FATORIAL

Definimos como o fatorial de n (simbolizado por n!) ao produto do n primeiros números inteiros positivos. Caso n = 0, definiremos 0! =1. Dessa forma, teremos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplo:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

PERMUTAÇÕES



(Disponível em: http://ansiamente.com/2012/03/as-pessoas-ainda-furam-fila/. Acesso em: outubro de 2016)

Permutar elementos significa trocá-los de posição. A maneira de calcular as possibilidades de fazer isso, vai depender da natureza dos elementos a serem permutados. E é isso o que faremos a seguir.

Permutações simples

Uma permutação de **n** objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos $\mathbf{P_n}$ o número das permutações simples dos n objetos, então:

$$P_n = n!$$

De fato, imaginemos que dispomos de n objetos distintos para serem colocados em fila, ocupando **n** posições. Pelo Princípio Multiplicativo, temos **n** objetos para ocupar a 1ª posição. Ocupada a 1ª posição com um objeto, a 2ª posição pode ser ocupada por qualquer um dos **n – 1** objetos restantes. Daí, ocupada a 2ª posição, a terceira posição pode ser ocupada por qualquer um dos **n – 2** objetos restantes. Repetindo esse raciocínio até o último objeto, restará para ele a última posição da fila. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, teremos:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ que é exatamente o mesmo que escrever n!

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. De quantas maneiras pode-se colocar 4 pessoas em fila?

Resolução:

Note que, temos 4 pessoas que podem ocupar o 1º lugar da fila. Daí, colocada a primeira pessoa na fila, restam 3 pessoas que podem ocupar o 2º lugar da fila. Em seguida, colocada a 2ª pessoa, agora restam duas pessoas que podem ocupar o 3º lugar da fila. E por fim, colocada a segunda pessoa na fila, sobra uma pessoa para ocupar a última posição. Pelo Princípio Multiplicativo, teremos

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

ARRANJOS

No estudo das Permutações trabalhamos os casos em que trocamos de posição todos os elementos de uma sequência de objetos quaisquer. Um Arranjo será, em geral, uma permutação de apenas uma parte dos objetos dados, onde a ordem dos mesmos também influencia na disposição dos elementos. Note que, quando temos um arranjo em que estamos interessados na troca de posição de todos os elementos, esse arranjo pode ser encarado como uma permutação. O que faremos a seguir, é analisar os diferentes tipos de arranjos.

Arranjos simples

Considere um conjunto com **n** elementos distintos. Qualquer **sequência** de **p** desses elementos (todos distintos) é chamada de **Arranjo Simples** ($0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{n}$, com **n** e **p** naturais). Dizemos arranjo simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, e simbolizamos por $A_{n,p}$.

Esse arranjo simples pode ser calculado da seguinte forma:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

De fato, suponha que dispomos de n objetos distintos, e escolheremos p desses objetos para serem colocados em uma fila, com p posições. Dessa forma a fila terá p objetos. Pelo Princípio Multiplicativo, temos n objetos para ocupar a 1ª posição. Ocupada a 1ª posição com um objeto, a 2ª posição pode ser ocupada por qualquer um dos n-1 objetos restantes. Daí, ocupada a 2ª posição, a terceira posição pode ser ocupada por qualquer um dos n-2 objetos restantes. Repetindo esse raciocínio até a posição de número p, teremos para ela n – p + 1 objetos disponíveis para ocupá-la.

Pelo Princípio Multiplicativo, teremos

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o segundo membro dessa igualdade por (n – p)!, temos.

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

É importante enfatizar que nos problemas que envolvem a ferramenta do arranjo, a ordem dos termos agrupados importa, uma vez que uma sequência será diferente de uma outra se seus respectivos termos estiverem ordenados de forma distinta.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números com algarismos distintos, superiores a 100 e inferiores a 1.000, podemos formar?

