, sabemos que são verdadeira, porém não tem como ser demonstradas.

**Teorema**: são afirmações que **tem demonstração**.

**- Estudo dos Postulados**

Na Geometria de Posição, os postulado se dividem em quatro categorias:

I) **Postulados da existência**:

a) **No espaço existem infinitos pontos, retas e planos**. (este postulado também é chamado de postulado fundamental da geometria de posição).

b) **Numa reta e fora dela existem infinitos pontos**.

c) **Num plano e fora dele existem infinitos pontos e retas**.

d) **Entre dois pontos distintos, sempre existe um outro ponto**.

II) **Postulados da determinação**:



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

a) **Dois pontos distintos determinam uma única reta**. (Observe que a palavra distintos esta destacada, tem que ser distintos e não somente dois pontos).

b) **Três pontos não colineares determinam um único plano**. (Observe que as palavras não colineares estão destacadas, tem que ser não colineares e não somente três pontos).

- como consequência deste postulado, temos também:

b.1) uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano.
b.2) duas retas paralelas distintas determinam um único plano.
b.3) duas retas concorrentes determinam um único plano.

III) **Postulado da inclusão**.

- **Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano**.

IV) **Postulados da divisão**.

a) **Um ponto divide uma reta em duas semirretas**.

b) **Uma reta divide um plano em dois semiplanos**.

c) **Um plano divide o espaço em dois semiespaços**.

**- Estudo das posições relativas**

Vamos estudar, agora, as posições relativas entre duas retas; entre dois planos e entre um plano e uma reta.

I) **Posições relativas entre duas retas**.

Coplanares: (mesmo plano)
- Paralelas:
  - Distintas
  - Coincidentes
- Concorrentes

Não coplanares: - Reversas

No esquema acima, temos:

a) Retas coplanares ➔ estão no mesmo plano. Podem ser:

- Retas paralelas distintas: **não tem nenhum ponto em comum**.

r ———————————

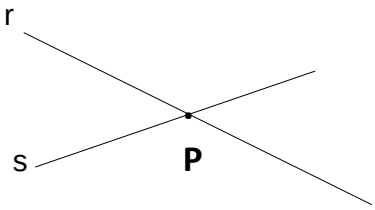
s ——————————— representamos por r // s

- Retas paralelas coincidentes: **tem todos os pontos em comum**. Temos duas retas, sendo uma sobre a outra.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

representamos por r ≡ s

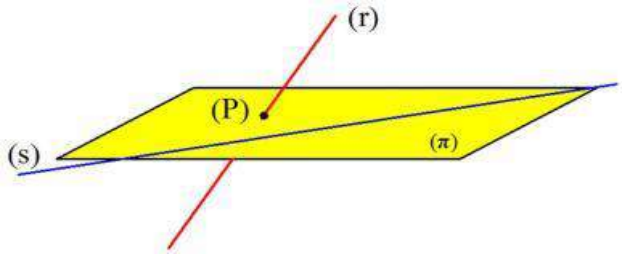
- Retas concorrentes: **tem um único ponto em comum**.




Observação: duas retas **concorrentes** que formam entre si um **ângulo reto (90°)** são chamadas de **perpendiculares**.

b) Retas não coplanares ➔ não estão no mesmo plano. São:

- Retas Reversas: **não tem ponto em comum**.



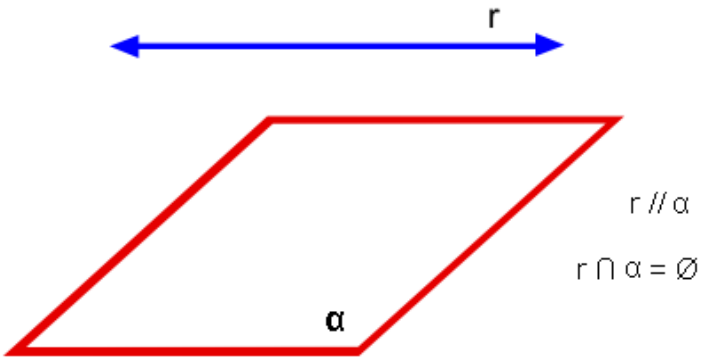

Observação: duas retas **reversas** que "formam" entre si um **ângulo reto (90°)** são chamadas de **ortogonais**.

Como podemos verificar, retas paralelas distintas e retas reversas não tem ponto em comum. Então esta não é uma condição suficiente para diferenciar as posições, porém é uma condição necessária. Para diferenciar paralelas distintas e reversas temos duas condições:

- Paralelas distintas não tem ponto em comum e estão no mesmo plano (coplanares).
- Reversas não tem ponto em comum e não estão no mesmo plano (não coplanares).

II) **Posições relativas entre reta e plano**.

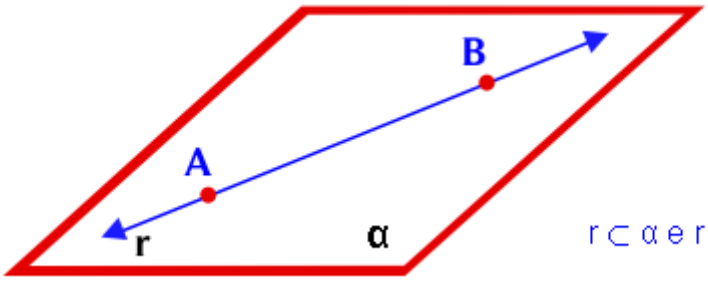
a) **Reta paralela ao plano**: não tem nenhum ponto em comum com o plano. A intersecção da reta com o plano é um conjunto vazio.



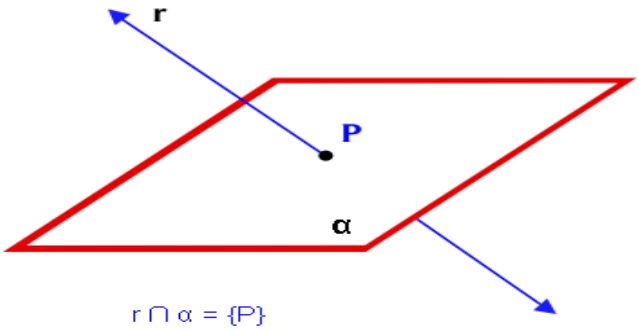

Observação: uma reta paralela a um plano é paralela com infinitas retas do plano, mas não a todas.

b) **Reta contida no plano**: tem todos os pontos em comum com o plano. Também obedece ao postulado da Inclusão. A intersecção da reta com o plano é igual à própria reta.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




c) **Reta secante (ou incidente) ao plano**: tem **um único ponto** em comum com o plano. A intersecção da reta com o plano é o ponto **P**.

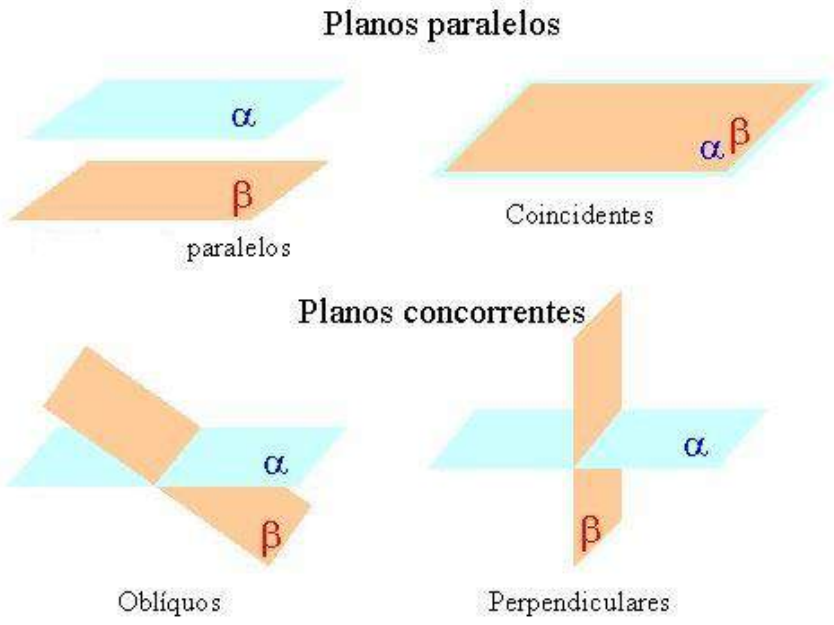



III) **Posições relativas entre dois planos**

a) **Planos paralelos**: não tem nenhum ponto em comum. A intersecção entre os planos é um conjunto vazio.

b) **Planos coincidentes**: tem todos os pontos em comum.

c) **Planos secantes (ou incidentes)**: tem **uma única reta** em comum. A intersecção entre os planos é uma reta. Podem ser oblíquos (formam entre si um ângulo diferente de 90°) ou podem ser perpendiculares (formam entre si um ângulo de 90°).





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01.** Dadas as proposições:

I) Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.
II) Três pontos distintos determinam um único plano que os contém.
III) Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano.

É correto afirmar que:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) Todas são falsas.
(C) Apenas I e II são falsas.
(D) Apenas II e III são falsas.
(E) Apenas I e III são falsas.

**02.** Assinale a alternativa **verdadeira**:

(A) Todas as afirmações podem ser demonstradas.
(B) Plano, por definição, é um conjunto de pontos.
(C) Ponto tem dimensão.
(D) Para se obter um plano basta obter 3 pontos distintos.
(E) Reta não tem definição.

**03.** Assinala a alternativa **falsa**:

(A) Duas retas não coplanares são reversas.
(B) Se uma reta não tem ponto em comum com um plano, ela é paralela a ele.
(C) Duas retas que tem ponto em comum são concorrentes.
(D) Dois planos sendo paralelos, toda reta que fura um fura o outro.
(E) Dois planos sendo paralelos, todo plano que intercepta um intercepta o outro.

**04.** Se a reta **r** é paralela ao plano **α**, então:

(A) Todas as retas de **α** são paralelas a **r**.
(B) Existem em **α** retas paralelas a **r** e retas reversas a **r**.
(C) Existem em **α** retas paralelas a **r** e retas perpendiculares a **r**.
(D) Todo plano que contém **r** intercepta **α**, segundo uma reta paralela a **r**
(E) Nenhuma das anteriores é verdadeira.

**05.** Complete a seguinte frase: “Duas retas que não tem pontos em comum são _____ ou _____ .

**06.** Assinale V ou F, conforme as sentenças sejam verdadeira ou falsas:

( ) Ponto não tem definição.
( ) Dois planos que não tem pontos em comum são paralelos.
( ) Duas retas que são paralelas a um mesmo plano podem ser paralelas entre si.
( ) Teorema é sempre um Postulado.

**07.** Sejam **r** e **s** duas retas distintas, paralelas entre si, contidas em um plano **α**. A reta **t**, perpendicular ao plano **α**, intercepta a reta **r** em A. As retas **t** e **s** são:

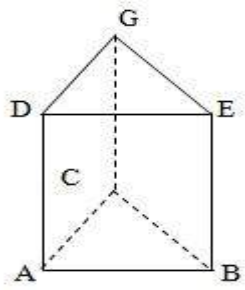
(A) Reversas e não ortogonais.
(B) Ortogonais.
(C) Paralelas entre si.
(D) Perpendiculares entre si.
(E) Coplanares.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**08.** Assinale a alternativa **correta**:
(A) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
(B) Uma condição suficiente para que dois planos sejam paralelos é que duas retas de um sejam paralelas ao outro.
(C) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
(D) Se duas retas quaisquer são paralelas a um plano, então elas são paralelas uma à outra.
(E) Um plano perpendicular a uma reta de um outro plano é perpendicular a este último plano.

**09.** Assinale a alternativa **falsa**:
(A) Dois pontos distintos determinam uma reta.
(B) Três pontos não colineares determinam um plano.
(C) Uma reta divide o espaço em dois semiespaços.
(D) Um ponto divide uma reta em duas semirretas.
(E) Entre dois pontos distintos, sempre existe um outro ponto.

**10.** Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice:




(A) A
(B) B
(C) C
(D) D
(E) E

## Respostas

**01. Resposta: D.** I) V, II) F e III) F

**02. Resposta: E.**

**03. Resposta: C.**

**04. Resposta: B.**

**05. Resposta:** paralelas distintas – reversas.

**06. Respostas:** V – V – V – F.

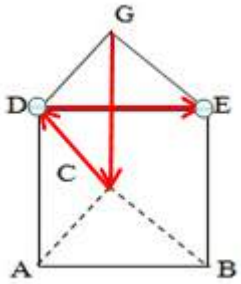
**07. Resposta: B.**

**08. Resposta: E.**

**09. Resposta: C.**

**10. Resposta: E.**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



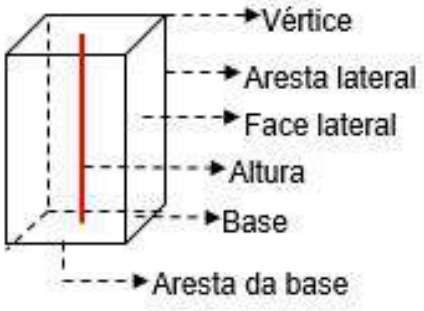



**13) Geometria Espacial Métrica: - Prismas: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Pirâmide: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Cilindro: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Cone: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes, troncos; - Esfera: elementos, seção da esfera, área, volumes, partes da esfera; projeções; sólidos de revolução; e inscrição e circunscrição de sólido.**

## SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

São figuras geométricas que possui três dimensões. Um sólido é limitado por um ou mais planos. Os mais conhecidos são: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

**I) PRISMA**: é um sólido geométrico que possui duas bases iguais e paralelas.




➔ **Elementos de um prisma**:

a) **Base**: pode ser qualquer polígono.
b) **Arestas da base**: são os segmentos que formam as bases.
c) **Face Lateral**: é sempre um paralelogramo.
d) **Arestas Laterais**: são os segmentos que formam as faces laterais.
e) **Vértice**: ponto de intersecção (encontro) de arestas.
f) **Altura**: distância entre as duas bases.

➔ **Classificação**:
Um prisma pode ser classificado de duas maneiras:

1- **Quanto à base**:
- Prisma triangular.....a base é um triângulo.
- Prisma quadrangular.....a base é um quadrilátero.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- Prisma pentagonal.....a base é um pentágono.
- Prisma hexagonal.....a base é um hexágono.
E, assim por diante.

2- **Quanta à inclinação**:
- **Prisma Reto**: a aresta lateral forma com a base um ângulo reto (90°).
- **Prisma Obliquo**: a aresta lateral forma com a base um ângulo diferente de 90°.



Prisma reto



Prisma Obliquo

➔ **Fórmulas**:
- **Área da Base**: $A_b = depende\ \ do\ \ polígono$, como a base pode ser qualquer polígono não existe uma fórmula fixa. Se a base é um triângulo calculamos a área desse triângulo; se a base é um quadrado calculamos a área desse quadrado, e assim por diante.

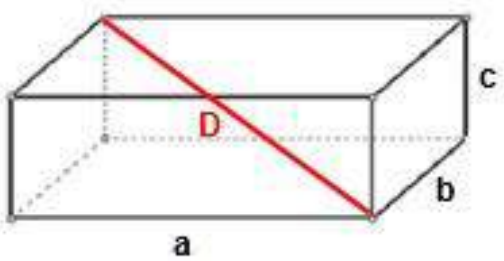
- **Área Lateral**: $A_l = soma\ \ das\ \ áreas\ \ das\ \ faces\ \ laterais$

- **Área Total**: $A_t = A_l + 2.A_b$

- **Volume**: $V = A_b.h$

➔ **Prismas especiais**: temos dois prismas estudados a parte e que são chamados de prismas especiais, que são:

a) **Hexaedro (Paralelepípedo reto-retângulo)**: é um prisma que tem as seis faces **retangulares**.




Temos três dimensões: **a** ➔ comprimento, **b** ➔ largura e **c** ➔ altura.

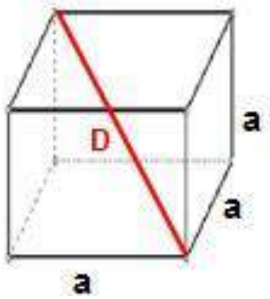
**Fórmulas**:
- **Área Total**: $A_t = 2.(ab + ac + bc)$

- **Volume**: $V = a.b.c$

- **Diagonal**: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b) **Hexaedro Regular (Cubo)**: é um prisma que tem as 6 faces **quadradas**.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



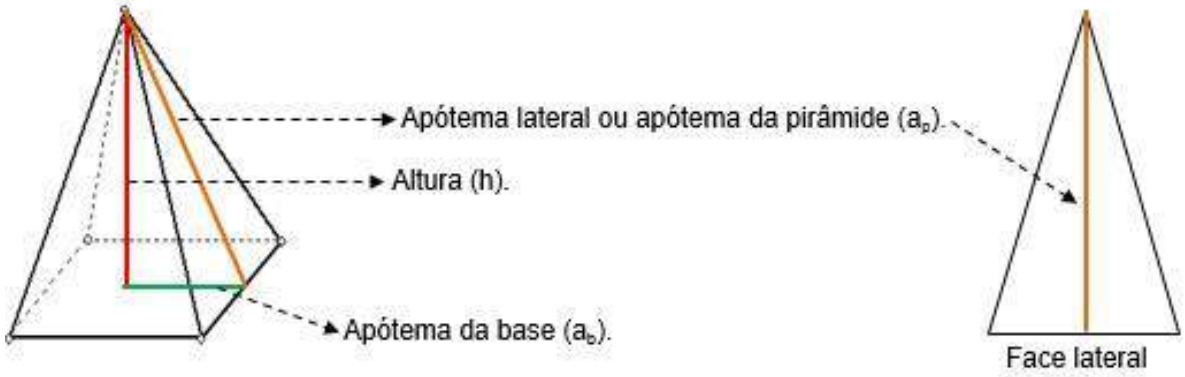

As três dimensões de um cubo comprimento, largura e altura são iguais.

**Fórmulas**:
- **Área Total**: $A_t = 6.a^2$

- **Volume**: $V = a^3$

- **Diagonal**: $D = a\sqrt{3}$

**II) PIRÂMIDE**: é um sólido geométrico que tem uma base e um vértice superior.




➔ **Elementos de uma pirâmide:**

A pirâmide tem os mesmos elementos de um prisma: base, arestas da base, face lateral, arestas laterais, vértice e altura. Além destes, ela também tem um apótema lateral e um apótema da base.

Na figura acima podemos ver que entre a altura, o apótema da base e o apótema lateral forma um triângulo retângulo, então pelo Teorema de Pitágoras temos: $a_p^2 = h^2 + a_b^2$.

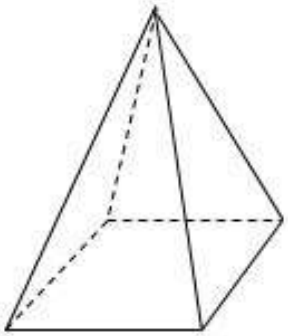
➔ **Classificação**:
Uma pirâmide pode ser classificado de duas maneiras:

1- **Quanto à base**:
- Pirâmide triangular.....a base é um triângulo.
- Pirâmide quadrangular.....a base é um quadrilátero.
- Pirâmide pentagonal.....a base é um pentágono.
- Pirâmide hexagonal.....a base é um hexágono.

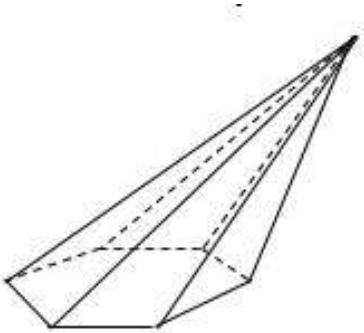
E, assim por diante.

2- **Quanta à inclinação**:
- **Pirâmide Reta**: tem o vértice superior na direção do centro da base.
- **Pirâmide Obliqua**: o vértice superior esta deslocado em relação ao centro da base.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



Pirâmide Reta



Pirâmide Obliqua

➔ **Fórmulas**:

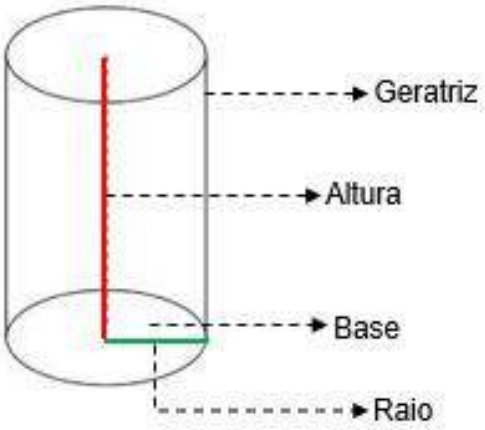
- **Área da Base**: $A_b = depende\ do\ polígono$, como a base pode ser qualquer polígono não existe uma fórmula fixa. Se a base é um triângulo calculamos a área desse triângulo; se a base é um quadrado calculamos a área desse quadrado, e assim por diante.

- **Área Lateral**: $A_l = soma\ \ das\ \ áreas\ \ das\ \ faces\ \ laterais$

- **Área Total**: $A_t = A_l + A_b$

- **Volume**: $V = \frac{1}{3}.A_b.h$

**III) CILINDRO**: é um sólido geométrico que tem duas bases iguais, paralelas e circulares.



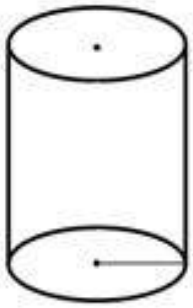

➔ **Elementos de um cilindro**:

a) **Base**: é sempre um círculo.
b) **Raio**
c) **Altura**: distância entre as duas bases.
d) **Geratriz**: são os segmentos que formam a face lateral, isto é, a face lateral é formada por infinitas geratrizes.

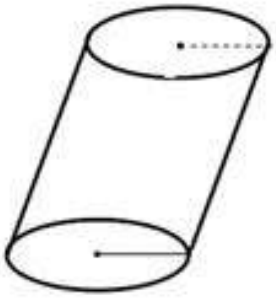
**Classificação**: como a base de um cilindro é um círculo, ele só pode ser classificado de acordo com a inclinação:

- **Cilindro Reto**: a geratriz forma com o plano da base um ângulo reto (90°).
- **Cilindro Obliquo**: a geratriz forma com a base um ângulo diferente de 90°.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



Cilindro Reto



Cilindro Obliquo

➔ **Fórmulas**:

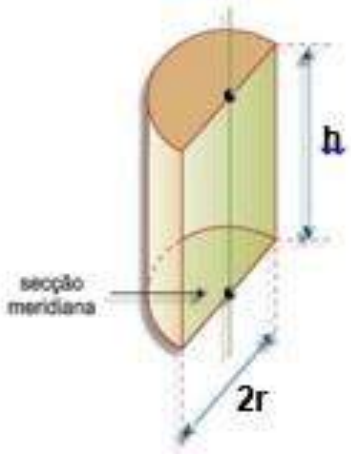
- **Área da Base**: $A_b = \pi.r^2$

- **Área Lateral**: $A_l = 2.\pi.r.h$

- **Área Total**: $A_t = 2.\pi.r.(h + r)$ ou $At = A_l + 2.A_b$

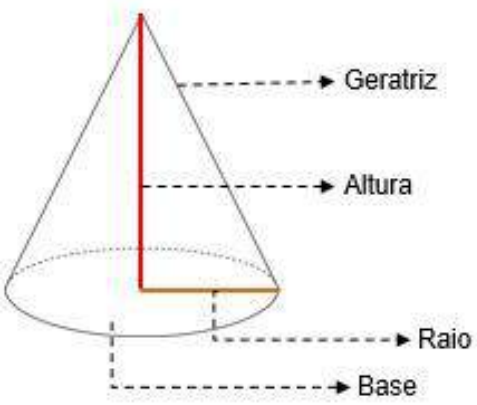
- **Volume**: $V = \pi.r^2.h$ ou $V = A_b.h$

**Secção Meridiana de um cilindro**: é um "corte" feito pelo centro do cilindro. O retângulo obtido através desse corte é chamado de secção meridiana e tem como medidas 2r e h. Logo a área da secção meridiana é dada pela fórmula: $\mathbf{A_{SM} = 2r.h}$.




**Cilindro Equilátero**: um cilindro é chamado de equilátero quando a secção meridiana for um quadrado, para isto temos que: **h = 2r**.

**IV) CONE**: é um sólido geométrico que tem uma base circular e vértice superior.





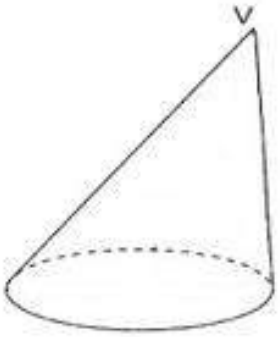
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Elementos de um cone**:
a) **Base**: é sempre um círculo.
b) **Raio**
c) **Altura**: distância entre o vértice superior e a base.
d) **Geratriz**: segmentos que formam a face lateral, isto é, a face lateral e formada por infinitas geratrizes.

**Classificação**: como a base de um cone é um círculo, ele só tem classificação quanto à inclinação.
- **Cone Reto**: o vértice superior está na direção do centro da base.
- **Cone Obliquo**: o vértice superior esta deslocado em relação ao centro da base.



Cone reto




Cone obliquo

➔ **Fórmulas**:

- **Área da base**: $A_b = \pi.r^2$

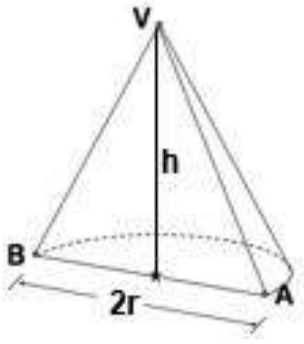
- **Área Lateral**: $A_l = \pi.r.g$

- **Área total**: $A_t = \pi.r.(g + r)$ ou $A_t = A_l + A_b$

- **Volume**: $V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$ ou $V = \frac{1}{3}.A_b.h$

- Entre a geratriz, o raio e a altura temos um triângulo retângulo, então: $\mathbf{g^2 = h^2 + r^2}$.

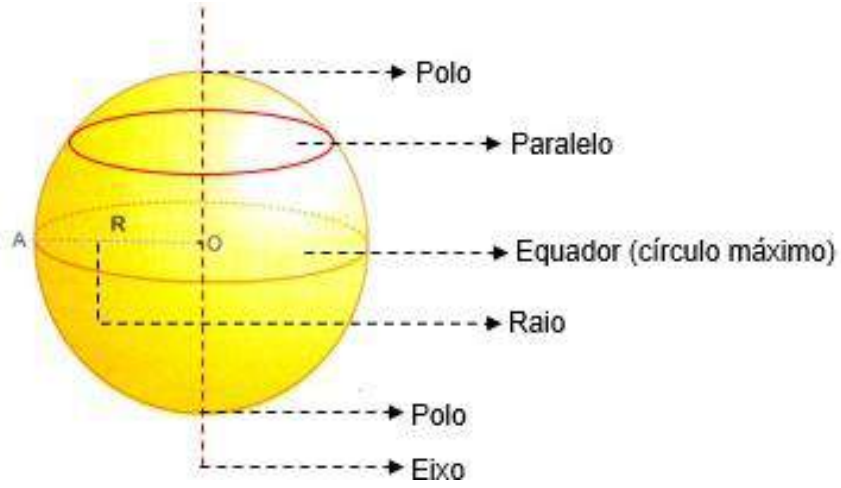
**Secção Meridiana**: é um "corte" feito pelo centro do cone. O triângulo obtido através desse corte é chamado de secção meridiana e tem como medidas, base é 2r e h. Logo a área da secção meridiana é dada pela fórmula: $\mathbf{A_{SM} = r.h}$.




**Cone Equilátero**: um cone é chamado de equilátero quando a secção meridiana for um triângulo equilátero, para isto temos que: $\mathbf{g = 2r}$.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

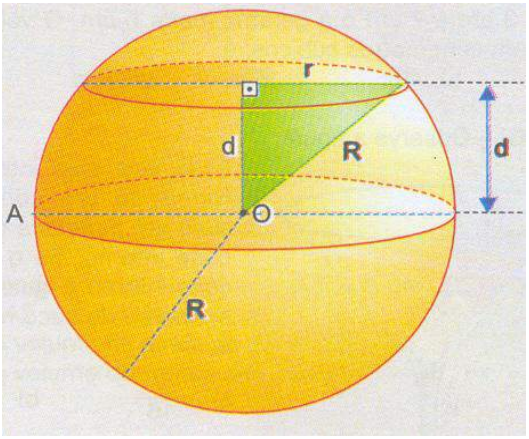
**V) ESFERA**




➔ **Elementos da esfera**

- **Eixo**: é um eixo imaginário, passando pelo centro da esfera.
- **Polos**: ponto de intersecção do eixo com a superfície da esfera.
- **Paralelos**: são "cortes" feitos na esfera, determinando círculos.
- **Equador**: "corte" feito pelo centro da esfera, determinando, assim, o maior círculo possível.

➔ **Fórmulas**



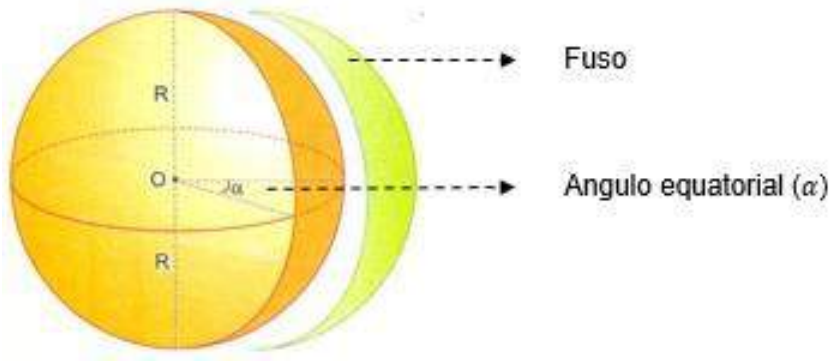

- na figura acima podemos ver que o raio de um paralelo (**r**), a distância do centro ao paralelo ao centro da esfera (**d**) e o raio da esfera (**R**) formam um triângulo retângulo. Então, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras: $\mathbf{R^2 = r^2 + d^2}$.

- **Área**: $A = 4.\pi.R^2$

- **Volume**: $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

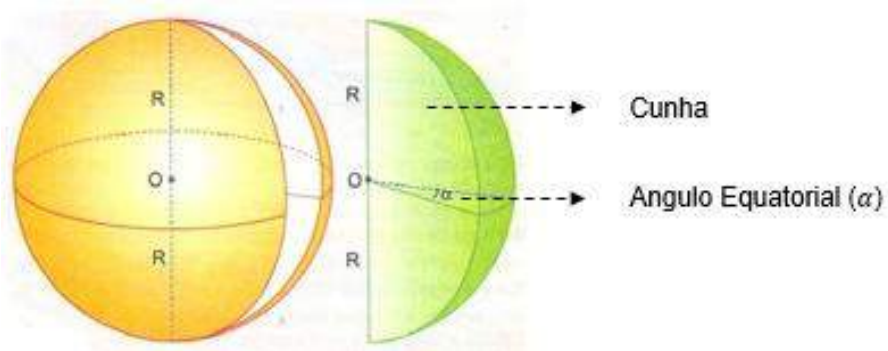
**Fuso Esférico**:




Fórmula da área do fuso:

$$A_{fuso} = \frac{\alpha . \pi . R^2}{90°}$$

**Cunha Esférica**:




Fórmula do volume da cunha:

$$V_{cunha} = \frac{\alpha . \pi . R^3}{270°}$$

## Questões

**01.** Dado o cilindro equilátero, sabendo que seu raio é igual a 5 cm, a área lateral desse cilindro, em $cm^2$, é:

(A) 90π
(B) 100π
(C) 80π
(D) 110π
(E) 120π

**02.** Seja um cilindro reto de raio igual a 2 cm e altura 3 cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

**03.** Um prisma hexagonal regular tem aresta da base igual a 4 cm e altura 12 cm. O volume desse prisma é:

(A) $288\sqrt{3}$ $cm^3$
(B) $144\sqrt{3}$ $cm^3$
(C) $200\sqrt{3}$ $cm^3$
(D) $100\sqrt{3}$ $cm^3$
(E) $300\sqrt{3}$ $cm^3$

**04.** As dimensões de um paralelepípedo são 3 cm, 4 cm e 12 cm. Pede-se calcular a área total, o volume e a diagonal desse paralelepípedo.

**05.** Um cubo tem aresta igual a 3 m, a área total e o volume desse cubo são, respectivamente, iguais a:

(A) 27 $m^2$ e 54 $m^3$
(B) 9 $m^2$ e 18 $m^3$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(C) 54 $m^2$ e 27 $m^3$
(D) 10 $m^2$ e 20 $m^3$

**06.** Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base igual a 8 cm e altura 15 cm. O volume dessa pirâmide, em $cm^3$, é igual a:
(A) 60
(B) $60\sqrt{3}$
(C) 80
(D) $80\sqrt{3}$
(E) $90\sqrt{3}$

**07.** Um cone reto tem raio da base com medida 6 cm e geratriz com medida 10 cm. Pede-se calcular:
a) a altura.
b) a área lateral.
c) a área total.
d) o volume.

**08.** Um cone equilátero tem raio igual a 8 cm. A altura desse cone, em cm, é:
(A) $6\sqrt{3}$
(B) $6\sqrt{2}$
(C) $8\sqrt{2}$
(D) $8\sqrt{3}$
(E) 8

**09.** Uma esfera tem raio igual a 6 cm. Pede-se calcular:
a) a área.
b) o volume.

**10.** Foi feito uma secção em uma esfera de raio 4 cm, pelo seu centro, determinando um ângulo equatorial de 60°. Determinar a área do fuso e o volume da cunha obtidos por essa secção.

## Respostas

**01. Resposta: B.**
Solução: em um cilindro equilátero temos que h = 2r e do enunciado r = 5 cm.
h = 2r ➔ h = 2.5 = 10 cm
$A_l = 2.\pi.r.h$
$A_l = 2.\pi.5.10$
$A_l = 100\pi$

**02. Respostas: $A_l = 12\pi$ cm², $A_t = 20\pi$ cm² e $V = 12\pi$ cm³**
Solução: aplicação direta das fórmulas sendo r = 2 cm e h = 3 cm.

| | | |
|---|---|---|
| $A_l = 2.\pi.r.h$ | $A_t = 2\pi.r(h + r)$ | $V = \pi.r^2.h$ |
| $A_l = 2.\pi.2.3$ | $A_t = 2\pi.2(3 + 2)$ | $V = \pi.2^2.3$ |
| $A_l = 12\pi$ cm² | $A_t = 4\pi.5$ | $V = \pi.4.3$ |
| | $A_t = 20\pi$ cm² | $V = 12\pi$ cm² |

**03. Resposta: A.**
Solução: o volume de um prisma é dado pela fórmula $V = A_b.h$, do enunciado temos que a aresta da base é a = 4 cm e a altura h = 12 cm.

