

ÁLGEBRA

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

PROGRAMA

Contenidos mínimos:

Matrices. Determinantes. Sistemas de Ecuaciones Lineales. Espacio Vectorial. Aplicaciones Económicas y Administrativas

Unidad 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Operaciones: suma y producto por un escalar. Producto interno. Propiedades. Ortogonalidad.

Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Plano.

Aplicaciones económicas

Unidad 2

Matrices. Clasificación de matrices. Operaciones con matrices. Propiedades. Determinantes: cálculo, propiedades. Matriz inversa. Cálculo y Propiedades. Rango de una matriz.

Ecuaciones matriciales.

Aplicaciones económicas. Matriz insumo-producto.

Unidad 3

Sistemas de ecuaciones lineales. Clasificación. Matriz asociada a un sistema. Métodos de resolución: Método de triangulación de Gauss y Gauss-Jordan, Método Matricial y Método de Cramer. Sistemas lineales homogéneos. Aplicaciones económicas de sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad 4

Espacios vectoriales: Definición Subespacios. Combinación lineal. Combinación lineal convexa. Sistemas de Generadores. Dependencia e Independencia lineal de vectores. Bases. Dimensión. Coordenadas de un vector respecto de una base
Aplicaciones económicas: Recta presupuestaria. Plano balance.

Unidad 5

Inecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$. Representación gráfica de las soluciones. Programación lineal. Método gráfico de resolución. Método Simplex.
Análisis de sensibilidad. Problema dual asociado.
Aplicaciones económicas

Bibliografía

- Fraquelli, A.D, Gache, A (2022). *Notas de Álgebra- Teórico Prácticas*. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas.
- http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/Fraquelli-Gache_Notas-Algebra-Teorico-Practicas.pdf
- Chiang, A. (2006) *Métodos fundamentales de economía matemática*. Mc Graw-Hill, México.
- Font de Malugani E. et al. (1999). *Algebra con aplicaciones a las Ciencias Económicas*. Buenos Aires, Argentina, Ediciones Macchi.
- Grossman S. S., (2008). *Algebra lineal (6a. ed.)*. México DF, México, McGraw-Hill Interamericana.
- Haeussler E.F. y Paul R.S., (2003). *Matemática para Administración y Economía*. México, Pearson Educación.
- Kolman B., Hill D.R., (2006). *Algebra Lineal*. México, Pearson Educación.
- Lay D.C., (2007). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. México, Pearson Educación.

UNIDAD TEMÁTICA 1VECTORES, RECTA Y PLANO

1) a) Representar en el plano los vectores: $\overrightarrow{OA} = (2;0)$, $\overrightarrow{OB} = (-1;0)$, $\overrightarrow{OC} = (2;-3)$, $\overrightarrow{OD} = (0;-2)$, $\overrightarrow{OE} = (-5;-1)$

b) Considerando los vectores anteriores, calcular las coordenadas de:

i. $-2\overrightarrow{OB}$

ii. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

iii. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$

iv. $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OC}$

c) Representar en el plano los vectores hallados en b)

2) Representar los siguientes conjuntos en el plano e indicar si los puntos dados pertenecen a ellos:

a) $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = -3\}$ $P = (-3;0)$ $Q = (7;-3)$

b) $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x = 5\}$ $P = (5;5)$ $Q = (5;3)$

c) $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = -1\}$ $P = (1;-1)$ $Q = (1;2)$

d) $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{3}x\}$ $P = (1;3)$ $Q = (3;1)$

3) Dados $\overrightarrow{OA} = (1;0;-2)$ $\overrightarrow{OB} = (2;1;3)$ $\overrightarrow{OC} = (-1;2;-3)$, calcular:

a) $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OB} - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$

d) $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$



4) Dados los vectores de $\mathfrak{R}^2$: $\vec{u} = (3; 2)$ y $\vec{v} = (1; 2)$

- a) Representarlos gráficamente
- b) Hallar $\vec{u} + \vec{v}$, siendo “+” la suma usual, tal que $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$
- c) Hallar $3\vec{u} + 2\vec{v}$ siendo “.” a multiplicación por un escalar usual, tal que $\alpha \cdot (a; b) = (\alpha a; \alpha b)$
- d) Representar gráficamente los vectores obtenidos en b) y c)

5) Escribir en forma explícita:

- a) El neutro para la suma en $\mathfrak{R}^3$:
- b) El inverso aditivo de $(1; 2; -3; 5) \in \mathfrak{R}^4$:
- c) El inverso aditivo del inverso aditivo de un vector $\vec{v} \in \mathfrak{R}^n$:
- d) El inverso aditivo del neutro para la suma en $\mathfrak{R}^n$:
- e) El vector $(1; 1; 1) + (3; 2; 2)$ en $\mathfrak{R}^3$:
- f) La propiedad conmutativa para la suma de vectores en $\mathfrak{R}^3$:
- g) La suma del inverso aditivo de $(1; 1)$ con 5 veces el vector $(4; 5)$ en $\mathfrak{R}^2$:
- h) El vector $3 \cdot (1; 1; 8) + 4 \cdot [(-2; 3; 0) + 5 \cdot (1; 0; 1)]$ en $\mathfrak{R}^3$:
- i) El vector de $\mathfrak{R}^3$ que sumado al inverso aditivo del vector $(1; -4; 6)$ da por resultado el vector $3 \cdot (3; 4; 2)$:

6) En cada caso representar geoméricamente el vector $\overrightarrow{PQ}$, hallar sus componentes y calcular su módulo o norma.

a) $P = (1; 2)$ $Q = (5; 5)$

b) $P = (10; 2)$ $Q = (-6; -1)$

c) $P = (3; -5)$ $Q = (4; 7)$



7) Calcular el producto escalar indicado y representar los vectores cuando se indique:

- a) $(2;3) \cdot (1;2)$ en $\mathbb{R}^2$, represente gráficamente los vectores.
- b) $(-2;3) \cdot (3;2)$ en $\mathbb{R}^2$, represente gráficamente los vectores.
- c) $(1;2;5) \cdot (-1;3;0)$ en $\mathbb{R}^3$.
- d) $(1;0;4;5) \cdot (0;2;0;0)$ en $\mathbb{R}^4$.
- e) $(19;32;7) \cdot (0;0;0)$ en $\mathbb{R}^3$.

8) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Indicar verdadero o falso, justificando:

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- b) $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0}$

9) Dados los vectores $(1;3)$ y $(-3;1)$ de $\mathbb{R}^2$

- a) Representarlos gráficamente. ¿Qué ángulo forman entre ellos?
- b) Verificar que su producto escalar es igual a 0 . ¿Cómo se llaman estos vectores?
- c) Hallar un vector $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x; y) \cdot (1;2) = 0$ y represéntelo gráficamente. ¿Es única la solución?



10) El valor de x , para que el vector opuesto al vector $\vec{v} = (4; -1; 5)$ sea ortogonal al vector $\vec{u} = (x; -2; 2)$ es:

a) $x = 4$

b) $x = 0$

c) $x = -3$

d) Ninguna de las anteriores

11) Determinar si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas:

a) $\vec{u} = (1; -3)$ $\vec{v} = (3; -1)$

b) $\vec{u} = (6; -4)$ $\vec{v} = (-3; 2)$

c) $\vec{u} = (1; 2; -3)$ $\vec{v} = (3; 0; 1)$

d) $\vec{u} = (-1; 1; 3)$ $\vec{v} = (2; -2; 4)$

12) Una empresa fábrica tres productos P_1, P_2 y P_3 cuyos costos de producción son **30 u.m**, **40 u.m** y **50 u.m** respectivamente, el número de unidades producidas para cada producto es **120, 140, 95**. Si se sabe que el vector de precios es $\vec{v}_p = (45; 50; 60)$.

Hallar el beneficio que puede obtener la empresa.

13) Un consumidor tiene un ingreso de **800 u.m** y lo destina a la compra de dos bienes **A** y **B**, cuyos precios unitarios son respectivamente $p_1 = 160 \text{ u.m}$ y $p_2 = 80 \text{ u.m}$.

a) Escribir el vector de precios y representarlo gráficamente.

b) Escribir la ecuación presupuestaria y grafique la recta de posibilidades de consumo.

a) ¿Cuál es la cantidad máxima de bienes **B** que el consumidor puede adquirir con su ingreso, sin adquirir ningún bien **A**?



14) El plano balance que contiene todos los presupuestos que tienen un gasto de **3000 u.m.** para la adquisición de tres bienes, escrito en forma

segmentaria es $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{15} + \frac{x_3}{10} = 1$

- a) Representarlo
- b) Escribir la ecuación presupuestaria
- c) Hallar el vector de precios

15) Sabiendo que:

- a) El vector de precios es un múltiplo escalar del vector **(6; 8; 7)**.
- b) Una de las posibilidades de consumo es $(x_1; x_2; x_3) = (40; 50; 30)$
- c) El ingreso es igual a **10.200 u.m.**

Hallar:

- a) La ecuación presupuestaria.
- b) El vector de precios.

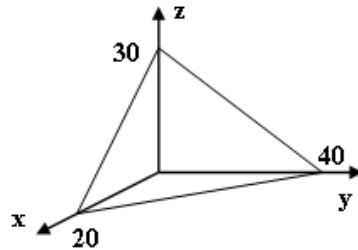
16) La ecuación del plano balance que contiene todos los presupuestos que tienen un gasto de **5000 u.m.** para la adquisición de tres bienes es

$\frac{x}{100} + \frac{y}{200} + \frac{z}{500} = 1$.

- a) Hallar el vector de precios.
- b) Calcular los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha(4; 6; 15)$ es una posibilidad de consumo.



- 17) El siguiente gráfico representa el plano balance del presupuesto de un consumidor cuyo ingreso es de **1200 u.m.** y lo destina en su totalidad a la compra de tres bienes



Si una posibilidad de consumo es **(5;6; α)**

El valor de α es:

a) $\alpha = \frac{16}{3}$

b) $\alpha = 18$

c) $\alpha = 7$

d) ninguno de los anteriores

- 18) Un individuo tiene un ingreso de **8000 u.m.** y lo destina en su totalidad a la compra de tres bienes. Si una posibilidad de consumo es **(20;50;50)** y el vector de precios es un múltiplo escalar de **(5;10;8)**, hallar:

- a) La ecuación presupuestaria.
- b) El vector de precios.
- c) Tres posibilidades de consumo diferentes de la dada.
- d) La cantidad máxima de cada uno de los bienes que puede adquirir.
- e) Una posibilidad de consumo sabiendo que el individuo adquiere **40** bienes del primer tipo. ¿Cuántas hay?
- f) Una posibilidad de consumo sabiendo que el individuo adquiere **40** bienes del primer tipo y **20** del tercer tipo. ¿Cuántas hay?



19) Un consumidor tiene un ingreso de **2000 u.m.** y lo destina en su totalidad a la compra de tres bienes. El vector de precios es $(10k^2; 2k^2 + 8; 5k^2 - 10)$ y una posibilidad de consumo es $(20; 50; 40)$.

- a) Hallar los valores de k .
- b) Determinar la ecuación presupuestaria y dos posibilidades de consumo distintas de la dada.
- c) Sabiendo que el consumidor adquiere **50%** más de unidades del primer bien que del segundo, indicar una posibilidad de consumo.

20) Un consumidor tiene un ingreso de **450 u.m.** y lo destina en su totalidad a la adquisición de dos bienes. Sabiendo que $(54; 90)$ y $(18; 180)$ son dos posibilidades de consumo; otra posibilidad de consumo es:

a) $(2; 5)$

b) $(200; 10)$

c) $(5; 2)$

d) $(10; 200)$

21) i) Dar una ecuación implícita de cada una de las rectas en el plano que verifica las siguientes condiciones. En los casos en que sea posible, deducir la ecuación segmentaria.

a) Tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada al origen -2 .

b) Pasa por los puntos $P = (1; -1)$ y $Q = (3; 2)$.

c) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $A = (1; -2)$.

d) Pasa por los puntos $P = (2; -3)$ y $Q = (3; -3)$.

e) Contiene a todos los puntos de abscisa 5 .

f) Es paralela a la recta de ecuación $y=3$ y pasa por $P = (2; -1)$

g) Tiene pendiente -5 y ordenada al origen -4 .

h) Es paralela a la recta de ecuación $y=3x+2$ y pasa por $P = (4; 2)$



ii. Dar una ecuación vectorial de cada una de las rectas en el plano que verifica las siguientes condiciones. En los casos en que sea posible, deducir la ecuación segmentaria.