Resolução:

O problema solicita que encontremos todos os números com três algarismos distintos uma vez que todos os números maiores que 100 e menores que 1.000 têm três dígitos. Dessa forma, temos cinco algarismos disponíveis e usaremos três deles para formar números de três algarismos distintos. A solução do problema será o arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3. Ou seja,

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = 5\cdot4\cdot3 = 60$$

$$\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3} = 60$$

- 3: Existem 3 possíveis escolhas para a terceira decisão, já que dois dos elementos do conjunto N foram escolhidos
- 4: Existem 4 possíveis escolhas para a segunda decisão, já que um dos elementos do conjunto N foi escolhido.
- 5: Existem 5 possíveis escolhas para a primeira decisão.

É muito importante notar que, todos os problemas de arranjo simples poderão ser resolvidos usando o Princípio Multiplicativo, e é o que sempre faremos aqui.

Arranjos com repetição

Considere um conjunto com n elementos distintos. Qualquer sequência de p desses elementos é chamada de Arranjo com repetição (0 ≤ p ≤ n, com n e p naturais). Note que os p elementos podem ser distintos ou não, isto é, pode haver elementos repetidos. Daí o nome, arranjo com repetição.

Dizemos arranjo com repetição de n elementos tomados p a p, e simbolizamos por $AR_{n,p}$.

Esse arranjo com repetição pode ser calculado da seguinte forma:

$$AR_{n,p} = n^p$$

De fato, suponha que dispomos de **n** objetos distintos, e escolheremos **p** desses objetos para serem colocados em uma fila, com **p** posições. Dessa forma a fila terá **p** objetos. Pelo Princípio Multiplicativo, temos **n** objetos para ocupar a 1ª posição. Ocupada a 1ª posição com um objeto, como os objetos na fila podem ser repetidos, para 2ª posição ainda temos **n** objetos disponíveis. Ocupada a 1ª posição com um objeto, como os objetos na fila podem ser repetidos, para 2ª posição ainda temos **n** objetos disponíveis. Repetindo esse raciocínio até a última posição, que é a posição de número **p**, como os objetos podem ser repetidos, ainda teremos **n** objetos disponíveis para essa posição. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, teremos.

$$A_{n,p} = \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{p \text{ vezes}}$$

$$A_{n,p} = n^p$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números, superiores a 100 e inferiores a 1.000 podemos formar?

Resolução:

O problema solicita que encontremos todos os números com três algarismos (distintos ou não) uma vez que, todos os números maiores que 100 e menores que 1.000 têm três dígitos. Assim, temos 5 elementos e precisamos escolher 3 para formar números, onde os algarismos podem ser repetidos ou não. Dessa forma, a solução do problema será o arranjo com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3. Ou seja,

$$AR_{5,3} = \underbrace{5\cdot5\cdot5}_{3 \text{ vezes}} = 5^3 = 125$$

Note que, assim como foi feito no arranjo simples, podemos também no arranjo com repetição resolver qualquer problema usando o Princípio Multiplicativo, da seguinte forma:

$$\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5} = 125$$

- 5: Existem 5 possíveis escolhas para a terceira decisão.
- 5: Existem 5 possíveis escolhas para a segunda decisão.
- 5: Existem 5 possíveis escolhas para a primeira decisão.

Como foi dito no arranjo simples, é muito importante notar que todos os problemas de arranjo com repetição também poderão ser resolvidos usando o Princípio Multiplicativo. Dessa forma, vale ressaltar que qualquer problema de arranjo, não importa se for simples ou com repetição, sempre é possível se resolver usando o Princípio Multiplicativo. E é o que sempre faremos aqui.

COMBINAÇÕES

Assim como foi feito no estudo dos arranjos, iremos separar as combinações em dois casos. As combinações simples e as combinações com repetição (também chamadas de combinações completas).

COMBINAÇÕES SIMPLES

Considere um conjunto com **n** elementos distintos. Qualquer **subconjunto** formado por de **p** desses elementos (todos distintos) é chamado de **Combinação Simples** (0 ≤ **p** ≤ **n**, com **n** e **p** naturais).