A área da base desse prisma é igual a área de um hexágono regular
$A_b = \frac{6.a^2\sqrt{3}}{4}$

$A_b = \frac{6.4^2\sqrt{3}}{4}$ ➔ $A_b = \frac{6.16\sqrt{3}}{4}$ ➔ $A_b = 6.4\sqrt{3}$ ➔ $A_b = 24\sqrt{3}$ cm²


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$V = 24\sqrt{3}.12$
$V = 288\sqrt{3}$ cm$^3$

**4. Respostas: $A_t$ = 192 cm$^2$, V = 144 cm$^3$ e D = 13 cm**
Solução: aplicação direta das fórmulas sendo a = 3 cm, b = 4 cm e c = 12 cm.

| | | |
|---|---|---|
| $A_t = 2.(ab + ac + bc)$ | $V = a.b.c$ | $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ |
| $A_t = 2.(3.4 + 3.12 + 4.12)$ | $V = 3.4.12$ | $D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$ |
| $A_t = 2.(12 + 36 + 48)$ | $V = 144$ cm$^3$ | $D = \sqrt{9 + 16 + 144}$ |
| $A_t = 2.96$ | | $D = \sqrt{169}$ |
| $A_t = 192$ cm$^2$ | | $D = 13$ cm |

**5. Resposta: C.**
Solução: do enunciado, o cubo tem aresta a = 3 m.

| | |
|---|---|
| $A_t = 6.a^2$ | $V = a^3$ |
| $A_t = 6.3^2$ | $V = 3^3$ |
| $A_t = 6.9$ | $V = 27$ m$^3$ |
| $A_t = 54$ m$^2$ | |

**6. Resposta: D.**
Solução: do enunciado a base é um triângulo equilátero. E a fórmula da área do triângulo equilátero é $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. A aresta da base é a = 8 cm e h = 15 cm.

Cálculo da área da base:
$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A_b = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4}$

$A_b = 16\sqrt{3}$

Cálculo do volume:
$V = \frac{1}{3}.A_b.h$

$V = \frac{1}{3}.16\sqrt{3}.15$

$V = 16\sqrt{3}.5$

$V = 80\sqrt{3}$

**07. Respostas: a) h = 8 cm, b) $A_l$ = 60π cm$^2$, c) $A_t$ = 96π cm$^2$ e d) V = 96π cm$^3$.**
Solução: aplicação das fórmulas de cone.
a)$10^2 = h^2 + 6^2$
$100 = h^2 + 36$
$100 - 36 = h^2$
$h^2 = 64$
$h = \sqrt{64}$
h = 8 cm

b)$A_l = \pi.r.g$
$A_l = \pi.6.10$
$A_l = 60\pi$ cm$^2$

c)$A_t = \pi r.(g + r)$
$A_t = \pi.6.(10 + 6)$
$A_t = \pi.6.16$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$A_t = 96\pi\ cm^2$

d)$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$

$V = \frac{1}{3}.\pi.6^2.8$

$V = \frac{1}{3}.\pi.36.8$

$V = \pi.12.8$

$V = 96\pi\ cm^3$

**08. Resposta: D.**

Solução: em um cone equilátero temos que g = 2r. Do enunciado o raio é 8 cm, então a geratriz é g = 2.8 = 16 cm.

$g^2 = h^2 + r^2$

$16^2 = h^2 + 8^2$

$256 = h^2 + 64$

$256 - 64 = h^2$

$h^2 = 192$

$h = \sqrt{192}$

$h = \sqrt{2^6.3}$

$h = 2^3\sqrt{3}$

$h = 8\sqrt{3}$ cm

**09. Respostas: a) $144\pi\ cm^2$ e b) $288\pi\ cm^3$**

Solução: o raio da esfera é 6 cm.

a)$A = 4.\pi.R^2$

$A = 4.\pi.6^2$

$A = 4.\pi.36$

$A = 144\pi\ cm^2$

b)$V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$

$V = \frac{4}{3}.\pi.6^3$

$V = \frac{4}{3}.\pi.216$

$V = 288\pi\ cm^3$

**10. Respostas: $A_f = \frac{32\pi}{3}\ cm^2$ e $V_c = \frac{128\pi}{9}\ cm^3$**

Solução: A esfera tem raio R = 4 e o ângulo equatorial α = 60°.

$A_f = \frac{\alpha.\pi.R^2}{90°}$

$A_f = \frac{60°.\pi.4^2}{90°} = \frac{6.\pi.16}{9} = \frac{96\pi}{9} = \frac{32\pi}{3}\ cm^2$

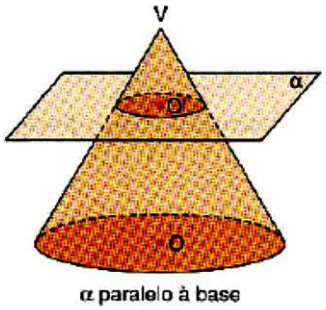
$V_c = \frac{\alpha.\pi.R^3}{270°}$

$V_c = \frac{60°.\pi.4^3}{270°} = \frac{6.\pi.64}{27} = \frac{384\pi}{27} = \frac{128\pi}{9}\ cm^3$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

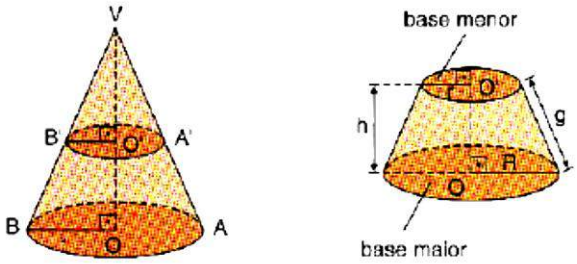
## TRONCO DE CONE

Se um cone sofrer a intersecção de um plano paralelo à sua base circular, a uma determinada altura, teremos a constituição de uma nova figura geométrica espacial denominada Tronco de Cone.



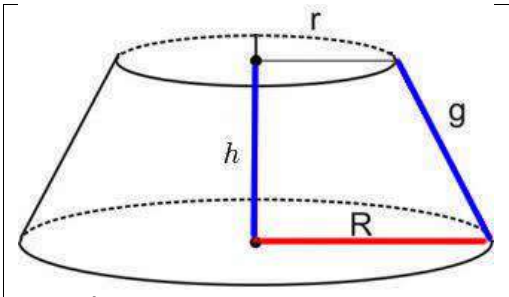

### ➔ Elementos

- A base do cone é a base maior do tronco, e a seção transversal é a base menor;
- A distância entre os planos das bases é a altura do tronco.



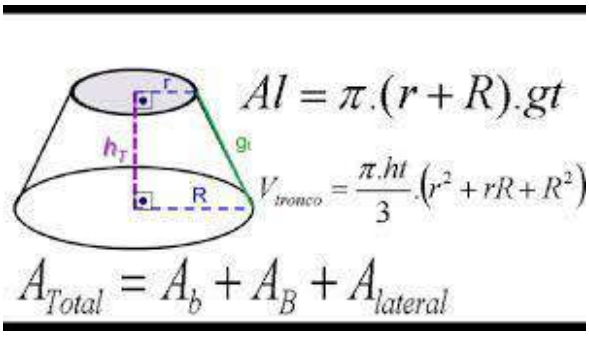

Diferentemente do cone, o tronco de cone possui duas bases circulares em que uma delas é maior que a outra, dessa forma, os cálculos envolvendo a área superficial e o volume do tronco envolverão a medida dos dois raios. A geratriz, que é a medida da altura lateral do cone, também está presente na composição do tronco de cone.

Não devemos confundir a medida da altura do tronco de cone com a medida da altura de sua lateral (geratriz), pois são elementos distintos. A altura do cone forma com as bases um ângulo de 90º. No caso da geratriz os ângulos formados são um agudo e um obtuso.




Onde:
h = altura
g = geratriz

Área da Superfície e Volume




**Exemplo:**

Os raios das bases de um tronco de cone são 6 m e 4 m. A altura referente a esse tronco é de 10 m. Determine o volume desse tronco de cone. Lembre-se que π = 3,14.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$V = \frac{\pi * 10}{3} * (4^2 + 4*6 + 6^2)$$

$$V = \frac{10\pi}{3} * (16 + 24 + 36)$$

$$V = \frac{10\pi}{3} * 76$$

$$V = \frac{760\pi}{3}$$

$$V = 253{,}3\pi$$

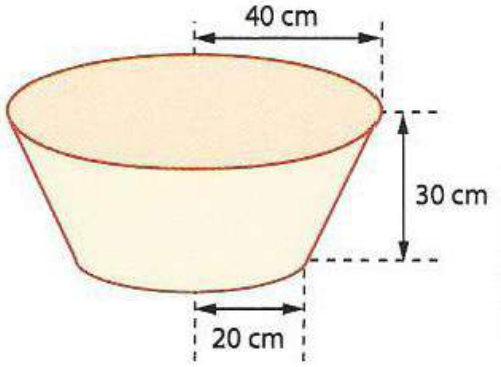
$$V = 795{,}36\ m^3$$

## Questões

**01. (UFPA 2011)** Uma rasa é um paneiro utilizado na venda de frutos de açaí. Um típico exemplar tem forma de um tronco de cone, com diâmetro de base 28 cm, diâmetro de boca 34 cm e altura 27 cm. Podemos afirmar, utilizando pi=3,14, que a capacidade da rasa, em litros, é aproximadamente.

(A) 18
(B) 20
(C) 22
(D) 24
(E) 26

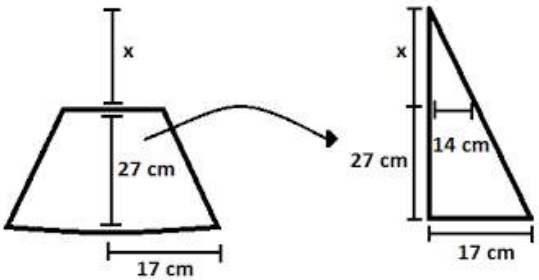
**02.** Uma vasilha (figura abaixo) tem a forma de um tronco de cone. Suas dimensões estão indicadas na figura. Qual o volume máximo de água que a vasilha pode conter, em litros? (Use π =3,14.)




## Respostas

**01. Resposta: B.**

Temos na nessa questão um tronco cone, vamos esboçar o desenho:



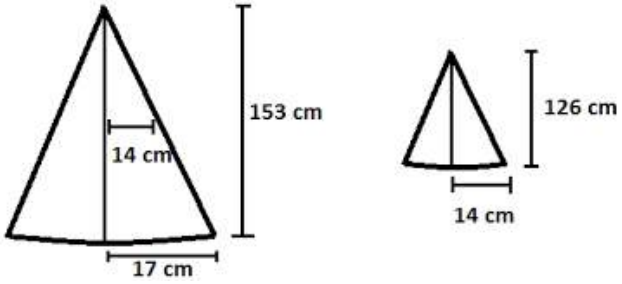

Observe que temos um cone e será necessário termos um acréscimo na altura, esse acréscimo x será calculado através de semelhança entre triângulos.

x/14 = (x + 27)/17
17x = 14.(x + 27)
17x = 14x + 378


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

17x - 14x = 378
3x = 378
x = 378/3
x = 126 cm

Agora que encontramos o valor de x temos:




Encontrando esses dois cones iremos calcular o volume de cada um e subtrair o volume do maior menos o volume do menor.

VOLUME DO CONE MAIOR (Vma)
Vma = área da base x altura /3
Vma = πR² x 153 /3
Vma = 3,14 x 289 x 153/3
Vma = 46303,93 cm³

VOLUME DO CONE MENOR (Vme)
Vme = pi.R² x altura/3
Vme = 3,14 x 196 x 126/3
Vme = 25861,59 cm³

VOLUME DO TRONCO DE CONE (Vc)
Vc = Vma - Vme
Vc = 46303,93 - 25861,59
Vc = 20442,34 cm³

Mas, a unidade está em cm³ devemos transformar para litros.
1cm³ = 1ml
20442,34 cm³ = 20442,34 ml
Sabemos também que...
1L ----------1000ml
x----------20442,34ml
x = 20442,34 / 1000
x = 20,44 L

**02. 87,92 l**
R = 40cm; r = 20cm; h = 30cm

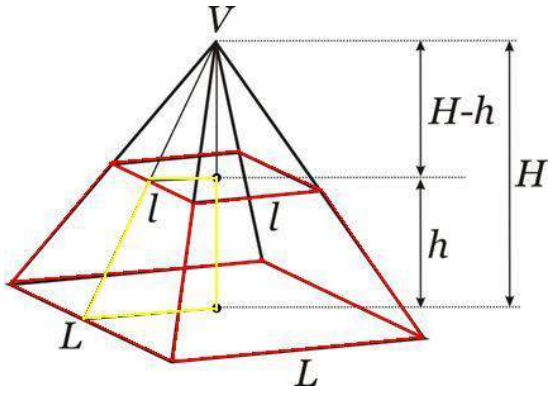
$$V = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) \rightarrow \frac{30.\pi}{3}(40^2 + 40.2 + 20^2) \rightarrow 10\pi(2800) = 2800\pi \cong 87\,920 cm^3$$

Como 1 $dm^3$ = 1 l ➔ o volume máximo de água da vasilha pode conter é de cerca de 87,92l.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## TRONCO DE PIRÂMIDE

O tronco de pirâmide é obtido ao se realizar uma secção transversal numa pirâmide, como mostra a figura:




O tronco da pirâmide é a parte da figura que apresenta as arestas destacadas em vermelho.

É interessante observar que no tronco de pirâmide as arestas laterais são congruentes entre si; as bases são polígonos regulares semelhantes; as faces laterais são trapézios isósceles, congruentes entre si; e a altura de qualquer face lateral denomina-se apótema do tronco.

### ➔ Cálculo das áreas do tronco de pirâmide.

Num tronco de pirâmide temos duas bases, base maior e base menor, e a área da superfície lateral. De acordo com a base da pirâmide, teremos variações nessas áreas. Mas observe que na superfície lateral sempre teremos trapézios isósceles, independente do formato da base da pirâmide. Por exemplo, se a base da pirâmide for um hexágono regular, teremos seis trapézios isósceles na superfície lateral.

A área total do tronco de pirâmide é dada por:

**St = Sl + SB + Sb**

Onde:
St → é a área total
Sl → é a área da superfície lateral
SB → é a área da base maior
Sb → é a área da base menor

### ➔ Cálculo do volume do tronco de pirâmide.

A fórmula para o cálculo do volume do tronco de pirâmide é obtida fazendo a diferença entre o volume de pirâmide maior e o volume da pirâmide obtida após a secção transversal que produziu o tronco. Colocando em função de sua altura e das áreas de suas bases, o modelo matemático para o volume do tronco é:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(S_B + \sqrt{S_B \cdot S_b} + S_b\right)$$

Onde,
V → é o volume do tronco
h → é a altura do tronco
SB → é a área da base maior
Sb → é a área da base menor

### Questão

**01. (ESCOLA DE SARGENTO DAS ARMAS – COMBATENTE/LOGÍSTICA – TÉCNICA/AVIAÇÃO – EXÉRCITO BRASILEIRO/2013)** O volume de um tronco de pirâmide de 4 dm de altura e cujas áreas das bases são iguais a 36 dm² e 144 dm² vale:

(A) 330 cm³
(B) 720 dm³


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(C) 330 m³
(D) 360 dm³
(E) 336 dm³

**Resposta**

**01. Resposta: E.**

$$V = \frac{h_t}{3}(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)$$

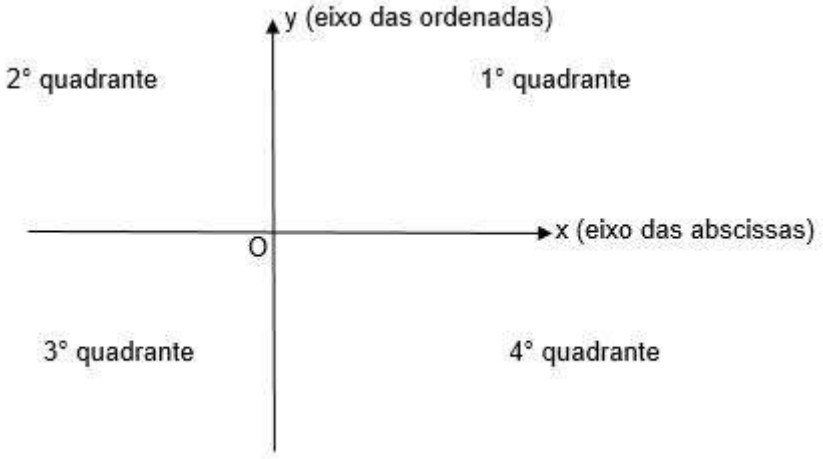
$A_B$=144 dm²
$A_b$=36 dm²

$$V = \frac{4}{3}\left(144 + \sqrt{144 \cdot 36} + 36\right) = \frac{4}{3}(144 + 72 + 36) = \frac{4}{3}252 = 336\ dm^3$$



**14) Geometria Analítica Plana: - Ponto: O plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos; - Reta: equações geral e reduzida, interseção de retas, paralelismo e perpendicularidade, ângulo entre duas retas, distância ponto-reta, bissetrizes do ângulo entre duas retas, Área de um triângulo, inequações do primeiro grau com duas variáveis; - Circunferência: Equações geral e reduzida, posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; tangência; inequações do segundo grau com duas variáveis; - Elipse: Definição, equação, posições relativas entre ponto e elipse, posições relativas entre reta e elipse; - Hipérbole: definição, equação da hipérbole, posições relativas entre ponto e hipérbole, posições relativas entre reta e hipérbole, equações das assíntotas da hipérbole; - Parábola: definição, equação, posições relativas entre ponto e parábola, posições relativas entre reta e parábola; - Reconhecimento de cônicas a partir de sua equação geral.**

**SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL (OU PLANO CARTESIANO)**




Temos dois eixos orientados, um horizontal e outro vertical, perpendiculares entre si. O eixo horizontal é chamado de “eixo das abscissas” e o eixo vertical e chamado de “eixo das ordenadas”.

Estes eixos dividem o plano em quatro partes chamadas de “quadrantes”.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

O ponto O e chamado de ponto “Zero” ou “Ponto de Origem” do sistema.

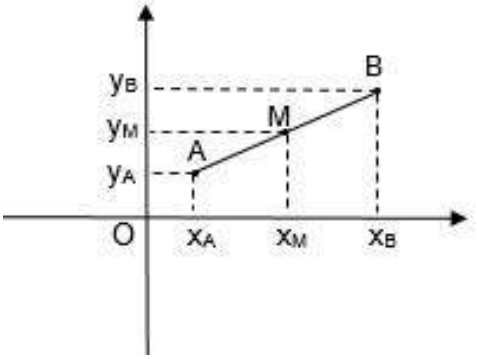
**- Propriedades do Sistema Cartesiano**.

Sendo um ponto p(x, y), temos:

1) Se P ∈ ao 1° quadrante: $x > 0$ e $y > 0$
2) Se P ∈ ao 2° quadrante: $x < 0$ e $y > 0$
3) Se P ∈ ao 3° quadrante: $x < 0$ e $y < 0$
4) Se P ∈ ao 4° quadrante: $x > 0$ e $y < 0$
5) Se P ∈ ao eixo das abcissas: $y = 0$
6) Se P ∈ ao eixo das ordenadas: $x = 0$
7) Se P ∈ à bissetriz dos quadrantes ímpares (1° e 3° quadrantes): $x = y$
8) Se P ∈ à bissetriz dos quadrantes pares (2° e 4° quadrantes): $x = -y$

## PONTO MÉDIO

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos do sistema cartesiano:

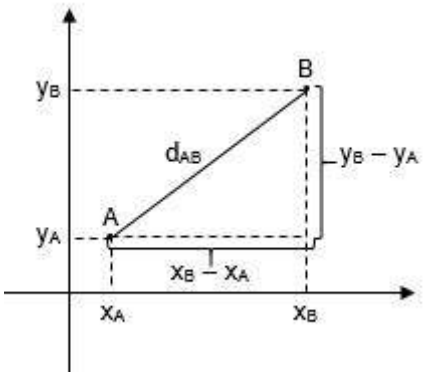



- se $M(x_M, y_M)$ é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos a fórmula do ponto médio:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

## DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS




- de acordo com o Teorema de Pitágoras, temos a fórmula da distância:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

## ÁREA DO TRIÂNGULO E CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ os três vértices de um triângulo ABC, para calcular a área desse triângulo temos a fórmula:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ onde } \quad D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

E a condição para que os três estejam alinhados (mesma linha ou mesma reta) é que D = 0.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Questões**

**01.** O ponto A(2m + 1, m + 7) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Então, o valor de m é:
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

**02.** O ponto P(2 + p, 4p – 12) pertence ao eixo das abscissas, então:
(A) P(2 ,0)
(B) P(3, 0)
(C) P(- 5, 0)
(D) P(5, 0)
(E) P(- 2, 0)

**03.** O ponto médio entre A(4, - 1) e B(2, 5) é:
(A) M(- 3, 2)
(B) M(3, - 2)
(C) M(- 3, - 2)
(D) M(3, 2)
(E) M(1, 2)

**04.** Se M(4, 5) é ponto médio entre A(6, 1) e B. As coordenadas $x_B$ e $y_B$, respectivamente, são iguais a:
(A) 2 e 9
(B) 2 e 7
(C) 9 e 2
(D) 3 e 9
(E) 1 e 8

**05.** Calcular a distância entre os pontos abaixo:

a) A(3, 1) e B(7, 4)
b) C(- 1, 8) e D(2, - 3)

**06.** Se a distância entre os pontos A(8, 2) e B(3, y) é igual a $5\sqrt{2}$, sendo B é um ponto do 1° quadrante, então o valor de y é:
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

**07.** Quais são os possíveis valores de c para que os pontos (c, 3), (2, c) e (14, - 3) sejam colineares?
(A) 4 e 5
(B) 5 e – 6
(C) – 5 e 6
(D) – 4 e 5
(E) 6 e 5

**08.** A área de um triângulo que tem vértices nos ponto A(2, 1), B(4, 5) e C(0, 3), em unidades de área, é igual a:
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 2


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**09.** Se (m + 2n, m – 4) e (2 – m, 2n) representam o mesmo ponto do plano cartesiano, então $m^n$ é igual a:

(A) 2
(B) 0
(C) – 2
(D) 1
(E) ½

## Respostas

**01. Resposta: B.**
Solução: se o ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares temos que x = y.

x = y
2m + 1 = m + 7
2m – m = 7 – 1
m = 6

**02. Resposta: D.**
Solução: se P pertence ao eixo das abscissas y = 0.
y = 0
4p – 12 = 0
4p = 12
p = 12/4
p = 3

x = 2 + p
x = 2 + 3
x = 5
Logo: P(5, 0)

**03. Resposta: D.**
Solução:

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_M = \frac{4+2}{2} = 3$ e $y_M = \frac{-1+5}{2} = 2$

**04. Resposta: A.**
Solução:

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ $\qquad$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

$4 = \frac{6 + x_B}{2}$ $\qquad$ $5 = \frac{1 + y_B}{2}$

$6 + x_B = 2.4$ $\qquad$ $1 + y_B = 2.5$

$x_B = 8 - 6 = 2$ $\qquad$ $y_B = 10 - 1 = 9$

**05. Respostas: a) 5 b)** $\sqrt{130}$
Soluções:

a) $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$d_{AB} = \sqrt{(7-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

b) $d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$

$d_{CD} = \sqrt{\big(2-(-1)\big)^2 + (-3-8)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-11)^2} = \sqrt{3^2 + 121} =$
$= \sqrt{9+121} = \sqrt{130}$

**06. Resposta: C.**
Solução:
$d_{AB} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 5\sqrt{2}$ (elevando os dois membros ao quadrado)

$\left(\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$

$(3-8)^2 + (y-2)^2 = 25.2$
$(-5)^2 + (y-2)^2 = 50$
$25 + (y-2)^2 = 50$
$(y-2)^2 = 50 - 25$
$(y-2)^2 = 25$
$y - 2 = \pm\sqrt{25}$
$y - 2 = \pm 5$

y – 2 = 5 ou y – 2 = - 5
y = 5 + 2 ou y = - 5 + 2
y = 7 ou y = - 3
como o ponto B está no 1° quadrante, y > 0 ➔ y = 7

**07. Resposta: E.**
Solução: colineares (mesma linha) ou seja, os pontos dados devem estar alinhados. A condição para isto é que D = 0.

$D = \begin{vmatrix} c & 3 & 1 \\ 2 & c & 1 \\ 14 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (para resolver o determinante D, repetimos as 1ª e 2ª colunas)

$D = \begin{vmatrix} c & 3 & 1 & c & 3 \\ 2 & c & 1 & 2 & c \\ 14 & -3 & 1 & 14 & -3 \end{vmatrix} = c.c.1 + 3.1.14 + 1.2.(-3) - 1.c.14 - c.1.(-3) - 3.2.1 =$

$= c^2 + 42 - 6 - 14c + 3c - 6 =$
$= c^2 - 11c + 30$

Então: $D = 0$ ➔ $c^2 - 11c + 30 = 0$, equação do 2° grau em que a = 1, b = - 11 e c = 30 (lembrando que o c que queremos determinar não é o mesmo c da equação).

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (-11)^2 - 4.1.30$
$\Delta = 121 - 120 = 1$

$c = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$c = \frac{-(-11) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{11 \pm 1}{2}$ ➔ $c = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ ou $c = \frac{11-1}{2} = \frac{10}{2} = 5$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**08. Resposta: B.**

Solução: a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{|D|}{2}$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2.5.1 + 1.1.0 + 1.4.3 - 1.5.0 - 2.1.3 - 1.4.1 =$$

$= 10 + 0 + 12 - 0 - 6 - 4 = 22 - 10 = 12$

$A = \frac{|12|}{2} = 6$

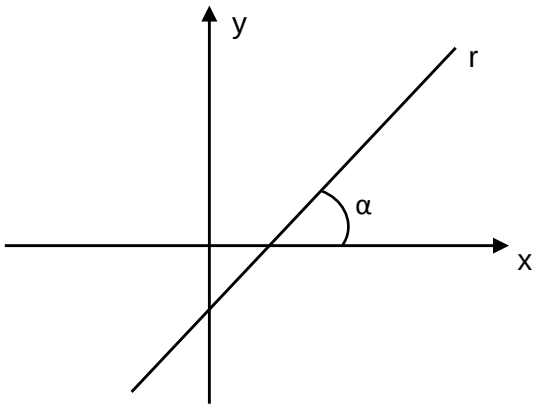
**09. Resposta: E.**

Solução: do enunciado temos que (m + 2n, m – 4) = (2 – m, 2n), se esses dois pontos são iguais:
m + 2n = 2 – m (I) e m – 4 = 2n (II), substituindo (II) em (I), temos:
m + m – 4 = 2 – m
2m – 4 = 2 – m
2m + m = 2.+ 4
3m = 6
m = 6 : 3
m = 2 (substituindo 2 em (II))
2 – 4 = 2n
- 2 = 2n
n = - 2 : 2
n = - 1
Logo: $m^n = 2^{-1} = ½$ (expoente negativo, invertemos a base e o expoente fica positivo.

## ESTUDO DA RETA

### INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Considere-se no Plano Cartesiano uma reta r. Chama-se inclinação de r à medida de um ângulo α que r forma com o eixo x no sentido anti-horário, a partir do próprio eixo x.




### COEFICIENTE ANGULAR DA RETA

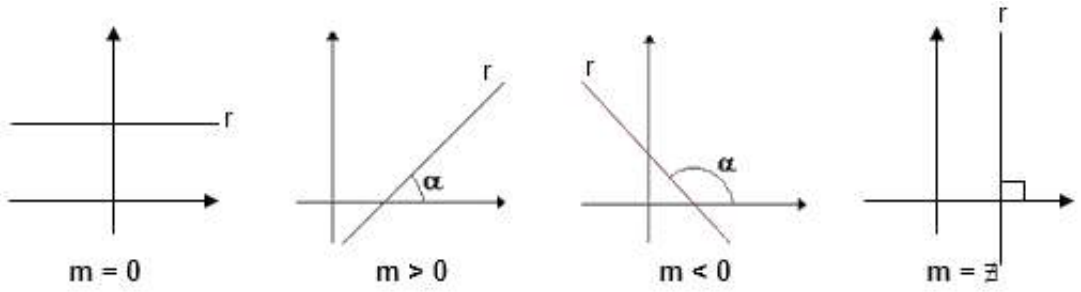
Definimos o coeficiente **angular** (ou **declividade**) da reta **r** o número **m** tal que $\mathbf{m = tg\alpha}$.

Então, temos:

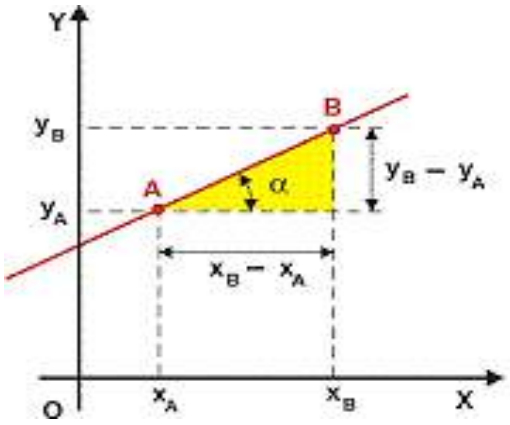
- se m = 0 ➔ a **reta é paralela** ao eixo x, isto é, α = 0°.
- se m > 0 ➔ temos um ângulo α, tal que 0° < α < 90°. O ângulo α é agudo.
- se m < 0 ➔ temos um ângulo α, tal que 90° < α < 180°. O ângulo α é obtuso.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- se m = ∄ (não existe) ➔ a **reta é perpendicular** ao eixo x, isto é, α = 90°.




Sendo A e B dois pontos pertencentes a uma reta r, temos:

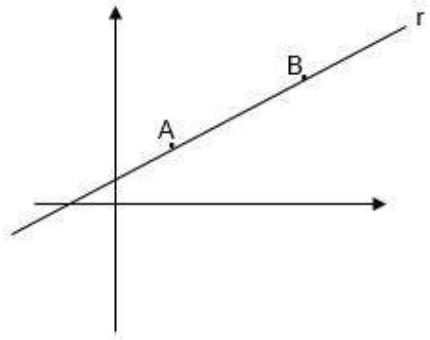



No triângulo retângulo: $tg\alpha = \frac{\text{cateto aposto}}{\text{cateto adjacente}}$, então temos que o coeficiente angular m é:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ➔ $\mathbf{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

## EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Considerando uma reta r e um ponto A($x_0$, $y_0$) pertencente à reta. Tomamos outro ponto B(x, y) genérico diferente de A. Com esses dois pontos pertencentes à reta r, podemos calcular o seu coeficiente angular.




$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ➔ $\frac{m}{1} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, multiplicando em "cruz":

**$y - y_o = m(x - x_o)$**, fórmula da equação fundamental da reta.

**Exemplos:**

1- Uma reta tem inclinação de 60° em relação ao eixo x. Qual é o coeficiente angular desta reta?

Solução: $m = tg\alpha$ ➔ $m = tg60°$ ➔ $m = \sqrt{3}$

2- Uma reta passa pelos pontos A(3, -1) e B(5, 8). Determinar o coeficiente angular dessa reta.

Solução: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ➔ $m = \frac{8-(-1)}{5-3}$ ➔ $m = \frac{9}{2}$

3- Uma reta passa pelo ponto A(2, 4) e tem coeficiente angular m = 5. Determinar a equação fundamental dessa reta.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Solução: o ponto por onde a reta passa são os valores de $x_o$ e $y_o$ para substituir na fórmula, então:

$y - y_o = m.(x - x_o)$ ➔ $y - 4 = 5.(x - 2)$ (esta é a equação fundamental da reta)

## EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Toda reta tem uma Equação Geral do tipo:

$\mathbf{ax + by + c = 0}$ , onde a, b e c são os coeficientes da equação e podem ser qualquer número real, com a condição de que a e b não sejam nulos ao mesmo tempo. Isto é se a = 0 ➔ b ≠ 0 e se b = 0 ➔ a ≠ 0.

Exemplos:
(r) 2x – 3y + 8 = 0 ➔ a = 2, b = - 3 e c = 8
(s) – x + 10 = 0 ➔ a = - 1, b = 0 e c = 10
(t) 3y – 7 = 0 ➔ a = 0, b = 3 e c = - 7
(u) x + 5y = 0 ➔ a = 1, b = 5 e c = 0

Da equação geral da reta, temos uma nova fórmula para o coeficiente angular: $\mathbf{m = \frac{-a}{b}}$

## EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Para determinar a equação reduzida da reta, basta "isolar" o y.

$$ax + by + c = 0$$

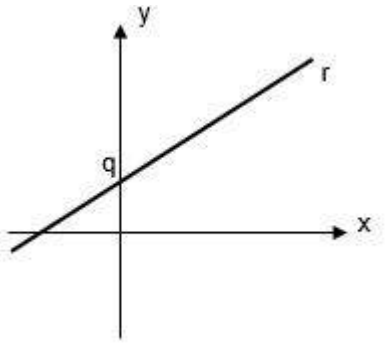
$$by = -ax - c$$

$$y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$$

Na equação reduzida da reta temos que $\frac{-a}{b}$ é o coeficiente angular (m) da reta e $\frac{-c}{b}$ é o coeficiente linear (q) da reta. Então, a equação reduzida é da forma:

$$y = mx + q$$

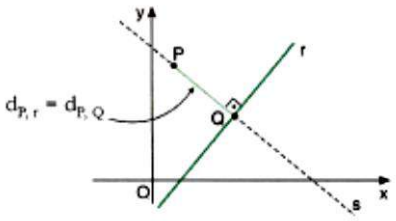
O coeficiente linear q é o ponto em que a reta "corta" o eixo y.