- a) Tiene la dirección del vector $\vec{v} = (2; -1)$ y pasa por el origen de coordenadas.
- b) Tiene la dirección del vector de origen $A = (1; -2)$ y extremo $B = (1; -1)$ y pasa por el punto $Q = (3; 1)$
- c) Pasa por los puntos $A = (2; -3)$ y $B = (0; 1)$
- d) Tiene la dirección del vector $\vec{v} = (4; -5)$ y pasa por el origen de coordenadas.
- e) Tiene la dirección del vector de origen $A = (3; -2)$ y extremo $B = (2; -1)$ y pasa por el punto $Q = (5; 3)$
- f) Pasa por los puntos $A = (-2; -1)$ y $B = (1; 4)$

22) En cada caso, indicar si el punto P pertenece a la recta L

a) $L: X = \lambda(1; -2) + (3; 5)$ $P = (1; 1)$

b) $L: X = \alpha(1; 1) + (3; -2)$ $P = \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

c) $L: y = -2x + 3$ $P = (0; 3)$

d) $L: 4x - 3y = -2$ $P = (1; -2)$

23) i. En cada caso, hallar una ecuación vectorial de la recta que verifica las condiciones dadas:

- a) Tiene dirección $(2; -1; 3)$ y pasa por $A = (1; 2; -1)$.
- b) Es paralela a $L_1: X = \lambda(2; 3; -4) + (1; 5; 7)$ y pasa por el origen de coordenadas.
- c) Pasa por los puntos $A = (1; 5; 1)$ y $B = (-4; 2; 3)$.
- d) Tiene dirección $(6; 1; -3)$ y pasa por $A = (-2; 4; 1)$.
- e) Es paralela a $L_1: X = \lambda(1; -3; -5) + (6; 4; 2)$ y pasa por el origen de coordenadas
- f) Pasa por los puntos $A = (3; -5; 2)$ y $B = (3; -2; 1)$



ii. Indicar si los puntos $P = (1; 1; 1)$ y $Q = (5; 0; 5)$ pertenecen a la recta hallada en **a**).

iii. Mostrar dos puntos pertenecientes a la recta hallada en **b**)

24) i. En cada caso, hallar una ecuación del plano que verifica las condiciones dadas:

a) Pasa por el punto $P_0 = (1; 2; -1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-1; 2; 3)$.

b) Es paralelo al plano $\pi_1 : x + y + 1 = 0$ y pasa por $P_1 = (1; 1; -1)$

c) Pasa por el punto $P_0 = (2; -1; 0)$ y es perpendicular a la recta $L : X = \alpha(1; 0; -1)$

d) Pasa por el punto $P_0 = (3; 7; -4)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-9; 3; 1)$.

e) Es paralelo al plano $\pi_1 : 2x + 3y + 1 = 0$ y pasa por $P_1 = (2; -1; -1)$

f) Pasa por el punto $P_0 = (1; -2; 1)$ y es perpendicular a la recta $L : X = \alpha(3; 1; -1)$

ii. Hallar una ecuación vectorial de los planos obtenidos en **i**.

iii. Mostrar dos puntos pertenecientes al plano hallado en **a**) y **e**)

iv. Indicar si el origen de coordenadas y el punto $P = (1; 1; 1)$ pertenecen al plano hallado en **a**) y en **f**)

RESPUESTAS

1) a) a cargo del alumno

b) i. $-2\vec{OB} = (2; 0)$

ii. $\vec{OC} + \vec{OD} = (2; -5)$

iii. $\frac{1}{2}\vec{OE} - \vec{OA} = \left(-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

iv. $2\vec{OA} - \vec{OD} + 3\vec{OC} = (10; -7)$

c) a cargo del alumno

2) a) $P \notin A$ $Q \in A$ b) $P \in B$ $Q \in B$ c) $P \in C$ $Q \notin C$ d) $P \notin D$ $Q \in D$

3) a) $\vec{OA} - 2\vec{OB} = (-3; -2; -8)$

b) $\vec{OB} - 2(\vec{OA} + \vec{OC}) = (2; -3; 13)$

c) $\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} - \frac{1}{8}\vec{OC} = \left(\frac{9}{8}; 0; \frac{1}{8}\right)$

d) $2\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} = (-1; 1; -10)$

4) a) a cargo del alumno

b) (4; 4)

c) (11; 10)

d) a cargo del alumno

5)

a) $(0; 0; 0)$

b) $(-1; -2; 3; -5)$

c) $\vec{v} = (v_1; v_2; \dots; v_n)$

d) vector nulo

e) $(4; 3; 3)$

f) $(x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3) = (y_1; y_2; y_3) + (x_1; x_2; x_3)$

g) $(19; 24)$

h) $(15; 15; 44)$

i) $(10; 8; 12)$

6) a) $\vec{PQ} = (4; 3)$ $|\vec{PQ}| = 5$

b) $\vec{PQ} = (-16; -3)$ $|\vec{PQ}| = \sqrt{265}$

c) $\vec{PQ} = (1; 12)$ $|\vec{PQ}| = \sqrt{145}$

7) a) 8

b) 0

c) 5

d) 0

e) 0



- 8) a) V b) V c) F
- 9) a) recto b) vectores ortogonales c) $(-2; 1)$, no es única.
- 10) $x = -3$
- 11) a) ninguna b) paralelos c) ortogonales d) ninguna
- 12) $B = 4150 \text{ u.m}$
- 13) a) $p = (160; 80)$ b) $160x + 80y = 800$ c) 10
- 14) b) $500x_1 + 200x_2 + 300x_3 = 3000$ c) $p = (500; 200; 300)$
- 15) a) $72x + 96y + 84z = 10200$ b) $p = (72; 96; 84)$
- 16) a) $(50; 25; 10)$ b) $\alpha = 10$
- 17) b) $\alpha = 18$
- 18) a) $40x + 80y + 64z = 8000$
- b) $(40; 80; 64)$
- c) A cargo del alumno d) 200 del bien I; 100 del bien II; 125 del bien III.
- e) $(40; 40; 50)$. Hay infinitas f) $(40; 64; 20)$. Es la única posibilidad



19) a) $k = -2$ $k = 2$

b) $40x + 16y + 10z = 2000$

c) Cambiar la condición $x = 1,5y$ a b), una posibilidad es $(15; 10; 124)$ ó $(30; 20; 48)$

20) d) $(10; 200)$

21) i.

a) $x - 2y - 4 = 0$ b) $3x - 2y - 5 = 0$ c) $2x + y = 0$ d) $y + 3 = 0$ e) $x - 5 = 0$ f) $y + 1 = 0$ g) $5x + y + 4 = 0$ i) $3x - y - 10 = 0$

ii.

a) $L : X = \lambda(2; -1)$

b) $L : X = \lambda(0; 1) + (3; 1)$

c) $L : X = \lambda(-2; 4) + (0; 1)$

d) $L : X = \lambda(4; -5)$

e) $L : X = \lambda(-1; 1) + (5; 3)$

f) $L : X = \lambda(3; 5) + (-2; -1)$

22) a) no pertenece

b) pertenece

c) pertenece

d) no pertenece

23) i.

a) $L : X = \lambda(2; -1; 3) + (1; 2; -1)$

b) $L : X = \lambda(2; 3; -4)$

c) $L : X = \lambda(-5; -3; 2) + (1; 5; 1)$

d) $L : X = \lambda(6; 1; -3) + (-2; 4; 1)$

e) $L : X = \lambda(1; -3; 5)$

f) $L : X = \lambda(0; 3; -2) + (3; -5; 2)$

ii. $P \notin L$ $Q \in L$

iii. Dar distintos valores al parámetro.



24) i.

a) $\pi: -x + 2y + 3z = 0$

b) $\pi: x + y - 2 = 0$

c) $\pi: x - z - 2 = 0$

d) $\pi: -9x + 3y + z + 10 = 0$

e) $\pi: 2x + 3y - 1 = 0$

f) $\pi: 3x + y - z = 0$

iii) A cargo del alumno

ii.

a) $\pi: X = \alpha(2; 1; 0) + \beta(3; 0; 1)$

b) $\pi: X = \alpha(1; -1; 0) + \beta(0; 0; 1) + (0; 2; 0)$

c) $\pi: X = \alpha(1; 0; 1) + \beta(0; 1; 0) + (0; 0; -2)$

d) $\pi: X = \alpha(1; 0; 9) + \beta(0; 1; -3) + (0; 0; -10)$

e) $\pi: X = \alpha\left(-\frac{3}{2}; 1; 0\right) + \beta(0; 0; 1) + \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$

f) $\pi: X = \alpha(1; -3; 0) + \beta(0; 1; 1)$

iv) $(0; 0; 0) \in \pi$, $P \notin \pi$ en ambos planos

UNIDAD TEMÁTICA 2MATRICES Y DETERMINANTES

1) Escribir las matrices definidas por las siguientes expresiones:

$$A \in \mathfrak{R}^{2 \times 3}, A = (a_{ij}) \text{ con } a_{ij} = 1 - 2j$$

$$B \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}, B = (b_{ij}) \text{ con } b_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{si } i = j \\ i + j^2 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$C \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}, C = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \begin{cases} 2i & \text{si } i < j \\ i^2 + j^2 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

$$D \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}, D = (d_{ij}) \text{ con } d_{ij} = \begin{cases} 3i - j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a) $4A + B$

b) $(-B + C^T) + 3A$

c) $\left[\frac{1}{2}(A + B) \right]^T + 2C$

d) $C^T - 2(A + B)$

3) Hallar, si existen, los valores de los reales a, b, c, d que verifiquen:

$$3. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ -1 & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ c+d-1 & 2d+3 \end{pmatrix}$$

4) Encontrar $X \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ que verifique la siguiente igualdad:

$$2X - 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5X + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^T$$

5) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Hallar:

a) $A \cdot B - 2C \cdot D$

b) A^2

c) $(B \cdot C)^2$

d) Obtener una matriz E de manera que: $A + 12B - 3C + E$ sea la matriz nula de orden 2×2 .

6) Si $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Y = I$

Hallar a) $U \cdot V$

b) $V \cdot U + X$

c) $X \cdot Y$

7) Si $U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Verificar: **a)** $U^2 = U$ y $V^2 = V$

b) $U \cdot V = V \cdot U = N$

c) $U + V = I$

¿Qué conclusiones puede obtener, luego de realizar el punto **a)** ?

8) Verificar que $A \cdot X = A \cdot Y$ (aunque $X \neq Y$), siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Qué conclusiones puede obtener?

9) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $AC + B$

b) $CB - 4A^T$

c) $B^2(A + C^T)$

d) $C \cdot A$

10) Obtener, si existen, todas las matrices X e Y que verifiquen:

$$a) \begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

11) Sabiendo que A y $B \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ analizar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

a) $\forall A, \forall B \in \mathfrak{R}^{n \times n} : (A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

b) $\forall A, \forall B \in \mathfrak{R}^{n \times n} : (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

c) $\forall A, \forall I \in \mathfrak{R}^{n \times n} : (A + I) \cdot (A - I) = A^2 - I$

d) Si A y B son matrices permutables, entonces $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

e) Si A y B son matrices permutables, entonces $(A - B)^2 = A^2 - B^2$.

12) Un fabricante que elabora dos artículos, sillas y escritorios, desea fabricar **12** sillas y **20** escritorios. La fabricación de sillas requiere, por unidad: **12** unidades de madera, **1/2** botella de barniz y **6** horas/hombre. Los escritorios requieren, también por unidad: **25** unidades de madera, **2** botellas de barniz y **20** horas/hombre.

Los costos de tales requerimientos son:

Madera **6 u.m.** por unidad

Barniz **18 u.m.** por unidad

1 hora/hombre **u.m. 15**

Aplicar cálculo matricial para obtener:

a) El costo de elaboración de **12** sillas y **20** escritorios

b) El costo total por cada tipo de artículo.

- 13) Una empresa de generación de petróleo debe transportar el crudo a cuatro destilerías ubicadas en diferentes puntos del país. Las cantidades de crudo en metros cúbicos que debe transportar son **1000** a la primera destilería, **1550** a la segunda, **4580** a la tercera y **2350** a la cuarta. Los costos del transporte por metro cúbico a cada una de las destilerías son, en **u.m.**, **50** para la primera destilería, **80** para la segunda, **70** para la tercera y **90** para la cuarta. ¿Cuál es costo total de transporte de la empresa? (Resolver matricialmente)

- 14) Dadas las siguientes matrices

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \wedge \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

- a) Hallar $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $P.M = Q$
- b) Una fábrica produce dos artículos. La matriz P muestra en la fila 1 la cantidad de metros de hilado de algodón de dos tipos necesarios para fabricar el artículo 1 y en la fila 2 las correspondientes al artículo 2. Si la columna 1 de Q proporciona el costo de producción de cada artículo en abril y en la columna 2 lo propio del mes de mayo. ¿Qué representa la matriz M ?
- 15) Una empresa produce 3 tamaños de cintas de vídeo en dos calidades diferentes. La producción (en miles) en su planta A está dada por la matriz siguiente:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	27	36	30
Calidad 2	18	26	21

La producción en su planta B está dada por la matriz siguiente:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	32	40	35
Calidad 2	25	38	30

- a) Escribir una matriz que represente la producción de cintas en ambas plantas.

- b) El dueño de la empresa planea abrir una tercera planta en C , la que tendría una vez y media la capacidad de la planta A . Escribir la matriz que representa la producción de la nueva planta.
- c) ¿Cuál será la producción total de las tres plantas?

16) Indicar Verdadero o Falso. Justificar claramente la respuesta

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ es idempotente

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es involutiva

c) Si $A \neq N \wedge B \neq N \Rightarrow AB \neq N$

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ son conmutables

17) Demostrar que si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada:

- a) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + A^T$ es simétrica.
- b) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A - A^T$ es antisimétrica.
- d) $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : A \cdot A^T$ es simétrica.

18) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$, hallar los valores reales de a y b para los cuales A es idempotente.

19) Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b) \Delta(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c) \Delta(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$d) \Delta(D) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

20) Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$$

21) Sabiendo que A y B son matrices cuadradas de orden tres, tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = 4$. Calcular aplicando propiedades:

$$a) \det(3B^{-1})$$

$$b) \det(-2A^T B)$$

$$c) \det\left[(3B^T)^{-1}\right]$$

$$d) \det\left[B^{-1} \cdot (A^T)^{-1}\right]$$

22) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que $|A| = -10$. Calcular usando propiedades:

a) $\begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -2g+a & -2h+b & -2i+c \end{vmatrix}$

23) Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $|AB| = -96$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ \alpha & -1 & 4 \\ 2 & \alpha & -2 \end{pmatrix}$

24) Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $|A+B| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 \\ 2\alpha & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

25) Calcular el determinante de C sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $|B| = 4$ y $|A^{-1}2BC^T| = -48$.

26) Decidir si es verdadero o falso y justifique:

a) $|A+B| = |A| + |B|$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

b) Si A es una matriz inversible entonces $|A| = 0$.

c) Si A y B son inversibles, entonces $A \cdot B$ también lo es, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

d) $|A \cdot A^T| = |A|^2, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

e) $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$

f) Si $\det(A) = \det(B)$, entonces $A = B$

27) Hallar el valor de $x \in \mathbb{R}$ que verifique:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

28) Si A es una matriz triangular, señale condiciones necesarias y suficientes sobre A para que $\det(A) \neq 0$.

29) Obtener, si existen, las inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

30) ¿Cuándo una matriz diagonal es inversible y cuál es su inversa?

31) Verificar que la matriz A es igual a su inversa. Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

32) ¿Qué valores de α hacen que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & \alpha & -1 \\ \alpha^2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ no sea invertible?

33) Calcular el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que exista A^{-1} , siendo $A = \begin{pmatrix} 1-k^2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

34) Si el rango de una matriz cuadrada de orden n es $k / k < n$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta, justificando la respuesta:

a) $|A| = k$

b) $|A| = 0$

c) $|A| = k - 1$

d) Ninguna de las anteriores

35) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular x de modo que el rango de A sea 2.

b) Hallar la matriz $\text{adj } A$ (para el valor de x encontrado).

c) ¿A qué es igual el producto $A \cdot \text{adj } A$?

36) Dada la siguiente matriz de insumo producto:

Industrias	A	B	DF	PT
A	200	500	500	1200
B	400	200	900	1500
VA	600	800	1400	-----
PT	1200	1500	-----	2700

- a) Determinar la matriz de producción si la demanda final cambia a **600** para **A** y a **805** para **B**.
b) Obtener el valor total de los otros costos de producción que ello implica.
c) Indicar qué hipótesis de proporcionalidad se considera.

37) En una economía hipotética de dos industrias **A** y **B**, la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Indicar la producción de cada industria si la demanda final es de **100** unidades para **A** y **80** para **B**.

38) Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un determinado año.

Industrias	A	B	DF	PT
A	80	88	32	200
B	80	0	30	110
VA	40	22	62	-----
PT	200	110	-----	310

- a) construir la del año “t” en que el vector demanda final es: $DF = \begin{pmatrix} 42 \\ 28 \end{pmatrix}$
b) indicar en qué paso de la resolución del problema se asume que la adquisición de productos intermedios de una industria es proporcional al nivel del producto final de la misma.

39) Una economía hipotética simple de dos industrias **A** y **B** está representada en la siguiente tabla (los datos están dados en millones de pesos de productos):

	A	B	DF	PT
A	150	240	210	600
B	200	120	160	480

Determinar el valor del producto final para la economía si la demanda final cambia:

- a) a **100** para **A** y a **200** para **B**
b) a **50** para **A** y a **60** para **B**

RESPUESTAS

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 11 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \\ 10 & 13 & 18 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) a) $\begin{pmatrix} 4 & -19 & 14 \\ 3 & 0 & 22 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 12 & -15 & 9 \\ 10 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & -2 \\ \frac{13}{2} & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & -8 \\ 6 & -1 & -18 \end{pmatrix}$

3) $a = 2$, $b = 4$, $c = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{2}$

4) $X = \begin{pmatrix} -4 & \frac{4}{3} & -\frac{19}{3} \\ -5 & -3 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$

5) a) $\begin{pmatrix} -24 & -32 \\ -24 & -32 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$

6) a) (4)

$$b) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Se verifican las igualdades

8) Se verifica la igualdad

$$9) a) \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -8 \\ -24 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 16 & 24 & 12 \\ -8 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 5 \\ 8 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10) a) X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{23}{8} \end{pmatrix}$$

$$b) X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

11) a) Falso

b) Falso

c) Verdadero

d) Verdadero

e) Falso

12) a) \$ 11.772

b) \$2.052 y \$9.720

$$13) \begin{pmatrix} 1000 & 1550 & 4580 & 2350 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 70 \\ 90 \end{pmatrix} = (706100)$$

$$14) a) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) El costo por unidad de cada tipo de hilado en abril y en mayo

$$15) a) \begin{pmatrix} 59 & 76 & 65 \\ 43 & 64 & 51 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 40,5 & 54 & 45 \\ 27 & 39 & 31,5 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 99,5 & 130 & 110 \\ 70 & 103 & 82,5 \end{pmatrix}$$

16) a) V (realizar operación)

b) V (realizar operación)

c) F (dar contraejemplo)

d) F

17) A cargo del alumno

$$18) a = 2 \quad b = -1$$

$$19) a) -20$$

$$b) -5$$

$$c) 0$$

$$d) 57$$

$$20) a) x_1 = x_2 = 0 \quad x_3 = 5$$

$$b) x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -3$$

$$21) a) 27/4$$

$$b) -64$$

$$c) 1/108$$

$$d) 1/8$$

$$22) a) -20$$

$$b) -10$$

$$c) -20$$

$$23) \alpha = 0 \vee \alpha = 4$$

$$24) \alpha = -3 \vee \alpha = -\frac{1}{2}$$

25) $|C| = -3$

26) a) Falso

b) Falso

c) Verdadero

d) Verdadero

e) Verdadero

f) Falso

27) $x = -2$

28) $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i : a_{ii} \neq 0$

29) a) No tiene

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

d) $\nexists D^{-1}$

e) $E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

30) $\forall i : a_{ii} \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix}$

31) Se verifica.

32) A es una matriz no invertible si $\alpha = -3 \vee \alpha = 0$

33) $k \neq -1 \wedge k \neq 1$

34) b)

35) a) $\det(A) = 0 \Rightarrow x = 2$. Con $x = 2$; $r(A) \neq 3$ y $r(A) = 2$ porque existe $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

b) $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot \text{Adj } A = \det(A) \cdot I$ En este caso $\det(A) = 0 \Rightarrow 0 \cdot I = N$ (3x3)

36) a) $P.T. = \begin{pmatrix} 1290 \\ 1425 \end{pmatrix}$

b)

	A	B	DF	PT
A	215	475	600	1290
B	430	190	805	1425
VA	645	760	1405	----
PT	1290	1425	----	2715

37) 269 para la industria A y 204 para la industria B (en forma aproximada)

38)

a) $P.T. = \begin{pmatrix} 230 \\ 120 \end{pmatrix}$



b)

	A	B	DF	PT
A	92	96	42	230
B	92	0	28	120
VA	46	24	70	----
PT	230	120	----	350

$$39) \quad a) \quad P.T. = \begin{pmatrix} 442,10 \\ 463,16 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad P.T. = \begin{pmatrix} 170,53 \\ 155,79 \end{pmatrix}$$

UNIDAD TEMÁTICA 3SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

- a) Escribir la matriz de los coeficientes de cada uno de los sistemas.
- b) Determinar la matriz ampliada de cada uno de ellos.
- c) Escribir cada uno de los sistemas en forma matricial.

2) Resolver por el método matricial (si es posible)

$$a) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$



3) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que las ecuaciones dadas no formen un sistema de Cramer:
$$\begin{cases} 4x - 2y - 8z = -2 \\ -2x + 3y + 5z = 2 \\ 2x - y + kz = -1 \end{cases}$$

4) Resolver aplicando Cramer (si es posible)

$$a) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x - 3z = 6 \\ 3y + 4z = 5 \\ -2x + 5z = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 8x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

5) i) Discutir la compatibilidad y determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss-Jordan y el método de eliminación de Gauss.

ii) Cuando sea posible, escribir la solución general del sistema dado como suma de la solución del sistema homogéneo asociado y una de sus soluciones particulares.

$$a) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 7z = 3 \\ -3x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$



6) Demostrar que los siguientes sistemas tienen solamente la solución trivial:

$$a) \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 6z = 0 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

7) Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

- a) Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas admite solución única si y solo si el rango de la matriz ampliada es n
- b) Todos los sistemas homogéneos son compatibles determinados
- c) Todos los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas pueden resolverse mediante el método matricial
- d) Ninguna de las anteriores

8) En los siguientes sistemas lineales determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema resultante tenga:

♦ solución única

♦ ninguna solución

♦ infinitas soluciones

$$a) \begin{cases} x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (k^2 - 5)z = k \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + y - kz = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$



9) Sea $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array} \right)$ la matriz ampliada de un sistema lineal. ¿Para qué valores de “a” y de “b” el sistema:

- a) Tiene solución única?
- b) Es compatible indeterminado y el rango de la matriz del sistema es igual a 2?
- c) Es compatible indeterminado y tiene dos variables libres?
- d) Es incompatible

10) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 2q \\ 2x - 3y + 2z = 4q \\ 3x - 2y + pz = q \end{cases}$ es incompatible para:

- a) $p = 3 \quad q \neq 0$
- b) $p \neq 3 \quad q \neq 0$
- c) $p \neq 3 \quad q = 0$
- d) Ninguna de las anteriores

11) Determinar el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que los siguientes sistemas sean equivalentes:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$



- 12) a) Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el vector $(1; 4)$ es la única solución del sistema:
$$\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ 2x + (k+1)y = -6 \\ 4x + (k+4)y = 8 \end{cases}$$
- b) Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que las siguientes rectas se intersecan en el punto $(3; -2)$:
$$\begin{cases} x + 3y = -3 \\ -2x + (k-3)y = -4 \\ 3x + 2y = (k+3) \end{cases}$$
- c) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el conjunto solución del sistema
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2ky = 2/3 \end{cases}$$
 es la recta $3x - 2 = y$
- 13) a) Analizar si el vector $(2; 4; -1)$ es solución del sistema
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -10 \\ x - 2y + 3z = -9 \\ 5x + z = 9 \end{cases}$$
- b) En caso de serlo, analizar si es única.
- 14) La solución general del sistema
$$\begin{cases} x + 3y + 2z - w = 0 \\ 2x - 3y - 2z + w = 0 \\ -3y - 2z + w = 0 \end{cases}$$
 es
- a) $S = \left\{ (x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x = 1 \wedge w = \frac{9y+6z}{3} \right\}$
- b) $S = \left\{ (x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = w = 0 \right\}$
- c) $S = \left\{ (x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x = 0 \wedge w = 3y + 2z \right\}$
- d) Ninguna de las anteriores



15) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} kx - 3y = 2 \\ 2kx + (k-5)y = k \end{cases}$$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuáles son las correctas, justificando:

- a) si $k = 3$ el sistema es compatible determinado.
- b) si $k = 2$ entonces $s = (4; 2)$ es una de las infinitas soluciones del sistema.
- c) si $k = -2$ el sistema es compatible indeterminado.
- d) si $k = 0$ el sistema es incompatible.

16) Sabiendo que $s = (1; 1; 1)$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} 3ax + 2by + z = -4 \\ bx + y - az = 1 \\ -4x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

- a) si $a = b = -1$ el sistema es compatible indeterminado.
- b) si $a = b = -1$ el sistema es compatible determinado.
- c) $h = (2z; 2z; z)$ es la solución del sistema homogéneo asociado.
- d) $(2/5; -2/5; 0)$ es una solución del sistema homogéneo asociado.



17) La siguiente es una matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & k - 1 \end{array} \right)$$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

- a) Si $k = 1$ el sistema es incompatible.
- b) Si $k = -1$ el sistema es incompatible.
- c) Si $k = 0$ el sistema tiene solución única.
- d) Si $k = 2$ entonces $s = (2/3; 2/3; 1/3)$ es una de las infinitas soluciones del sistema.

18) La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k^2 - 4 & -1 & k^2 - 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

- a) Si $k = -2$ ó $k = 2$ el sistema tiene infinitas soluciones
- b) La única solución del sistema para $k = -2$ es $s = (1; 0; 0)$
- c) El sistema no admite solución si $k = 3$
- d) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado

- 19) Una caja contiene **13 monedas** con las denominaciones de **un centavo**, **cinco centavos** y **diez centavos**, con un valor total de **83 centavos**.
¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja? (Recuerde que busca soluciones naturales).



- 20) Un campesino alimenta su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del **tipo A** suministra a una cabeza de ganado **10%** de sus requerimientos diarios mínimos de proteínas y **15%** de carbohidratos. El **tipo B** contiene, en una unidad estándar **12 %** del requerimiento de proteínas y **8 %** del de carbohidratos. Si el campesino desea dar a sus animales el **100%** de sus requerimientos mínimos. ¿Cuántas unidades de alimentos debe dar a cada cabeza de ganado diariamente?
- 21) Un grupo de **18** empleados de una empresa ganan un total de **250 u.m.** por hora. El sueldo depende de su antigüedad en la empresa el grupo 1 tiene una antigüedad mayor a 10 años y ganan **20 u.m.** por hora, el grupo 2 de entre 10 y 5 años ganan **15 u.m.** por hora y el grupo 3 aquellos empleados con menos de 5 años de antigüedad ganan **10 u.m.** por hora. Halle el número de empleados correspondientes a cada grupo.
- 22) Una empresa confecciona banderas, camisetas y gorros. En el mes de marzo entraron **40 metros de tela** y **20 rollos de hilo**. Cada bandera necesita **4 m de tela** y **2 rollos de hilo**. Cada camiseta necesita **2 m de tela** y **1 rollo de hilo**. Los gorros usan **1 m de tela** y **1 rollo de hilo**. Si se consumen totalmente las materias primas que ingresaron en marzo.
- a) Hallar la solución general del sistema.
 - b) ¿Es toda solución del sistema una solución del problema? Justificar
 - c) Hallar todas las soluciones del problema.
 - d) Decidir si es posible fabricar todos los productos.
- 23) Un departamento de Caza y Pesca Estatal suministra tres tipos de alimentos a un lago que mantiene a tres especies de peces. Cada pez de la **especie I** consume cada semana un promedio de una unidad de **alimento 1**, una unidad de **alimento 2**, y dos unidades de **alimento 3**. Cada pez de la **especie II** consume cada semana un promedio de tres unidades de **alimento 1**, cuatro unidades de **alimento 2** y cinco unidades de **alimento 3**. Para un pez de la **especie III**, el consumo semanal promedio es de dos unidades del **alimento 1**, una unidad del **alimento 2** y cinco unidades del **alimento 3**. Cada semana se proporcionan al lago **15.000** unidades de alimento 1, **10.000** unidades del segundo y **35.000** del tercero. Suponemos que los tres alimentos se consumen ¿qué población de cada especie se encontrará en coexistencia? ¿Existe una solución única?



- 24) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla. La compañía tiene un almacén de **400** unidades de madera, **600** de plástico y **1500** de aluminio. Para su producción de final de temporada la compañía desea agotar todas las existencias. Para lograrlo ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Sillas	1	1	2
Mecedoras	1	1	3
Sillones	1	2	5

- 25) Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión: Classic (C), de Lujo (L) y Gold (G). Cada unidad de **C** tiene **12 acciones tipo A**, **16 tipo B** y **8 tipo C**. Cada unidad de **L** tiene **20 acciones tipo A**, **12 tipo B** y **28 tipo C**. Cada unidad de **G** tiene **32 acciones tipo A**, **28 tipo B** y **36 tipo C**.

Un inversionista desea comprar exactamente **220** acciones tipo **A**, **176** tipo **B** y **264** tipo **C** comprando unidades de los tres fondos. Determinar, si es posible, las combinaciones de unidades **C**, **L** y **G** que satisfagan los requerimientos del inversionista.

RESPUESTAS

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \quad A.X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{array} \right) \quad A.X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \quad A.X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2) a) $x = 11/7$; $y = 1/7$

b) $x_1 = 13/5$; $x_2 = -32/5$; $x_3 = -3/5$

c) no se puede resolver por el método matricial.

3) $k = -4$

4) a) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2$

b) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$

c) no se puede resolver aplicando Cramer



5) i. a) S.C.D. $x = -6, y = 3, z = 2 \Rightarrow S = \{(-6; 3; 2)\}$

b) S.I. $\Rightarrow S = \emptyset$

c) S.I. $\Rightarrow S = \emptyset$

d) S.C.D. Solución trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow S = \{(0; 0; 0)\}$

e) S.C.D. $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = -2 \Rightarrow S = \{(1; -1; 2; -2)\}$

f) S.C.I. $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = -10x_1 - 3x_3, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 = -14x_1 - 5x_3$
 $\Rightarrow S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_2 = -10x_1 - 3x_3 \wedge x_4 = -14x_1 - 5x_3\}$

g) S.C.I. $x_1 = 1, x_2 = 2x_3, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 = -3x_5, x_5 \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 = 1 \wedge x_2 = 2x_3 \wedge x_4 = -3x_5\}$

ii. g)

$$S = \{(1; 2x_3; x_3; -3x_5; x_5)\}$$

$$S_H = (0; 2x_3; x_3; -3x_5; x_5) \quad S_{\text{particular no homogéneo}} = (1; 0; 0; 0; 0)$$

$$S_{\text{general}} = S_{\text{particular}} + S_H = (1; 0; 0; 0; 0) + (0; 2x_3; x_3; -3x_5; x_5)$$

6) A cargo del alumno. Solución Trivial $S = \{(0; 0; 0)\}$

7) d)



8) a) $k \neq 1$, $k \neq -2$ S.C.D.

$k = -2$ S.I.

$k = 1$ S.C.I.

b) $k \neq 2$; $k \neq -2$ S.C.D.

$k = -2$ S.I.

$k = 2$ S.C.I.

c) $k \neq 2$ S.C.D.

$k = 2$ S.I.

No existe “ k ” para el cual el sistema sea compatible indeterminado

d) $k \neq 3$ S.C.D.

$k = 3$ S.C.I.

No existe “ k ” para el cual el sistema sea incompatible

9) a) $a \neq 0 \wedge b \neq 2$

b) $a \neq 0 \wedge b = 2$

c) $a = 0 \wedge b = 2$

d) $a = 0 \wedge b \neq 2$



10) a)

11) $m = 3$

12) a) $k = -3$

b) $k = 2$

c) $k = -\frac{1}{6}$

13) Es solución única

14) c)

15) a) Verdadero

b) Falso

c) Falso

d) Verdadero

16) a)

17) b)

18) Solución correcta: a) Nota: ¡Ojo! El sistema tiene siempre infinitas soluciones, no sólo si $k = -2$ y $k = 2$.

19) $S = \{(3; 4; 6)\}$

20) 4 unidades de A; 5 unidades de B

21) “x” número empleados primer grupo, “y” número empleados segundo grupo, “z” número empleados tercer grupo



$\Rightarrow$ Solución del sistema $\begin{cases} x = -4 + z \\ y = 22 - 2z \end{cases}$ con $x, y, z \in \mathbb{N}$

22) a) $\begin{cases} y = 20 - 2x \\ z = 0 \end{cases}$ donde x, y, z es el número de banderas, camisas y gorros respectivamente

b) No

c) $\begin{cases} y = 20 - 2x \\ z = 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 20$

d) No se pueden producir todos los productos ya que el número de gorros es 0

23) x, y, z es el número de peces $\begin{cases} x = 30.000 - 5z \\ y = -5.000 + z \end{cases}$ con $x, y, z \in \mathbb{N}$ donde $5.000 < z < 6.000, 0 < y < 1.000, 0 < x < 5.000$

24) 100 sillas, 200 sillones, 100 mecedoras

25) $\begin{cases} x = 5 - z \\ y = 8 - z \end{cases}$ con las siguientes restricciones a las variables $0 < x < 5, 3 < y < 8, 0 < z < 5$

Soluciones posibles: (1;4;4) , (2;5;3) , (3;6;2) , (4;7;1)

UNIDAD TEMÁTICA 4ESPACIO VECTORIAL

1) Indicar si cada uno de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio correspondiente justificando la respuesta.

i) $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) $H = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 0 \}$

b) $H = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x + y| \geq 0 \}$

c) $H = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + y = 0 \}$

d) $H = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y - 2 = 0 \}$

ii) $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) $H = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y \wedge z = -y \}$

b) $H = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / y = 3 \}$

c) $H = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 3 = 2z \}$

d) $H = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / z = 3x + y \}$

iii) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) $H_1 = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A \text{ es escalar} \}$

b) $H_2 = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A \text{ es antisimétrica} \}$

c) $H_3 = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A \text{ es ortogonal} \}$

d) $H_4 = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{11} = 2a_{12} \wedge a_{21} = -a_{22} \}$

e) $H_5 = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{11} = 4 \wedge a_{22} = a_{12} + a_{21} \}$



iv) $(\mathbb{R}^4; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) $W_1 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z = 0\}$ b) $W_2 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x = y + z \wedge w = 0\}$

c) $W_3 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x = 0\}$

2) a) Investigar si $(V; +; \mathbb{R}; \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$ con las operaciones usuales definidas en $\mathbb{R}^2$, siendo

$$V = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$$

b) Completar y tachar lo que no corresponde:

Observar que este conjunto está representado por la recta....., que **SI / NO** pasa por el origen. Representar gráficamente.

3) a) Investigar si $(W; +; \mathbb{R}; \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$ con las operaciones usuales definidas en $\mathbb{R}^2$, siendo

$$W = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx + b \wedge b \neq 0\}$$

b) Completar y tache lo que no corresponde:

Observar que este conjunto está representado por la recta....., que **SI/NO** pasa por el origen. Representar gráficamente.

4) Dado $W = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 0\}$. Indicar cual proposición es verdadera

a) W es un subespacio trivial de $\mathbb{R}^2$

b) $(-3; 3) \in W$

c) $W = \emptyset$

d) Ninguna de las anteriores



5) Verificar que el conjunto solución del sistema:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \text{ no es un subespacio de } (\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \text{ es un subespacio de } (\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$$

6) Sean $\vec{v}_1 = (1; -3; 2)$ y $\vec{v}_2 = (2; -1; 1)$ pertenecientes a $\mathbb{R}^3$

a) Escribir, si es posible, $\vec{v} = (4; 3; -1)$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

b) ¿Es posible expresar $\vec{u} = (2; 1; -3)$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

c) ¿Para qué valor de $k \in \mathbb{R}$ es $(1; 12; k)$ una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

d) Indicar qué condición deben cumplir los números reales a, b y c , para que el vector $(a; b; c)$ sea una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

7) Hallar k para que $\vec{v} = (k; 1; 1)$ resulte combinación lineal de $\vec{u} = (0; 2; 1)$ y $\vec{w} = (1; -1; 0)$

8) Determinar si el conjunto de vectores dado genera en cada caso el espacio vectorial indicado. En caso negativo, halle el subespacio generado.

i) $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) $A_1 = \{(1; 2), (3; 4)\}$

b) $A_2 = \{(1; 1), (2; 2), (5; 5)\}$

c) $A_3 = \{(1; 1), (2; 1), (2; 2)\}$

ii) $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) $B_1 = \{(1; 1; 1), (0; 1; 1), (0; 0; 1)\}$

b) $B_2 = \{(1; 2; 3), (-1; 2; 3), (5; 2; 3)\}$

c) $B_3 = \{(2; 0; 1), (3; 1; 2), (1; 1; 1), (7; 3; 5)\}$



iii) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \mathbb{R}; \cdot)$

$$a) C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b) C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

9) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, para que el vector $\vec{u} = (3; k-3; 2k)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores de $A = \{(2; 0; 4), (1; 0; 2)\}$.

10) Analizar si el vector $\vec{g} = (2; 14; -34; 7)$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1; 4; -5; 2)$ y $\vec{v}_2 = (1; 2; 3; 1)$.

11) Determinar si el conjunto dado de vectores es **L.D.** o **L.I**

a) En $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$, $A = \{(3; 1; 1), (2; -1; 5), (4; 0; -3)\}$

b) En $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \mathbb{R}; \cdot)$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

c) En $(\mathbb{R}^{2 \times 3}; +; \mathbb{R}; \cdot)$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) En $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$, $E = \{(1; 1), (2; 2)\}$

12) Determinar la o las condiciones que deben satisfacer los números **a**, **b**, **c** y **d** a fin de que los vectores $(a; b)$ y $(c; d)$ del espacio $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$ sean **LI**.

13) Analizar y decidir justificando si los siguientes pares de vectores son **LI** o **LD**.

a) $(1; 1), (2; 7)$

b) $(2; 4; 1), (8; 16; 4)$

c) $(5; 5; 10; 0; 5), (1; 1; 2; 0; 1)$

d) $(0; 0; 0), (-5; 7; 18)$



- 14) Hallar todos los $c \in \mathbb{R}$ para que $A = \{(1-c; 1+c), (1+c; 1-c)\}$ sea linealmente independiente.
- 15) Determine si el conjunto dado de vectores es una base del espacio vectorial indicado. En caso de no serlo, halle el subespacio generado, una base y su dimensión.
- a) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(1; 2), (1; 0)\}$
 - b) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1; 2; -1), (1; 0; 2), (2; 1; 1)\}$
 - c) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1; 0; 2), (3; -1; 4)\}$
 - d) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1; 1; 1), (3; 0; 1), (-1; 2; 3), (0; 4; 5)\}$
 - e) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1; 0; 0), (2; 2; 0), (3; 3; 3)\}$
- 16) Explicar por qué los siguientes conjuntos no son una base de los espacios vectoriales indicados.
- a) $A_1 = \{(1; 2), (0; 3), (2; 7)\}$ para $\mathbb{R}^2$.
 - b) $A_2 = \{(-1; 3; 2), (6; 1; 1)\}$ para $\mathbb{R}^3$.
 - c) $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right\}$ para $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- 17) ¿Qué valores de $k \in \mathbb{R}$ hacen que el conjunto $\{(1; 0; k), (k; 1; 0), (k+1; 1; k)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$?



- 18) Verificar que el conjunto $B = \{(1;1;1), (1;1;0), (1;0;0)\}$ es una base de $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$. Expresar el vector $(a;b;c)$ como combinación lineal de los vectores de esa base.
- 19) En $\mathbb{R}^3$ se define $A = \{(k;1;k), (k;2;2k), (3k;k;-k)\}$.
- Hallar todos los valores de k para que el conjunto A sea una base de $\mathbb{R}^3$.
 - Hallar todos los valores de k para que A genere un subespacio de dimensión 2.
- 20) En $\mathbb{R}^3$ se define $A = \{(2;k;1), (6;1;5), (2k;1;k+2)\}$
- Hallar todos los valores de k para que el conjunto A no sea una base de $\mathbb{R}^3$.
 - Si $k=0$ hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.
- 21) Dado $A = \{(-1;2;4), (0;1;2), (1;-1;k)\}$ determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto genere un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$.
Reemplazar a k por los valores obtenidos y hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.
- 22) Un valor de “ a ” para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a:
- $$\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ (a+1)x_2 + 2x_3 = 4 \\ (a^2-1)x_3 = 1 \end{cases}$$
- sea un subespacio de $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$ de dimensión cero es:
- $a = 0$
 - $a = 1$
 - $a = -1$
 - $a = 2$



- 23) Hallar tres posibilidades de consumo correspondientes a la recta balance de ecuación $\frac{x}{18} + \frac{y}{9} = 1$ distintas de $(18; 0)$ y $(0; 9)$. Escribir cada una de ellas como combinación lineal de estas últimas indicando el tipo de combinación lineal que resulta.

Ejercicios Integradores

- 24) Verificar que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio de $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 6x - 7y + z = -1 \\ x + 4y - 5z = 4 \end{cases}$$

a) Dar una base y su dimensión.

b) Si el vector $\vec{v} = (3; 3; 3)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

- 25) Verificar que el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ es un subespacio de $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$

a) Dar una base y su dimensión.

b) Si el vector $\vec{v} = (-4; 5; 2)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

RESPUESTAS

1)

i.	a) No	b) Si	c) Si	d) No	
ii.	a) Si	b) No	c) No	d) Si	
iii.	a) Si	b) Si	c) No	d) Si	e) No
iv.	a) Si	b) Si	c) Si		

2) a) es subespacio b) $y = 2x$, SI3) a) no es subespacio b) $y = mx + b$, NO

4) La respuesta correcta es la a)

5) a) $S = \{ (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = -4 \wedge x_1 - x_3 = 8 \}$ S no es un subespacio ya que $(0; 0; 0) \notin S$ b) $S = \{ (0; 0; 0) \}$ es un subespacio trivial, S es un subespacio de $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$ 6) a) $(4; 3; -1) = -2v_1 + 3v_2$

b) No

c) $k = -7$ d) $-a + 3b + 5c = 0$ 7) $k = 1$



- 8) i) a) Es generador de $\mathfrak{R}^2$.
b) Genera un subespacio propio de $\mathfrak{R}^2$. $\bar{A}_2 = \{(a; a) \text{ con } a \in \mathfrak{R}\}$.
c) Es generador de $\mathfrak{R}^2$.
- ii) a) Es generador de $\mathfrak{R}^3$.
b) Genera un subespacio propio de $\mathfrak{R}^3$. $\bar{B}_2 = \left\{ (a; b; \frac{3}{2}b) \text{ con } a, b \in \mathfrak{R} \right\}$.
c) Genera un subespacio propio de $\mathfrak{R}^3$. $\bar{B}_2 = \{(-b + 2c; b; c) \text{ con } b, c \in \mathfrak{R}\}$.
- iii) a) Es generador de $\mathfrak{R}^{2 \times 2}$.
b) Genera un subespacio propio de $\mathfrak{R}^{2 \times 2}$. $\bar{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathfrak{R} \right\}$.
- 9) $k=3$
- 10) Si, porque $\vec{g} = 5\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$
- 11) a) LI b) LD c) LI d) LD
- 12) $a.d - b.c \neq 0$
- 13) a) LI b) LD c) LD d) LD
- 14) $c \neq 0$
- 15) a), b), e) es base c), d) no es base



16) a) Es LD b) Genera un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$

c) Es LD.

17) Ninguno, ya que $\forall k \in \mathbb{R}$ el conjunto de vectores de LD

18) $(a; b; c) = c \cdot (1; 1; 1) + (b - c) \cdot (1; 1; 0) + (a - b) \cdot (1; 0; 0)$

19) a) $k \in \mathbb{R} / k \neq 0 \wedge k \neq -1$ b) $k = -1$

20) a) $k = 0 \vee k = 3$

b) $\bar{A} = \{(-4b + 2c; b; c) \text{ con } b, c \in \mathbb{R}\}$

21)

a) $k = -2$

b) $\bar{A} = \{(a; b; 2b) \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(1; 0; 0), (0; 1; 2)\}$ $\dim(\bar{A}) = 2$

22) d) $a = 2$

23) A cargo del alumno

24)

a) $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \wedge y = z\} = \{(z; z; z)\} \rightarrow B_S = \{(1; 1; 1)\}$ $\dim S = 1$

b) $\vec{v} = [3]_B$

25) a) $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2z \wedge y = \frac{5}{2}z\} = \left\{\left(-2z; \frac{5}{2}z; z\right)\right\} \rightarrow B_S = \left\{\left(-2; \frac{5}{2}; 1\right)\right\}$ $\dim S = 1$

b) $\vec{v} = [2]_B$

UNIDAD TEMÁTICA 5PROGRAMACION LINEAL

1) Halle gráficamente, en cada caso, el conjunto solución

a) En $\mathcal{R}$: $-2x + 3 \geq 7$

b) En $\mathcal{R}$: $5 \leq -2x - 3$

c) En $\mathcal{R}^2$: $y > 6 - 2x$

d) En $\mathcal{R}^2$:
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

e) En $\mathcal{R}^2$:
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 5 \\ 2x + y \geq 5 \\ 3x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

f) En $\mathcal{R}^2$:
$$\begin{cases} 3x + y > -6 \\ 2x - 3y > -12 \\ y > x \end{cases}$$

g) En $\mathcal{R}^2$:
$$\begin{cases} 3x + y > -6 \\ x + y > -5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2) Halle la solución aplicando el método gráfico:

- i. Determinar gráficamente el conjunto de soluciones factibles (**CSF**) del modelo.
- ii. Identificar cada uno de los vértices del conjunto de soluciones factibles con letras mayúsculas e indicar sus coordenadas.
- iii. Calcular el valor de la función objetivo (**Z**) en cada vértice del **CSF**.
- iv. En base a los resultados anteriores indicar la solución óptima del modelo (valor de las variables x, y y de la función objetivo (**Z**)).
- v. Trazar en el gráfico construido en i) la línea que une todos los puntos de coordenadas $(x; y)$ para los cuales la función objetivo toma un valor constante $z = k$, siendo k el valor óptimo de z hallado en iv).
- vi. Darle a k otros valores distintos del óptimo y repetir el procedimiento seguido en v). Sacar conclusiones.



a) Minimizar: $Z = x + 2y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} x + y \geq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$

b) Maximizar: $Z = 2x + 3y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

$$\text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$

c) Minimizar: $Z = 7x + 3y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} 3x - y \geq -2 \\ x + y \leq 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$

d) Minimizar: $Z = 200x + 100y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} 300x + 100y \geq 30000 \\ 4x + 8y \geq 800 \end{cases}$$

$$\text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$

e) Maximizar: $Z = 3x + 6y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} x + y \geq -3 \\ 2x - y \leq 4 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$

f) Maximizar: $Z = 2x - 4y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} x + y \leq 10 \\ 3x - y \geq -2 \\ x - 4y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$



3) Sea $Z = x + 1,5y$ sujeta a
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 16 \\ x + 2y \leq 12 \\ 4x + 2y \leq 28 \end{cases} \quad \text{Con } x \geq 0; y \geq 0$$

a) Maximizar empleando el método gráfico.

b) Mediante el análisis de sensibilidad:

b.1) Determinar los intervalos de optimalidad, ¿Cómo afectará el cambio de un coeficiente de la función objetivo a la solución óptima?

b.2) Determinar los intervalos de factibilidad ¿Cómo afectará el cambio de un valor del lado derecho de una restricción a la solución óptima?

4) Construir los sistemas de ecuaciones y la tabla simplex iniciales asociados a los siguientes programas lineales. Indicar en cada caso cuales son las variables básicas y no básicas y la primera solución factible

a) Maximizar: $Z = x + 2y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \end{cases}$$

Con $x \geq 0; y \geq 0$

b) Maximizar: $Z = x + 1,5y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} 2x + 2y \leq 160 \\ x + 2y \leq 120 \\ 4x + 2y \leq 280 \end{cases}$$

Con $x \geq 0; y \geq 0$

c) Maximizar: $Z = 3x - 3y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} x - y \leq 4 \\ -x + y \leq 4 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$

Con $x \geq 0; y \geq 0$

5) Utilizando el método simplex, resolver los problemas del ejercicio 4



6) a) Maximizar $Z = 3x + 3y$ sujeta a
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y \leq 10 \\ x + y \leq 15 \\ \frac{3}{2}x + y \leq 15 \end{cases}$$

b) ¿Cuánto podría aumentar como máximo c_1 manteniendo constante $c_2 = 3$ sin que sea necesario modificar la solución óptima?

c) ¿Hasta qué valor podría aumentar como máximo c_2 manteniendo $c_1 = 3$ constante sin que se modifique la solución óptima?

7) Formular el problema dual de cada uno de los siguientes problemas primales:

a) Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2$ sujeta a
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 48 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Minimizar $Z = 30x_1 + 40x_2$ sujeta a
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8) Resuelva los siguientes problemas, utilizando el dual.

a) Minimizar: $Z = 4x + 5y$

Sujeta a:
$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 3x + y \geq 3 \\ x + y \geq 7 \end{cases}$$

Con $x \geq 0; y \geq 0$

b) Minimizar: $Z = 4x + 3y + 2z$

Sujeta a:
$$\begin{cases} x + 3y + 2z \geq 10 \\ 2x + y + 2z \geq 8 \end{cases}$$

Con $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$



c) Minimizar: $Z = 15x + 20y$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ 3x + y \geq 6 \\ x + 4y \geq 8 \end{cases}$$

Con $x \geq 0$; $y \geq 0$

9) Para preparar una dieta óptima se dispone de dos ingredientes (I_1 , I_2). El análisis químico determinó que contiene **tres tipos distintos de nutrientes** por cada kilo, a saber: **4, 7 y 1,5 gramos para I_1 ; 8, 2 y 5 gramos para I_2** . La empresa consigue en el mercado I_1 a **30 u.m el kg** y el I_2 a **40 u.m el kg**. Asimismo, se determinó el contenido mínimo de nutrientes para que la dieta sea eficaz: **32, 14 y 15 gramos**, respectivamente.

Se pide: a) Programa óptimo.

b) Si la empresa se ve obligada a incorporar un nuevo nutriente con coeficientes **1,5 y 5 gramos** y un **requerimiento mínimo de 18 gramos**, determine qué efecto produce en términos de solución óptima.

10) Para la fabricación de dos productos se utilizan tres insumos según los valores consignados en la siguiente matriz:

Producto Insumo	Producto		Disponibilidad
	P_1	P_2	
I_1	5	10	80
I_2	40	20	360
I_3	10	10	100
Beneficio	2	3	



En base a esta información se pide:

- a) ¿Cuánto debe fabricarse de cada producto para utilizar la totalidad de los **insumos 2 y 3**?
- b) ¿Cuál es la cantidad máxima que puede fabricarse del **producto 1**?
- c) Determine el programa óptimo de producción.
- d) ¿Las disponibilidades de qué recursos podrían disminuirse sin modificar el beneficio máximo? ¿En cuánto y por qué?
- e) ¿Cuáles son los recursos saturados? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por una unidad más de ellos? ¿Por qué?
- f) ¿Podría utilizarse el total de las disponibilidades de los **tres insumos**? ¿Por qué?
- g) Si el precio de ambos productos varía en igual proporción, ¿se modifica la solución óptima? ¿Cómo y por qué?

11) Una refinería de petróleo procesa dos tipos de crudo: **A** y **B** con la finalidad de producir gas oíl, lubricantes y kerosene. Las demandas de estos productos son al menos respectivamente **14, 10 y 8 toneladas** por día.

El crudo **A** tiene un rendimiento de **0,2 toneladas** de gas oíl, **0,10 toneladas** de lubricante y **0,16 toneladas** de kerosene por cada tonelada de petróleo.

Los rendimientos del crudo **B** son: **0,10 toneladas** de gas oíl, **0,20 toneladas** de lubricante y **0,10 toneladas** de kerosene.

- a) Formular el modelo que permita determinar la capacidad mínima de la planta en toneladas por día de crudo a procesar.
- b) Determinar gráficamente el espacio de soluciones factibles.



- c) Asignar dos valores arbitrarios a la capacidad de la refinería y trazar las líneas que muestren todas las mezclas de crudos A y B que se pueden procesar con la misma capacidad de la planta.
- d) Determinar la cantidad de cada crudo a procesar y la capacidad mínima de la planta utilizando el método gráfico.
- e) Trazar en el gráfico del modelo la isolínea que corresponde a la capacidad óptima de la planta. Comparar con las líneas trazadas en c).
- f) De acuerdo al programa óptimo, ¿habrá excedente de alguno de los tres productos sobre el valor de la demanda? En caso afirmativo identificar de cuál o cuáles de ellos.
- 12) Una empresa que elabora alimento para animales desea introducir en el mercado una mezcla alimenticia para caninos que consiste en paquetes de galletitas con sabor a hígado y pollo. La composición de las galletitas es tal que cada una con **sabor a pollo** contiene **una unidad de nutriente A y 4 de nutriente B**; las de **hígado** están compuestas por **una unidad de nutriente A y 2 de nutriente B**. La empresa ha decidido envasar **por lo menos 15 galletitas con sabor a hígado** por paquete y además existen reglamentaciones externas que exigen que cada paquete de alimento contenga **por lo menos 40 unidades de nutriente A y 60 unidades de nutriente B**. El costo de cada galletita con **sabor a hígado** es **10 u.m** y cada una de gusto **a pollo** cuesta **20 u.m**.
- a) Formular el modelo que permita optimizar la mezcla de galletitas con ambos gustos en cada paquete. ¿Es un problema de maximización o de minimización?
- b) Determinar gráficamente el conjunto de soluciones factibles.
- c) Hallar las cantidades óptimas a mezclar de cada tipo de galletitas por el método gráfico.



d) Trazar en el gráfico construido en **b)** la línea que da todas las mezclas que tienen el costo óptimo. ¿son todas factibles? ¿Qué denominación le daría a dicha línea?

e) ¿Alguno de los requerimientos de fabricación se cumple con holgura? En caso afirmativo. ¿Cuál?

13) Para el estudio del plan de producción a seguir durante el próximo período se dispone de los siguientes datos:

	PRODUCTO A	PRODUCTO B	DISPONIBILIDADES
MATERIA PRIMA	1	1	200 Unidades
MANO DE OBRA	2	1	260 Horas/ Hombre
FONDOS	1000	2000	350.000
CONTRIBUCION NETA	100	400	

En base a esta información:

a) Defina el significado concreto de todos los elementos del vector “**Producto A**”.

b) Demuestre que no existe nivel de producción para el cual se utilicen todas las disponibilidades.

c) Considere la disponibilidad del **recurso 2** como “ k ” y averigüe (aplicando procedimiento) para qué valores de k el sistema planteado tendría solución.

d) Plantee el modelo matemático que describa todas las alternativas posibles de producción y permita detectar la óptima.



- e) Resuelva gráficamente.
- f) Resuelva aplicando el método simplex.
- g) Averigüe para qué valores de C_2 conviene fabricar el **producto B** exclusivamente.
- h) ¿A qué costo incorporaría unidades adicionales de los recursos? Explique para cada uno de ellos interpretando según este enunciado.

14) Una fábrica de equipos electrónicos construye **amplificadores y altoparlantes**. Debido a su capacidad puede construir **hasta 100 unidades diarias en total**. Una convención le obliga a exportar a otras provincias la mitad de los amplificadores que fabrica y la tercera parte de los altoparlantes, pero por un problema de transporte no puede exportar **más de 40 unidades por día**. **Cada amplificador deja un beneficio de 50 u.m. y cada altoparlante deja 60 u.m.**

Organizar los datos del problema en una tabla de valores.

- a) Plantear las restricciones y la función objetivo.
- b) Graficar el modelo indicando el conjunto de soluciones factibles.
- c) Determinar qué producción de amplificadores y de altoparlantes maximiza el beneficio.
- d) Calcular la ganancia total máxima.
- e) Resolver por el método simplex
- f) Debido a la implantación de nuevos impuestos disminuye la ganancia de los altoparlantes a **40 u.m** manteniéndose el beneficio de los **amplificadores en 50 u.m.** ¿Cuáles son ahora las producciones óptimas y el beneficio máximo?



15) Se debe formular un alimento que contenga 3 componentes nutritivos básicos en las siguientes cantidades como mínimo:

- 45 gramos de lípidos
- 56 gramos de hidratos de carbono
- 60 gramos de proteínas

Para ello se dispone en el mercado de dos productos cuya composición en los tres componentes nutritivos básicos es la siguiente:

- **Producto A:** contiene 10 g/u de lípidos, 7g/u de hidratos de carbono y 5 g/u de proteínas
- **Producto B:** contiene 5 g/u de lípidos, 7 g/u de hidratos de carbono y 15 g/u de proteínas.
- El **producto A** tiene un costo de **6 u.m** /u y el **B** de **8 u.m** /u.

- a) Formular el modelo lineal que permita obtener un alimento que cumpla con los requerimientos nutritivos y tenga costo mínimo.
- b) Determinar gráficamente las cantidades óptimas (en u) a mezclar de productos A y B
- c) Calcular el mínimo costo del alimento que cumple los requerimientos nutritivos.

16) Una fábrica de bebidas cuenta con **60000 litros** de materia prima con la que produce jugos de dos tipos: **A** (concentrado) y **B** (diluido). Los mismos se envasan en cajas de **24 botellas**. En una botella de jugos **A** se usa **1 litro de materia prima**, y en una de jugo **B** solo **$\frac{1}{3}$ de litro de materia prima**. La demanda de los productos **no es mayor que 2000** cajas de jugo **A** y **6000** de jugo **B**. Los precios de cada caja de jugos es **18 u.m** los de sabor **A** y **9 u.m** los de sabor **B**.

- a) Plantear el modelo que permita optimizar las producciones de cada tipo de jugo.
- b) Determinar la relación precios **A/B** que permita a la fábrica producir más cajas de jugo con sabor **A** que **B**.



17) La siguiente es la tabla simplex final correspondiente a un problema de maximización de programación lineal. En base a ella, se pide indicar:

	C_j	20	30	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	B
30	X_2	4/5	1	1/5	0	40
0	S_2	18/5	0	-3/5	1	90
Z_j		24	30	6	0	
$C_j - Z_j$		-4	0	-6	0	

La solución óptima;

- a) Si existen recursos saturados y/o disponibilidad de cada uno de ellos;
- b) El valor que se pagaría por incorporar una unidad más en cada uno de los sectores;
- c) El costo de oportunidad con su significado económico;
- d) Para qué rango de valores de la contribución en el beneficio de x_2 sigue siendo óptima la solución hallada

18) La siguiente tabla suministra información sobre la fabricación de artículos **A** y **B** en los diferentes departamentos

- a) Plantear el modelo directo (Función objetivo y restricciones)
- b) Plantear el modelo dual.

	Artículo A	Artículo B	Disponibilidad (hs)
Depto. I	2	1	180
Depto. II	1	2	160
Depto. III	1	1	100
Beneficio por unidad	4	6	

dos



c) Determinar gráficamente la región factible del problema directo y analíticamente las posibles soluciones óptimas.

d) Hallar la solución óptima

19) Considerar un enunciado clásico de problema de programación lineal: tres líneas de producto y dos restricciones de insumos, según los datos del siguiente cuadro:

	Prod. A	Prod. B	Prod. C
Horas Hombre	40	40	20
Horas Máquina	2	8	4

Sabiendo que el total disponible de horas hombre es de **3800** y el de horas de máquina de **3300** y que la contribución de cada unidad del producto al beneficio es de **200 u.m para A, 30 u.m para B y 100 u.m para C.**

a) Hallar el plan de producción que optimice el resultado económico para el empresario.

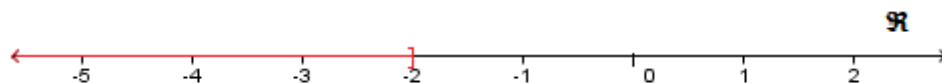
b) Indicar el precio máximo que el empresario estaría dispuesto a pagar por cada hora hombre adicional.

c) Determinar el precio sombra correspondiente a la restricción de horas máquinas.

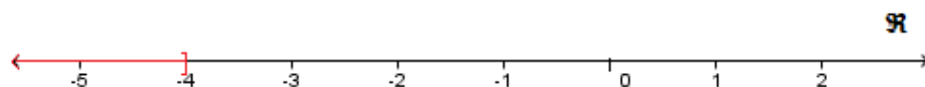
d) ¿Cuál es el costo de oportunidad del producto **B**?

RESPUESTAS

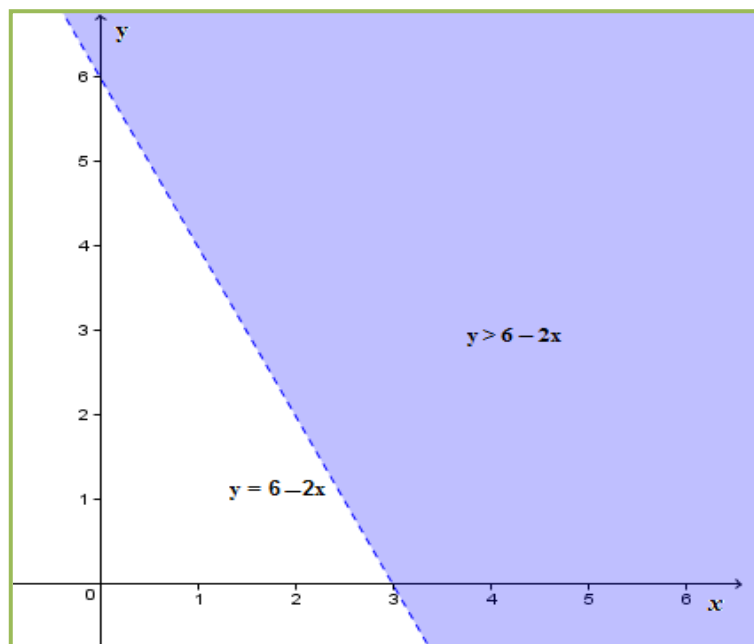
1) a) En $\mathfrak{R} : -2x + 3 \geq 7 \Rightarrow \boxed{x \leq -2}$



b) En $\mathfrak{R} : 5 \leq -2x - 3 \Rightarrow \boxed{x \leq -4}$

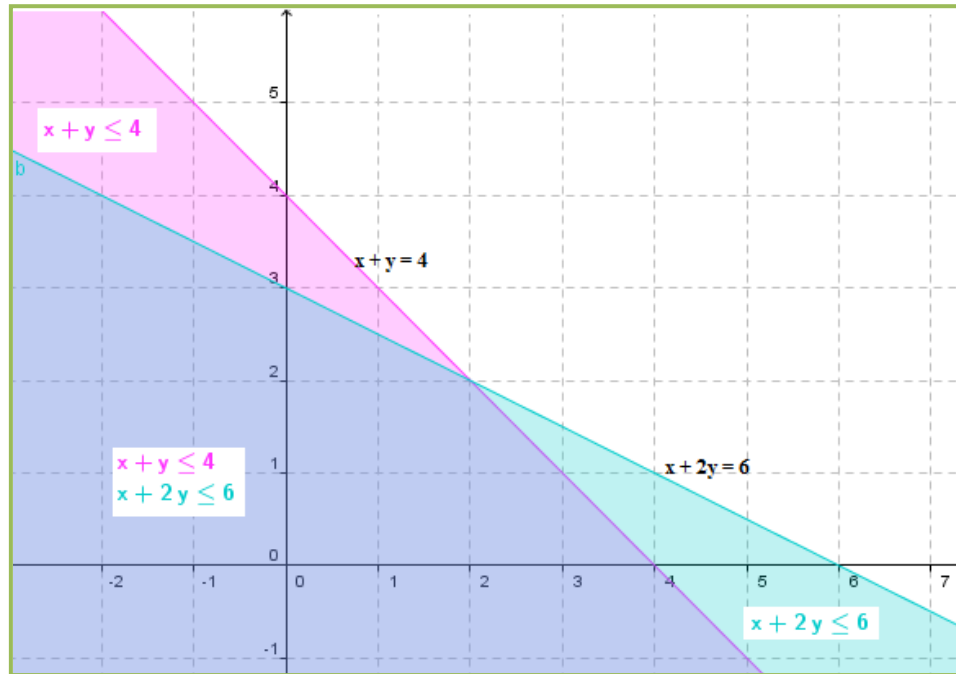


c)

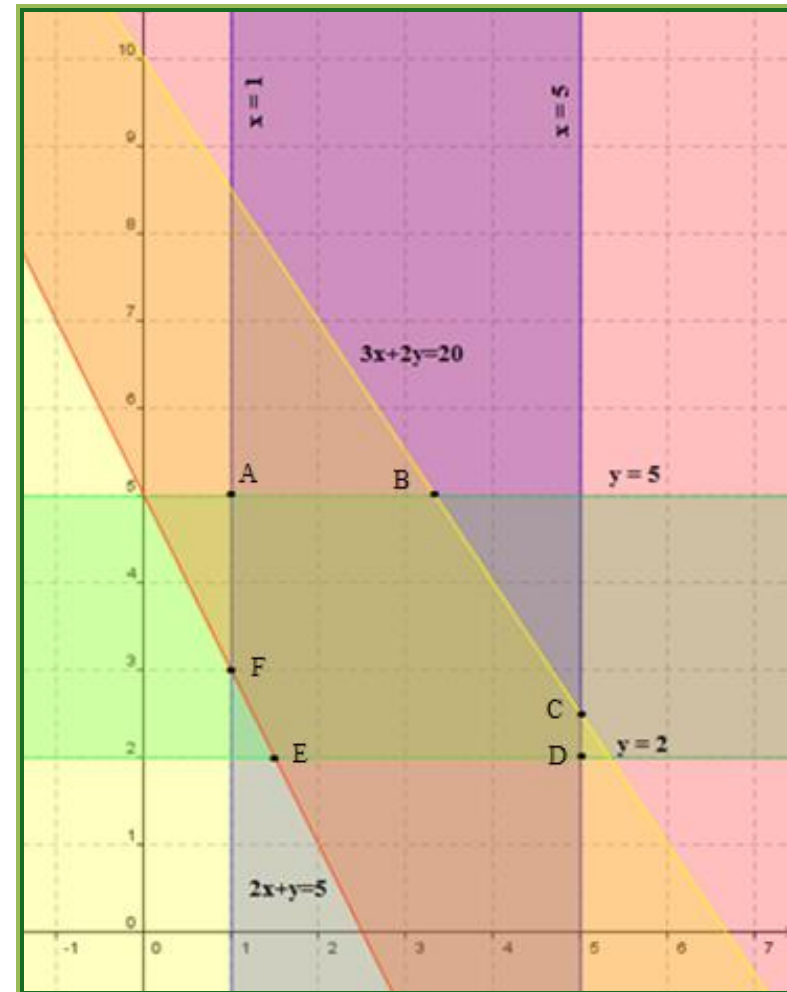




d)

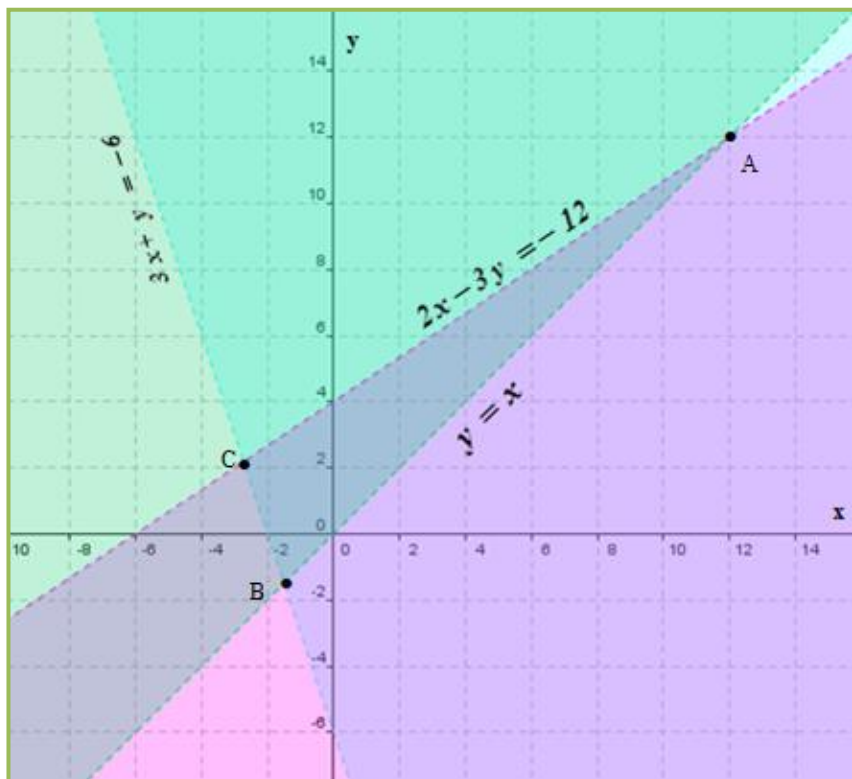


e)

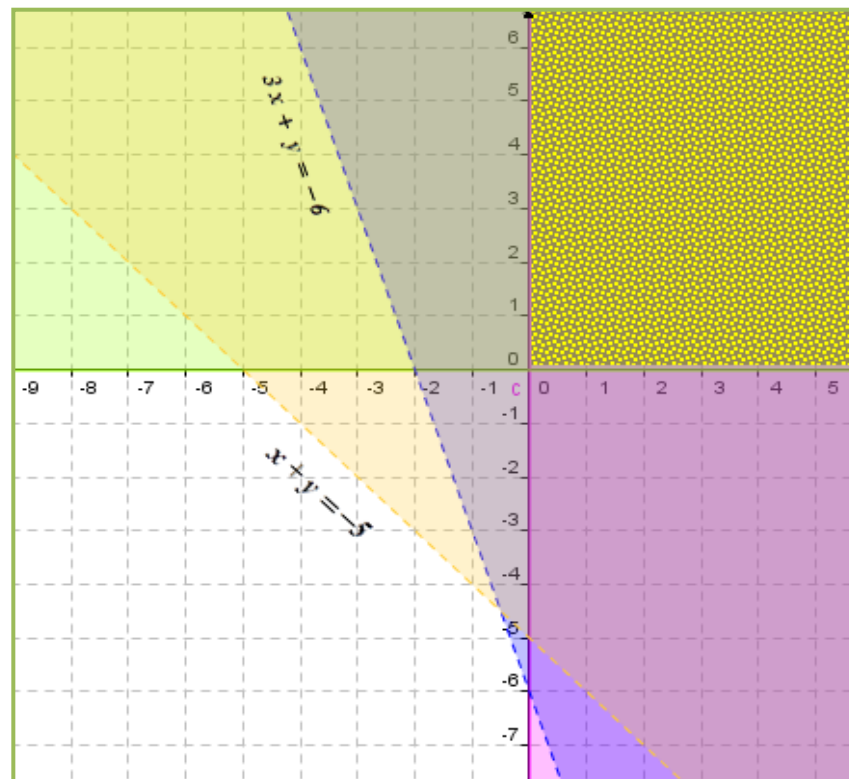




f)



g)





2)

- a) $x = 2 ; y = 1 ; Z = 4$
- b) $x = 4 ; y = 2 ; Z = 14$
- c) $x = 0 ; y = 1 ; Z = 3$
- d) $x = 80 ; y = 60 ; Z = 22000$
- e) No existe solución
- f) $x = 8 ; y = 2 ; Z = 8$

3)

- a) Solución óptima $x = 4, y = 4 \quad Z = 10$

b.1) Intervalos de Optimalidad $0,75 \leq c_1 \leq 1,5$
 $1 \leq c_2 \leq 2$

b.2) Intervalos de Factibilidad $12 \leq b_1 \leq 17,4$
 $10 \leq b_2 \leq 16$
 $24 \leq b_3 < \infty$

4/5)

- a) Solución óptima : $(x; y; S_1; S_2) = (0; 4; 4; 0) \quad Z = 8$

- b) Solución óptima : $(x; y; S_1; S_2; S_3) = (40; 40; 0; 0; 40) \quad z = 100$

- c) 1ra. Solución óptima $(x; y; S_1; S_2; S_3) = (4; 0; 0; 8; 2) \quad z = 12$ — 2da. Solución óptima : $(x; y; S_1; S_2; S_3) = (5; 1; 0; 8; 0) \quad z = 12$

Solución óptima : $(x; y) = \alpha(4; 0) + (1 - \alpha)(5; 1)$ siendo $z = 12$

- 6) a) $x_{op} = 5, \quad y_{op} = 7,5, \quad z_{m\acute{a}x} = 37,5$

- b) $\Delta c_1 = 1,5$ c) $c_2 = 6$



7)

a) Maximizar $W = 18y_1 + 48y_2 + 3y_3$ sujeta a
$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Maximizar $W = 12y_1 + 9y_2 + 15y_3$ sujeta a
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 30 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 40 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

8)

a) $x = 7$; $S_1 = 4$; $S_2 = 18$; $Z = 28$

b) $y = 1$; $z = 3,5$; $Z = 10$ o $z = 5$; $S_2 = 2$; $Z = 10$

c) $x = 1,4$; $y = 1,8$; $S_3 = 0,6$; $Z = 57$

9)

a) $I_1 = 1$; $I_2 = 3,5$; el requerimiento mínimo (18 g) del nutriente 3 se cumple con 4g de exceso. El costo mínimo es de 170 u.m.

b) Ninguna modificación



10)

- a) $P_1 = 8$; $P_2 = 2$
- b) $P_1 = 9$
- c) $P_1 = 4$; $P_2 = 6$; B Máximo = 26 ; Sobrante de insumo 2 = 80
- d) Se podría disminuir 80 unidades la disponibilidad del insumo 2 pues no se utilizan en la fabricación (son excedentes).
- e) Insumos saturados I_1 e I_3 . Estaría dispuesto a pagar hasta 0,20 u.m por unidad adicional del I_1 y 0,10 u.m por el I_3 pues tener una unidad más de ellos aumentarían mi beneficio en dichos valores.
- f) No, las tres restricciones no tienen un punto común en el polígono de soluciones factibles.
- g) No varía la estructura de solución, sólo el beneficio total. No cambia el polígono de soluciones factibles ni la pendiente de las rectas de isobeneficio.

11)

a) Minimizar $Z = x_A + x_B$ sujeta a

$$\begin{cases} 0,2x_A + 0,10x_B \geq 14 \\ 0,10x_A + 0,20x_B \geq 10 \\ 0,16x_A + 0,10x_B \geq 8 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 \end{cases}$$

- b) A cargo del alumno
- c) A cargo del alumno
- d) Las cantidades óptimas a procesar son 60 tn por día de crudo A y 20 tn por día de crudo B. La capacidad mínima de la planta es de 80 tn por día.
- e) A cargo del alumno
- f) Habrá excedente de kerosene.



12)

a) Minimizar $Z = 0,20.x_p + 0,10.x_h$ sujeta a

$$\begin{cases} x_p + x_h \geq 40 \\ 4x_p + 2x_h \geq 60 \\ x_h \geq 15 \\ x_p \geq 0, x_h \geq 0 \end{cases}$$

b) A cargo del alumno

c) La mezcla óptima es 0 galletitas con sabor a pollo y 40 con sabor a hígado por paquete. El costo mínimo es 4 u.m por paquete.

d) Se denomina isocoste

e) Se cumple con holgura el requerimiento de nutriente B con un excedente de 20

13)

a) Para fabricar una unidad del producto A, se necesita 1 unidad de materia prima, 2 horas hombre y U\$S 1000.

b) No se intersectan en un punto las tres restricciones. El sistema de ecuaciones resulta incompatible.

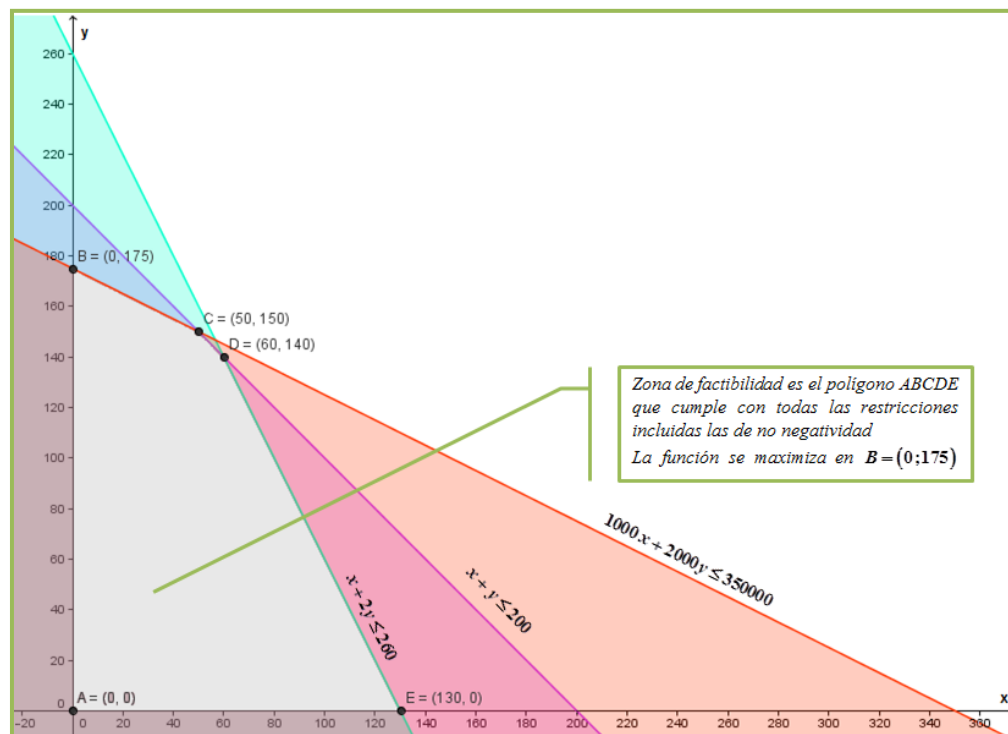
c) $k = 250$ d) Max. $Z = 100x + 400y$

Sujeto a

$$\begin{cases} x + y \leq 200 \\ 2x + y \leq 260 \\ 1000x + 2000y \leq 350.000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



e)



f)

	C_j	100	400	0	0	0		
	x_k	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	B	O
0	S_1	1	1	1	0	0	200	200
0	S_2	2	1	0	1	0	260	260
0	S_3	1000	2000	0	0	1	350000	175
	Z_0	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_0$	100	400	0	0	0		



0	S_1	1/2	0	1	0	-1/2000	25
0	S_2	3/2	0	0	1	-1/2000	85
400	S_3	1/2	1	0	0	1/2000	175
	Z_1	200	400	0	0	0,2	70000
	$C_j - Z_j$	-100	0	0	0	-0,2	

g) A partir de $C_2 = 200$; $200 \leq C_2$

h) No incorporaría unidades de materia prima, ni de mano de obra por tener sobrantes y estaría dispuesto a pagar un interés hasta del 20 %.

3) Las producciones óptimas son: 0 amplificadores y 100 altoparlantes. El beneficio máximo es 6000. Las nuevas producciones óptimas son 40 amplificadores y 60 altoparlantes, y el beneficio máximo será 4400 u.m.

4) Minimizar $Z = 6.x_A + 8.x_B$ sujeta a

$$\begin{cases} 10x_A + 5x_B \geq 45 \\ 7x_A + 7x_B \geq 56 \\ 5x_A + 15x_B \geq 60 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 \end{cases}$$

a) Se deben mezclar 6 u de A con 2 u de B

b) El costo mínimo es 52 u.m



5) a) Maximizar $Z = 18x_A + 9x_B$ sujeta a
$$\begin{cases} x_A \leq 2000 \\ x_B \leq 6000 \\ 24x_A + 8x_B \leq 60000 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 \end{cases}$$
 Las producciones óptimas son 500 cajas de jugo A y 6000 de jugo B

b) $\frac{p_A}{p_B} \geq 3$

6)

a) $x_{1op} = 0; x_{2op} = 40$

b) $s_1 = 0$ (recurso saturado) y $s_2 = 90$ (disponibilidad sin utilizar)

c) 0 u.m en el sector 2 y 6 u.m en el sector 1

d) El costo de oportunidad del producto X_1 es de 4 u.m

e) Podría disminuir hasta 25 u.m y la solución óptima hallada seguiría siendo óptima

18)

a) Maximizar $Z = 4x_A + 6x_B$ sujeta a
$$\begin{cases} 2x_A + 1x_B \leq 180 \\ 1x_A + 2x_B \leq 160 \\ 1x_A + 1x_B \leq 100 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 \end{cases}$$



b) Minimizar $W = 180y_A + 160y_B + 100y_C$ sujeta a
$$\begin{cases} 2y_A + 1y_B + 1y_C \geq 4 \\ 1y_A + 2y_B + 1y_C \geq 6 \\ y_A \geq 0, y_B \geq 0, y_C \geq 0 \end{cases}$$

c)

x_A	x_B	Z	
0	0	0	
0	80	480	
40	60	520	Solución óptima
80	20	440	
90	0	360	

d) En la tabla anterior

19) a) $x_{Aop} = 95$ $x_{Bop} = x_{Cop} = 0$ $B = 19000$

b) 5 u.m. por cada hora hombre adicional

c) \$0

d) 170 u.m