Dizemos combinação simples de n elementos tomados **p** a **p**, e simbolizamos por $C_{n,p}$.

Essa combinação simples pode ser calculada da seguinte forma:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

De fato, considere um conjunto com n elementos distintos. Seja $C_{n,p}$ é a quantidade de subconjuntos com p elementos distintos que podemos formar. Note que, em cada subconjunto formado, a ordem não importa. Se a ordem importasse, teríamos um arranjo simples desses elementos, que é $A_{n,p}$. Assim,

$$A_{n,p} = p! \cdot C_{n,p}$$

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

É importante enfatizar que, nos problemas que envolvem a ferramenta da combinação, a ordem dos termos agrupados não importa, uma vez que um subconjunto A será igual a um outro subconjunto B se seus respectivos elementos forem os mesmos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

04. Uma escola quer organizar um torneio esportivo com 10 equipes, de forma que cada equipe jogue exatamente uma vez com cada uma das outras. Quantos jogos terá o torneio?

Resolução:

Considere E = {E_1, E_2, E_3, ... , E_{10}} o conjunto dos times do referido torneio. Note que, resolver esse problema é determinar o número de subconjuntos com dois elementos que podemos formar a partir dos elementos do conjunto E. Teremos, portanto:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 1\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$$

Logo, teremos 45 subconjuntos, ou seja, 45 jogos nesse torneio.

EXERCÍCIOS PROTREINO

01. Simplifique a expressão abaixo e mostre que y é um quadrado perfeito:

$$y = \frac{(n+2)! + (n+1)\cdot(n-1)!}{(n+1)\cdot(n-1)!}$$

02. Uma bandeira é formada de 8 listras, que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. Determine de quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor.

03. Calcule quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3 ,4, 5, 6 e 7.

04. Em um grupo de 10 pessoas, determine quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas, com as disponíveis.

05. Com relação a palavra CONQUISTA, determine:

a) o número de anagramas.
b) o número de anagramas que começam por C.
c) o número de anagramas que começam por C e terminam com A.
d) o número de anagramas que começam por vogal.
e) o número de anagramas que têm as vogais juntas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUCCAMP) Admita que certa cidade brasileira tenha 8 canais de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste os canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste os canais. Sendo assim, y - x é igual a

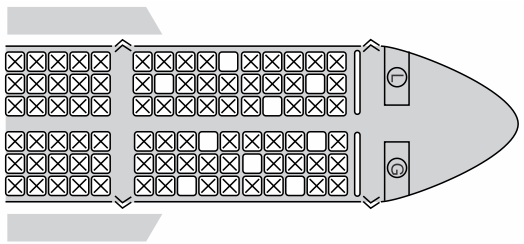
a) 112 b) 280 c) 224 d) 56 e) 140

02. (UEMG) Em uma apresentação na escola, oito amigos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila.

Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos:

a) 8! b) 5! · 3! c) 6! · 3! d) 8! · 3!

03. (ENEM) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!\times 2!}$ c) 7! d) $\frac{5!}{2!}\times 4!$ e) $\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}$

04. (UECE) Se os conjuntos X e Y possuem, respectivamente, cinco e oito elementos, quantas funções, f : X → Y, injetivas e distintas, podem ser construídas?

a) 6680 b) 6700 c) 6720 d) 6740

05. (UERJ) Seis times de futebol disputaram um torneio no qual cada time jogou apenas uma vez contra cada adversário. A regra de pontuação consistia em marcar 0 ponto para o time perdedor, 3 pontos para o vencedor e, no caso de empate, 1 ponto para cada time. A tabela mostra a pontuação final do torneio.