**Observações**:
I) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular e o coeficiente linear.
II) As retas de inclinação igual a 90° (reta vertical ao eixo x) não possuem equação reduzida.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## DISTÂNCIA PONTO- RETA

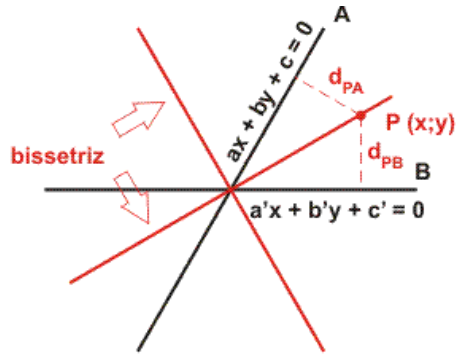



A distância entre um ponto e uma reta nada mais é que a distância entre dois pontos: o ponto dado e o pé da perpendicularidade à reta dada, conduzida pelo ponto dado.

A fórmula da resolução é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ d_{P,r} \geq 0$$

## BISSETRIZES DOS ÂNGULOS DE DUAS RETAS




Equação da bissetriz

$$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

A bissetriz de ângulos de retas, nada mais é a que a aplicação direta da fórmula da distância de um ponto a uma reta

### Questões

**01. (FGV-SP)** A declividade do segmento de reta que passa pelos pontos A(0, 3) e B(3, 0) é:
(A) 1
(B)– 1
(C) 0
(D) 3
(E) 1/3

**02. (MACK-SP)** Se os pontos (2, - 3), (4, 3) e $\left(5, \frac{k}{2}\right)$ estão numa mesma reta, então k é igual a:
(A) – 12
(B) – 6
(C) 6
(D) 12
(E) 18

**03.** Escreva a equação fundamental da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m nos seguintes casos:

a) P(1, 4) e m = 7
b) P(0, - 1) e m = 3


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

c) P(- 2, 5) e m = - 2

**04**. **(OSEC-SP)** A equação da reta que passa pelo ponto A(- 3, 4) e cujo coeficiente angular é ½ é:
(A) x + 2y + 11 = 0
(B) x – y + 11 = 0
(C) 2x – y + 10 = 0
(D) x – 2y + 11 = 0
(E) nda

**5.** Uma reta forma com o eixo x um ângulo de 45°. O coeficiente angular dessa reta é:
(A) 1
(B) – 1
(C) 0
(D) $\sqrt{3}$
(E) $-\sqrt{3}$

**06. (UEPA)** O comandante de um barco resolveu acompanhar a procissão fluvial do Círio-2002, fazendo o percurso em linha reta. Para tanto, fez uso do sistema de eixos cartesianos para melhor orientação. O barco seguiu a direção que forma 45° com o sentido positivo do eixo x, passando pelo ponto de coordenadas (3, 5). Este trajeto ficou bem definido através da equação:
(A) y = 2x – 1
(B) y = - 3x + 14
(C) y = x + 2
(D) y = - x + 8
(E) y = 3x – 4

**07.** A equação geral de uma reta é – 2x + 4y + 12 = 0. A equação geral dessa reta é:
(A) $y = x - 3$
(B) $y = \frac{x}{2} - 3$
(C) $y = x + 3$
(D) $y = \frac{x}{2} + 3$
(E) $y = 2x + 3$

**08.** Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B em cada caso abaixo:

a) A(1, 3) e B(2, 5)
b) A(0, - 1) e B(4, 1)

**09.** Considere a reta (r) de equação 2x – 3y + 7 = 0. O valor de **a** para que o ponto P(1, a) pertença a esta reta é:
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

**10.** Dê o coeficiente angular da reta em cada caso abaixo:

a) x – y + 3 = 0
b) 2x + 3y – 1 = 0
c) 2y – 4 = 0
d) 3x + 5 = 0


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Respostas

**01. Resposta: B.**

Solução: como temos dois pontos, o coeficiente angular é dado por m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ➔ $m = \frac{0-3}{3-0} = \frac{-3}{3}$ = - 1

**02. Resposta: D.**

Solução: chamando os pontos, respectivamente, de A(2, - 3), B(4, 3) e C$\left(5, \frac{k}{2}\right)$ e se esses três pontos estão numa mesma reta, temos:

$m_{AB} = m_{BC}$ (os coeficientes angulares de pontos que estão na mesma reta são iguais)

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$

$\frac{3-(-3)}{4-2} = \frac{\frac{k}{2}-3}{5-4}$

$\frac{6}{2} = \frac{\frac{k-6}{2}}{1}$

$3 = \frac{k-6}{2}$

k – 6 = 6

k = 6 + 6

k = 12

**03. Respostas:**

Solução: utilizar a fórmula $y - y_o = m(x - x_o)$, onde $x_o$ e $y_o$ são do ponto P.

a) y – 4 = 7(x – 1)

b) y – (- 1) = 3.(x – 0) ➔ y + 1 = 3.(x – 0)

c) y – 5 = - 2(x – (-2)) ➔ y – 5 = - 2(x + 2)

**04. Resposta: D.**

Solução: $x_o$ = - 3, $y_o$ = 4 e m = 1/2. Nesta questão as alternativas estão na forma de equação geral, então temos que desenvolver a equação fundamental.

$y - y_o = m(x - x_o)$

y – 4 = $\frac{1}{2}$.(x – (-3)) (passamos o 2 multiplicando o 1° membro da equação)

2.(y – 4) = 1(x + 3)

2y – 8 = x + 3

2y – 8 – x – 3 = 0

- x + 2y – 11 = 0 .(- 1)

x – 2y + 11 = 0

**05. Resposta: A.**

Solução: o coeficiente angular é dado por $m = tg\alpha$.

$m = tg45°$ ➔ m = 1

**06. Resposta: C.**

Solução: $x_o$ = 3, $y_o$ = 5 e $m = tg45°$ = 1. As alternativas estão na forma de equação reduzida, então:

$y - y_o = m(x - x_o)$

y – 5 = 1.(x – 3)

y – 5 = x – 3

y = x – 3 + 5



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

y = x + 2

**07. Resposta: B.**
Solução: dada a equação geral da reta, para determinar a reduzida basta isolar o y.

- 2x + 4y + 12 = 0
4y = 2x – 12 (passamos o 4 dividindo para o segundo membro separadamente cada termo)

$$y = \frac{2x}{4} - \frac{12}{4}$$

$$y = \frac{x}{2} - 3$$

**08. Respostas**
Solução: primeiro calcular o coeficiente angular e depois podemos escolher qualquer um dos pontos A ou B para ter o valor de $x_o$ e $y_o$.

a) $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ➔ $m_{AB} = \frac{5-3}{2-1} = 2$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

y – 3 = 2.(x – 1)
y – 3 = 2x – 2
y – 3 – 2x + 2 = 0
- 2x + y – 1 = 0 (não é obrigatório, porém é bom que o **a** seja um número positivo)
- 2x + y – 1 = 0 x(-1)
2x – y + 1 = 0

b) $m_{AB} = \frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

y – 1 = $\frac{1}{2}$.(x – 4) (o dois passa multiplicando o 1° membro da equação)
2.(y – 1) = x – 4
2y – 2 – x + 4 = 0
- x + 2y + 2 = 0 x(-1)
x – 2y – 2 = 0

**09. Resposta: A.**
Solução: No ponto P x = 1 e y = a, basta substituir esses valores na equação.

2x – 3y + 7 = 0
2.1 – 3.a + 7 = 0
2 – 3a + 7 = 0
- 3a = - 2 – 7
- 3a = - 9 x(-1)
3a = 9
a = 9 : 3
a = 3

**10. Respostas**
Solução: utilizar a fórmula m = $\frac{-a}{b}$.
a) x – y + 3 = 0 ➔ a = 1 e b = - 1

$$m = \frac{-1}{-1} = 1$$

b) 2x + 3y – 1 = 0 ➔ a = 2 e b = 3


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$m = \frac{-2}{3}$

c) 2y – 4 = 0 ➔ a = 0 e b = 2

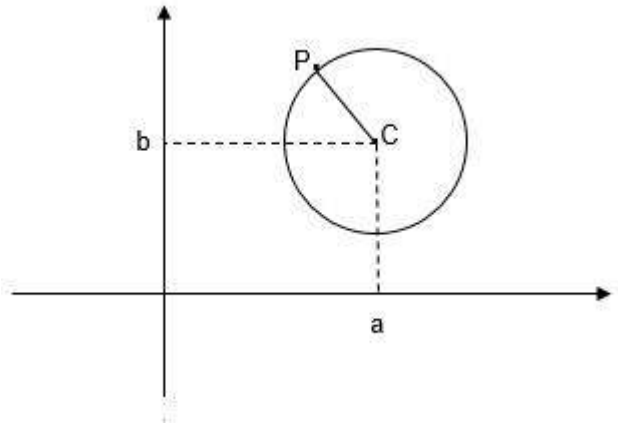
$m = \frac{-0}{2} = 0$

a) 3x + 5 = 0 ➔ a = 3 e b = 0

$m = \frac{-3}{0} = \nexists$ (não existe)

## ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

Os elementos principais de uma circunferência são o centro e o raio. Na geometria analítica o raio é representado por **r** e o centro por **C(a, b)**.




### Equação Reduzida de uma circunferência

Considerando uma circunferência de centro **C** e raio **r**; e sendo **P(x, y)** um ponto genérico dessa circunferência, temos que a distância entre **C** e **P** é igual ao raio.

$$\mathbf{d_{CP} = r}$$

$$\mathbf{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r}$$

- elevamos os dois membros da equação acima ao quadrado:

$$\mathbf{\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2}$$

- então, temos a seguinte fórmula:

$$\mathbf{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Exemplo: Determinar a equação reduzida da circunferência que tem centro C(3, 2) e raio r = 5.

Resolução:
As coordenadas do centro são os valores de **a** e **b** para substituir na fórmula.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

**Equação Geral de uma circunferência**

Para se obter a equação geral de um circunferência basta fazer o desenvolvimento da equação reduzida:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

**Observações:**
**- numa equação de circunferência:**
**1) sempre começa por $x^2 + y^2$.....**
**2) não existe termo xy.**
**3) r > 0**

**Questões**

**01.** Uma circunferência tem centro C(2, 4) e raio 5. A equação reduzida dessa circunferência é:
(A) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$
(B) $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$
(C) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$
(D) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$
(E) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$

**02. (VUNESP)** A equação da circunferência, com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto P(0, 3), é:
(A) $x^2 + (y - 3)^2 = 0$
(B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
(C) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$
(D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$
(E) $x^2 + (y - 3)^2 = 8$

**03. (CESGRANRIO-RJ)** Uma equação da circunferência de centro C(- 3, 4) e que tangencia o eixo **x** é:
(A) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$
(B) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
(C) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
(D) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
(E) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

**04.** Uma circunferência tem equação reduzida $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$, o centro e o raio dessa circunferência igual a:
(A) C(3, 5) e r = 7
(B) C(- 3, 5) e r = 7
(C) C(- 3, - 5) e r = 49
(D) C(3, - 5) e r = 7
(E) C(3, 5) e r = 49

**05.** Uma circunferência tem equação geral igual a $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$, determinar o centro e o raio dessa circunferência.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Respostas

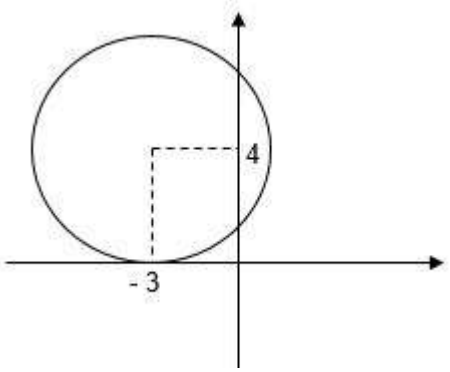
**01. Resposta: D.**
Solução: temos C(2, 4), então a = 2 e b = 4; e raio r = 5.

$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$
$(x – 2)^2 + (y – 4)^2 = 5^2$
$(x – 2)^2 + (y – 4)^2 = 25$

**02. Resposta: C.**
Solução: temos que C(2, 1), então a = 2 e b = 1. O raio não foi dado no enunciado.
$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$
$(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = r^2$ (como a circunferência passa pelo ponto P, basta substituir o x por 0 e o y por 3 para achar a raio.

$(0 – 2)^2 + (3 – 1)^2 = r^2$
$(- 2)^2 + 2^2 = r^2$
$4 + 4 = r^2$
$r^2 = 8$
$(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = 8$

**03. Resposta: E.**
Solução: neste caso temos que fazer um gráfico para determinar o raio que não foi dado no enunciado. Porém foi dito que a circunferência tangencia o eixo x.




Através do gráfico, podemos ver que o raio vale 4 (distância do centro ao ponto de tangência no eixo x), então: a = - 3 e b = 4.
$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$

$(x – (-3))^2 + (y – 4)^2 = 4^2$

$(x + 3)^2 + (y – 4)^2 = 16$

**04. Resposta: A.**
Solução: Através da fórmula $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.

$(x – 3)^2 + (y – 5)^2 = 49$
a = 3 e b = 5 ➔ C(3, 5) e $r^2 = 49$ ➔ $r = \sqrt{49}$ ➔ r = 7

**05. Resposta: C(2 , - 1) e r = 6**
Solução: a equação geral é dada por $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + a^2 + b^2 – r^2 = 0$, para determinar o centro e o raio temos:

$x^2 + y^2 – 4x + 2y – 31 = 0$, o coeficiente de x é – 4 e o coeficiente de y é 2, comparando com a fórmula, temos que dividir estes coeficientes por – 2 para determinar o centro.

$C\left(\frac{-4}{-2}, \frac{2}{-2}\right)$ ➔ (2, - 1)

Para determinar o raio temos que:
$a^2 + b^2 – r^2 = - 31$
$2^2 + (-1)^2 + 31 = r^2$
$4 + 1 + 31 = r^2$
$r^2 = 36$

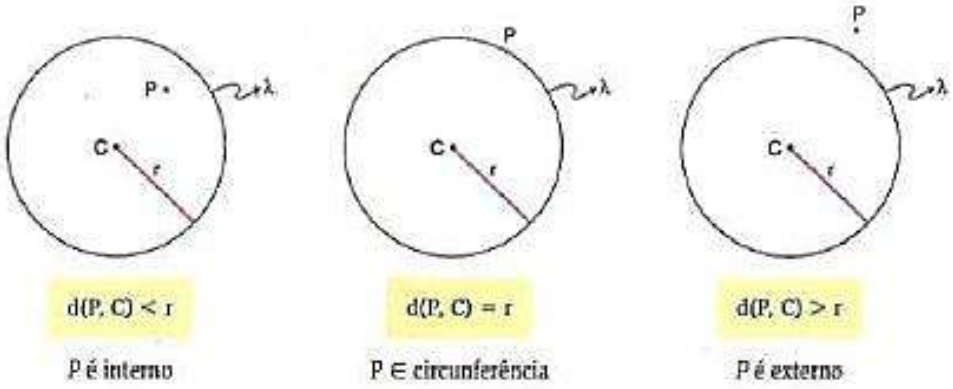

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$r = \sqrt{36}$
r = 6

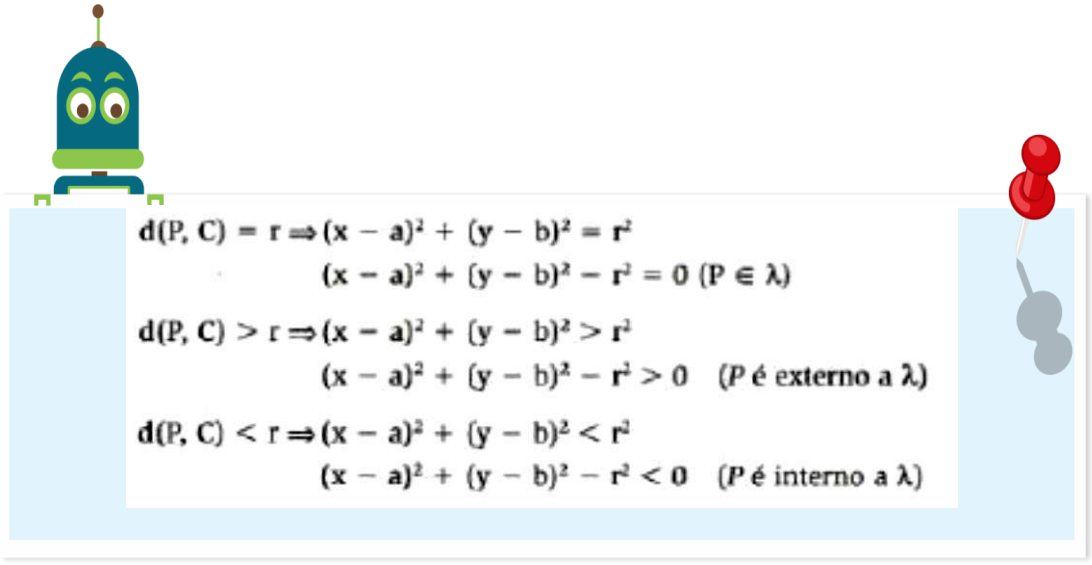
## POSIÇÕES RELATIVAS

### - DE UM PONTO E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Um ponto pode ser:
- Interno;
- Externo ou
- Pertencer a uma dada circunferência de centro C e raio r.

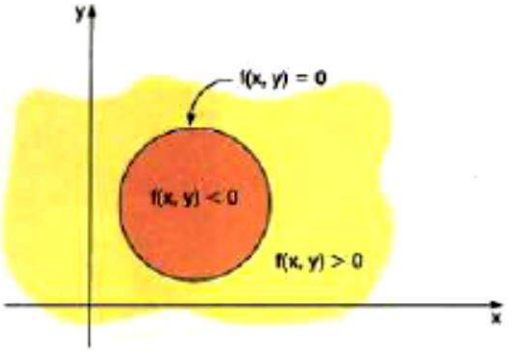



Para conhecermos a posição de um ponto P em relação a uma circunferência basta calcularmos a sua distância do ponto P ao centro da circunferência e compará-la com medida do raio.



$$d(P, C) = r \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \ (P \in \lambda)$$
$$d(P, C) > r \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 > 0 \quad (P \text{ é externo a } \lambda)$$
$$d(P, C) < r \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 < 0 \quad (P \text{ é interno a } \lambda)$$

Assim o plano cartesiano fica dividido em três regiões:




- a região dos pontos **pertences** à circunferência representam as soluções de f(x,y) = 0
- a região dos pontos **internos** à circunferência representam as soluções de f(x,y) < 0
- a região dos pontos **externos** à circunferência representam de f(x,y) > 0


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Exemplo:**

Determinar a posição dos pontos A(-2,3), B(-4,6) e C(4,2) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$.

Substituindo as coordenadas dos pontos A, B e C no 1º membro da equação da circunferência obtemos:

A(-2,3) ➔ x = -2 e y = 3

$x^2 + y^2 + 8x - 20 = (-2)^2 + 3^2 + 8.(-2) - 20 = -23 < 0$

A é ponto interno.

B(-4,6) ➔ x = -4 e y = 6

$x^2 + y^2 + 8x - 20 = (-4)^2 + 6^2 + 8.(-4) - 20 = 0$

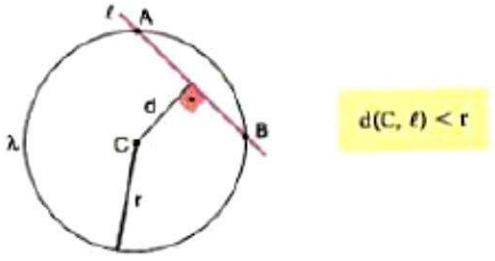
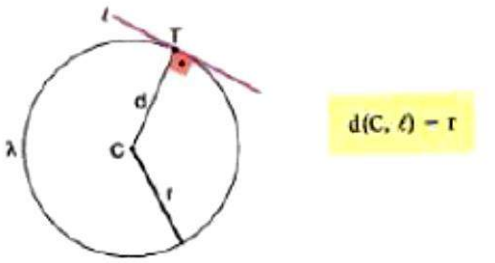
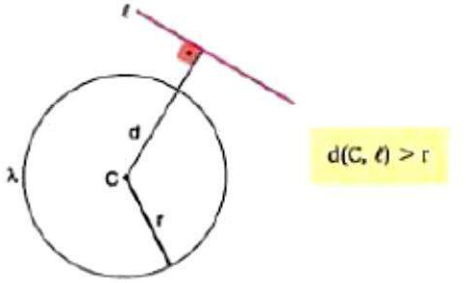
B pertence à circunferência.

C(4,2) ➔ x = 4 e y = 2

$x^2 + y^2 + 8x - 20 = 4^2 + 2^2 + 8 \cdot 4 - 20 = 32 > 0$

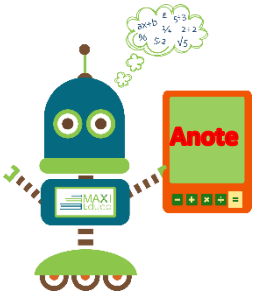
**- DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA**

Uma reta l e uma circunferência λ podem ocupar as seguintes posições relativas:

| | |
|---|---|
| **l e λ são secantes**<br><br>A reta l intercepta a circunferência λ em 2 pontos, e a distância d entre a reta e o centro da circunferência é menor que o raio. |  |
| **l e λ são tangentes**<br><br>A reta l intercepta a circunferência λ em único ponto de tangência, e a distância d entre a reta e o centro da circunferência é igual ao raio. |  |
| **l e λ são exteriores**<br><br>A reta l não intercepta a circunferência λ, e a distância d entre a reta e o centro da circunferência é maior que o raio. |  |



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Resumindo**

- Para determinarmos a posição relativa entre uma reta e uma circunferência, basta comparar a distância d (entre a reta e o centro da circunferência) com o raio r.

✓ $d(C, \ell) < r \rightarrow$ reta e circunferência secantes
✓ $d(C, \ell) = r \rightarrow$ reta e circunferência tangentes
✓ $d(C, \ell) > r \rightarrow$ reta e circunferência exteriores

Com isso podemos achar também a posição relativa de uma reta e uma circunferência procurando os pontos de intersecção da reta com a circunferência. Para isso resolvemos um sistema formado pelas equações da reta:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$$

Com essa resolução caímos em um sistema de equações do 2º grau e através do discriminante (Δ) encontramos as seguintes condições:

✓ Para $\Delta > 0$ a reta é secante à circunferência (2 pontos comuns).
✓ Para $\Delta = 0$ a reta é tangente à circunferência (1 ponto comum).
✓ Para $\Delta < 0$ a reta é exterior à circunferência (nenhum ponto comum).

**Exemplo:**

1) Verifique a posição relativa entre a reta s: 3x + y – 13 = 0 e a circunferência de equação $(x – 3)^2 + (y – 3)^2 = 25$.

Solução: Devemos calcular a distância entre o centro da circunferência e a reta s e comparar com a medida do raio. Da equação da circunferência, obtemos:

$x_0 = 3$ e $y_0 = 3 \rightarrow O(3, 3)$

$r2 = 25 \rightarrow r = 5$

Vamos utilizar a fórmula da distância entre ponto e reta para calcular a distância entre O e s.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Da equação geral da reta, obtemos:

a = 3, b = 1 e c = – 13

Assim,

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-13)|}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{|9 + 3 - 13|}{\sqrt{18}} = \frac{|-1|}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} < r$$

Como a distância entre o centro O e a reta s é menor que o raio, a reta s é secante à circunferência.

**Questões**

**01. (ITA-SP)** A distância entre os pontos de intersecção da reta  com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$ é:

(A) $16\sqrt{5}$
(B) $4\sqrt{5}$
(C) $3\sqrt{3}$
(D) $4\sqrt{3}$
(E) $5\sqrt{7}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**02. (UFRS)** O valor de k que transforma a equação $x^2 + y^2 – 8x + 10y + k = 0$ na equação de uma circunferência de raio 7 é:

(A) –4
(B) –8
(C) 5
(D) 7
(E) –5

## Respostas

**01. Resposta: A.**

Resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1 \\ x^2 + y^2 = 400 \end{cases}$$

Simplificando a 1ª equação:

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1$$

$$\frac{2x + y}{20} = \frac{20}{20}$$

$$2x + y = 20$$

$$y = 20 - 2x$$

Substituindo x na 2ª equação:

$x^2 + y^2 = 400$
$x^2 + (20 – 2x)^2 = 400$
$x^2 + 400 – 80x + 4x^2 ¬– 400 = 0$
$5x^2 – 80x = 0$
$5x * (x – 16) = 0$
$5x = 0$
$x' = 0$
$x – 16 = 0$
$x'' = 16$

Para x = 0, temos:
$y = 20 – 2x$
$y = 20 – 2*0$
$y = 20$
(0; 20)

Para x = 16, temos:
$y = 20 – 2x$
$y = 20 – 2 * 16$
$y = 20 – 32$
$y = – 12$
(16; –12)

Os pontos de intersecção são (0; 20) e (16; –12).
Determinando a distância entre os pontos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow \sqrt{(16 - 0)^2 + (-12 - 20)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{256 + 1024} \Rightarrow \sqrt{1280} = 16\sqrt{5}$$

**02. Resposta: B.**

$x^2 + y^2 – 8x + 10y + k = 0$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Encontrar a equação reduzida (completar os trinômios)
$x^2 – 8x + y^2 + 10y = –k$
$x^2 – 8x + 4 + y^2 + 10y + 25 = – k + 4 + 25$
$(x – 4)^2 + (x + 5)^2 = –k + 41$
Temos que o raio será dado por:
$–k + 41 = 7^2$
$–k = 49 – 41$
$–k = 8$
$k = 8$

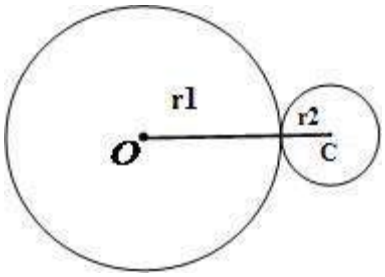
**- ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS**

Duas circunferências distintas, podem ter dois, um ou nenhum ponto em comum.

**1. Circunferências tangentes.**

**a) Tangentes externas**

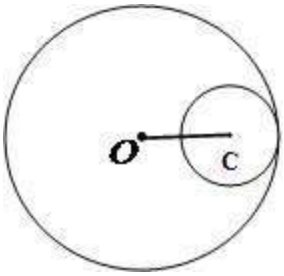
Duas circunferências são tangentes internas quando possuem somente um ponto em comum e uma exterior à outra. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os centros das duas circunferências seja equivalente à soma das medidas de seus raios.




**dOC = r1 + r2**

**b) Tangentes internas**

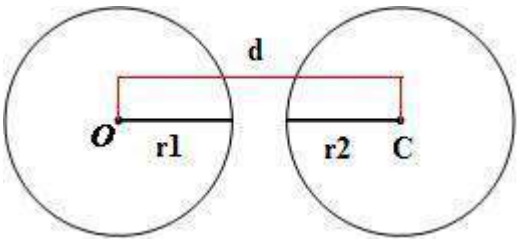
Duas circunferências são tangentes internas quando possuem apenas um ponto em comum e uma esteja no interior da outra. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os dois centros seja igual à diferença entre os dois raios.




**dOC = r1 . r2**

**2. Circunferências externas.**

Duas circunferências são consideradas externas quando não possuem pontos em comum. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os centros das circunferências deve ser maior que a soma das medidas de seus raios.

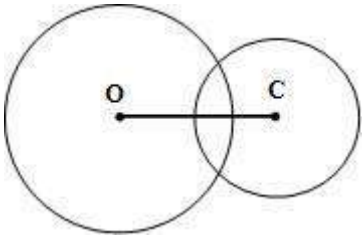



**dOC > r1 + r2**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**3. Circunferências secantes.**

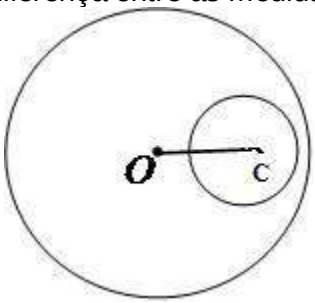
Duas circunferências são consideradas secantes quando possuem dois pontos em comum. A condição para que isso aconteça é que a distância entre os centros das circunferências deve ser menor que a soma das medidas de seus raios.




**dOC < r1 + r2**

**4. Circunferências internas.**

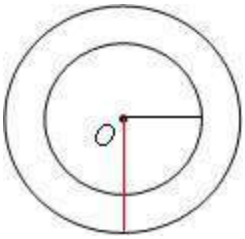
Duas circunferências são consideradas internas quando não possuem pontos em comum e uma está localizada no interior da outra. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os centros das circunferências deve ser equivalente à diferença entre as medidas de seus raios.




**dOC < r1 . r2**

**5. Circunferências concêntricas.**

Duas circunferências são consideradas concêntricas quando possuem o centro em comum. Nesse caso, a distância entre os centro é nula.




**dOC = 0**

Exemplo:
1) Dadas as circunferências λ e σ, de equações:
λ: x2 + y2 = 9
σ: (x – 7)2 + y2 = 16
Verifique a posição relativa entre elas.

Para resolução do problema devemos saber as coordenadas do centro e a medida do raio de cada uma das circunferências. Através da equação de cada uma podemos encontrar esses valores.
Como a equação de toda circunferência é da forma: (x – x0)2 + (y – y0)2 = r2, teremos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$\lambda: x^2 + y^2 = 9$

$x_0 = 0$ e $y_0 = 0 \rightarrow C(0, 0)$

$r_1^2 = 9 \rightarrow r_1 = 3$

$\sigma: (x-7)^2 + y^2 = 16$

$x_0 = 7$ e $y_0 = 0 \rightarrow O(7, 0)$

$r_2^2 = 16 \rightarrow r_2 = 4$

Conhecidos os elementos de cada uma das circunferências, vamos calcular a distância entre os centros, utilizando a fórmula da distância entre dois pontos.

$$d_{CO} = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2}$$

$$d_{CO} = \sqrt{(0-7)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{49} = 7 = r_1 + r_2$$

## Questões

**01. (PUC-SP)** O ponto P(3, b) pertence à circunferência de centro no ponto C(0, 3) e raio 5. Calcule o valor da coordenada b.

**02. (FEI-SP)** Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto A(1, 1).

**03. (ITA-SP)** Qual a distância entre os pontos de intersecção da reta com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$?

## Respostas

**01.** A equação da circunferência que possui centro C(0, 3) e raio r = 5 é dada por:
$(x – 0)^2 + (y – 3)^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + (y – 3)^2 = 25$.
Sabendo que o ponto (3, b) pertence à circunferência, temos que:
$3^2 + (b – 3)^2 = 25 \rightarrow 9 + (b – 3)^2 = 25 \rightarrow (b – 3)^2 = 25 – 9 \rightarrow (b – 3)^2 = 16$
$b – 3 = 4 \rightarrow b = 4 + 3 \rightarrow b = 7$
$b – 3 = – 4 \rightarrow b = – 4 + 3 \rightarrow b = – 1$
O valor da coordenada b pode ser –1 ou 7.

**02.** Sabendo que o ponto A(1 ,1) pertence à circunferência e que o centro possui coordenadas C(2, 1), temos que a distância entre A e C é o raio da circunferência. Dessa forma temos que d(A, C) = r.

$$d_{A,C} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d_{A,C} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2}$$

$$d_{A,C} = \sqrt{1}$$

$$d_{A,C} = 1$$

Se o raio da circunferência é igual a 1 e o centro é dado por (2, 1), temos que a equação da circunferência é dada por: **$(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = 1$.**

**03.** Vamos obter os pontos de intersecção da reta e da circunferência através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1 \\ x^2 + y^2 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1 \Rightarrow \frac{2x+y}{20} = \frac{20}{20} \\ x^2 + y^2 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 400 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição:
$2x + y = 20$
$y = 20 – 2x$
Substituindo y na 2ª equação:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$x^2 + y^2 = 400$
$x^2 + (20 - 2x)^2 = 400$
$x^2 + 400 - 80x + 4x^2 = 400$
$5x^2 - 80x + 400 - 400 = 0$
$5x^2 - 80x = 0$
$5x * (x - 16) = 0$
$5x = 0$

$x' = 0$
$x - 16 = 0$
$x'' = 16$
Substituindo x = 0 e x = 16, na equação y = 20 – 2x:
x = 0
y = 20 – 2 * 0
y = 20
**S = {0, 20}**

x = 16
y = 20 – 2 * 16
y = 20 – 32
y = – 12
**S = {16, –12}**

Os pontos de intersecção são: {0, 20} e {16, –12}. Vamos agora estabelecer a distância entre eles:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(16 - 0)^2 + (-12 - 20)^2}$$
$$d = \sqrt{256 + 1024}$$
$$d = \sqrt{1280}$$
$$d = 16\sqrt{5}$$

A distância entre os pontos de intersecção da reta e da circunferência é igual a $16\sqrt{5}$.

## INEQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIAVEIS

Denominamos inequação toda sentença matemática aberta por uma desigualdade.

As inequações podem ser escritas das seguintes formas:

**ax + b > 0;**
**ax + b < 0;**
**ax + b ≥ 0;**
**ax + b ≤ 0.**

Onde a, b são números reais com a ≠ 0.

**- Representação gráfica de uma inequação do 1º grau com duas variáveis**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Método prático:**

1) Substituímos a desigualdade por uma igualdade.

2) Traçamos a reta no plano cartesiano.

3) Escolhemos um ponto auxiliar, de preferência o ponto (0, 0) e verificamos se o mesmo satisfaz ou não a desigualdade inicial.

3.1) Em caso positivo, a solução da inequação corresponde ao semiplano ao qual pertence o ponto auxiliar.

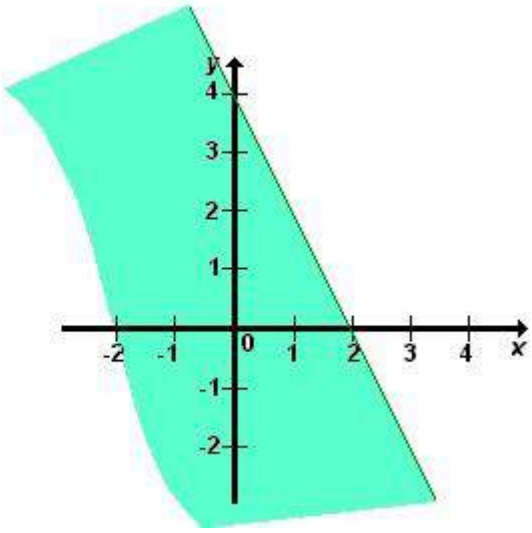
3.2) Em caso negativo, a solução da inequação corresponde ao semiplano oposto aquele ao qual pertence o ponto auxiliar.

**Exemplo:**

Vamos representar graficamente a inequação $2x + y \leq 4$.

Tabela

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 4 | (0, 4) |
| 2 | 0 | (2, 0) |




Substituindo o ponto auxiliar (0, 0) na inequação $2x + y \leq 4$.
Verificamos:
$2.0 + 0 \leq 4 \rightarrow 0 \leq 4$, a afirmativa é positiva, pois o ponto auxiliar satisfaz a inequação. A solução da inequação corresponde ao semiplano ao qual pertence o ponto auxiliar (0, 0).

## INEQUAÇÃO DO 2º GRAU

Chamamos inequação do 2º grau às sentenças:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Onde *a*, *b*, *c* são números reais conhecidos, $a \neq 0$, e x é a incógnita.

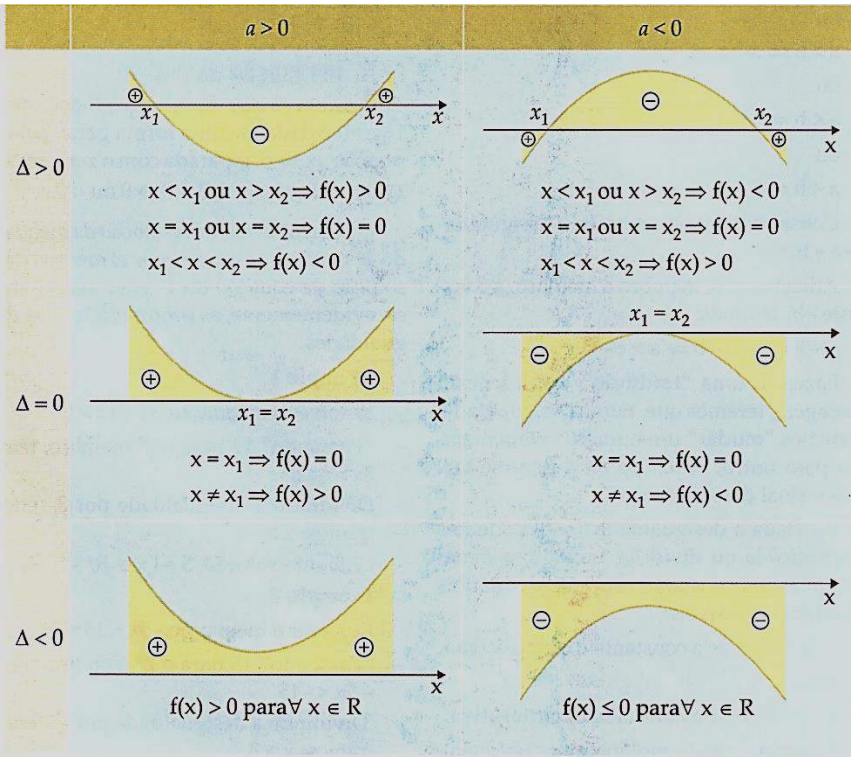

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Estudo da variação de sinal da função do 2º grau:**

- Não é necessário que tenhamos a posição exata do vértice, basta que ele esteja do lado certo do eixo x;
- Não é preciso estabelecer o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo y e, considerando que a imagens acima do eixo x são positivas e abaixo do eixo negativas, podemos dispensar a colocação do eixo y.

Para estabelecermos a variação de sinal de uma função do 2º grau, basta conhecer a posição da concavidade da parábola, voltada para cima ou para baixo, e a existência e quantidade de raízes que ela apresenta.

Consideremos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.

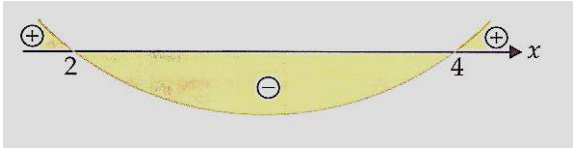



Finalmente, tomamos como solução para inequação as regiões do eixo x que atenderem às exigências da desigualdade.

**Exemplo:**

Resolver a inequação $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

- Fazemos $y = x^2 - 6x + 8$.
- Estudamos a variação de sinal da função y.




- Tomamos, como solução da inequação, os valores de x para os quais $y > 0$:

$S = \{x \in R | x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

Observação: Quando o universo para as soluções não é fornecido, fazemos com que ele seja o conjunto R dos reais.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

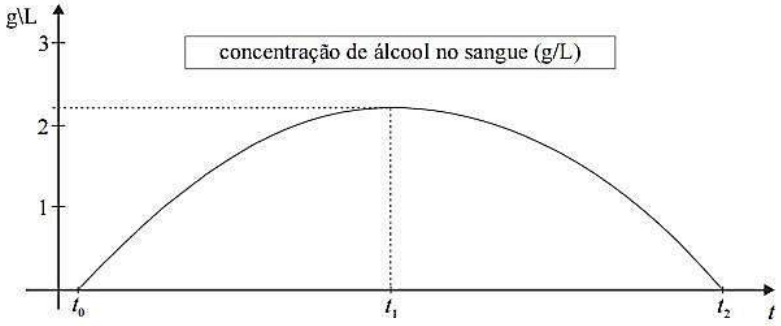
**01.** Foram colocados em uma reserva 35 animais ameaçados de extinção. Decorridos t anos, com $0 \leq t \leq 10$, a população N desses animais passou a ser estimada por $N(t) = 35 + 4t - 0{,}4\,t^2$. Nessas condições, o número máximo que essa população de animais poderá atingir é:

(A) 38
(B) 45
(C) 52
(D) 59
(E) 63

**02. (SABESP – ANALISTA DE GESTÃO I -CONTABILIDADE – FCC/2012)** No conjunto dos números reais, a inequação $(x - 1)(x + 5) + x \leq (2x - 1)^2$ apresenta como conjunto solução:

(A) R
(B) $\{x \in R / x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1\}$
(C) $\{x \in R / -2 \leq x \leq -1\}$
(D) $\{x \in R / x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
(E) $\{x \in R / 1 \leq x \leq 2\}$

**03. (PRF 2013 – Cespe)** - Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t0$ ($N(t0) = 0$), partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em $t = t1$, voltando a ficar sóbria em $t = t2$. Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função $N(t)$ para $t \in [t0, t2]$. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.




O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.

( ) Certa ( ) Errada

**04.** A proposição funcional "Para todo e qualquer valor de n, tem-se $6n < n^2 + 8$ " será verdadeira, se n for um número real

(A) menor que 8.
(B) menor que 4.
(C) menor que 2.
(D) maior que 2.
(E) maior que 3.

## Respostas

**01. Resposta: B.**

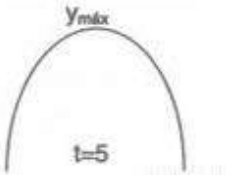
Como o intervalo de tempo corresponde de 0 a 10 anos e o maior tempo é 10 anos, logo teremos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$N(t) = 35 + 4t - 0{,}4t^2 \qquad (0 \leq t \leq 10)$

$N(0) = 35$

$N(10) = 35 \qquad N(5) = 35 + 4 \cdot 5 - 0{,}4 \cdot 5^2 = 45$




**02. Resposta: D.**

$x^2 + 5x - x - 5 + x \leq 4x^2 - 4x + 1$

$-3x^2 + 9x - 6 \leq 0 : (3)$

$-x^2 + 3x - 2 \leq 0 .(-1)$

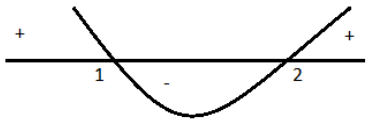
$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4.1.2$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x = \frac{3 \pm 1}{2}$

$x_1 = 2$

$x_2 = 1$




$S=\{x \in R / x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

**03. Resposta: CERTA.**

$-0{,}008(t^2 - 35t + 34) > 1$

$-8(t^2 - 35t + 34) > 1000$

$t^2 - 35t + 34 > -125$

$t^2 - 35t + 159 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 35^2 - 4.1.159 = 589$

$t = \frac{-(-35) \pm \sqrt{589}}{2.1} = \frac{35 \pm 24{,}3}{2} \Rightarrow t1 = \frac{35 + 24{,}3}{2} = 29{,}65 \quad \therefore t2 = \frac{35 - 24{,}3}{2} = 5{,}35$

$S = \{5{,}35 < t < 29{,}65\}$ , diferença entre eles = 24,3

**04. RESPOSTA : "C"**

$n^2 - 6n + 8 > 0$,resolvendo pelo método da Soma e Produto, temos:

Soma $= -\frac{b}{a} = \frac{-(-6)}{1} = 6$

Produto $= \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$

Precisamos descobrir dois números cuja soma é 6 e o produto é 8 só podem ser 2 e 4.
Como a>0 a parábola tem concavidade para cima:

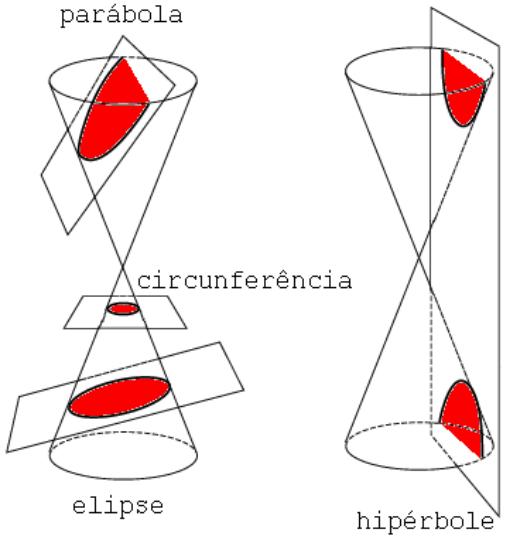



$S = n < 2$ ou $n > 4$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

**As cônicas** – hipérbole, parábola, elipse e a circunferência, possuem todas elas, um aspecto singular: podem ser obtidas através da interseção de um plano convenientemente escolhido com uma superfície cônica, conforme mostrado na figura a seguir:




A circunferência é, na realidade, uma elipse perfeita, cuja excentricidade é nula. No caso da **elipse** já sabemos que:

excentricidade = e = c/a

Como é válido na elipse que $a^2 = b^2 + c^2$ , vem que:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Ora, como c < a, vem imediatamente que e < 1. Também, como a e c são distâncias e portanto, positivas, vem que e > 0. Em resumo, no caso da elipse, a excentricidade é um número situado entre 0 e 1 ou seja:

0 < e < 1.

Observa-se que a elipse é tanto mais achatada quanto mais próximo da unidade estiver a sua excentricidade.

Raciocinando opostamente, se o valor de c se aproxima de zero, os valores de a e de b tendem a igualar-se e a elipse, no caso extremo de c = 0, (o que implica e = 0) transforma-se numa circunferência. A circunferência é então, uma elipse de excentricidade nula.

No caso da **hipérbole**, já sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$ e, portanto,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Neste caso, c > a, o que significa que a excentricidade de uma hipérbole é um número real maior do que a unidade, ou seja e > 1.

Observe na fórmula acima que se as medidas a e b forem iguais, ou seja a = b, teremos uma hipérbole equilátera, cuja excentricidade será igual a e = Ö 2, resultado obtido fazendo a = b na fórmula acima.

Resumindo, observe que sendo e a excentricidade de uma cônica:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

| Cônica | e |
|---|---|
| Circunferência | 0 |
| Elipse | 0 < e < 1 |
| Hipérbole | e > 1 |

Quanto à **parábola**, podemos dizer, que a sua excentricidade será igual a 1? Em a realidade, a excentricidade da parábola é igual a 1; Vamos desenvolver este assunto a seguir:

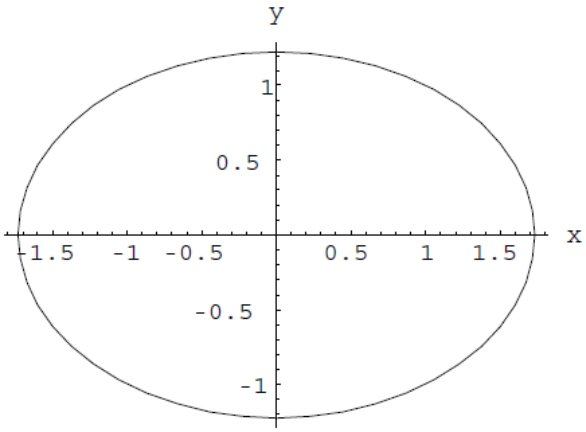
Equação Geral das Cónicas (eq. de 2ograu em x e y): $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, (1) com A, B, C, D, E, F ∈ IR, sendo A, B e C não simultaneamente nulos.

- Se B2 − 4AC < 0, (1) é a equação de uma elipse.
- Se B2 − 4AC = 0, (1) é a equação de uma parábola.
- Se B2 − 4AC > 0, (1) é a equação de uma hipérbole.

**Elipse:** é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre eles.

**Equação Reduzida**

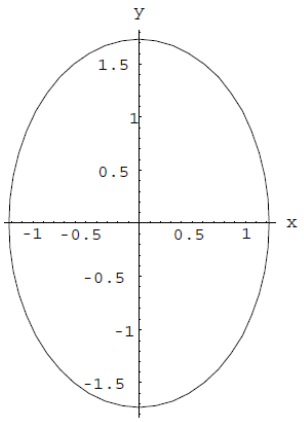
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$




Focos: (±c, 0) , sendo $c^2 = a^2 - b^2$
Eixo maior = 2a
Eixo menor = 2b
Distância focal =2c
Vértices: (±a, 0) , (0,±b)

**Equação Reduzida**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a)$$



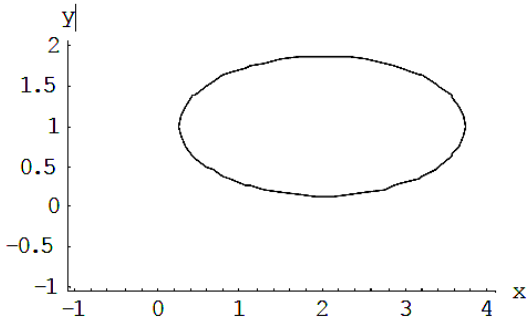


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Focos: (0,±c) , sendo c2 = b2 − a2
Eixo maior = 2b
Eixo menor = 2a
Distância focal =2c
Vértices: (±a, 0) , (0,±b)

**Equação Reduzida da Elipse centrada em (α, β):**

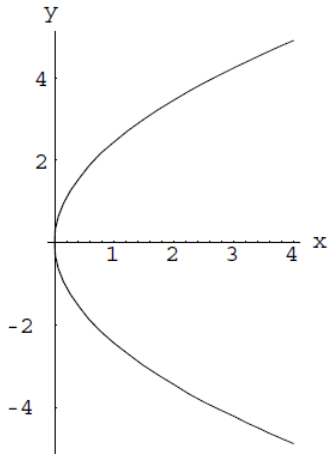
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$




**Parábola:** é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz), que não contém o ponto.

**Equação Reduzida**

$y^2 = 2px$ $(p > 0)$

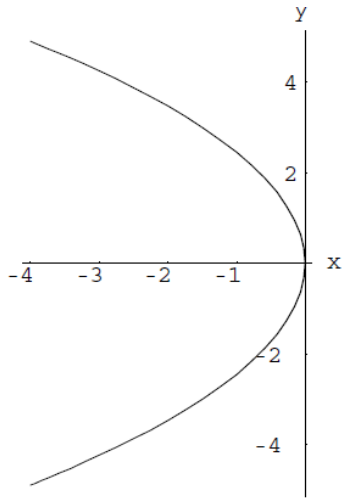



$$\textbf{Foco}: F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$
$$\textbf{Directriz}: x = -\frac{p}{2}$$
$$\textbf{Vértice}: V(0,0)$$

**Equação Reduzida**

$y^2 = -2px$ $(p > 0)$

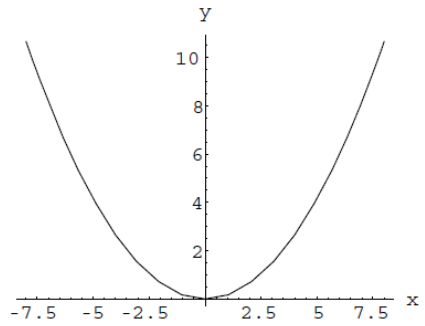

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




$$\textbf{Foco}: F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$$
$$\textbf{Diretriz}: x = \frac{p}{2}$$
$$\textbf{Vértice}: V\left(0, 0\right)$$

**Equação Reduzida**

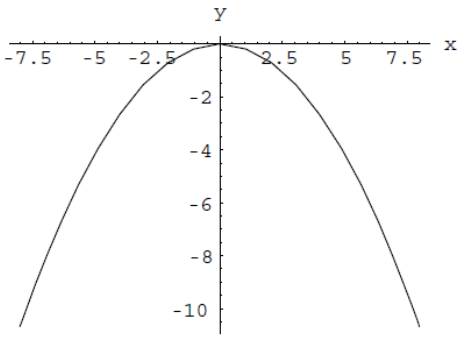
$x^2 = 2py$ $(p > 0)$




$$\textbf{Foco}: F\left(0, \frac{p}{2}\right)$$
$$\textbf{Diretriz}: y = -\frac{p}{2}$$
$$\textbf{Vértice}: V\left(0, 0\right)$$

**Equação Reduzida**

$x^2 = -2py$ $(p > 0)$

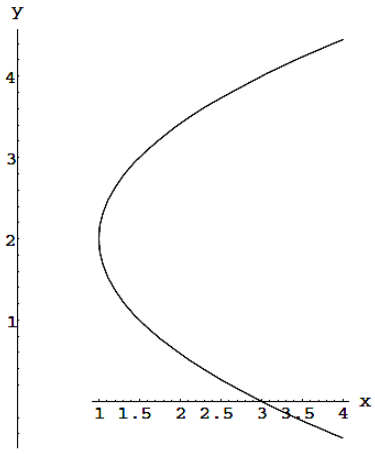



$$\textbf{Foco}: F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$$
$$\textbf{Diretriz}: y = \frac{p}{2}$$
$$\textbf{Vértice}: V\left(0, 0\right)$$

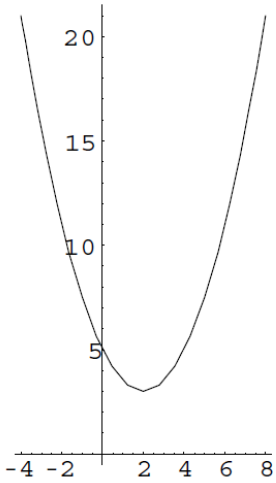

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Equação Reduzida da Parábola com vértice em (α, β):**

$(y - \beta)2 = 2p\,(x - \alpha)$



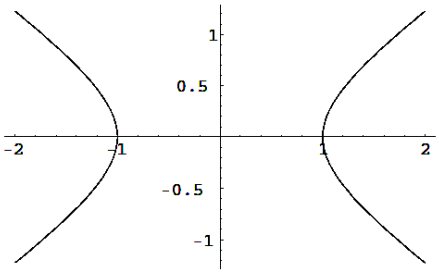

$(x - \beta)2 = 2p\,(y - \alpha)$




**Hipérbole:** é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e menor que a distância entre eles.

**Equação Reduzida**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

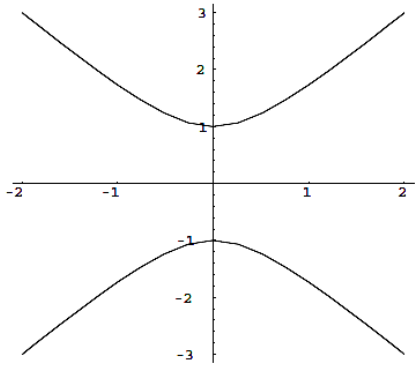



**Focos** : $(\pm c, 0)$ , sendo $c^2 = a^2 + b^2$
**Eixo transverso** $= 2a$
**Eixo não transverso** $= 2b$
**Distância focal** $= 2c$
**Vértices** : $(\pm a, 0)$
**Assimptotas**: $y = \pm \frac{b}{a} x$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Equação Reduzida**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$




$\textbf{Focos}: (0, \pm c)$ , sendo $c^2 = a^2 + b^2$

$\textbf{Eixo transverso} = 2b$

$\textbf{Eixo não transverso} = 2a$

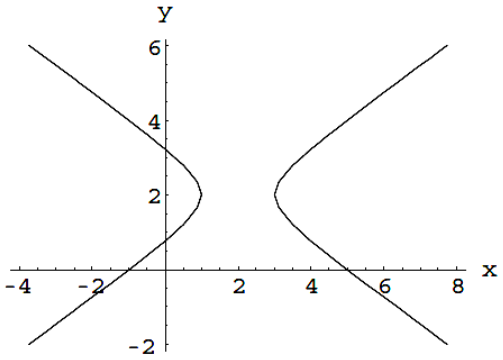
$\textbf{Distância focal} = 2c$

$\textbf{Vértices}: (0, \pm b)$

$\textbf{Assimptotas}: y = \pm \frac{b}{a} x$

**Equação Reduzida da Hipérbole centrada em (α, β):**

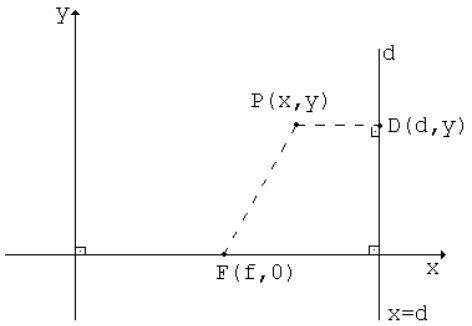
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$




**Considere o seguinte problema geral:**

Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x, y) do plano cartesiano que satisfazem à condição PF = e . Pd, onde F é um ponto fixo do plano denominado foco e d uma reta denominada diretriz, sendo e uma constante real.

Veja a figura abaixo, para ilustrar o desenvolvimento do tema





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Temos então, pela condição dada, PF = e . Pd, onde e é uma constante real. Usando a fórmula de distância entre dois pontos, fica:

$$\sqrt{(x-f)^2+(y-0)^2} = e.\sqrt{(x-d)^2+(y-y)^2}$$

Quadrando e desenvolvendo ambos os membros da expressão acima, vem:

$(x - f)^2 + y^2 = e^2 .(x - d)^2$
$x^2 - 2.f.x + f^2 + y^2 = e^2 (x^2 - 2.d.x + d^2)$
$x^2 - e^2.x^2 - 2.f.x + e^2.2.d.x + y^2 + f^2 - e^2.d^2 = 0$
$x^2(1 - e^2) + y^2 + (2e^2d - 2f)x + f^2 - e^2.d^2 = 0$

Ou finalmente:

**$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2(e^2d - f)x + f^2 - e^2d^2 = 0$**

Fazendo e = 1 na igualdade acima, obteremos $y^2 + 2(d - f).x + f^2 - d^2 = 0$

Fazendo d = - f, vem: $y^2 - 4fx = 0$ ou $y^2 = 4fx$, que é uma parábola da forma $y^2 = 2px$, onde f = p/2, conforme vimos no texto correspondente.

A constante e é denominada excentricidade.

Vê-se pois, que a excentricidade de uma parábola é igual a 1

**Algumas Aplicações das Cônicas**

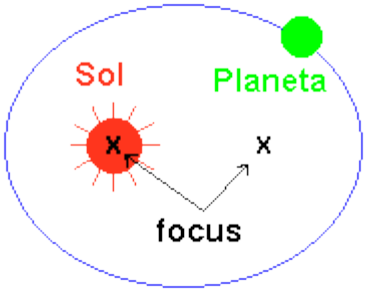
O interesse pelo estudo das cônicas remonta a épocas muito recuadas. De fato, estas curvas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, na economia, na engenharia e em muitas outras situações, pelo que não é de estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo. Vejamos então algumas situações onde estas curvas aparecem.

Suponhamos que temos uma lanterna direcionada para uma parede, então o feixe de luz emitido desenhará nessa parede uma curva cónica. Este fato acontece porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone, e também porque a parede funciona como um plano que corta o cone formado. Dependendo da inclinação da lanterna relativamente à parede, assim se obtém uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

Certos candeeiros de cabeceira, cujo quebra luz (abajur) é aberto segundo uma circunferência, desenham na parede uma hipérbole e no teto uma elipse. Os Engenheiros da área da iluminação usam este fato, entre outros, para construírem candeeiros, lanternas, etc...

O som emitido por um avião a jato supersônico tem a forma de um cone, pelo que, ao chocar com a Terra vai formar uma curva cónica. Assim, dependendo da inclinação do avião relativamente à Terra, vamos obter elipses, parábolas ou hipérboles. A audiometria usa este fato, entre outros, para saber a que distância da Terra o avião pode ultrapassar a velocidade do som.

A superfície formada pela água dentro de um copo é elíptica, sendo circular apenas no caso em que o copo está direito, isto é, está alinhado com o nível, na horizontal. Se animarmos o copo com um movimento rotativo sobre si próprio, a superfície do líquido nele inserido será a de um paraboloide. Esta técnica é frequentemente usada para se obter este tipo de superfície.





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Na astronomia, Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos. Também os satélites artificiais enviados para o espaço percorrem trajetórias elípticas. Mas nem todos os objetos que circulam no espaço têm órbitas elípticas. Existem cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta. Como a parábola é um caso de equilíbrio entre a elipse e a hipérbole (lembre-se que a excentricidade da parábola é igual a um), a probabilidade de existir algum satélite com órbita parabólica é quase nula. Mas isso não impede a existência de satélites com esta trajetória.

Também as trajetórias dos projéteis, num ambiente sob a ação da força de gravidade, são parabólicas. Já no ambiente terrestre, onde existe a resistência do ar, essas trajetórias são elípticas, mais propriamente, arcos de elipses. No entanto, por vezes, as diferenças entre as trajetórias elípticas e as parabólicas são quase indiscerníveis, pelo que, pode-se facilmente verificar estes fatos tomando atenção ao jato de água de uma mangueira, cuja abertura está inclinada para cima. A balística ciência que estuda as trajetória de projéteis, faz uso deste fato para determinar o local da queda de um projétil. No estudo dos átomos, um campo da Física e da Química, as órbitas dos elétrons em torno do núcleo são elípticas. Fazendo uso da propriedade refletora da parábola, Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos quando das invasões de Siracusa. Lembre-se que a concentração de energia gera calor.

De fato, as propriedades refletoras das cônicas, e não somente as da parábola, têm contribuído para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis, ópticas dos carros, lanternas, etc... Na verdade, alguns dos objetos mencionados também obedecem à propriedade refratora das cônicas. Esta propriedade está intimamente ligada à propriedade refletora, pelo que os seus estudos são muito idênticos. Só para dar uma amostra de objetos mais vulgares que usam a propriedade refratora das cônicas, mencionamos os seguintes: os óculos graduados, as lupas e os microscópios.

A partir da propriedade refletora das parábolas, os engenheiros civis construíram pontes de suspensão parabólica. Se imaginarmos os cabos que predem o tabuleiro da ponte como raios de luz, facilmente verificamos que o cabo principal, aquele que passa pelos pilares da ponte, tem forma de uma parábola.

As extremidades das asas do famoso avião britânico spitfire, usado com grande sucesso na I grande Guerra, eram arcos de elipses. Embora a razão da sua escolha se prenda ao fato de se obter mais espaço para transportar munições, este tipo de asa diminuía a resistência do ar, favorecendo melhores performances ao avião em voo.

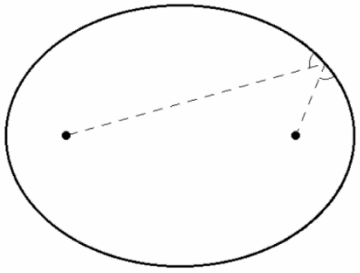
O sistema de localização de barcos denominado por LORAM (Long RAnge Navigation), faz uso das hipérboles confocais, onde os radares estão nos focos. A ideia é baseada na diferença de tempo de recepção dos sinais emitidos simultaneamente pelos dois pares de radares, sendo um dos radares comum aos dois pares. O mapa assim construído apresenta curvas hiperbólicas. Esta técnica foi usada na II grande Guerra, para detectar barcos japoneses.

**Propriedades Refletoras**

A elipse, a parábola e a hipérbole são curvas que possuem propriedades que as tornam importantes em várias aplicações. Aqui vamos ocupar-nos apenas das chamadas propriedades de reflexão dessas curvas, relacionadas com pontos especiais chamados focos.

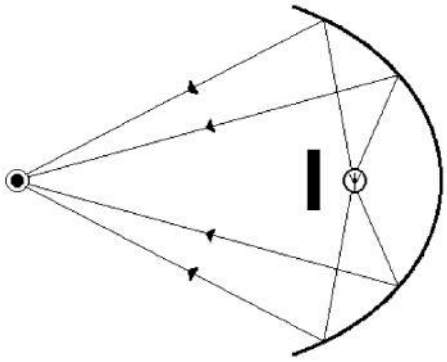
**O caso da elipse**

A elipse é uma curva fechada para a qual existem dois pontos especiais, os focos. A propriedade de reflexão da elipse é a seguinte: A partir de um dos focos tracemos um segmento de reta qualquer. Este segmento encontra a elipse num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco. (Nota: Os ângulos com as curvas são os ângulos com as respectivas tangentes nos pontos em causa.)




1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

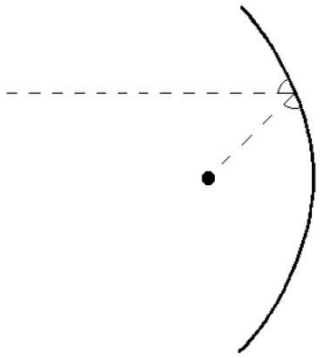
Esta propriedade faz com que a elipse tenha várias aplicações práticas. Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.



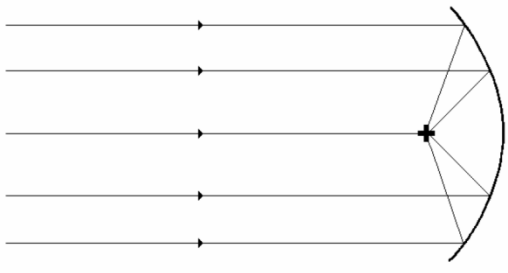
Uma ilustração acústica da propriedade de reflexão da elipse pode encontrar-se em salas que têm a forma de meio elipsoide (um elipsoide é um sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo, isto é, da reta definida pelos dois focos). Se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que seja baixo, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala seja grande e haja outros ruídos. Existem salas deste tipo (às vezes chamadas “galerias de murmúrios”) em vários edifícios públicos na Europa e nos Estados Unidos.

**O caso da parábola**

A parábola é uma curva com um foco. A propriedade de reflexão da parábola é a seguinte: A partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta paralelo ao eixo da parábola. Este segmento encontra a parábola num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo foco.

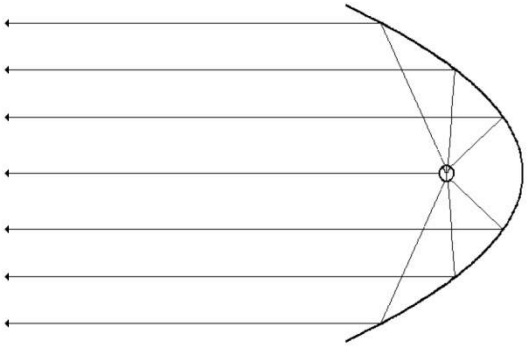


Esta propriedade faz com que a parábola tenha várias aplicações práticas. Um exemplo são as vulgares antenas parabólicas, que concentram num aparelho receptor os sinais vindos de um satélite de televisão.



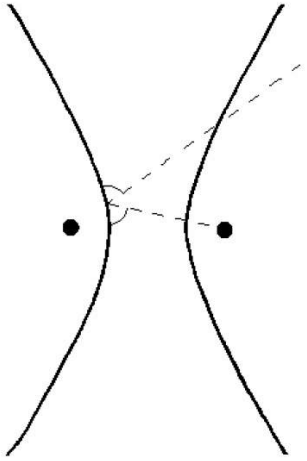
Uma aplicação óptica são os faróis dos automóveis e das motocicletas, que são espelhados por dentro e em que se coloca a lâmpada no foco.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

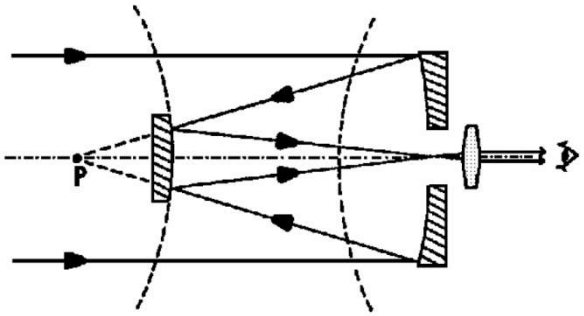


**O caso da hipérbole**

A hipérbole é uma curva com dois ramos e dois focos. A propriedade de reflexão da hipérbole é a seguinte: A partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole. Este segmento encontra o correspondente ramo da hipérbole num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco.



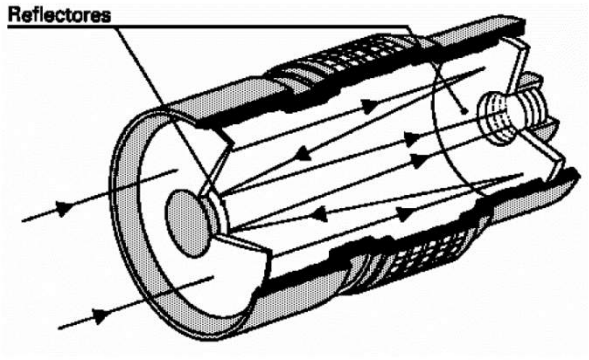
Esta propriedade faz com que a hipérbole tenha várias aplicações práticas. Um exemplo de uma aplicação óptica é o chamado telescópio de reflexão. É constituído basicamente por dois espelhos, um maior, chamado primário, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um dos da segunda.




Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica.

A vantagem deste tipo de telescópio reside no facto de ter um comprimento muito menor do que os telescópios de refração (isto é, de lentes) com o mesmo poder de ampliação. Por exemplo, uma objetiva fotográfica com 500 mm de distância focal é muito grande e pesada se for de refração, o que já não acontece se for de reflexão, sendo pequena e manejável, o que pode ser vantajoso.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




Outro exemplo é o telescópio Hubble (em órbita desde 1990 a 600 km da Terra), que se baseia nestas propriedades de reflexão. O seu espelho primário tem 2.4 metros de diâmetro. Como está fora da atmosfera, as imagens que o telescópio Hubble recolhe do espaço são muito mais claras e rigorosas do que as recebidas pelos telescópios utilizados no solo, pois os raios de luz não são absorvidos nem distorcidos pela atmosfera. Um telescópio de refracção com o mesmo poder de ampliação do Hubble seria tão grande e pesado que nenhum foguetão seria capaz de o pôr em órbita.

## Questões

**01.** Considere as equações apresentadas na coluna da esquerda e os nomes das curvas planas descritas na coluna da direita. Associe a 2ª coluna com a 1ª coluna.

(I) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(II) $\frac{x}{4}+\frac{y}{9}=1$

(III) $\frac{x^2}{4}+\frac{y}{9}=1$

(IV) $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=1$

(V) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$

( ) Elipse

( ) Hipérbole

( ) Reta

( ) Circunferência

( ) Parábola

A associação que relaciona corretamente a equação ao tipo de curva plana na sequencia de cima para baixo, é:

(A) I, IV, II, V e III
(B) I, V, III, IV e II
(C) II, III, V, I e IV
(D) III, II, IV, I e V
(E) IV, II, V, I e III

**02.** A distância entre o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ e o foco de coordenadas positivas da elipse de equação $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ é:

(A) 58
(B) 60
(C) $\sqrt{58}$
(D) $\sqrt{59}$
(E) $\sqrt{60}$

**03.** A equação da elipse que tem como eixo maior a distância entre as raízes da parábola de equação $y = x^2 - 25$ e excentricidade e = 3/5 é:

(A) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(C) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$

(D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(E) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=2$

**04.** A equação da parábola que passa pelo ponto P(0,10) e pelos focos da hipérbole de equação $9x^2 - 16y^2 = 144$ é:

(A) $y = -\frac{2}{5}x^2 - 10$

(B) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

(C) $y = \frac{2}{5}x^2 + 10$

(D) $y = \frac{2}{5}x^2 - 10$

(E) nda

**05.** A equação da reta que passa pelo ponto P(2,3) e é perpendicular à reta que passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 = 0$ e pelo foco de coordenadas positivas da hipérbole de equação $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ é:

(A) $11x - y - 7 = 0$

(B) $-7x + y - 11 = 0$

(C) $7x + y + 11 = 0$

(D) $7x + y - 11 = 0$

(E) $7x - y - 11 = 0$

## Respostas

**01. Resposta: A.**

Para determinar que tipo de curva cada equação representa devemos observar algumas características das equações, observe:

Reta: x e y possuem expoentes iguais a 1, sendo que nem x, nem y podem estar no denominador, nesse caso item (II)

Circunferência: o número que multiplica $x^2$ e $y^2$ é sempre o mesmo e temos uma soma de $x^2$ e $y^2$ nesse caso o item (V)

Elipse: os números que multiplicam $x^2$ e $y^2$ são diferentes e temos uma soma de $x^2$ e $y^2$, item (I)

Hipérbole: temos uma subtração de $x^2$ e $y^2$, item (IV)

Parábola: temos só $x^2$ ou só $y^2$, item (III)


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**02. Resposta: C.**

O centro C da circunferência é $\begin{cases} C\left(\dfrac{8}{-2},\dfrac{-6}{-2}\right) \\ C(-4,3) \end{cases}$,

Na elipse $\begin{cases} a^2 = 25 \\ a = 5 \end{cases}$ $e$ $\begin{cases} b^2 = 16 \\ b = 4 \end{cases}$, $\log o$ $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ 25 = 16 + c^2 \\ c^2 = 9 \\ c = 3 \end{cases}$. O centro da elipse é C(0,0).

A elipse tem eixo maior sobre o eixo x, dessa forma o foco de coordenadas positivas é F (3,0).

A distância entre o centro da circunferência e o foco é: $\begin{cases} dCF = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-0)^2} \\ dCF = \sqrt{49+9} \\ dCF = \sqrt{58}\ u.c \end{cases}$

**03. Resposta: D.**

Na parábola $\begin{cases} y = x^2 - 25 \\ x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$, dessa forma $\begin{cases} 2a = 10 \\ a = 5 \end{cases}$. Usando a excentricidade sabemos que: $\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ e = \dfrac{c}{5} = \dfrac{3}{5} \\ c = 3 \end{cases}$, na elipse

$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ 25 = b^2 + 9 \\ b^2 = 16 \\ b = 4 \end{cases}$, o centro da elipse é C(0,0) e sua equação é: $\begin{cases} \dfrac{(x-xc)^2}{a^2} + \dfrac{(y-yc)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(x-0)^2}{5^2} + \dfrac{(y-0)^2}{4^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**04. Resposta: B.**

Na hipérbole: $\begin{cases} 9x^2-16y^2=144(\div 144) \\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2=16 \\ a=4 \end{cases} \\ \begin{cases} b^2=9 \\ b=3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2=a^2+b^2 \\ c^2=16+9 \\ c^2=25 \\ c=5 \end{cases} \therefore \begin{cases} F_1(-5,0) \\ F_2(5,0) \end{cases}$

Na parábola temos $y = ax^2 + bx + c$, o ponto $P(0,10) \in$ a parábola então $\begin{cases} 10=a.0+b.0+c \\ c=10 \end{cases}$

Se a parábola passa pelos focos da hipérbole temos que:

$Sendo\ y=ax^2+bx+10,\ temos:$

$$\begin{cases} F_1(-5,0) \rightarrow \boxed{0=25a-5b+10} \\ F_2(5,0) \rightarrow \boxed{0=25a+5b+10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50a+20=0 \\ a=-\dfrac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} 25.\left(-\dfrac{2}{5}\right)+5b+10=0 \\ -10+5b+10=0 \\ \boxed{b=0} \end{cases} \end{cases}$$

Dessa forma a equação da parábola é: $\begin{cases} y=\dfrac{-2}{5}x^2+0x+10 \\ y=\dfrac{-2}{5}x^2+10 \end{cases}$

**05. Resposta: E.**

$$r: \begin{cases} P(2,3) \\ \perp s \end{cases}$$

$$Hipérbole: \begin{cases} \dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2=64 \\ a=8 \end{cases} \\ \begin{cases} b^2=36 \\ b=6 \end{cases} \end{cases} \therefore \begin{cases} c^2=a^2+b^2 \\ c^2=64+36 \\ c^2=100 \\ c=10 \end{cases} \rightarrow F(10,0) \end{cases}$$

$$Circunferência: \begin{cases} x^2+y^2+8x-4y+11=0 \\ Centro\left(\dfrac{8}{-2},\dfrac{-4}{-2}\right) \\ Centro(-4,2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \begin{vmatrix} 10 & -4 & x & 10 \\ 0 & 2 & y & 0 \end{vmatrix}=0 \\ 20-4y-2x-10y=0 \\ -2x-14y+20=0 \\ ms=\dfrac{-(-2)}{-14} \\ ms=-\dfrac{1}{7} \end{cases} , para\ a\ reta\ r\ temos: r \begin{cases} P(2,3) \\ mr=\dfrac{-1}{ms} \Rightarrow r: \begin{cases} y-yo=m(x-xo) \\ y-3=7.(x-2) \\ y-3=7x-14 \\ 7x-y-11=0 \end{cases} \\ mr=7 \end{cases}$$



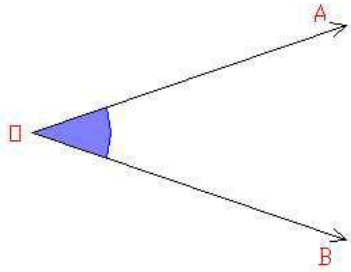
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



**15) Geometria Plana: Ângulo: definição, elementos e propriedades: Ângulos na circunferência; Paralelismo e perpendicularidade: Semelhança de triângulos; Pontos notáveis do triângulo; Relação entre métricas nos triângulos; Relação Stewart; Triângulos retângulos, Teorema de Pitágoras; Congruência de figuras planas; Feixe de retas paralelas e transversais, Teorema de Tales; Teorema de bissetrizes internas e externas de um triângulo; Quadriláteros notáveis; Polígonos, polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; Perímetro e área de polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; Fórmula de Heron; Razão entre áreas; Lugares geométricos; Elipse, parábola e hipérbole; Linha poligonal; e a inscrição e circunscrição.**

## ÂNGULOS

**Ângulo**: É uma região limitada por duas semirretas de mesma origem.



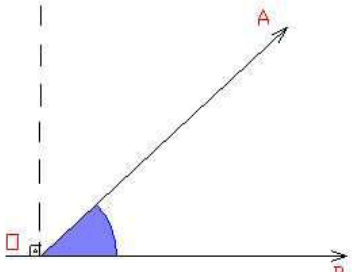

Notação: AÔB
Lê-se ângulo AOB

Elementos de um ângulo:

- LADOS: são as duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

-VÉRTICE: é o ponto de intersecção das duas semirretas, no exemplo o ponto O.

**Ângulo Agudo**: É o ângulo, cuja medida é **menor** do que 90º.

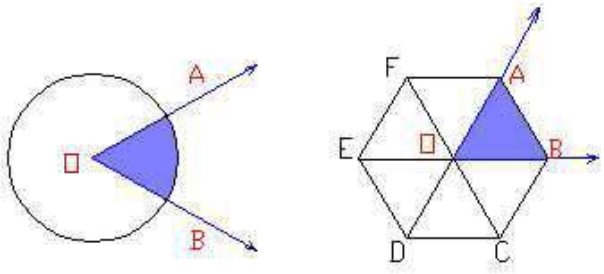



$m(A\hat{O}B) < 90^0$

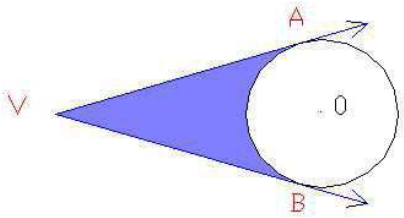
**Ângulo Central**:

- Da circunferência: é o ângulo cujo **vértice é o centro** da circunferência;
- Do polígono: é o ângulo, cujo **vértice é o centro do polígono regular** e cujos lados passam por **vértices consecutivos** do polígono.

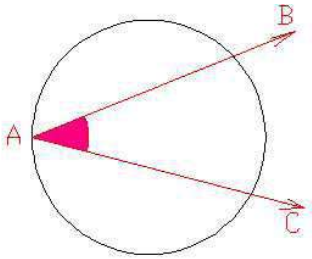

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Ângulo Circunscrito**: É o ângulo, cujo vértice **não pertence à circunferência** e os lados são **tangentes** a ela.

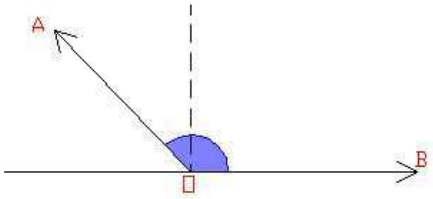



**Ângulo Inscrito**: É o ângulo cujo **vértice pertence a uma circunferência**.



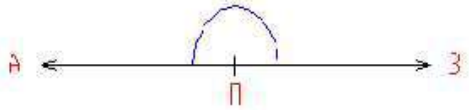

BÂC - ângulo inscrito

**Ângulo Obtuso**: É o ângulo cuja medida é **maior** do que 90º.




**Ângulo Raso**:

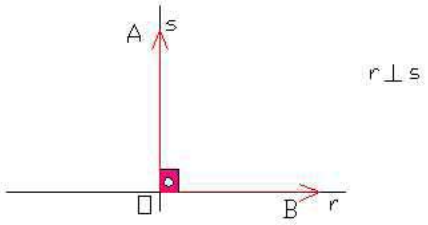
- É o ângulo cuja medida é 180º;
- É aquele, cujos lados são semirretas opostas.



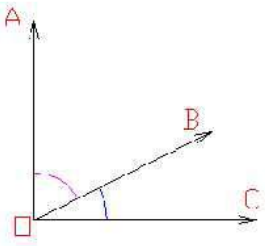

**Ângulo Reto:**

- É o ângulo cuja medida é 90º;
- É aquele cujos lados se apoiam em retas perpendiculares.

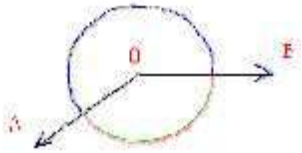

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



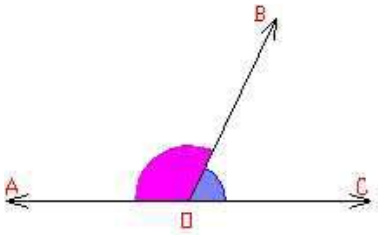

**Ângulos Complementares**: Dois ângulos são complementares se a soma das suas medidas é $90^0$.




**Ângulos Replementares**: Dois ângulos são ditos replementares se a soma das suas medidas é $360^0$.



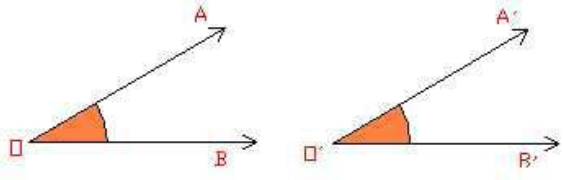

**Ângulos Suplementares**: Dois ângulos são ditos suplementares se a soma das suas medidas de dois ângulos é 180º.




Então, se **x** e **y** são dois ângulos, temos:

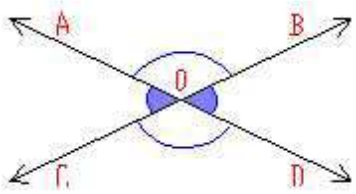
- se x + y = 90° ➔ x e y são Complementares.
- se x + y = 180° ➔ x e y são Suplementares.
- se x + y = 360° ➔ x e y são Replementares.

**Ângulos Congruentes**: São ângulos que possuem a mesma medida.



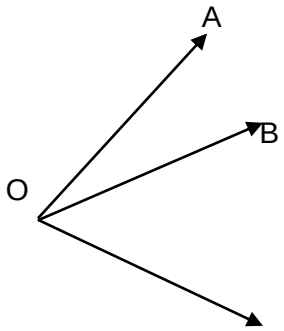

**Ângulos Opostos pelo Vértice**: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Ângulos consecutivos:** são ângulos que tem um lado em comum.

**Ângulos adjacentes:** são ângulos consecutivos que não tem ponto interno em comum.




Na figura ao lado:

- Os ângulos AÔB e BÔC, AÔB e AÔC, BÔC e AÔC são pares de ângulos consecutivos.

- Os ângulos AÔB e BÔC são ângulos adjacentes.

**Unidades de medida de ângulos:**

**Grado: (gr.):** dividindo a circunferência em 400 partes iguais, a cada arco unitário que corresponde a 1/400 da circunferência denominamos de grado.

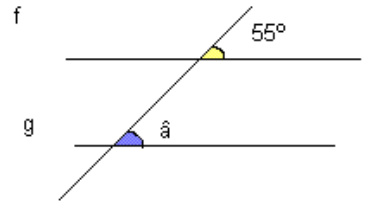
**Grau: (º):** dividindo a circunferência em 360 partes iguais, cada arco unitário que corresponde a 1/360 da circunferência denominamos de grau.

- o grau tem dois submúltiplos: minuto e segundo. E temos que 1° = 60' (1 grau equivale a 60 minutos) e 1' = 60" (1 minuto equivale a 60 segundos).

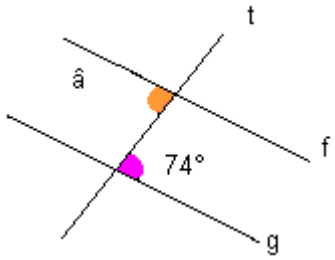
**Questões**

**01.** As retas f e g são paralelas (f // g). Determine a medida do ângulo â, nos seguintes casos:

a)

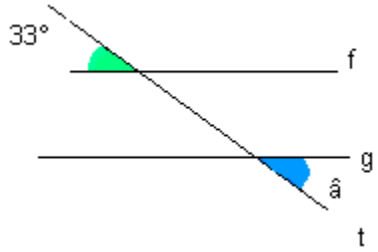



b)

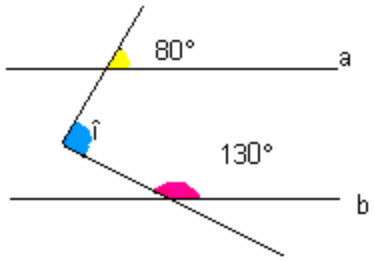



c)


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

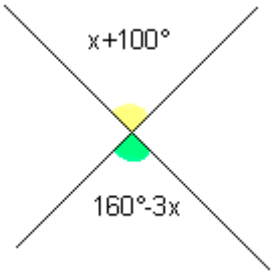



**02.** As retas a e b são paralelas. Quanto mede o ângulo î?

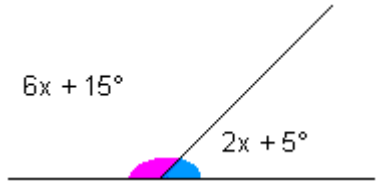



**03.** Obtenha as medidas dos ângulos assinalados:

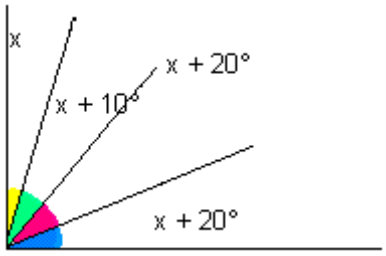
a)



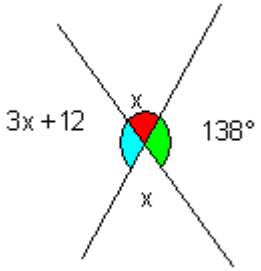

b)




c)




d)





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

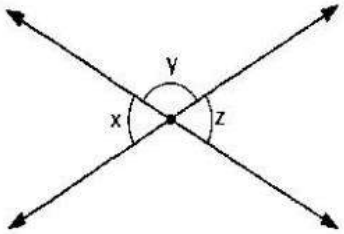
**04.** Quantos segundos tem um ângulo que mede 6° 15'?

**05.** A medida de um ângulo é igual à metade da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

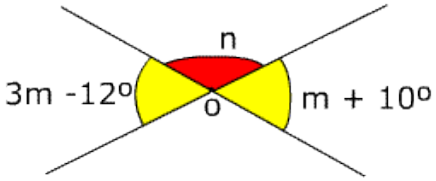
**06.** O complemento de um ângulo é igual a um quarto do seu suplemento. Qual é o complemento desse ângulo?

**07.** Dois ângulos que medem x e x + 20° são adjacentes e complementares. Qual a medida desses dois ângulos?

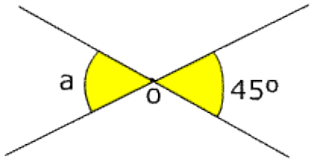
**08.** Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, mais a metade do ângulo z. Calcule y.




**09.** Observe a figura abaixo e determine o valor de m e n.



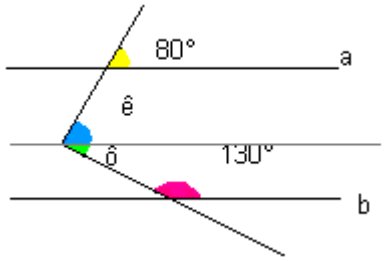

**10.** Determine o valor de a na figura seguinte:




**Respostas**

**01. Resposta**
**a) 55˚**
**b) 74˚**
**c) 33˚**

**02. Resposta "130".**
Solução: Imagine uma linha cortando o ângulo î, formando uma linha paralela às retas "a" e "b". Fica então decomposto nos ângulos ê e ô.




Sendo assim, ê = 80° e ô = 50°, pois o ângulo **ô** é igual ao complemento de 130° na reta b.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Logo, î = 80° + 50° = 130°.

**03.** Solução:
a) 160° - 3x = x + 100°
160° - 100° = x + 3x
60° = 4x
x = 60°/4
x = 15°

Então 15°+100° = 115° e 160°-3*15° = 115°

b) 6x + 15° + 2x + 5º = 180°
6x + 2x = 180° -15° - 5°
8x = 160°
x = 160°/8
x = 20°

Então, 6*20°+15° = **135°** e 2*20°+5° = **45°**

**c)** Sabemos que a figura tem 90°.

Então x + (x + 10°) + (x + 20°) + (x + 20°) = 90°
4x + 50° = 90°
4x = 40°
x = 40°/4
x = 10°

d) Sabemos que os ângulos laranja + verde formam 180°, pois são exatamente a metade de um círculo.

Então, 138° + x = 180°
x = 180° - 138°
x = 42°

Logo, o ângulo x mede 42°.

**04. Resposta 22.500**
Solução:
Sabemos que 1° = 60’ e 1’ = 60”, temos:

6°.60 = 360’ (multiplicamos os graus por 60 para converter em minutos).
360’ + 15’ = 375’ (somamos os minutos)
375’.60 = 22.500” (multiplicamos os minutos por 60 para converter em segundos).

Portanto 6° 15’ equivale a 22.500”.

**05. Resposta “60°”**
Solução:
- sendo **x** o ângulo, o seu suplemento é 180° - x, então pelo enunciado temos a seguinte equação:

$x = \frac{180° - x}{2}$ (multiplicando em “cruz”)

2x = 180° - x
2x + x = 180°
3x = 180°
x = 180° : 3 = 60°

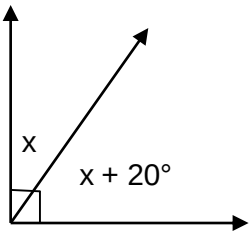
**06. Resposta “30°”.**
- sendo **x** o ângulo, o seu complemento será 90° – x e o seu suplemento é 180° – x. Então, temos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

90° - x = $\frac{180°-x}{4}$ (o 4 passa multiplicando o primeiro membro da equação)
4.(90° - x) = 180° - x (aplicando a distributiva)
360° - 4x = 180° - x
360° - 180° = - x + 4x
180° = 3x
x = 180° : 3 = 60º

- o ângulo x mede 60º, o seu complemento é 90° - 60° = 30°

**07. Resposta "35° e 55°"**
Solução:
- do enunciado temos a seguintes figura:




Então:
x + x + 20° = 90°
2x = 90° - 20°
2x = 70°
x = 70° : 2 = 35°

- os ângulos são: 35° e 35° + 20° = 55°

**08. Resposta "135˚".**
Solução: Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, mais a metade do ângulo z. Calcule y.
Então vale lembrar que:
x + y = 180 então y = 180 – x.
E também como x e z são opostos pelo vértice, x = z
E de acordo com a figura: o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, mais a metade do ângulo z. Calcule y.
x = y/6 + z/2
Agora vamos substituir lembrando que y = 180 - x e x = z
Então:
x = 180° - x/6 + x/2 agora resolvendo fatoração:
6x = 180°- x + 3x | 6x = 180° + 2x
6x – 2x = 180°
4x = 180°
x=180°/4
x=45º
Agora achar y, sabendo que y = 180° - x
y=180º - 45°
y=135°.

**09. Resposta "11º; 159º".**
Solução:
3m - 12º e m + 10º, são ângulos opostos pelo vértice logo são iguais.

3m - 12º = m + 10º
3m - m = 10º + 12º
2m = 22º
m = 22º/2
m = 11º

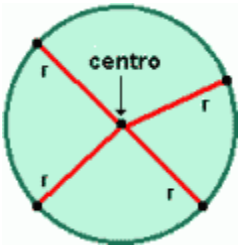

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

m + 10º e n são ângulos suplementares logo a soma entre eles é igual a 180º.
(m + 10º) + n = 180º
(11º + 10º) + n = 180º
21º + n = 180º
n = 180º - 21º
n = 159º
Resposta: m = 11º e n = 159º.

**10. Resposta "45°".**
É um ângulo oposto pelo vértice, logo, são ângulos iguais.

## CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

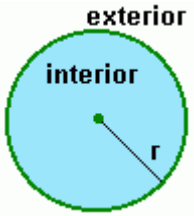
***Circunferência:*** A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência. Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.




***Círculo:*** (ou disco) é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No gráfico acima, a circunferência é a linha de cor verde escuro que envolve a região verde claro, enquanto o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência.

**Pontos interiores de um círculo e exteriores a um círculo**

**Pontos interiores**: Os pontos interiores de um círculo são os pontos do círculo que não estão na circunferência.




**Pontos exteriores**: Os pontos exteriores a um círculo são os pontos localizados fora do círculo.

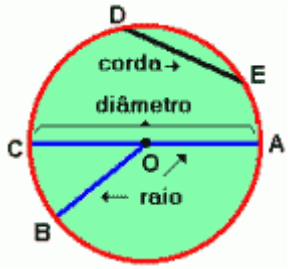
**Raio, Corda e Diâmetro**

**Raio**: Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência (ou do círculo) e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. Na figura abaixo, os segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são raios.

***Corda:*** Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência (ou seja, um segmento que une dois pontos de uma circunferência). Na figura abaixo, os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ são cordas.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

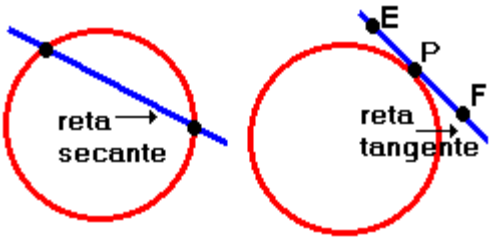
***Diâmetro:*** Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o **diâmetro é a maior corda** da circunferência. Na figura abaixo, o segmento de reta $\overline{AC}$ é um diâmetro.



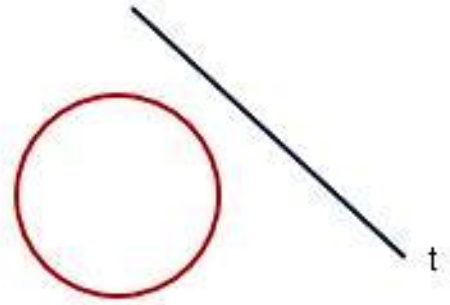

**Posições relativas de uma reta e uma circunferência**

**Reta secante**: Uma reta é secante a uma circunferência se essa reta intercepta a circunferência em dois pontos quaisquer, podemos dizer também que é a reta que contém uma corda.

**Reta tangente**: Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto P. Este ponto é conhecido como ponto de tangência ou ponto de contato. Na figura ao lado, o ponto P é o ponto de tangência e a reta que passa pelos pontos E e F é uma reta tangente à circunferência.

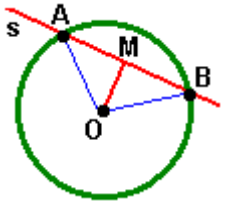



**Reta externa (ou exterior)**: é uma reta que não tem ponto em comum com a circunferência. Na figura abaixo a reta t é externa.



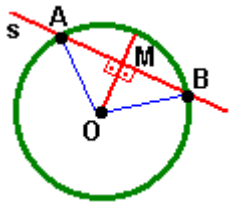

**Propriedades das secantes e tangentes**

Se uma reta s, secante a uma circunferência de centro O, intercepta a circunferência em dois pontos distintos A e B e se M é o ponto médio da corda AB, então o segmento de reta OM é perpendicular à reta secante s.

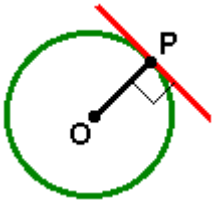



Se uma reta s, secante a uma circunferência de centro O, intercepta a circunferência em dois pontos distintos A e B, a perpendicular às retas que passam pelo centro O da circunferência, passa também pelo ponto médio da corda AB.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



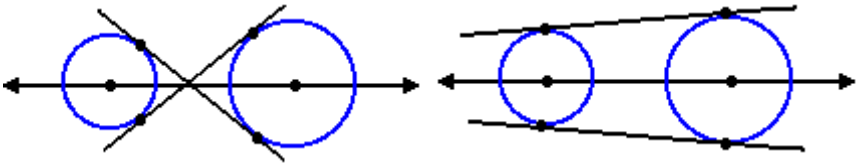

Seja OP um raio de uma circunferência, onde O é o centro e P um ponto da circunferência. Toda reta perpendicular ao raio OP é tangente à circunferência no ponto de tangência P.




Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

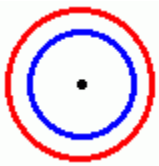
**Posições relativas de duas circunferências**

***Reta tangente comum:*** Uma reta que é tangente a duas circunferências ao mesmo tempo é denominada uma tangente comum. Há duas possíveis retas tangentes comuns: a interna e a externa.



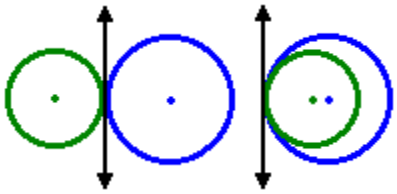
Ao traçar uma reta ligando os centros de duas circunferências no plano, esta reta separa o plano em dois semiplanos. Se os pontos de tangência, um em cada circunferência, estão no mesmo semi-plano, temos uma reta tangente comum externa. Se os pontos de tangência, um em cada circunferência, estão em semiplanos diferentes, temos uma reta tangente comum interna.

***Circunferências internas:*** Uma circunferência C1 é interna a uma circunferência C2, se todos os pontos do círculo C1 estão contidos no círculo C2. Uma circunferência é externa à outra se todos os seus pontos são pontos externos à outra.



***Circunferências concêntricas:*** Duas ou mais circunferências com o mesmo centro, mas com raios diferentes são circunferências concêntricas.

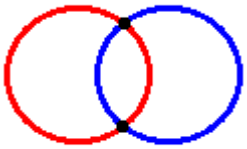
***Circunferências tangentes:*** Duas circunferências que estão no mesmo plano, são tangentes uma à outra, se elas são tangentes à mesma reta no mesmo ponto de tangência.



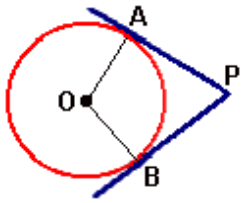
As circunferências são tangentes externas uma à outra se os seus centros estão em lados opostos da reta tangente comum e elas são tangentes internas uma à outra se os seus centros estão do mesmo lado da reta tangente comum.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

***Circunferências secantes:*** são aquelas que possuem somente dois pontos distintos em comum.

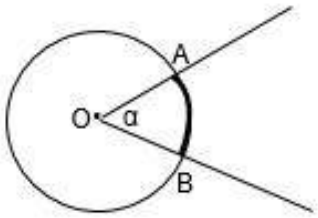


***Segmentos tangentes:*** Se AP e BP são segmentos de reta tangentes à circunferência nos ponto A e B, então esses segmentos AP e BP são congruentes.




## ÂNGULOS (OU ARCOS) NA CIRCURFERÊNCIA

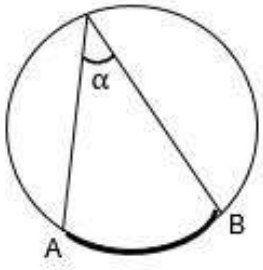
**Ângulo central**: é um ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência. Este ângulo determina um arco na circunferência, e a medida do ângulo central e do arco são iguais.




O ângulo central determina na circunferência um arco $\widehat{AB}$ e sua medida é igual a esse arco.

$$\alpha = \widehat{AB}$$

**Ângulo Inscrito**: é um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência.

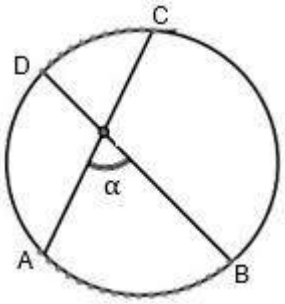



O ângulo inscrito determina na circunferência um arco $\widehat{AB}$ e sua medida é igual à metade do arco.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

**Ângulo Excêntrico Interno**: é formado por duas cordas da circunferência.

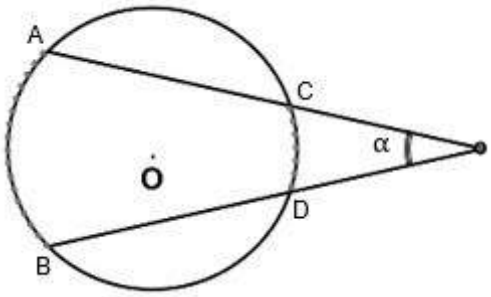

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




O ângulo excêntrico interno determina na circunferência dois arcos AB e CD e sua medida é igual à metade da soma dos dois arcos.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

**Ângulo Excêntrico Externo**: é formado por duas retas secantes à circunferência.

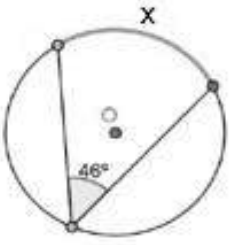



O ângulo excêntrico externo determina na circunferência dois arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ e sua medida é igual à metade da diferença dos dois arcos.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

**Questões**

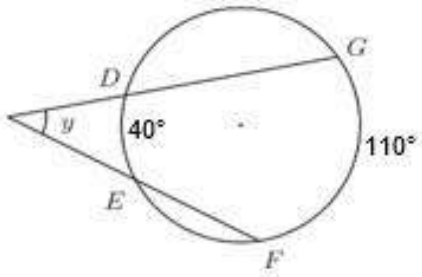
**01.** O valor de x na figura abaixo é:




(A) 90°
(B) 92°
(C) 96°
(D) 98°
(E) 100°

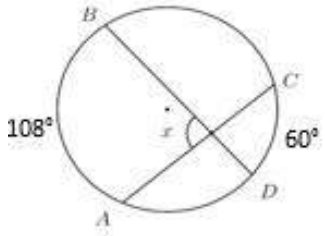
**02.** Na figura abaixo, qual é o valor de y?


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



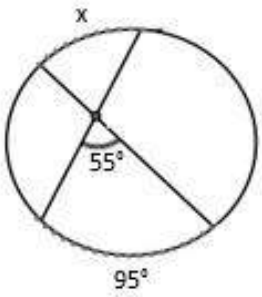

(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 35°
(E) 25°

**03.** Na figura seguinte, a medida do ângulo x, em graus, é:




(A) 80°
(B) 82°
(C) 84°
(D) 86°
(E) 90°

**04.** A medida do arco x na figura abaixo é:




(A) 15°
(B) 20°
(C) 25°
(D) 30°
(E) 45°

**05.** Uma reta é tangente a uma circunferência quando:
(A) tem dois pontos em comum.
(B) tem três pontos em comum.
(C) não tem ponto em comum.
(D) tem um único ponto em comum.
(E) nda


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Respostas

**01. Resposta: B.**
O ângulo dado na figura (46°) é um ângulo inscrito, portanto é igual à metade do arco x:

$$46° = \frac{x}{2}$$

x = 46°.2
x = 92°

**02. Resposta: D.**
O ângulo da figura é um ângulo excêntrico externo, portanto é igual à metade da diferença dos dois arcos dados.

$$y = \frac{110° - 40°}{2}$$

$$y = \frac{70°}{2} = 35°$$

**03. Resposta: C.**
O ângulo x é um ângulo excêntrico interno, portanto é igual à metade da soma dos dois arcos.

$$x = \frac{108° + 60°}{2}$$

$$x = \frac{168°}{2} = 84°$$

**04. Resposta: A.**
O ângulo de 55 é um ângulo excêntrico interno, portanto é igual à metade da soma dos dois arcos.

$$55° = \frac{95° + x}{2}$$

$$55°.2 = 95° + x$$
$$110° - 95° = x$$
$$x = 15°$$

**05. Resposta: D.**
**Questão teórica**

## GEOMETRIA PLANA

É o estudo das figuras em um só plano, por isso é chamada de Geometria Plana.

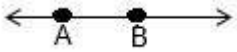
A Geometria estuda, basicamente, os três princípios fundamentais (ou também chamados de “entes primitivos”) que são: **Ponto**, **Reta** e **Plano**. Estes três princípios **não tem definição** e **nem dimensão (tamanho)**.

Para representar um ponto usamos. e para dar nome usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto. Exemplo: . A (ponto A).

Para representar uma reta usamos ↔ e para dar nome usamos letras minúsculas do nosso alfabeto ou dois pontos por onde esta reta passa.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Exemplo: t ( reta t ou reta $\overleftrightarrow{AB}$).




Para representar um plano usamos uma figura chamada paralelogramo e para dar nome usamos letras minúsculas do alfabeto grego (α, β, π, θ,....).

Exemplo:



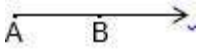

Plano alfa

**Partes de uma reta**

Estudamos, particularmente, duas partes de uma reta:

- **Semirreta**: é uma parte da reta que tem origem em um ponto e é infinita.

Exemplo: (semirreta $\overrightarrow{AB}$), tem origem em A e passa por B.




- **Segmento de reta**: é uma parte finita (tem começo e fim) da reta.

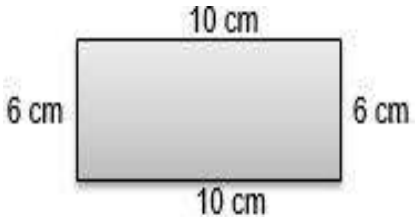
Exemplo: (segmento de reta $\overline{AB}$).




Observação: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ e $\overline{AB} = \overline{BA}$.

➔ **Perímetro**: é a soma de todos os lados de uma figura plana.

Exemplo:

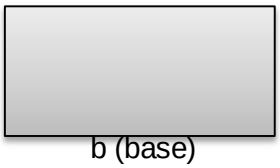



perímetro = 10 + 10 + 6 + 6 = 32 cm

➔**Área**: é uma medida de superfície, tendo como unidade básica o $m^2$, que é um quadrado que mede 1 m x 1 m. Pode ser representada por S (superfície) ou A (área).

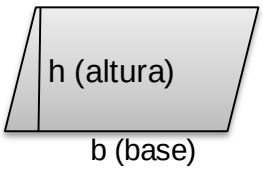
As figuras planas mais conhecidas e estudadas são:

- **Retângulo**: S = b.h

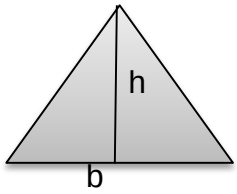



- **Paralelogramo**: S = b.h

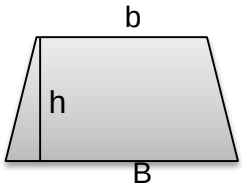

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



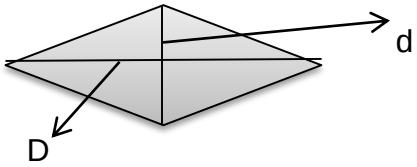

- **Triângulo**: $S = \frac{b.h}{2}$



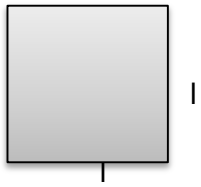

- **Trapézio**: $S = \frac{(B+b).h}{2}$, onde B é a base maior, b é a base menor e h altura.



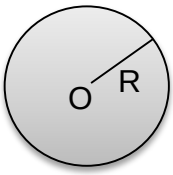

- **Losango**: $S = \frac{D.d}{2}$ , onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor.



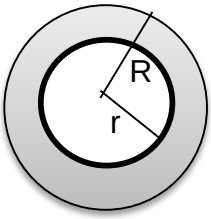

- **Quadrado**: $S = l^2$, onde l é o lado.




- **Círculo**: $S = \pi R^2$, onde R é o raio e O é o centro.




- **Coroa circular**: $S = \pi(R^2 - r^2)$ onde R é o raio maior e r é o raio menor.





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01.** A área, em $cm^2$, de uma coroa circular cujos raios são 9 cm e 5 cm é igual a:
(A) 4 π
(B) 81 π
(C) 56 π
(D) 25 π
(E) 30 π

**02.** Num trapézio isósceles, as bases medem 8 cm e 18 cm e os lados transversos medem 13 cm cada um. A área desse trapézio é:
(A) 156 $cm^2$
(B) 145 $cm^2$
(C) 150 $cm^2$
(D) 125 $cm^2$
(E) 165 $cm^2$

**03.** Um retângulo tem perímetro igual a 28 cm e sua altura é $\frac{3}{4}$ de seu comprimento, as medidas dos lados desse retângulo, em cm, são:
(A) 6 e 4
(B) 8 e 4
(C) 8 e 10
(D) 6 e 8
(E) 6 e 10

**04.** A área de um triângulo é igual a 38,4 $m^2$. A altura desse triângulo é 8 m, então sua base, em m, é:
(A) 8,6
(B) 9,6
(C) 7,6
(D) 6,6
(E) 10

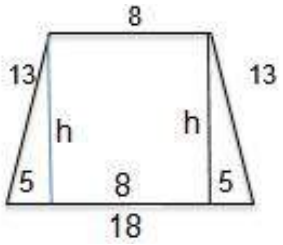
**05.** O perímetro de um quadrado vale 56, então a área desse quadrado é:
(A) 169
(B) 144
(C) 196
(D) 132
(E) 150

## Respostas

**01. Resposta: C.**
- Sendo R = 9 cm e r = 5 cm, temos:
$S = \pi(R^2 - r^2)$
$S = \pi(9^2 - 5^2)$
$S = \pi(81 - 25) = 56\ \pi\ cm^2$

**02. Resposta: A.**
Um trapézio isósceles tem dois lados iguais e pelo enunciado, temos:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




Pelo teorema de Pitágoras:

$13^2 = h^2 + 5^2$ ➔ $169 = h^2 + 25$ ➔ $169 - 25 = h^2$ ➔ $h^2 = 144$ ➔ $h = \sqrt{144} = 12$

$$S = \frac{(B+b).h}{2}$$

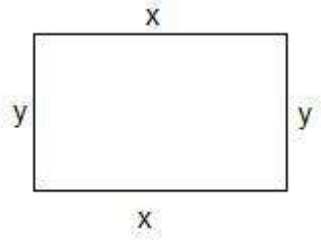
$$S = \frac{(18+8).12}{2}$$

$$S = \frac{26.12}{2} = \frac{312}{2}$$

$S = 156\ cm^2$

**03. Resposta: D.**

- Pelo enunciado temos:




$x + x + y + y = 28$

$2x + 2y = 28$ (2)

$x + y = 14$ (I)

$y = \frac{3.x}{4}$ (II), substituindo (II) em (I)

$$x + \frac{3.x}{4} = 14$$

$$\frac{4x+3x}{4} = \frac{56}{4}$$

$7x = 56$

$$x = \frac{56}{7} = 8$$

$$y = \frac{3.8}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Assim, os lados medem 6 cm e 8 cm.

**04. Resposta: B.**

- Pelo enunciado:

S = 38,4


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$\frac{b.h}{2} = 38{,}4$

$\frac{b.8}{2} = 38{,}4$

$b = \frac{38{,}4.2}{8} = \frac{76{,}8}{8}$

b = 9,6 m

**05. Resposta: C.**

- Perímetro é a soma dos lados, então:

$l + l + l + l = 56$

$4l = 56$

$l = \frac{56}{4} = 14$

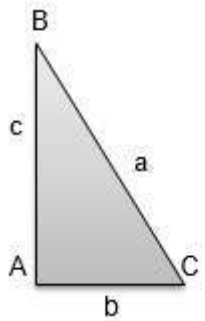
$S = l^2$

$S = 14^2$

S = 196

## TEOREMA DE PITÁGORAS

Em todo triângulo retângulo, o maior lado é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são os **catetos**.




No exemplo ao lado:
- **a** é a hipotenusa.
- **b** e **c** são os catetos.

- "Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

### Questões

**01**.Millor Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

Às folhas tantas de um livro de Matemática, um Quociente apaixonou-se um dia doidamente por uma Incógnita.

Olhou-a com seu olhar inumerável e viu-a do Ápice à Base: uma figura Ímpar; olhos romboides, boca trapezoide, corpo retangular, seios esferoides.

Fez da sua uma vida paralela à dela, até que se encontraram no Infinito.

"Quem és tu" – indagou ele em ânsia Radical.

"Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa." (Millôr Fernandes – Trinta Anos de Mim Mesmo).

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:

(A) "Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa."

(B) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa."

(C) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da Hipotenusa."

(D) "Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da Hipotenusa."


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(E) Nenhuma das anteriores.

**02**.Um barco partiu de um ponto A e navegou 10 milhas para o oeste chegando a um ponto B, depois 5 milhas para o sul chegando a um ponto C, depois 13 milhas para o leste chagando a um ponto D e finalmente 9 milhas para o norte chegando a um ponto E. Onde o barco parou relativamente ao ponto de partida?

(A) 3 milhas a sudoeste.
(B) 3 milhas a sudeste.
(C) 4 milhas ao sul.
(D) 5 milhas ao norte.
(E) 5 milhas a nordeste.

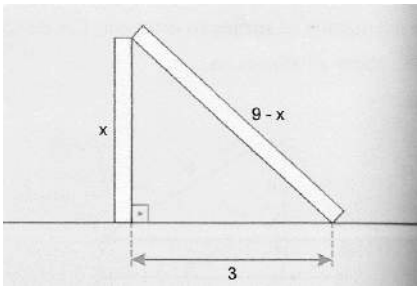
**03**.Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm, qual é a medida do outro cateto?

(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

**04.**A diagonal de um quadrado de lado *l* é igual a:

$(A) l\sqrt{2}$
$(B) l\sqrt{3}$
$(C) l\sqrt{5}$
$(D) l\sqrt{6}$
(E) Nenhuma das anteriores.

**05.**Durante um vendaval, um poste de iluminação de 9 m de altura quebrou-se em um ponto a certa altura do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base dele, conforme a figura abaixo. A que altura do solo se quebrou o poste?



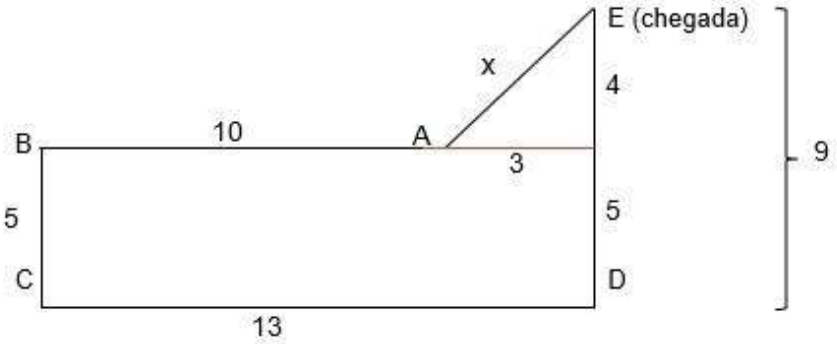

(A) 4 m
(B) 4,5 m
(C) 5 m
(D) 5,5 m
(E) 6 m

**Respostas**

**01. Resposta: D.**
**TEÓRICA.**

**02. Resposta: E.**

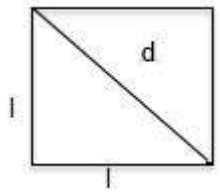

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




$x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 9 + 16$
$x^2 = 25$
$x = \sqrt{25} = 5$

**03. Resposta: C.**
$13^2 = x^2 + 5^2$
$169 = x^2 + 25$
$169 - 25 = x^2$
$x^2 = 144$
$x = \sqrt{144} = 12$ cm

**04. Resposta: A**.




$d^2 = l^2 + l^2$

$d^2 = 2l^2$

$d = \sqrt{2l^2}$

$d = l\sqrt{2}$

**05. Resposta: A.**
$(9 - x)^2 = x^2 + 3^3$
$9^2 - 2.9.x + x^2 = x^2 + 9$
$81 - 18x = 9$
$81 - 9 = 18x$
$72 = 18x$
$x = \frac{72}{18}$
x = 4 m

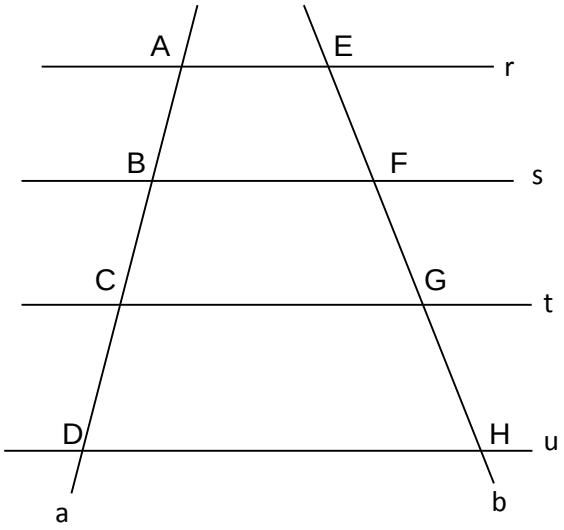
## TEOREMA DE TALES

- Feixe de paralelas: é todo conjunto de três ou mais retas e paralelas entre si.

- Transversal: é qualquer reta que intercepta todas as retas de um feixe de paralelas.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- **Teorema de** Tales: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.

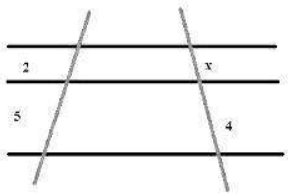



r//s//t//u (// ➔ símbolo de paralelas); a e b são retas transversais. Então, temos que os segmentos correspondentes são proporcionais.

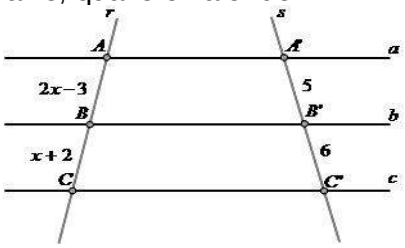
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \cdots.$$

**Questões**

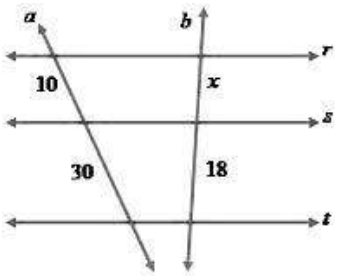
0**1.** Na figura abaixo, o valor de x é:
(A) 1,2
(B) 1,4
(C) 1,6
(D) 1,8
(E) 2,0




0**2.** Na figura abaixo, qual é o valor de x?
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7




**03.** Calcular o valor de x na figura abaixo.

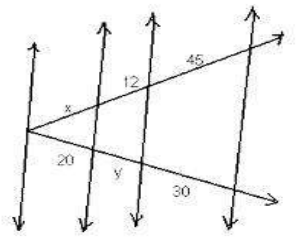




1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

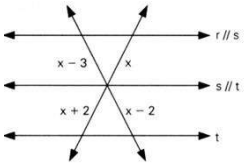
**04.** Os valores de x e y, respectivamente, na figura seguinte é:

(A) 30 e 8
(B) 8 e 30
(C) 20 e 10
(D) 10 e 20
(E) 5 e 25




**05.** Na figura abaixo, qual é o valor de x?

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7




## Respostas

**01. Resposta: C.**
Solução:
$\frac{2}{5} = \frac{x}{4}$

5x = 2.4
5x = 8
x = 8 : 5 = 1,6

**02. Resposta: B.**
Solução:
$\frac{2x-3}{x+2} = \frac{5}{6}$

6.(2x – 3) = 5(x + 2)
12x – 18 = 5x + 10
12x – 5x = 10 + 18
7x = 28
x = 28 : 7 = 4

**03**. **Resposta: 6**
Solução:
$\frac{10}{30} = \frac{x}{18}$

30x = 10.18
30x = 180
x = 180 : 30 = 6

**04**. **Resposta: A.**
Solução:

$\frac{x}{45} = \frac{20}{30}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

3x = 45.2
3x = 90
x = 90 : 3 = 30

$\frac{y}{30} = \frac{12}{45}$

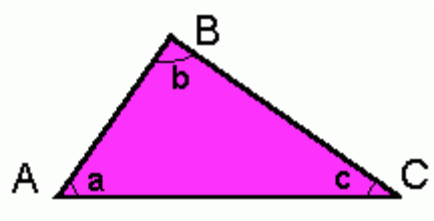
45y = 12.30
45y = 360
y = 360 : 45 = 8

**05. Resposta: D.**
Solução:
$\frac{x-3}{x-2} = \frac{x}{x+2}$

(x – 3).((x + 2) = x.(x – 2)
$x^2$ + 2x – 3x – 6 = $x^2$ – 2x
- x – 6 = - 2x
- x + 2x = 6
x = 6

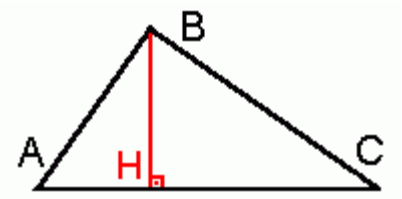
## TRIÂNGULOS

Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. É o único polígono que não tem diagonais. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

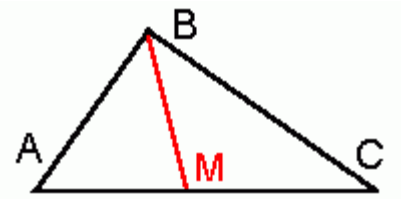



1. Vértices: A, B e C.
2. Lados: $\overline{AB}$,$\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
3. Ângulos internos: a, b e c.

**Altura:** É um segmento de reta traçada a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. $\overline{BH}$ é uma altura do triângulo.



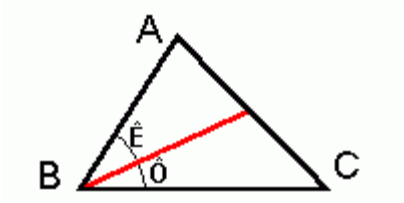

**Mediana:** É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. $\overline{BM}$ é uma mediana.



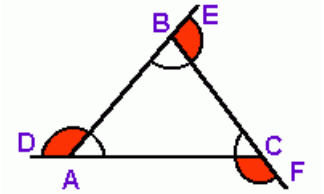


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Bissetriz:** É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo $\hat{B}$ está dividido ao meio e neste caso Ê = Ô.




**Ângulo Interno:** Todo triângulo possui três ângulos internos, na figura são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$



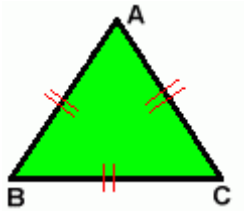

**Ângulo Externo:** É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente a este lado, na figura são $\hat{D}$, $\hat{E}$ e $\hat{F}$ (assinalados em vermelho).

**➔ Classificação**

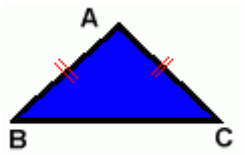
O triângulo pode ser classificado de duas maneiras:

1- Quanto aos lados:

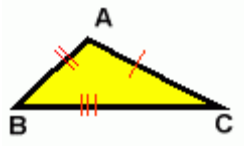
**Triângulo Equilátero:** Os três lados têm medidas iguais, m($\overline{AB}$) = m($\overline{BC}$) = m($\overline{AC}$) e os três ângulos iguais.




**Triângulo Isósceles:** Tem dois lados com medidas iguais, m($\overline{AB}$) = m($\overline{AC}$) e dois ângulos iguais.



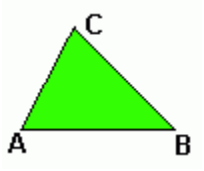

**Triângulo Escaleno:** Todos os três lados têm medidas diferentes, m($\overline{AB}$) ≠ m($\overline{AB}$) ≠ m($\overline{BC}$) e os três ângulos diferentes.



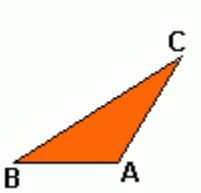

2- Quanto aos ângulos:

**Triângulo Acutângulo:** Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90º.

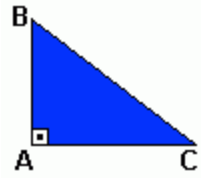

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




**Triângulo Obtusângulo:** Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90º.

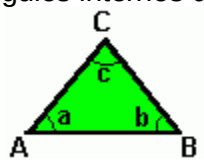



**Triângulo Retângulo:** Possui um ângulo interno reto (90° graus).



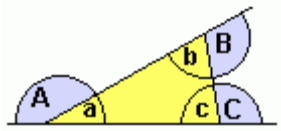

➔ **Propriedade dos ângulos**

**1- Ângulos Internos:** a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.




$a + b + c = 180º$

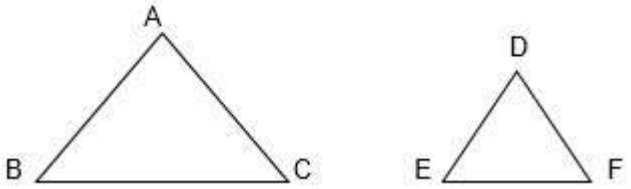
**2- Ângulos Externos:** Consideremos o triângulo ABC onde as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos. Temos que em todo triângulo cada ângulo externo é igual à soma de dois ângulos internos apostos.




$\hat{A} = \hat{b} + \hat{c}$; $\hat{B} = \hat{a} + \hat{c}$ e $\hat{C} = \hat{a} + \hat{b}$

➔**Semelhança de triângulos**

Dois triângulos são semelhantes se tiverem, entre si, os lados correspondentes **proporcionais** e os ângulos congruentes (iguais).





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

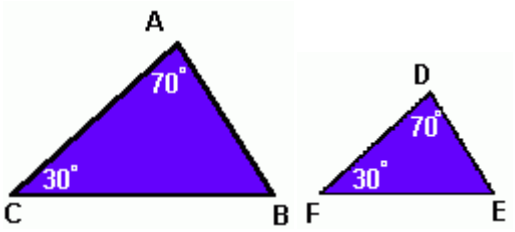
Dados os triângulos acima, onde:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

e $\hat{A} = \hat{D}$ $\hat{B} = \hat{E}$ $\hat{C} = \hat{F}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes e escrevemos ABC~DEF.

### ➔ Critérios de semelhança

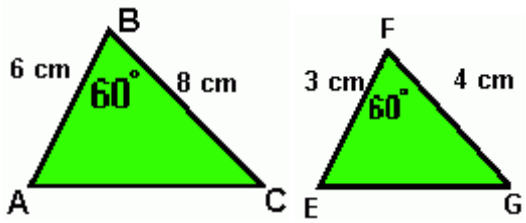
**1- Dois ângulos congruentes:** Se dois triângulos tem, entre si, dois ângulos correspondentes congruentes iguais, então os triângulos são semelhantes.




Nas figuras ao lado: $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F}$

então: ABC ~ DEF

**2- Dois lados congruentes:** Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

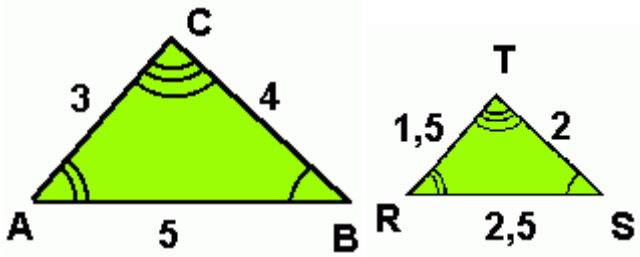



Nas figuras ao lado:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

então: ABC ~ EFG

**3- Três lados proporcionais:** Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.




Nas figuras ao lado:

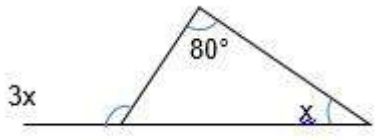
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{RT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ST}} \rightarrow \frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = 2$$

então: ABC ~ RST

Observação: temos três critérios de semelhança, porém o mais utilizado para resolução de exercícios, isto é, para provar que dois triângulos são semelhantes, basta provar que eles tem dois ângulos correspondentes congruentes (iguais).

### Questões

**01.** O valor de x na figura abaixo é:



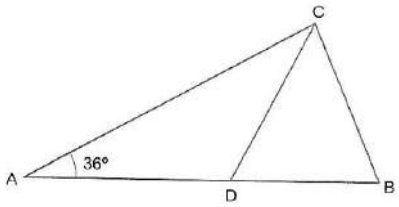

(A) 30°
(B) 40°
(C) 50°


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(D) 60°
(E) 70°

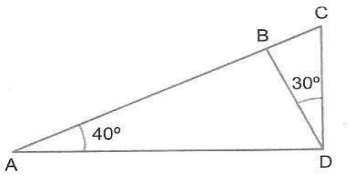
**02.** Na figura abaixo $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$, a medida do ângulo $D\hat{C}B$ é:

(A) 34°
(B) 72°
(C) 36°
(D) 45°
(E) 30°



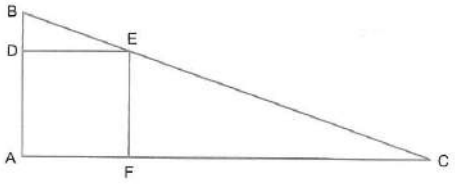

**03.** Na figura seguinte, o ângulo $A\hat{D}C$ é reto. O valor em graus do ângulo $C\hat{B}D$ é igual a:

(A) 120°
(B) 110°
(C) 105°
(D) 100°
(E) 95°

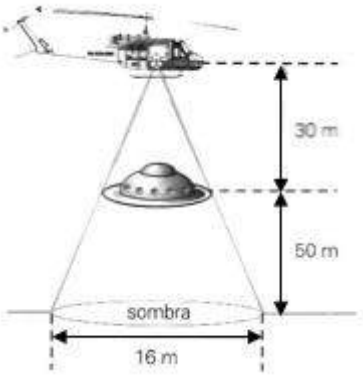



**04.** Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB = 1 e AC = 3. Quanto mede o lado do quadrado?

(A) 0,70
(B) 0,75
(C) 0,80
(D) 0,85
(E) 0,90




**05.** Em uma cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a aproximadamente 50 m do solo. Um helicóptero do Exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura seguinte. A sombra projetada pelo disco no solo tinha em torno de 16 m de diâmetro.




Sendo assim, pode-se concluir que a medida, em metros, do raio desse disco-voador é aproximadamente:

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

**Respostas**

**01. Resposta: B.**

Solução:

Da figura temos que 3x é um ângulo externo do triângulo e, portanto, é igual à soma dos dois internos opostos, então:

$3x = x + 80^o$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

3x – x = 80º
2x = 80°
x = 80° : 2
x = 40°

**02. Resposta: C.**

Solução:

Na figura dada, temos três triângulos: ABC, ACD e BCD. Do enunciado AB = AC, o triângulo ABC tem dois lados iguais, então ele é isósceles e tem dois ângulos iguais:

$A\hat{C}B = A\hat{B}C = x$. A soma dos três ângulos é igual a 180°.

36° + x + x = 180°
2x = 180° - 36°
2x = 144
x = 144 : 2
x = 72

Logo: $A\hat{C}B = A\hat{B}C = 72°$

Também temos que CB = CD, o triângulo BCD é isósceles:

$C\hat{B}D = C\hat{D}B = 72°$, sendo y o ângulo $D\hat{C}B$, a soma é igual a 180°.

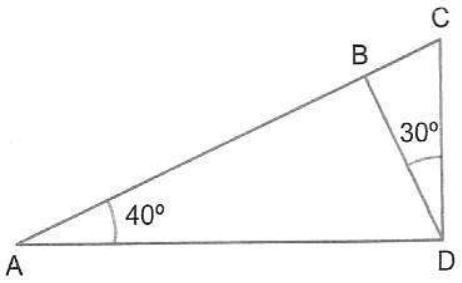
72° + 72° + y = 180°
144° + y = 180°
y = 180° - 144°
y = 36º

**03. Resposta: D.**

Solução:

Na figura temos três triângulos. Do enunciado o ângulo $A\hat{D}C = 90°$ (reto).

O ângulo $B\hat{D}C = 30°$ ➔ $A\hat{D}B = 60º$.

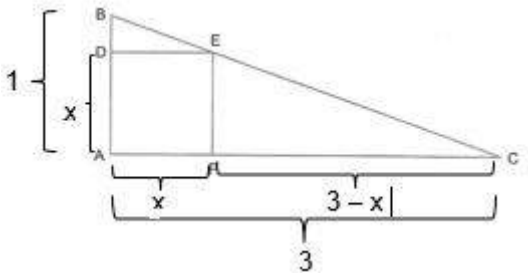



O ângulo $C\hat{B}D$ (x) é ângulo externo do triângulo ABD, então:

x = 60º + 40° (propriedade do ângulo externo)
x = 100°

**04. Resposta: B.**

Solução: sendo x o lado do quadrado:




Temos que provar que dois dos triângulos da figura são semelhantes.

O ângulo $B\hat{A}C$ é reto, o ângulo $C\hat{F}E$ é reto e o ângulo $A\hat{C}B$ é comum aos triângulos ABC e CEF, logo estes dois triângulos são semelhantes. As medidas de seus lados correspondentes são proporcionais:

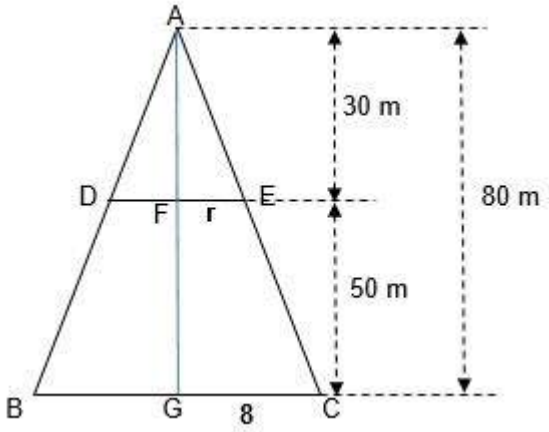
$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$

$\frac{1}{x} = \frac{3}{3-x}$ (multiplicando em "cruz")


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

3x = 1.(3 – x)
3x = 3 – x
3x + x = 3
4x = 3
x = ¾
x = 0,75

**05. Resposta: A.**
Solução: da figura dada, podemos observar os seguintes triângulos:




Os triângulos ABC e ADE são isósceles. A altura divide as bases em duas partes iguais. E esses dois triângulos são semelhantes, pois os dois ângulos das bases de cada um são congruentes. Então:

$\frac{\overline{CG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}$

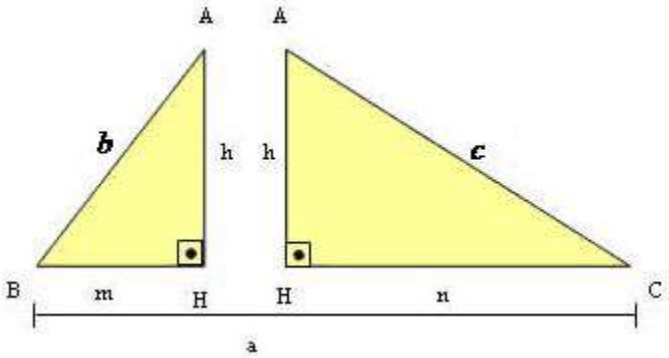
$\frac{8}{r} = \frac{8\theta}{3\theta}$

$\cancel{8}r = \cancel{8}.3$

r = 3 m

## RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Observe a figura abaixo:




Os triângulos AHB e AHC são semelhantes, então podemos estabelecer algumas relações métricas importantes abaixo relacionadas:

$$\mathbf{h^2 = m.n}$$
$$\mathbf{b^2 = m.a}$$
$$\mathbf{c^2 = a.n}$$
$$\mathbf{b.c = a.h}$$

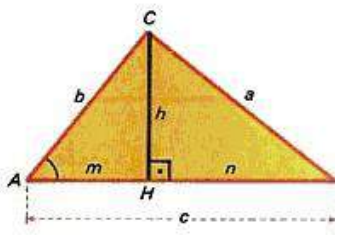
Essas relações facilitam o cálculo de muitos problemas matemáticos que envolvem no triângulo retângulo.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

1- Lado oposto a um ângulo agudo do Triangulo.

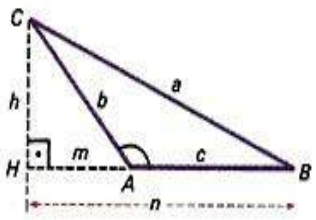
Temos a seguinte relação: “Num triângulo qualquer, o quadrado da medida do lado a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto de um desses lados pela medida da projeção do outro lado sobre ele”.




No triângulo da figura ao lado:
$a^2 = b^2 + c^2$ - 2cm

2- Lado oposto a um ângulo obtuso do Triângulo.

Temos a seguinte relação: “Num triângulo obtusângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados mais duas vezes o produto de um desses lados pela medida da projeção do outro lado sobre ele”.




No triângulo da figura ao lado:
$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$

### ➔ Natureza dos Triângulos

Quantos aos ângulos, um triângulo pode ser classificado em Acutângulo (tem os três ângulos agudos), Obtusângulo (tem um ângulo obtuso) e Retângulo (tem um ângulo reto).
Sendo **a**, **b** e **c** os três lados de um triângulo e, **a** é o **maior lado**, temos:

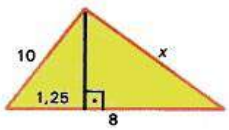
I) $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ ➔ **o triângulo é retângulo (Teorema de Pitágoras).**

II) $\mathbf{a^2 < b^2 + c^2}$ ➔ **o triângulo é acutângulo.**

III) $\mathbf{a^2 > b^2 + c^2}$ ➔**o triângulo é obtusângulo.**

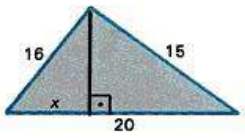
### Questões

**01.** Na figura abaixo, o valor de x é:
(A)10
(B)11
(C)12
(D)13
(E)14



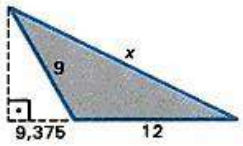

**02.** O valor de x na figura seguinte é:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



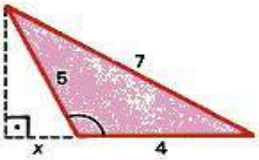

(A)10,775
(B)10
(C)11,775
(D)11
(E)12

**03.** O valor de x na figura abaixo é:




(A)$14\sqrt{2}$
(B)$15\sqrt{2}$
(C)$16\sqrt{2}$
(D)$17\sqrt{2}$
(E)$18\sqrt{2}$

**04.** Qual é o valor de x na figura dada?




(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

**05.** Um triângulo tem lados medindo 10 cm, 4 cm e 9 cm. Esse triângulo é:
(A) Isósceles
(B) Equilátero
(C) Acutângulo
(D) Retângulo
(E) Obtusângulo

**06.** Os lados de um triângulo são iguais a 13, 5 e 12. Esse triângulo é:
(A) Isósceles
(B) Acutângulo
(C) Equilátero
(D) Retângulo
(E) Obtusângulo


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Respostas**

**01. Resposta: C.**
Solução:
$x^2 = 8^2 + 10^2 – 2.8.1,25$
$x^2 = 64 + 100 – 20$
$x^2 = 144$
$x = \sqrt{144}$
x = 12

**02. Resposta: A.**
Solução:
$15^2 = 20^2 + 16^2 – 2.20.x$
115 = 400 + 256 – 40x
40x = 656 – 225
40x = 431
x = 431 : 40
x = 10,775

**03. Resposta: B.**
Solução:
$x^2 = 12^2 + 9^2 + 2.12.9,375$
$x^2 = 144 + 81 + 225$
$x^2 = 450$
$x = \sqrt{450}$ (dividindo 450 por 2 obtemos 225 que tem raiz exata e é 15)
$x = \sqrt{225.2}$
$x = 15\sqrt{2}$

**04. Resposta: A.**
Solução:
$7^2 = 4^2 + 5^2 + 2.4.x$
49 = 16 + 25 + 8x
49 – 16 – 25 = 8x
8x = 8
x = 8 : 8
x = 1

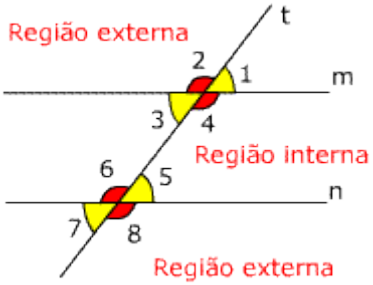
**05. Resposta: E.**
Solução: o maior lado do triângulo é 10 cm, então:
$10^2 = 100$
$4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$
100 > 97 ➔ triângulo obtusângulo.

**06. Resposta: D.**
Solução: o maior lado do triângulo é 13, então:
$13^2 = 169$
$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
169 = 169 ➔ triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras)

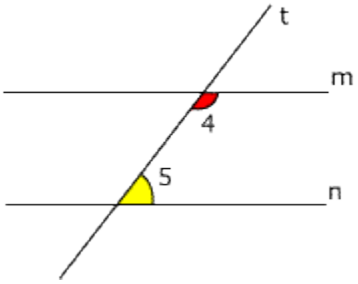

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal

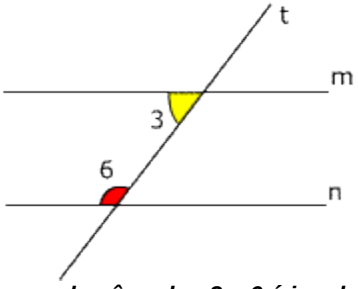
Lembre-se: Retas paralelas são retas que estão no mesmo plano e não possuem ponto em comum.
Vamos observar a figura abaixo:




Ângulos colaterais internos: (colaterais = mesmo lado)

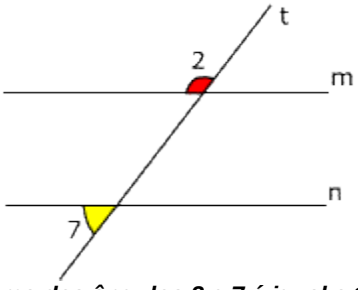



A soma dos ângulos 4 e 5 é igual a 180°.



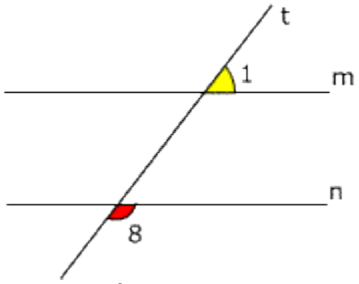

***A soma dos ângulos 3 e 6 é igual a 180°***

Ângulos colaterais externos:



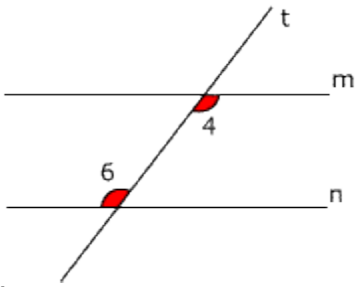

***A soma dos ângulos 2 e 7 é igual a 180°***


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

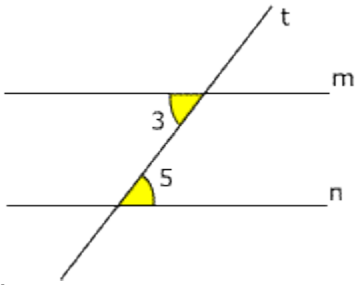



***A soma dos ângulos 1 e 8 é igual a 180°***

Ângulos alternos internos: (alternos = lados diferentes)

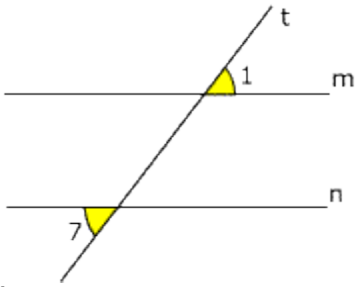



***Os ângulos 4 e 6 são congruentes (iguais)***

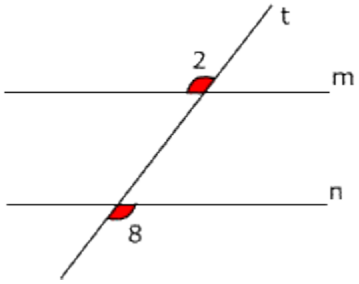



***Os ângulos 3 e 5 são congruentes (iguais)***

Ângulos alternos externos:



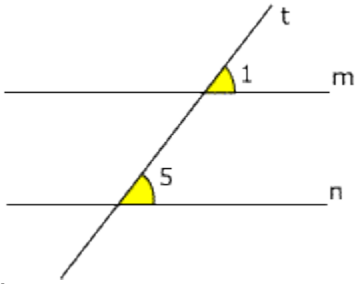

***Os ângulos 1 e 7 são congruentes (iguais)***



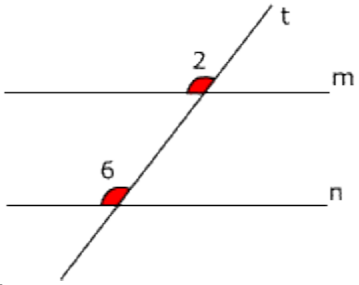

***Os ângulos 2 e 8 são congruentes (iguais)***

Ângulos correspondentes: são ângulos que ocupam uma mesma posição na reta transversal, um na região interna e o outro na região externa.

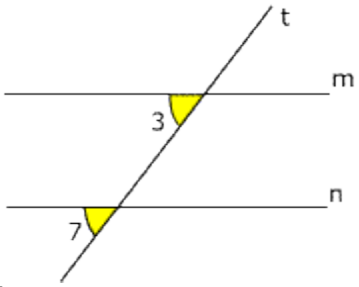

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



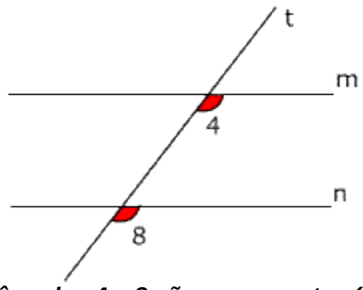

***Os ângulos 1 e 5 são congruentes (iguais)***




***os ângulos 2 e 6 são congruentes (iguais)***




***os ângulos 3 e 7 são congruentes (iguais)***

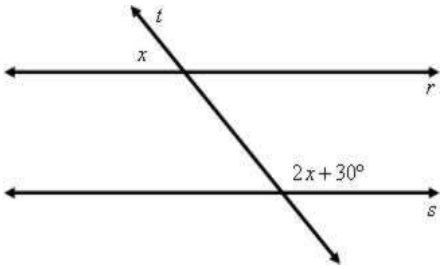



***os ângulos 4 e 8 são congruentes (iguais)***

## Questões

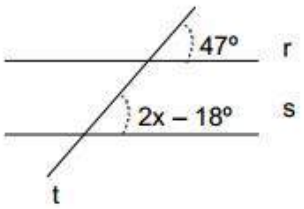
01- Na figura abaixo, o valor de x é:

(A) 10°
(B) 20°
(C) 30°
(D) 40°
(E) 50°



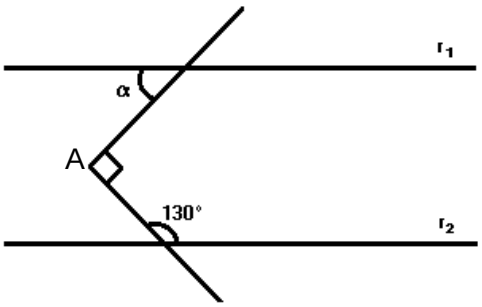

02- O valor de x na figura seguinte, em graus, é:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

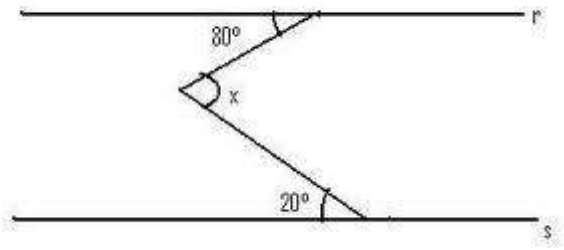



(A) 32°
(B) 32° 30’
(C) 33°
(D) 33° 30’
(E) 34°

03- Na figura abaixo, sabendo que o ângulo $\hat{A}$ é reto, o valor de $\alpha$ é:
(A) 20°
(B) 30°
(C) 40°
(D) 50°
(E) 60°

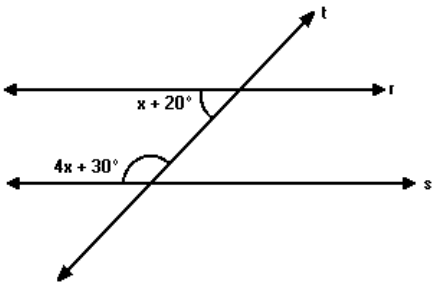



04- Qual é o valor de x na figura abaixo?




(A) 100°
(B) 60°
(C) 90°
(D) 120°
(E) 110°

05- Na figura seguinte, o valor de x é:



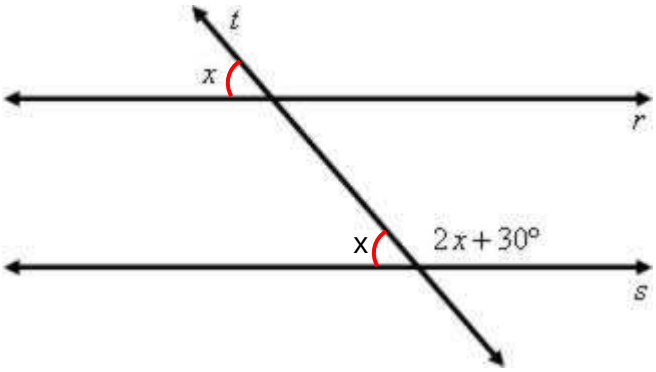

(A) 20°


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(B) 22°
(C) 24°
(D) 26°
(E) 28°

## Respostas

**01. Resposta: E.**
Na figura, os ângulos assinalados são correspondentes, portanto são iguais.




x + 2x + 30° = 180°
3x = 180°- 30°
3x = 150°
x = 150° : 3
x = 50°

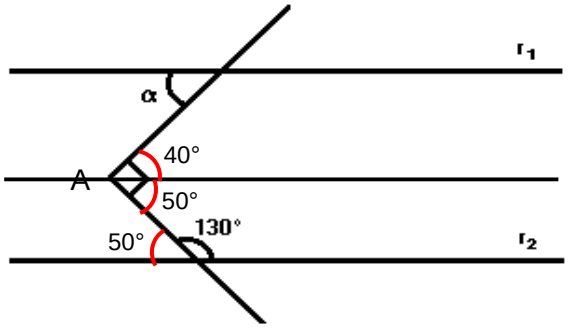
**02. Resposta: B.**
Na figura dada os ângulos 47° e 2x – 18° são correspondentes e, portanto tem a mesma medida, então:

2x – 18° = 47°
2x = 47° + 18°
2x = 65°
x = 65°: 2
x = 32° 30’

- lembrando que 1° = 60’

65° | 2
05 | 32° 30’
1°
x60
60’
00

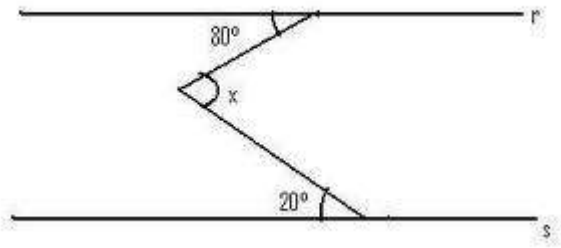
**03. Resposta: C.**
Neste exercício, precisamos traçar uma terceira reta pelo vértice A paralela às outras duas.

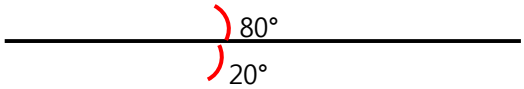



Os ângulos são dois a dois iguais, portanto $\alpha$ = 40°

**04. Resposta: A.**
Neste exercício também precisamos traçar um terceira reta pelo vértice.

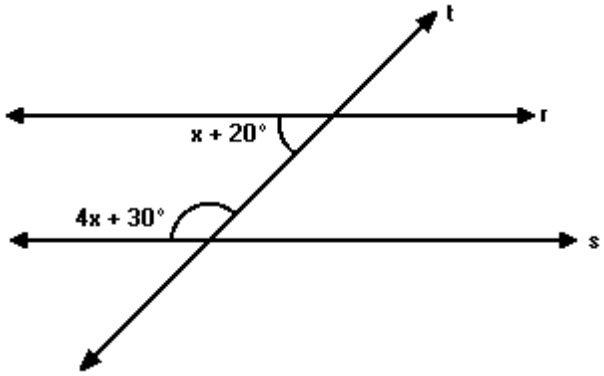

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA




x = 80° + 20°
x = 100°
Obs.: neste tipo de figura, o ângulo do meio sempre será a soma dos outros dois.

**05. Resposta: D.**

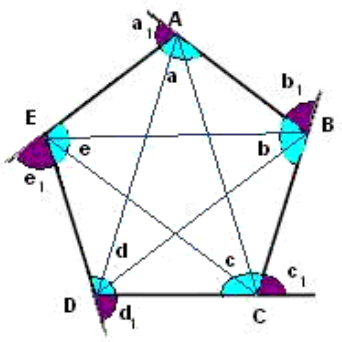



Os ângulos assinalados na figura, x + 20° e 4x + 30°, são colaterais internos, portanto a soma dos dois é igual a 180°.
x + 20° + 4x + 30° = 180°
5x + 50° = 180°
5x = 180° - 30°
5x = 130°
x = 130° : 5
x = 26°

## POLÍGONOS

Um polígono é uma figura geométrica fechada, simples, formada por segmentos consecutivos e não colineares.

**Elementos de um polígono**





1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Um polígono possui os seguintes elementos:

- Lados: cada um dos segmentos de reta que une vértices consecutivos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$.

- Vértices: ponto de intersecção de dois lados consecutivos: A, B, C, D e E.

- Diagonais: Segmentos que unem dois vértices não consecutivos: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ e $\overline{BE}$.

- Ângulos internos: ângulos formados por dois lados consecutivos (assinalados em azul na figura): $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$.

- Ângulos externos: ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo (assinalados em vermelho na figura): $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$, $\hat{e}_1$.

**Classificação**: os polígonos são classificados de acordo com o número de lados, conforme a tabela abaixo.

| N° de lados | Nome |
|---|---|
| 3 | Triângulo |
| 4 | Quadrilátero |
| 5 | Pentágono |
| 6 | Hexágono |
| 7 | Heptágono |
| 8 | Octógono |
| 9 | Eneágono |
| 10 | Decágono |
| 11 | Undecágono |
| 12 | Dodecágono |
| 15 | Pentadecágono |
| 20 | Icoságono |

**Fórmulas**: na relação de fórmulas abaixo temos a letra **n** que representa o números de lados ou de ângulos ou de vértices de um polígonos, pois um polígono de 5 lados tem também e vértices e 5 ângulos.

1- Diagonais de um vértice: $\mathbf{d_v = n - 3}$.

2- Total de diagonais: $\mathbf{d = \frac{(n-3).n}{2}}$.

3- Soma dos ângulos internos: $\mathbf{S_i = (n - 2).180°}$.

4- Soma dos ângulos externos: para qualquer polígono o valor da soma dos ângulos externos é uma constante, isto é, $\mathbf{S_e = 360°}$.

**Polígonos Regulares**: um polígono é chamado de regular quando tem todos os lados congruentes (iguais) e todos os ângulos congruentes. Exemplo: o quadrado tem os 4 lados iguais e os 4 ângulos de 90°, por isso é um polígono regular. E para polígonos regulares temos as seguintes fórmulas, além das quatro acima:

1- Ângulo interno: $\mathbf{a_i = \frac{(n-2).180°}{n}}$ ou $\mathbf{a_i = \frac{S_i}{n}}$.

2- Ângulo externo: $\mathbf{a_e = \frac{360°}{n}}$ ou $\mathbf{a_e = \frac{S_e}{n}}$.

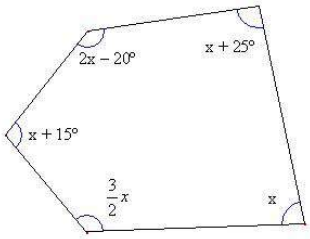

1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01.** A soma dos ângulos internos de um heptágono é:
(A) 360°
(B) 540°
(C) 1400°
(D) 900°
(E) 180°

**02.** Qual é o número de diagonais de um icoságono?
(A) 20
(B) 70
(C) 160
(D) 170
(E) 200

**03.** O valor de x na figura abaixo é:
(A) 80°
(B) 90°
(C) 100°
(D) 70°
(E) 50°




**04.** Um joalheiro recebe uma encomenda para uma joia poligonal. O comprador exige que o número de diagonais seja igual ao número de lados. Sendo assim, o joalheiro deve produzir uma joia:
(A) Triangular
(B) Quadrangular
(C) Pentagonal
(D) Hexagonal
(E) Decagonal

**05.** Num polígono convexo, a soma dos ângulos internos é cinco vezes a soma dos ângulos externos. O número de lados e diagonais desse polígono, respectivamente, são:
(A) 54 e 12
(B) 18 e 60
(C) 12 e 54
(D) 60 e 18
(E) 15 e 30

**06.** Cada um dos ângulos externos de um polígono regular mede 15°. Quantos lados tem esse polígono?
(A) 20
(B) 24
(C) 26
(D) 30
(E) 32

## Respostas

**01. Resposta: D.**
Heptágono (7 lados) ➔ n = 7
$S_i = (n – 2).180°$
$S_i = (7 – 2).180°$
$S_i = 5.180° = 900°$

**02. Resposta: D.**


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Icoságono (20 lados) ➔ n = 20

$d = \frac{(n-3).n}{2}$

$d = \frac{(20-3).20}{2} = 17.10$

d = 170

**03. Resposta: A.**
A soma dos ângulos internos do pentágono é:

$$S_i = (n-2).180°$$
$$S_i = (5-2).180°$$
$$S_i = 3.180°$$
$$S_i = 540°$$

$$540° = x + \frac{3}{2}x + x + 15° + 2x - 20° + x + 25°$$
$$540° = 5x + \frac{3}{2}x + 20°$$
$$520° = \frac{10x + 3x}{2}$$
$$1040° = 13x$$
$$x = \frac{1040°}{13}$$
$$x = 80°$$

**04. Resposta: C.**
Sendo **d** o números de diagonais e **n** o número de lados, devemos ter:
d = n

$\frac{(n-3).n}{2} = n$ (passando o 2 multiplicando)

(n – 3).n = 2n

n – 3 = 2
n = 2 + 3
n = 5 ➔ pentagonal

**05. Resposta: C.**
Do enunciado, temos:
$S_i = 5.S_e$
(n – 2).180º = 5.360°
(n – 2).180° = 1800°
n – 2 = $\frac{1800}{180}$
n – 2 = 10
n = 10 + 2 = 12 lados

$d = \frac{(n-3).n}{2}$

$d = \frac{(12-3).12}{2}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

d = 9.6 = 54 diagonais

**06. Resposta: B.**
Solução: temos que $a_e$ = 15°

$$a_e = \frac{360°}{n}$$

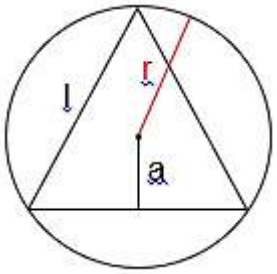
$$15° = \frac{360°}{n}$$

15n = 360
n = 360 : 15
n = 24 lados

## POLÍGONOS REGULARES

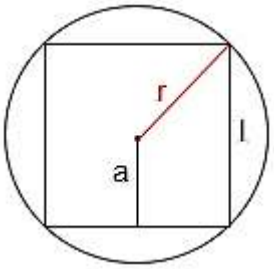
Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. E temos fórmulas para calcular o lado e o apótema desse triângulo em função do raio da circunferência. Apótema e um segmento que sai do centro das figuras regulares e divide o lado em duas partes iguais.

I) **Triângulo Equilátero**:



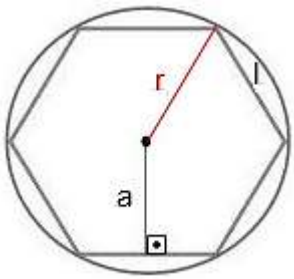

- Lado: $l = r\sqrt{3}$
- Apótema: $a = \frac{r}{2}$

II) **Quadrado**:




- Lado: $l = r\sqrt{2}$
- Apótema: $a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

III) Hexágono Regular




- Lado: $l = r$
- Apótema: $a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Questões

**01.** O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 8 cm, vale, em centímetros:

(A) 4
(B) $4\sqrt{3}$
(C) 8
(D) $8\sqrt{2}$
(E) 12

**02.** O apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede 10 cm, o raio dessa circunferência é:

(A) 15 cm
(B) 10 cm
(C) 8 cm
(D) 20 cm
(E) 25 cm

**03.** O apótema de um quadrado mede 6 dm. A medida do raio da circunferência em que esse quadrado está inscrito, em dm, vale:

(A) $4\sqrt{2}$ dm
(B) $5\sqrt{2}$ dm
(C) $6\sqrt{2}$ dm
(D) $7\sqrt{2}$ dm
(E) $8\sqrt{2}$ dm

## Respostas

**01. Resposta: B.**

Basta substituir r = 8 na fórmula do hexágono

$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ➔ $a = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm

**02. Resposta: D.**

Basta substituir a = 10 na fórmula do triangulo equilátero.

$a = \frac{r}{2}$ ➔ $10 = \frac{r}{2}$ ➔ r = 2.10 ➔ r = 20 cm

**03. Resposta: C.**

Sendo a = 6, temos:

$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

$6 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ ➔ $r\sqrt{2} = 2.6$ ➔ $r\sqrt{2} = 12$ ($\sqrt{2}$ passa dividindo)

r = $\frac{12}{\sqrt{2}}$ (temos que racionalizar, multiplicando em cima e em baixo por $\sqrt{2}$)

$r = \frac{12.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ ➔ $r = \frac{12\sqrt{2}}{2}$ ➔ $r = 6\sqrt{2}$ dm


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## TEOREMA DE STEWART

O Teorema de Stewart relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana, sendo aplicável a uma ceviana qualquer.

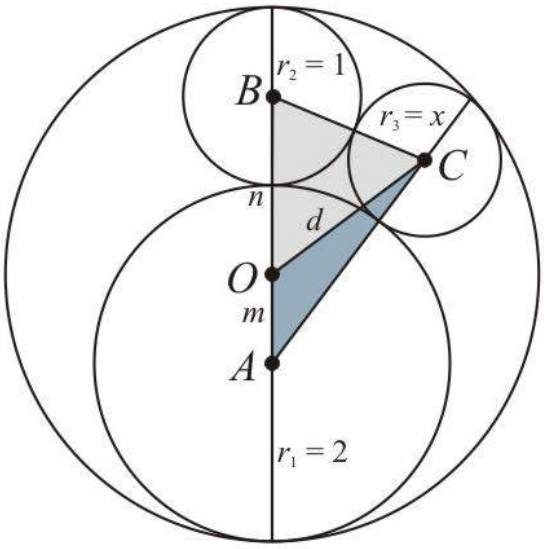
Recordando, ceviana é todo seguimento de reta que tem um das extremidades num vértice de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte ao lado oposto ao vértice.

**Teorema:** Seja um triângulo ABC qualquer, cujos lados medem a, b e c. Seja d uma ceviana e D o ponto pertencente à reta suporte. O teorema de Stewart afirma que:

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

**Exemplo:**

Sejam 3 circunferências tangentes duas a duas inscritas em uma quarta circunferências tangente às três primeiras. Calcular o raio x, conforme mostra a figura abaixo:




Do triângulo ABC, podemos construir as seguintes relações:

(1) $AB = 3$

(2) $AO = m = 1$

(3) $BO = n = 2$

(4) $BC = 1 + x$

(5) $AC = 2 + x$

(6) $OC = d = 3 - x$

Aplicamos o Teorema de Stewart:

$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$

$BC^2 + 2AC^2 - 3(3-x)^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$(1+x)^2 + 2(2+x)^2 - 3(3-x)^2 = 6$

$1 + 2x + x^2 + 8 + 8x + 2x^2 - 27 + 18x - 3x^2 = 6$

$28x - 18 = 6$

$28x = 24$

$28x = 24$

$x = \frac{6}{7}$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## FÓRMULA DE HERON

Heron de Alexandria é o responsável por elaborar uma fórmula matemática que calcula a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados. A fórmula de Heron de Alexandria é muito útil nos casos em que não sabemos a altura do triângulo, mas temos a medida dos lados.

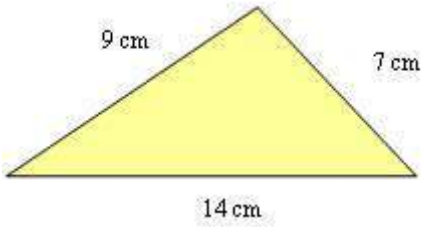
Em um triângulo de lados medindo a, b e c podemos calcular a sua área utilizando a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, sendo$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

**Exemplos:**

**1)** Calcule a área do triângulo a seguir:




p = (9 + 7 + 14) / 2
p = 30 / 2
p = 15

A = √15(15 – 9)(15 – 7)(15 – 14)
A = √15 . 6 . 8 . 1
A = √720
A = 26,83 cm2(aproximadamente)

**2)** Utilizando a Fórmula de Heron, calcule a área da região com as seguintes medidas:

26cm, 26cm e 20cm

p = (26 + 26 + 20) / 2
p = 72 / 2
p = 36

A = √36(36 – 26)(36 – 26)(36 – 20)
A = √36 * 10 * 10 * 16
A = √57600
A = 240 cm2


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA



## 16) Polinômios: - Função polinomial, polinômio identicamente nulo, grau de um polinômio, identidade de um polinômio, raiz de um polinômio, operações com polinômios, valor numérico de um polinômio; - Divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffinni; relação entre coeficientes e raízes. Fatoração e multiplicidade de raízes e produtos notáveis. Máximo divisor comum de polinômios;

### POLINÔMIOS

Para polinômios podemos encontrar várias definições diferentes como:
Polinômio é uma expressão algébrica com todos os termos semelhantes reduzidos.

- 3xy é monômio, mas também considerado polinômio, assim podemos dividir os polinômios em monômios (apenas um monômio), binômio (dois monômios) e trinômio (três monômios).

- 3x + 5 é um polinômio e uma expressão algébrica.

Como os monômios, os polinômios também possuem grau e é assim que eles são separados. Para identificar o seu grau, basta observar o grau do maior monômio, esse será o grau do polinômio.
Com os polinômios podemos efetuar todas as operações: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação.

Em resumo:
- Polinômio é uma expressão algébrica racional e inteira, por exemplo:
$x^2y$
$3x - 2y$
$x + y^5 + ab$

- Monômio é um tipo de polinômio que possui apenas um termo, ou seja, que possui apenas coeficiente e parte literal. Por exemplo:
$a^2 \rightarrow 1$ é o coeficiente e $a^2$ parte literal.
$3x^2y \rightarrow 3$ é o coeficiente e $x^2y$ parte literal.
$-5xy^6 \rightarrow -5$ é o coeficiente e $xy^6$ parte literal

**➔ Operações com Polinômios**

**- Adição**

O procedimento utilizado na adição e subtração de polinômios envolve técnicas de redução de termos semelhantes, jogo de sinal, operações envolvendo sinais iguais e sinais diferentes.
**Exemplos:**

1 - Adicionar $x^2 - 3x - 1$ com $-3x^2 + 8x - 6$.
$(x^2 - 3x - 1) + (-3x^2 + 8x - 6) \rightarrow$ eliminar o segundo parênteses através do jogo de sinal.
$+(-3x^2) = -3x^2$
$+(+8x) = +8x$
$+(-6) = -6$
$x^2 - 3x - 1 - 3x^2 + 8x - 6 \rightarrow$ reduzir os termos semelhantes.
$x^2 - 3x^2 - 3x + 8x - 1 - 6$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$-2x^2 + 5x - 7$
Portanto: $(x^2 - 3x - 1) + (-3x^2 + 8x - 6) = -2x^2 + 5x - 7$

2 - Adicionando $4x^2 - 10x - 5$ e $6x + 12$, teremos:
$(4x^2 - 10x - 5) + (6x + 12)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.
$4x^2 - 10x - 5 + 6x + 12$ → reduzir os termos semelhantes.
$4x^2 - 10x + 6x - 5 + 12$
$4x^2 - 4x + 7$
Portanto: $(4x^2 - 10x - 5) + (6x + 12) = 4x^2 - 4x + 7$

**➔ Subtração**

**Exemplos:**

1 - Subtraindo $-3x^2 + 10x - 6$ de $5x^2 - 9x - 8$.
$(5x^2 - 9x - 8) - (-3x^2 + 10x - 6)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.
$-(-3x^2) = +3x^2$
$-(+10x) = -10x$
$-(-6) = +6$
$5x^2 - 9x - 8 + 3x^2 - 10x + 6$ → reduzir os termos semelhantes.
$5x^2 + 3x^2 - 9x - 10x - 8 + 6$
$8x^2 - 19x - 2$
Portanto: $(5x^2 - 9x - 8) - (-3x^2 + 10x - 6) = 8x^2 - 19x - 2$

2 - Se subtrairmos $2x^3 - 5x^2 - x + 21$ e $2x^3 + x^2 - 2x + 5$ teremos:
$(2x^3 - 5x^2 - x + 21) - (2x^3 + x^2 - 2x + 5)$ → eliminando os parênteses através do jogo de sinais.
$2x^3 - 5x^2 - x + 21 - 2x^3 - x^2 + 2x - 5$ → redução de termos semelhantes.
$2x^3 - 2x^3 - 5x^2 - x^2 - x + 2x + 21 - 5$
$0x^3 - 6x^2 + x + 16$
$-6x^2 + x + 16$
Portanto: $(2x^3 - 5x^2 - x + 21) - (2x^3 + x^2 - 2x + 5) = -6x^2 + x + 16$

3 - Considerando os polinômios $A = 6x^3 + 5x^2 - 8x + 15$, $B = 2x^3 - 6x^2 - 9x + 10$ e $C = x^3 + 7x^2 + 9x + 20$. Calcule:
a) A + B + C
$(6x^3 + 5x^2 - 8x + 15) + (2x^3 - 6x^2 - 9x + 10) + (x^3 + 7x^2 + 9x + 20)$
$6x^3 + 5x^2 - 8x + 15 + 2x^3 - 6x^2 - 9x + 10 + x^3 + 7x^2 + 9x + 20$
$6x^3 + 2x^3 + x^3 + 5x^2 - 6x^2 + 7x^2 - 8x - 9x + 9x + 15 + 10 + 20$
$9x^3 + 6x^2 - 8x + 45$
$A + B + C = 9x^3 + 6x^2 - 8x + 45$

b) A – B – C
$(6x^3 + 5x^2 - 8x + 15) - (2x^3 - 6x^2 - 9x + 10) - (x^3 + 7x^2 + 9x + 20)$
$6x^3 + 5x^2 - 8x + 15 - 2x^3 + 6x^2 + 9x - 10 - x^3 - 7x^2 - 9x - 20$
$6x^3 - 2x^3 - x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 7x^2 - 8x + 9x - 9x + 15 - 10 - 20$
$6x^3 - 3x^3 + 11x^2 - 7x^2 - 17x + 9x + 15 - 30$
$3x^3 + 4x^2 - 8x - 15$
$A - B - C = 3x^3 + 4x^2 - 8x - 15$

**- Multiplicação**

A multiplicação com polinômio (com dois ou mais monômios) pode ser realizada de três formas:
1) Multiplicação de monômio com polinômio.
2) Multiplicação de número natural com polinômio.
3) Multiplicação de polinômio com polinômio.

As multiplicações serão efetuadas utilizando as seguintes propriedades:
- Propriedade da base igual e expoente diferente: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

- Monômio multiplicado por monômio é o mesmo que multiplicar parte literal com parte literal e coeficiente com coeficiente.

**1) Multiplicação de monômio com polinômio**

- Se multiplicarmos 3x por $(5x^2 + 3x – 1)$, teremos:
$3x \cdot (5x^2 + 3x – 1) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot 3x + 3x \cdot (-1)$
$15x^3 + 9x^2 – 3x$
Portanto: $3x (5x^2 + 3x – 1) = 15x^3 + 9x^2 – 3x$

- Se multiplicarmos $-2x^2$ por $(5x – 1)$, teremos:
$-2x^2 (5x – 1) \rightarrow$ aplicando a propriedade distributiva.
$-2x^2 \cdot 5x – 2x^2 \cdot (-1)$
$- 10x^3 + 2x^2$
Portanto: $-2x^2 (5x – 1) = - 10x^3 + 2x^2$

**2) Multiplicação de número natural**

- Se multiplicarmos 3 por $(2x^2 + x + 5)$, teremos:
$3 (2x^2 + x + 5) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5$
$6x^2 + 3x + 15.$
Portanto: $3 (2x^2 + x + 5) = 6x^2 + 3x + 15.$

**3) Multiplicação de polinômio com polinômio**

- Se multiplicarmos $(3x – 1)$ por $(5x^2 + 2)$
$(3x – 1) \cdot (5x^2 + 2) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot 2 – 1 \cdot 5x^2 – 1 \cdot 2$
$15x^3 + 6x – 5x^2 – 2$
Portanto: $(3x – 1) \cdot (5x^2 + 2) = 15x^3 + 6x – 5x^2 – 2$

- Multiplicando $(2x^2 + x + 1)$ por $(5x – 2)$, teremos:
$(2x^2 + x + 1) (5x – 2) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$2x^2 \cdot (5x) + 2x^2 \cdot (-2) + x \cdot 5x + x \cdot (-2) + 1 \cdot 5x + 1 \cdot (-2)$
$10x^3 – 4x^2 + 5x^2 – 2x + 5x – 2$
$10x^3 + x^2 + 3x – 2$
Portanto: $(2x^2 + x + 1) (5x – 2) = 10x^3 + x^2 + 3x – 2$

**- Divisão**

**1) Divisão de monômio por monômio**

Ao resolvermos uma divisão onde o dividendo e o divisor são monômios devemos seguir a regra: dividimos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Exemplos: $6x^3 \div 3x = \frac{6}{} \cdot \frac{x^3}{} = 2x^2\ 3x^2$

$$-10x^2y^4 : 2xy^2 = -\frac{10}{2}\ \frac{x^2}{x}\ \frac{y^4}{y^2} = -5xy^2$$

Observação: ao dividirmos as partes literais temos que estar atentos à propriedade que diz que base igual na divisão, repete a base e subtrai os expoentes.

Depois de relembrar essas definições veja alguns exemplos de como resolver divisões de polinômio por monômio**.**

**Exemplo 1:** $(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2)$

O dividendo $10a^3b^3 + 8ab^2$ é formado por dois monômios. Dessa forma, o divisor $2ab^2$, que é um monômio, irá dividir cada um deles, veja:


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2)$

$$\frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2}$$

Assim, transformamos a divisão de polinômio por monômio em duas divisões de monômio por monômio. Portanto, para concluir essa divisão é preciso dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$\frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$5a^2b \quad + \quad 4$$

ou

$$(10a^3b^3 + 8ab^2) : (2ab^2)$$

$$\underbrace{(10a^3b^3) : (2ab^2)}_{5a^2b} + \underbrace{(8ab^2) : (2ab^2)}_{4}$$

Portanto, $(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2) = 5a^2b + 4$

**Exemplo 2:** $(9x^2y^3 - 6x^3y^2 - xy) \div (3x^2y)$

O dividendo $9x^2y^3 - 6x^3y^2 - xy$ é formado por três monômios. Dessa forma, o divisor $3x^2y$, que é um monômio irá dividir cada um deles, veja:

$$\frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{x\,y}{3x^2y}$$

Assim, transformamos a divisão de polinômio por monômio em três divisões de monômio por monômio. Portanto, para concluir essa divisão é preciso dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$\frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{x\,y}{3x^2y}$$

$$3y^2 - 2xy - \frac{1}{3x}$$

Portanto,

$$(9x^2y^3 - 6x^3y^2 - xy) : (3x^2y) = 3y^2 - 2xy - \frac{1}{3x} \quad \text{ou } 3y^2 - 2xy - \frac{1x^{-1}}{3}$$

**2) Divisão de Polinômio por polinômio**

Sejam dois polinômios P(x) e D(x), com D(x) não nulo.

Efetuar a divisão de P por D é determinar dois polinômios Q(x) e R(x), que satisfaçam as duas condições abaixo:

**1ª) Q(x).D(x) + R(x) = P(x)**

**2ª) gr(R) < gr(D) ou R(x)=0**

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Nessa divisão:

**P(x)** é o dividendo.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**D(x)** é o divisor.
**Q(x)** é o quociente.
**R(x)** é o resto da divisão.

Obs: Quando temos R(x)=0 dizemos que a divisão é exata, ou seja, P(x) é divisível por D(x) ou D(x) é divisor de P(x).

**Se D(x) é divisor de P(x) $\Leftrightarrow$ R(x)=0**

**Exemplo:**
Determinar o quociente de $P(x)=x^4+x^3-7x^2+9x-1$ por $D(x)=x^2+3x-2$.
*Resolução:* Aplicando o *método da chave*, temos:

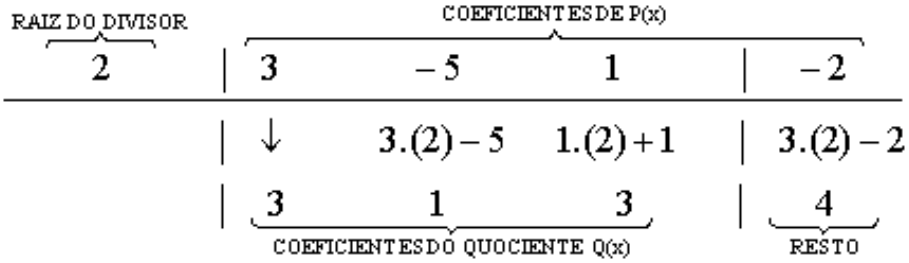
$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \hline -x^4-3x^3+2x^2 & x^2-2x+1 \rightarrow Q(x) \\ \quad -2x^3-5x^2+9x-1 & \\ \quad +2x^3+6x^2-4x & \\ \hline \qquad\quad x^2+5x-1 & \\ \quad -x^2-3x+2 & \\ \hline \qquad\quad 2x+1 \rightarrow R(x) & \end{array}$$

Verificamos que:

$$\underbrace{x^4+x^3-7x^2+9x-1}_{P(x)} \equiv \underbrace{(x^2+3x-2)}_{D(x)}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)}+\underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

**➔ O dispositivo de Briot-Ruffini**

Utiliza-se para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).
**Exemplo**: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x)=3x^3-5x^2+x-2$ por (x-2).
Resolução:




Para resolvermos este problema, vamos seguir o passo a passo abaixo:

**1)** Vamos achar a raiz do divisor: x-2 =0 ➔ x=2 ;

**2)** Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da reta, como mostra a figura acima;

**3)** O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo;

**4)** Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste;


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**5)** Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente;

**6)** Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1. Resposta: **Q(x)=3x2+x+3** e **R(x)=4**.

**Questões**

**01. (Guarda Civil SP)** O resto da divisão do polinômio $x^3 + 3x^2 – 5x + 1$ por $x – 2$ é:
(A)1
(B)2
(C)10
(D)11
(E) 12

**02. (Guarda Civil SP)** Considere o polinômio

$$P(x)=4x^4+3x^3-2x^2+x+k.$$

Sabendo que P(1) = 2, então o valor de P(3) é:
(A) 386.
(B) 405.
(C) 324.
(D) 81.
(E) 368.

**03. (UESP)** Se o polinômio P(x) = x3 + mx2 - 1 é divisível por x2 + x - 1, então m é igual a:
(A)-3
(B)-2
(C)-1
(D)1
(E) 2

**04. (UF/AL)** Seja o polinômio do 3° grau $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujos coeficientes são todos positivos. O n° real k é solução da equação p(x) = p(- x) se, e somente se, k é igual a:
(A) 0
(B) 0 ou 1
(C) - 1 ou 1
(D) ± √c/a
(E) 0 ou ± √-c/a

**05 . (UFSM)** Considere os polinômios, de coeficientes reais:
$A(x)= x^3 + ax^2 + bx + c$
$B(x)= bx^3 + 2x^2 + cx +2$
Teremos que A(k)=B(k), qualquer que seja o número real k, quando:
(A) a=c=2 e b=1
(B) b=c=1 e a=2
(C) a=b=c=1
(D) a=b=c=2
(E) nunca


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**06. (FUVEST)** Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, satisfaz as seguintes condições: $P(1) = 0$; $P(–x) + P(x) = 0$, qualquer que seja x real. Qual o valor de P(2)?
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

**07. (MACK)**

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-2 \\ \hline 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} Q(x) & x-6 \\ \hline 1 & Q1(x) \end{array}$$

Considerando as divisões de polinômios acima, podemos afirmar que o resto da divisão de P(x) por $x^2 – 8x + 12$ é:
(A) 3x – 2
(B) x + 1
(C) 2x + 2
(D) 2x + 1
(E) x + 2

**08. (FGV)** Sabe-se que o polinômio $f = x^4 – x^3 – 3x^2 + x + 2$ é divisível por $x^2 – 1$. Um outro divisor de **f** é o polinômio:
(A) $x^2 – 4$
(B) $x^2 + 1$
(C) $(x + 1)^2$
(D) $(x – 2)^2$
(E) $(x – 1)^2$

**09. (FGV)** Um polinômio P (x) do 4o grau é divisível por $(x – 3)^3$. Sendo P (0) = 27 e P (2) = –1, então o valor de P (5) é:
(A) 48
(B) 32
(C) 27
(D) 16
(E) 12

**10. (MACK)** Se P (x) = x3 – 8 x2 + kx – m é divisível por (x – 2) (x + 1) então $\frac{k}{m}$ , $(m \neq 0)$, vale:
(A) 2/5
(B) – 5/14
(C) 7/2
(D) 2/7
(E) 1/2


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Respostas

**01. Resposta: D.**

$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \quad | x - 2$

$-(x^3 - 2x^2) \qquad x^2 + 5x + 5$

$5x^2 - 5x + 1$

$-(5x^2 - 10x)$

$5x + 1$

$-(5x - 10)$

$11$

**02. Resposta: A.**

$P(1)=4.1 + 3.1 – 2.1 + 1 + k =2$
$P(1) =4 + 3 – 2 + 1+ k = 2$
$10 + k = 2$
$k = 2 – 6$
$k = – 4$
Substituindo k, e fazendo P(3), teremos:
$P(3) = 4x4 + 3x^3 + 2x^2 + x – 4$
$P(3) = 4.(3)4 + 3.(3)3 + 2.(3)2 + 3 -4$
$P(3) = 4.81 + 3.27 – 2.9 + 3 – 4$
$P(3) = 324 + 81 – 18 + 3 – 4$
$P(3) = 386$

**03. Resposta: E.**

$x^3+mx^2+0x-1 \ | x^2+x-1$
$-x^3 -x^2+x$ .....$x+1$
.....$(m-1)x^2+x-1$
..... $-1x^2-x-1$
.....$(m-2)$
o resto deve ser igual a zero, assim teremos que
$m-2=0$
$m=2$

**04. Resposta: E.**

$p(x)=p(-x)$
$ax^3+bx^2+cx+d=-ax^3+bx^2-cx+d$
$2ax^3+2cx=0$
$2(ax^3+cx)=0$
$ax^3+cx=0$
Como k é solução da equação $ax^3+cx=0$, teremos
$p(k)=ak^3+ck=0$
$ak^3+ck=0$
$k(ak^2+c)=0$
$k=0$ ou
$ak^2+c=0$
$k^2=-c/a$
$k=\pm\sqrt{-c/a}$


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**05. Resposta: E.**

$A(x)=B(x) \rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = bx^3 + 2x^2 + cx + 2 \rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c - bx^3 - 2x^2 - cx - 2 = 0 \rightarrow$

$x^3(1-b) + x^2(a-2) + x(b-c) + c - 2 = 0$, daí tiramos:

$b=1$ ; $a=2$ ; $b=c$ ; $c=2$ , $b=2$ , então se $b=1$ e $b=2$ , b não pode ter dois valores, logo não existe resposta correta.

**06. Resposta: E.**

$P(x)= x^3+ax^2+bx+c$

$P(1) = 1^3+a1^2+b1+c \rightarrow a+b+c=-1$

$P(-x)+P(x)= -x^3+ax^2-bx+c + x^3+ax^2+bx+c \rightarrow 2ax^2+2c=0 \rightarrow ax^2+c=0 \rightarrow a=0 ; c=0$

Substituindo em $a+b+c= -1$, $b=-1$

$P(2) = 2^3 - 1.2 = 8-2 = 6$

**07. Resposta: E.**

$P(x) = Q(x)(x - 2) + 4$; $Q(x) = Q1(x)(x - 6) + 1$

$P(x) = (Q1(x)(x - 6) + 1)(x - 2) + 4$

$P(x) = Q1(x)(x^2 - 8x + 12) + x - 2 + 4$

$P(x) = Q1(x)(x^2 - 8x + 12) + (x + 2)$

**$R(x) = x + 2$**

**08. Resposta: C.**

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 \;|\; x^2 - 1$

$0 \;|\; x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = \mathbf{(x + 1)^2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

**09. Resposta: E.**

$P(x) = (x - 3)^3 \cdot Q(x) + R(x)$

$P(0) = -27 \cdot Q(0) = 27 \Longrightarrow Q(0) = -1$

$P(2) = -1 \cdot Q(2) = -1 \Rightarrow Q(2) = 1$

$P(5) = ?$

$Q(x) = ax + b$

$Q(0) = b = -1$

$Q(2) = 2a - 1 = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow Q(x) = x - 1$

$P(5) = (5 - 3)3 \cdot Q(5) \rightarrow P(5) = 8 \cdot (5 - 1) = 32$

**10. Resposta: B.**

Resolução:

$x3 - 8x2 + kx - m \;|\; x2 - x - 2$

$-x3 + x2 + 2x \;|\; x - 7$

$-7x^2 + (2+k)x - m$

$+7x^2 + 7x - 14$

$(2+k-7)x - (14+m) \rightarrow 2+k-7 = 0 \rightarrow k=5$

$-14-m=0 \rightarrow m= -14$

## MÁXIMO DIVISOR COMUM DE UM POLINÔMIO

Um máximo divisor comum de um grupo de dois ou mais polinômios não nulos, de coeficientes racionais, P1(x), P2(x), ... , Pm(x) é um polinômio de maior grau M(x) que divide todos os polinômios P1(x), P2(x), ... , Pm(x) .

**M(x) também deve só conter coeficientes racionais.**

Saiba: $P(x) = 2x^3 + x - 1$ é um polinômio de coeficientes racionais porque todos os coeficientes das potências $x^n$ ($n = 1, 2, 3, ...$) e o termo independente são números racionais. O grau deste polinômio é 3.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

| potência | $x^3$ | $x^2$ | $x^1$ | termo independente |
|---|---|---|---|---|
| coeficiente | 2 | 0 | 1 | −1 |

Saiba:
P(x) = 140x5 + √2 x3 – x2 + 3 NÃO é um polinômio de coeficientes racionais porque há pelo menos um coeficiente das potências xn (n = 1, 2, 3, ...) ou do termo independente que não é um número racional. No caso, o coeficiente irracional (que é um número real não racional) é √2 da potência cúbica. Preste atenção: P(x) não deixa de ser um polinômio! Apenas não é um polinômio racional.

Um polinômio D(x) divide um polinômio A(x) - não nulo - se existe um polinômio Q(x) tal que

**A(x) ≡ Q(x)D(x)**

or exemplo, D(x) = x + 2 divide A(x) = $x^3 + 2x^2 – 9x – 18$ pois existe um Q(x) = $x^2 – 9$ tal que A(x) ≡ Q(x)D(x). Veja:

$x^3 + 2x^2 – 9x – 18 \equiv (x + 2)(x2 – 9)$

Denotamos D(x) | A(x) e lemos: D(x) divide A(x) ou A(x) é divisível por D(x). Q(x) é o quociente.

**Procedimento**

Obtendo um mdc usando FATORAÇÃO:
Obter a fatoração de P1, P2, etc... Isso quer dizer, decomponha P1, P2, etc... em fatores com menor grau possível onde os fatores ainda sejam polinômios racionais.

1) Um mdc entre os polinômios é igual produto dos fatores comuns dos polinômios.
2) Caso não existam fatores comuns, o maior divisor comum é 1, logo o mdc(P1, P2, ...) = 1

**Exemplos:**

1) Obter um mdc entre ($x^2 – 2x + 1$) e (x2 – 1)
$x^2– 2x + 1 = (x – 1)( x – 1)$
$x^2– 1 = (x – 1)(x + 1)$
Um mdc é (x – 1) já que é fator comum entre os polinômios $x^2– 2x + 1$ e x2– 1.

2) Obter um mdc entre ($x^2 – 2x + 1$) e ($5x^2 – 5$)
$x^2– 2x + 1 = (x – 1)( x – 1)$
$5x^2– 5 = 5(x – 1)(x + 1)$
Um mdc é (x – 1) já que é fator comum entre os polinômios $x^2– 2x + 1$ e $5x^2– 5$ .

Entretanto, em se tratando de polinômios, temos sempre a EXISTÊNCIA de mdc (entre polinômios não nulos); e isso é garantido, uma vez que 1 divide qualquer polinômio. Mas não temos a unicidade de mdc para polinômios.

Pela definição, para que um polinômio M(x) seja mdc entre A(x) e B(x) - não nulos - basta que M(x) divida A(x) e B(x).

Perceba, por exemplo, que A(x) = $x^2 – 2x + 1$ e B(x) = $x^2 – 1$ são ambos divisíveis por x – 1, 2x – 2, 3x – 3, – 4x + 4, ... enfim! A(x) e B(x) são divisíveis por qualquer polinômio da forma a(x – 1) onde a é uma constante não nula.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

$$A(x) \equiv Q(x)[a(x-1)] \qquad B(x) \equiv Q_1(x)[a(x-1)]$$
$$A(x) \equiv \mathbf{a \cdot Q(x)} \cdot (x-1) \qquad B(x) \equiv \mathbf{a \cdot Q_1(x)} \cdot (x-1)$$
$$A(x) \equiv \mathbf{Q_2(x)} \cdot (x-1) \qquad B(x) \equiv \mathbf{Q_3(x)} \cdot (x-1)$$

Pelo Teorema de D'Alembert, (x – 1) | A(x) assim como (x – 1) | B(x), pois A(1) = B(1) = 0.

**Cardica** ➔ O MDC entre polinômios não é único.

Mas se P é um mdc entre os polinômios considerados, todo mdc entre eles pode ser escrito como a·P (a é uma constante não nula).

Não se esqueça que para ser mdc é OBRIGATÓRIO que ele seja o produto de TODOS os divisores dos polinômios dados (desconsiderando as constantes multiplicativas). O grau do mdc é único



## 17) Equações Polinomiais: - Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema da decomposição, Raízes imaginárias, raízes racionais, relações de Girard, Teorema de Bolzano.

### EQUAÇÕES ALGÉBRICAS OU POLINOMIAIS

Sendo P(x) um polinômio em C, chama-se equação algébrica à igualdade P(x) = 0.

Portanto, as raízes da equação algébrica, são as mesmas do polinômio P(x). O grau do polinômio, será também o grau da equação.

**Exemplo:** $3x^4 - 2x^3 + x + 1 = 0$ é uma equação do 4º grau

**Propriedades importantes**:

- Toda equação algébrica de grau n possui exatamente n raízes.

Exemplo: a equação $x^3 - x = 0$ possui 3 raízes a saber: x = 0 ou x = 1 ou x = -1. Dizemos então que o conjunto verdade ou conjunto solução da equação dada é S = {0, 1, -1}.

- Se b for raiz de P(x) = 0 , então P(x) é divisível por (x – b) . Esta propriedade é muito importante para abaixar o grau de uma equação, o que se consegue dividindo P(x) por x - b, aplicando Briot-Ruffini.

- Se o número complexo (a + bi) for raiz de P(x) = 0 , então o conjugado (a – bi) também será raiz .

Exemplo: qual o grau mínimo da equação P(x) = 0, sabendo-se que três de suas raízes são os números 5, 3 + 2i e 4 - 3i. Ora, pela propriedade P3, os complexos conjugados 3 - 2i e 4 + 3i são também raízes. Logo, por P1, concluímos que o grau mínimo de P(x) é igual a 5, ou seja, P(x) possui no mínimo 5 raízes.

- Se a equação P(x) = 0 possuir k raízes iguais a m então dizemos que m é uma raiz de grau de multiplicidade k.

Exemplo: a equação $(x - 4)^{10} = 0$ possui 10 raízes iguais a 4. Portanto 4 é raiz décupla ou de multiplicidade 10.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

Outro exemplo: a equação $x^3 = 0$, possui três raízes iguais a 0 ou seja três raízes nulas com ordem de multiplicidade 3 (raízes triplas).

A equação do segundo grau $x^2 - 8x + 16 = 0$, possui duas raízes reais iguais a 4, ($x' = x'' = 4$). Dizemos então que 4 é uma raiz dupla ou de ordem de multiplicidade dois.

- Se a soma dos coeficientes de uma equação algébrica P(x) = 0 for nula, então a unidade é raiz da equação (1 é raiz).

Exemplo: 1 é raiz de $40x^5 - 10x^3 + 10x - 40 = 0$, pois a soma dos coeficientes é igual a zero, isto é, 40 – 10 + 10 – 40 = 0.

- Toda equação de termo independente nulo, admite um número de raízes nulas igual ao menor expoente da variável.

Exemplo: a equação $3x^5 + 4x^2 = 0$ possui cinco raízes, das quais duas são nulas. A equação $x^{100} + x^{12} = 0$, possui 100 raízes, das quais 12 são nulas.

- Se $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , ... , $x_n$ são raízes da equação $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$ , então ela pode ser escrita na forma fatorada : $a_0(x - x^1) . (x - x^2) . (x - x^3) . ... . (x - x^n) = 0$.

Exemplo: Se - 1 , 2 e 53 são as raízes de uma equação do 3º grau , então podemos escrever: $(x + 1) . (x - 2) . (x - 53) = 0$ , que desenvolvida fica : $x^3 - 54x^2 + 51x + 106 = 0$ .

**Relações de Girard - Albert Girard (1590-1633).**

São as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

Para uma equação do 2º grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$ , já conhecemos as seguintes relações entre os coeficientes e as raízes $x_1$ e $x_2$ : $x_2 + x_2 = - b/a$ e $x . x = c/a$ .

Para uma equação do 3º grau, da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , sendo $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ as raízes , temos as seguintes relações de Girard : $x_1 + x_2 + x_3 = - b/a$; $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = c/a$ e $x_1.x_2.x_3 = - d/a$

Para uma equação do 4º grau, da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , sendo as raízes iguais a $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ e $x_4$ , temos as seguintes relações de Girard : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b/a$; $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = c/a$; $x_1.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_3 + x_1.x_3.x_4 + x_2.x_3.x_4 = - d/a$ e $x_1.x_2.x_3.x_4 = e/a$

**NOTA:** observe que os sinais se alternam a partir de ( - ) , tornando fácil a memorização das fórmulas.

**Teorema das Raízes Racionais**

O Teorema das raízes racionais é um recurso para a determinação de raízes de equações algébricas. Segundo o teorema, se o número racional, com e primos entre si (ou seja, é uma fração irredutível), é uma raiz da equação polinomial com coeficientes inteiros então é divisor de e é divisor de.

**Exemplo:**

Queremos saber se a equação $x^3 - x^2 + x - 6 = 0$ possui raízes racionais: p deve ser divisor de 6, portanto: ±6, ±3, ±2, ±1; q deve ser divisor de 1, portanto: ±1; Portanto, os possíveis valores da fração são p/q: ±6, ±3, ±2 e ±1. Substituindo-se esses valores na equação, descobrimos que 2 é uma de suas raízes. Como esse polinômio é de grau 3 (x3 ) é necessário descobrir apenas uma raiz para determinar as demais. Se fosse de grau 4 (x4 ) precisaríamos descobrir duas raízes. As demais raízes podem facilmente ser encontradas utilizando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini e a fórmula de Bhaskara.

## Questões

**01.** Uma equação algébrica com coeficientes reais admite como raízes os números complexos 2 + i, 1 – i e 0. Podemos afirmar que o grau dessa equação é, necessariamente:

(A) par.

(B) ímpar.



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

(C) igual a três.
(D) menor ou igual a seis.
(E) maior ou igual a cinco.

**02**. Resolver a equação $x^3 – 5x^2 + 8x – 6 = 0$, sabendo-se que $1 + i$ é uma de suas raízes.

**03**. Sendo $4 + \sqrt{2}i$ e $\sqrt{5}$ raízes do polinômio $P(x) = 2x^5 – 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 – 420x + 540$, então a soma dos quadrados das raízes reais desse polinômio é:
(A) 17
(B) 23
(C) 19
(D) 25
(E) 21

**04**.Entre as frações

$\frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{10}, \frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{11}{13}, \frac{9}{15}$ e $\frac{13}{6}$ podem ser raízes da equação $16x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 45 = 0$, com **a, b, c, d** e **e** números inteiros, as frações:

a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$
b) $\frac{9}{15}$ e $\frac{7}{8}$
c) $\frac{3}{7}$ e $\frac{11}{13}$
d) $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{12}$
e) $\frac{13}{6}$ e $\frac{5}{11}$

**05.** Obter todas as raízes, reais e não reais, da equação: $x^3 – 4x^2 + x + 26 = 0$.

**06. (ITA-SP)** Se $\alpha, \beta, \gamma$ são raízes da equação $x^3 – 2x^2 + 3x – 4 = 0$, então, o valor de $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ é:
(A) $\frac{1}{4}$
(B) $-\frac{1}{4}$
(C) $\frac{3}{4}$
(D) $-\frac{3}{2}$
(E) $\frac{3}{2}$

**07. (Fuvest-SP)** Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 – x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então, o valor de k é:
(A) – 8
(B) – 4
(C) 0
(D) 4
(E) 8

**08. (UFSCar-SP)** Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 – 7x^2 + 14x – 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que:
(A) são todas iguais e não nulas.
(B) somente uma raiz é nula.
(C) as raízes constituem uma progressão geométrica.
(D) as raízes constituem uma progressão aritmética.
(E) nenhuma raiz é real.


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

## Respostas

**01.Resposta: E.**

Como a equação tem coeficientes reais, além das raízes 2 + i, 1 – i e zero, ela admite também 2 – i e 1 + i como raízes. Logo, o menor grau possível para essa equação é 5.

**02.** Sendo a equação de coeficientes reais, se 1 + i é uma raiz, então 1 – i também será raiz desta equação. Assim, já temos duas das três raízes da equação. Pelas relações de Girard, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$, ou seja, $(1+i) + (1-i) + x_3 = 5$

$\therefore x_3 = 3$

$V = \{1 - i, 1 + i, 3\}$

**03.Resposta: C.**

Sendo a equação de coeficientes inteiros, se $4 + \sqrt{2}i$ e $\sqrt{5}$ são raízes, então $4 - \sqrt{2}i$ e $-\sqrt{5}$ também são raízes desta equação. Assim, já temos quatro das cinco raízes da equação. Pelas relações de Girard, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{a_1}{a_0}$, ou seja,

$$\left(4+\sqrt{2}i\right)+\left(\sqrt{5}\right)+\left(4-\sqrt{2}i\right)+\left(-\sqrt{5}\right)+x_5 = 11$$

$\therefore x = 3$

As raízes reais são: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ e 3.

A soma dos quadrados das raízes reais é:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2+3^2 = 19$$

**04.Resposta: A.**

Em todas as alternativas, exceto a primeira, em pelo menos uma das frações ou o numerador não é divisor inteiro de 45 ou o denominador não é divisor inteiro de 16.

**05.** $P \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26\}$ e $q \in \{\pm 1\}$

Assim, $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26\}$ (possíveis raízes racionais).

Para x = – 2, temos:

| | 1 | – 4 | 1 | 26 |
|---|---|---|---|---|
| – 2 | 1 | – 6 | 13 | 0 |

Portanto, – 2 é uma raiz

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

$V = \{– 2, 3 + 2i, 3 – 2i\}$

**06.Resposta: C.**

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma} = \frac{\frac{a_2}{a_0}}{\frac{-a_3}{a_0}} = \frac{a_2}{-a_3} = \frac{3}{4}$$



1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**07. Resposta: A.**

$2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$

*Raízes:* $x_1, x_2 \text{ e } x_3$

*Informação:* $x_1 \cdot x_2 = 1$

*Girard:* $\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{1} \cdot x_3 = \frac{-4}{2} = -2$

$\therefore x_3 = -2$

$-2$ *é raiz* $\Rightarrow P(-2) = 0$

$2(-2)^3 - (-2)^2 - 2k + 4 = 0$

$-16 - 4 - 2k + 4 = 0$

$-2k - 16 = 0$

$k = -8$

**08.Resposta: C.**

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

Raízes: $x_1$, $x_2$ e $x_3$

Informação: $x_1 + x_2 = 5$

Girard: $x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow 5 + x_3 = 7 \Rightarrow x_3 = 2$

Como 2 é raiz, por Briot-Ruffini, temos

| 2 | 1 | −7 | 14 | −8 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 4 | 0 |

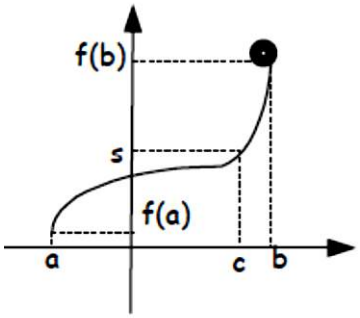
$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 1$ ou $x = 4$

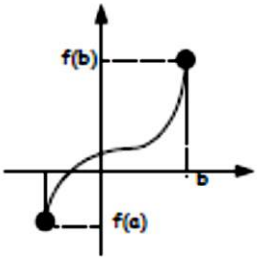
$S = \{1, 2, 4\}$

**TEOREMA DE BOLZANO-CAUCHY (OU TEOREMA DO VALOR INTERMÉDIO)**

Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo fechado [a,b].
Se f(a) ≤ s ≤ f(b) então existe pelo menos um c ϵ [a,b] tal que f(c) = s.




**Caso particular:** usa-se para provar que uma função tem zeros.
Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a,b].
Se f(a) x f(b) < 0 então a função tem pelo menos um zero em ]a,b[.





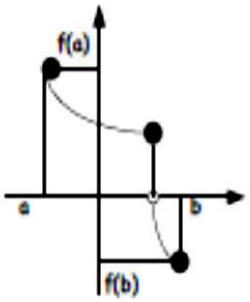
1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA

**Notas:**

- Sempre que se resolva um exercício e se utilize o Teorema é necessário mencionar a continuidade;

- O Teorema apenas confirma que uma função tem zeros. Não se pode usar para provar que a função não tem zeros, mesmo que f(a) x f(b) > 0.

**Exemplo:**




f(a) x f(b) < 0 e f(x) não tem zeros em ]a,b[

Este exemplo não contradiz o Teorema de Bolzano porque f não é contínua em [a,b].

**Exercícios exemplificativos:**

| | |
|---|---|
| $f(x)=x^3+2x+1$<br>**a)** $f(x)=0$ será possível em $]-1, 4[$ ?<br>***R:*** $f(-1)=-2$; $f(4)=73$. *Como a função é contínua, pois trata-se de uma função polinomial, e como* $f(-1)\times f(4)<0$, *pelo Teorema de Bolzano podemos afirmar que existe pelo menos um zero em* $]-1, 4[$. *Assim* $f(x)=0$ *é possível nesse intervalo.*<br><br>**b)** Terá $f(x)$ zeros em $\mathbb{R}$?<br>***R:*** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .<br>*Como* $\lim_{x\to-\infty} f(x)\times \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\ (<0)$ *e como a função é contínua, pelo Teorema de Bolzano podemos afirmar que* $f(x)$ *tem zeros em* $\mathbb{R}$. | $g(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$<br>$g(-3)=5$ e $g(3)=1$<br>no intervalo $[-3, 3]$<br><br>Podemos afirmar:<br>**(A)** *g* tem pelo menos um zero.<br>***R:*** Falso. Nada podemos concluir porque $g(-3)\times g(3)>0$<br><br>**(B)** *g* não tem zeros.<br>***R:*** Falso. Nada podemos concluir porque $g(-3)\times g(3)>0$.<br><br>**(C)** $g(x)=-1$ é impossível.<br>*R*: Falso. Nada podemos concluir porque só conhecemos o comportamento da função em $g(-3)$ e $g(3)$. |

## Referências

*GONÇALVES, Antônio R. - Matemática para Cursos de Graduação – Contexto e Aplicações*
*IEZZI, Gelson - Fundamentos da Matemática Elementar – Vol. 01 – Conjuntos e Funções*
*IEZZI, Gelson – Matemática Volume Único*
*BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval – Matemática – Volume 1 – Versão beta – Editora Moderna*
*GIOVANNI & BONJORNO – Matemática Completa – Volume 3 - FTD*
*http://www.brasilescola.com*
*www.somatematica.com.br*
*http://www.matematicamuitofacil.com*
*http://www.colegioweb.com.br*
*http://www.uff.brl*


1111017 E-book gerado especialmente para LEANDRO GUIMARAES DE SANTANA