17 TRIGONOMETRIA: ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos as operações entre arcos. Não podemos pensar, por exemplo, que o seno de 75° é igual à soma entre os senos de 30° e 45°, mesmo que 75° seja igual à soma 30° + 45°. Devemos estabelecer a relação correta entre esses arcos, que é embasada em fórmulas para que possamos descobrir tais valores.

SENO DA SOMA

Para calcular o seno da soma entre dois arcos, temos a relação a seguir:

$$\text{sen}(a + b) = (\text{sen } a).(\cos b) + (\text{sen } b).(\cos a)$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine o seno do ângulo de 75°.

$\text{sen } 75° = \text{sen } (30° + 45°)$

$\text{sen } 75° = (\text{sen } 30°).(\cos 45°) + (\text{sen } 45°).(\cos 30°)$

$$\text{sen } 75° = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

SENO DA DIFERENÇA

Para calcular o seno da diferença entre dois arcos, temos a relação a seguir:

$$\text{sen}(a - b) = (\text{sen } a).(\cos b) - (\text{sen } b).(\cos a)$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine o seno do ângulo de 15°.

$\text{sen } 15° = \text{sen } (60° - 45°)$

$\text{sen } 15° = (\text{sen } 60°).(\cos 45°) - (\text{sen } 45°).(\cos 60°)$

$$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

SENO DO ARCO DUPLO

Para calcular o seno do dobro de um arco, temos a relação a seguir:

$$\text{sen}(2 \cdot a) = 2 \cdot (\text{sen } a) \cdot (\cos a)$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine o seno do ângulo de 120°.

$\text{sen } 120° = \text{sen } (2 \cdot 60°)$

$\text{sen } 120° = 2 \cdot (\text{sen } 60°) \cdot (\cos 60°)$

$$\text{sen } 120° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

COSSENO DA SOMA

Para calcular o cosseno da soma entre dois arcos, temos a relação a seguir:

$$\cos(a + b) = (\cos a).(\cos b) - (\text{sen } a).(\text{sen } b)$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine o cosseno do ângulo de 75°.

$\cos 75° = \cos (45° + 30°)$

$\cos 75° = (\cos 45°).(\cos 30°) - (\text{sen } 45°).(\text{sen } 30°)$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

COSSENO DA DIFERENÇA:

Para calcular o cosseno da diferença entre dois arcos, temos a relação a seguir:

$$\cos(a - b) = (\cos a).(\cos b) + (\text{sen } a).(\text{sen } b)$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine o cosseno do ângulo de 15°.

$\cos 15° = \cos (45° - 30°)$

$\cos 15° = (\cos 45°).(\cos 30°) + (\text{sen } 45°).(\text{sen } 30°)$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

COSSENO DO ARCO DUPLO:

Para calcular o cosseno do dobro de um arco, temos a relação a seguir:

$$\cos(2.a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine o cosseno do ângulo de 120°.

$\cos 120° = \cos (2.60°)$

$\cos 120° = \cos^2 60° - \text{sen}^2 60°$

$$\cos 120° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\cos 120° = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\cos 120° = \frac{-2}{4}$$

$$\cos 120° = \frac{-1}{2}$$

TANGENTE DA SOMA:

Para calcular a tangente da soma entre dois arcos, temos a seguinte relação:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}a+\text{tg}b}{1-(\text{tg}a)\cdot(\text{tg}b)}$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine a tangente do ângulo de 75°:

$\text{tg}\,75° = \text{tg}(45° + 30°)$

$$\text{tg}\,75° = \frac{\text{tg}45°+\text{tg}30°}{1-(\text{tg}45°)\cdot(\text{tg}30°)}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})}\cdot\frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{12+6\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{tg}\,75° = 2+\sqrt{3}$$

TANGENTE DA DIFERENÇA:

Para calcular a tangente da diferença entre dois arcos, temos a seguinte relação:

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}a-\text{tg}b}{1+(\text{tg}a)\cdot(\text{tg}b)}$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine a tangente do ângulo de 15°:

$\text{tg}\,15° = \text{tg}(45° + 30°)$

$$\text{tg}\,15° = \frac{\text{tg}45°-\text{tg}30°}{1+(\text{tg}45°)\cdot(\text{tg}30°)}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1.\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9+3}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{12-6\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{tg}\,15° = 2-\sqrt{3}$$

TANGENTE DO ARCO DUPLO:

Para calcular a tangente do dobro de um arco, temos a seguinte relação:

$$\text{tg}(2\cdot x) = \frac{2\cdot(\text{tg}x)}{1-(\text{tg}x)^2}$$

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Determine a tangente do ângulo de 120°.

$\text{tg}\,120° = \text{tg}(2\cdot 60°)$

$$\text{tg}\,120° = \frac{2\cdot(\text{tg}60°)}{1-(\text{tg}60°)^2}$$

$$\text{tg}\,120° = \frac{2.\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}^2}$$

$$\text{tg}\,120° = \frac{2\sqrt{3}}{1-3}$$

$$\text{tg}\,120° = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$$

$$\text{tg}\,120° = -\sqrt{3}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (FATEC) Se x - y = 60°, então o valor de

$$(\text{sen}x + \text{sen}y)^2 + (\text{cos}x + \text{cos}y)^2$$

é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolução: D

Temos a seguinte expressão:

$E = (\text{sen}\,x + \text{sen}\,y)^2 + (\cos x + \cos y)^2$

$E = \text{sen}^2 x + 2\cdot(\text{sen}\,x)(\text{sen}\,y) + \text{sen}^2 y + \cos^2 x + 2.(\cos x)(\cos y) + \cos^2 y$

$E = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + (\text{sen}^2 y + \cos^2 y) + 2.[(\cos x)(\cos y) + (\text{sen}\,x)(\text{sen}\,y)]$

$E = 1 + 1 + 2.(\cos x - y)$

$E = 2 + 2.\cos 60°$

$$E = 2 + 2.\frac{1}{2}$$

$E = 2 + 1 \rightarrow \mathbf{E = 3}$

02. (PUC-RJ) Os ângulos a e b são tais que tg a = 1/3 e tg b = 1/2. O ângulo a + b é igual a:

a) arc tg 5/6
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 90°

Resolução: C

Teremos a seguinte tangente da soma dos arcos:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a.\text{tg}\,b} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \rightarrow \text{tg}(a+b) = 1 \rightarrow a + b = 45°$$

03. (UEL) A expressão cos [(3π/2) + x] é equivalente a

a) -sen x
b) -cos x
c) sen x.cos x
d) cos x
e) sen x

Resolução:E

Temos a seguinte expressão:

E = cos [(3π/2) + x]

$$E = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen}\,x$$

E = 0 · cos x – (-1) · sen x = 0 + sen x = **sen x (Alternativa E)**

ANOTAÇÕES