Times	A	B	C	D	E	F
Pontos	9	6	4	2	6	13

O número de empates nesse torneio foi igual a:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

06. (UEG) Um ovo de brinquedo contém no seu interior duas figurinhas distintas, um bonequinho e um docinho. Sabe-se que na produção desse brinquedo, há disponível para escolha 20 figurinhas, 10 bonequinhos e 4 docinhos, todos distintos. O número de maneiras que se pode compor o interior desse ovo de brinquedo é

a) 15.200 b) 7.600 c) 3.800 d) 800 e) 400

07. (UECE) O número de cordas determinadas por 12 pontos distintos colocados sobre uma circunferência é

a) 54 b) 66 c) 72 d) 78

08. (UNIGRANRIO) Resolvendo a adição $C_{8,2} + C_{8,3} + C_{8,4} + C_{8,5} + C_{8,6} + C_{8,7} + C_{8,8}$ encontramos como resultado:

a) 64 b) 247 c) 256 d) 260 e) 264

09. (PUCSP) No vestiário de uma Academia de Ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa Academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

a) 14 b) 28 c) 48 d) 56 e) 112

10. (FAMEMA) Determinado curso universitário oferece aos alunos 7 disciplinas opcionais, entre elas as disciplinas A e B, que só poderão ser cursadas juntas. Todo aluno desse curso tem que escolher pelo menos uma e no máximo duas disciplinas opcionais por ano. Assim, o número de maneiras distintas de um aluno escolher uma ou mais de uma disciplina opcional para cursar é

a) 18 b) 13 c) 16 d) 11 e) 21

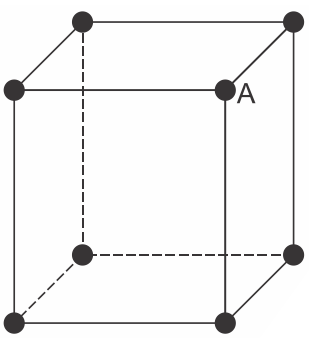
11. (FAMERP) Lucas possui 6 livros diferentes e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. O total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita é igual a

a) 1.040 b) 684 c) 980 d) 1.120 e) 364

12. (FUVEST) Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é

a) menor que 7%.
b) maior que 7%, mas menor que 10%.
c) maior que 10%, mas menor que 13%.
d) maior que 13%, mas menor que 16%.
e) maior que 16%.

13. (PUCRS) O número de triângulos que podem ser formados unindo o vértice A a dois dos demais vértices do paralelepípedo é



a) 15 b) 18 c) 21 d) 24 e) 27

14. (PUCRJ) Uma escola quer fazer um sorteio com as crianças. Então, distribui cartelas que têm cada uma 3 números distintos de 1 a 20. No dia da festa, trarão uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20 e serão retiradas (simultaneamente) três bolas. A criança que tiver a cartela com os três números ganhará uma viagem.

Quantas cartelas diferentes são possíveis?

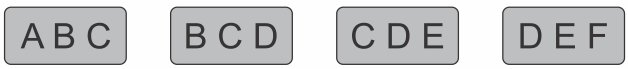
a) 1.140 b) 2.000 c) 6.840 d) 8.000 e) 4.400

15. (PUCRJ) Em uma sorveteria, há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos.

De quantas maneiras podemos montar uma casquinha, com dois sabores diferentes, nessa sorveteria?

a) 6 maneiras c) 8 maneiras e) 10 maneiras
b) 7 maneiras d) 9 maneiras

16. (ESPM) A senha bancária da dona Maria era 753213 seguida pelas letras D, D e B, nessa ordem. Acontece que ela só se lembrava da parte numérica, esquecendo-se completamente da sequência de letras. A caixa eletrônica apresentou os 4 botões mostrados na figura abaixo, que ela deveria pressionar exatamente 3 vezes, podendo repeti-los, um para cada letra da senha.



Se ela fizer as escolhas aleatoriamente, a probabilidade de acertar a senha será:

a) $\frac{9}{32}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{16}$

17. (FGV) Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a

a) 2.400
b) 2.444
c) 6.000
d) 6.600
e) 6.660

18. (PUCSP) A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, A, B, C e D, para um mesmo dia. Os pacientes A e B não podem ser agendados no período da manhã e o paciente C não pode ser agendado no período da tarde.

Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é

a) 72 c) 138
b) 126 d) 144

19. (FUVEST) Um lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso,

1. a família Sousa quer ocupar um mesmo banco;

2. Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.

Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros no lotação é igual a

a) 928 b) 1152 c) 1828 d) 2412 e) 3456

20. (PUCMG) Em um campeonato de dois turnos, do qual participam dez equipes, que jogam entre si uma vez a cada turno, o número total de jogos previstos é igual a:

a) 45 c) 105
b) 90 d) 115

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (UNESP) Está previsto que, a partir de 1º de janeiro de 2017, entrará em vigor um sistema único de emplacamento de veículos para todo o Mercosul, o que inclui o Brasil. As novas placas serão compostas por 4 letras e 3 algarismos.

Admita que no novo sistema possam ser usadas todas as 26 letras do alfabeto, incluindo repetições, e os 10 algarismos, também incluindo repetições. Admita ainda que, no novo sistema, cada carro do Mercosul tenha uma sequência diferente de letras e algarismos em qualquer ordem. Veja alguns exemplos das novas placas.



No novo sistema descrito, calcule o total de placas possíveis com o formato "Letra-Letra-Algarismo-Algarismo-Algarismo-Letra-Letra", nessa ordem. Em seguida, calcule o total geral de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa. Deixe suas respostas finais em notação de produto ou de fatorial.

02. (UNESP) Bianca está preparando saquinhos com balas e pirulitos para os convidados da festa de aniversário de sua filha. Cada saquinho irá conter 5 balas e 3 pirulitos, ou 3 balas e 4 pirulitos, já que ambas as combinações resultam no mesmo preço. Para fazer os saquinhos, ela dispõe de 7 sabores diferentes de balas (limão, menta, morango, framboesa, caramelo, canela e tutti-frutti) e 5 sabores diferentes de pirulito (chocolate, morango, uva, cereja e framboesa). Cada bala custou 25 centavos e cada pirulito custou X centavos, independentemente dos sabores.

a) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja balas de um mesmo sabor nem pirulitos de um mesmo sabor em cada saquinho? Qual o preço de cada pirulito?

b) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja sabores repetidos em cada saquinho?

03. (UNIFESP) Em uma classe de 16 alunos, todos são fluentes em português. Com relação à fluência em línguas estrangeiras, 2 são fluentes em francês e inglês, 6 são fluentes apenas em inglês e 3 são fluentes apenas em francês.

a) Dessa classe, quantos grupos compostos por 2 alunos podem ser formados sem alunos fluentes em francês?

b) Sorteando ao acaso 2 alunos dessa classe, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja fluente em inglês?

04. (FGVRJ) Na gaveta da cozinha, Maria tinha guardado duas notas de 10 reais, duas notas de 20 reais e duas notas de 50 reais. Durante a noite, no escuro, Francisco, o filho de Maria retirou ao acaso duas notas.

Determine a probabilidade de que Francisco tenha retirado menos de 50 reais.

05. (FGV) Em um quarto escuro, dez meias brancas e dez meias pretas estão em uma gaveta.

a) Uma pessoa, sem conseguir ver as cores das meias, quer retirar dois pares que combinem. Quantas meias deve retirar, no mínimo, para ter certeza de conseguir os pares desejados? Pares que combinem significa que cada par deve ter duas meias com a mesma cor.

b) Se ele pretende retirar somente dois pares, qual é a probabilidade de retirar um par de meias brancas e um par de meias pretas?

GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. B	05. B	09. D	13. C	17. E
02. C	06. B	10. C	14. A	18. D
03. A	07. B	11. D	15. A	19. E
04. C	08. B	12. B	16. A	20. B

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. $35 \cdot 26^4 \cdot 10^3$.

02.
a) 385 possibilidades de fazer um saquinho.
R$ 0,50 o preço de cada pirulito.
b) 130 saquinhos

03.
a) 55 grupos
b) $\frac{23}{30}$

04. 40%

05. $\frac{135}{323}$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES