الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية اللامتجانسة (طريقة المعاملات غير المحددة)

يشتمل الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية اللامتجانسة التي هي :-

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

حيث يمكن كتابتها بالصورة

$$f(D)y = f(x)$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة $f(D) = 0$ والذي نسمية الدالة المتممة $\mathrm{C}(x)$ مضافا اليه الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة و يسمى أيضا بالتكامل الخاص $I(x)$ وعلى هذا فأن الحل العام للمعادلة

$$f(D)\,\mathrm{y} = f(x)$$

هو

$$y = C(x) + I(x)$$

أن عملية أيجاد الدالة المتممة للمعادلة المتجانسة $\mathrm{C}(x)$ معروفة سابقا, أما أيجاد الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة $I(x)$ فأن أحد طرق أيجاده هو فرض معادلات محدودة تعتمد على طبيعة الدالة $f(x)$ كأن تكون دالة أسية أو مثلثية أو متعددة حدود أو كتركيب من هذة الدوال و فيما يلي سوف نتناول هذة الحالات

<u>الحالة الاولى:</u> أذا كانت $f(x)$ متعددة حدود
أن طريقة أيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية اللامتجانسة هو ان نفرض الحل الخاص هو متعدد حدود درجتها مساوية لدرجة $f(x)$ و من ثم نحاول أيجاد معادلات متعددة الحدود المفروضة كما في المثال التالي

مثال: حل المعادلة التالية $3y'' - 5y' - 2y = 6x^2 - 7$ ؟

الحل :نجد أولا الدالة المتممة بأن نضع

$$3y'' - 5y' - 2y = 0$$

ثم نكتب المعادلة المميزة و هي

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$
$$(3m+1)(m-2) = 0$$
$$m = -\frac{1}{3}, 2$$

أذن الدالة المتممة هي

$$\mathrm{C}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{(-\frac{1}{3})x}$$

أما في الحل الخاص نلاحظ أن $f(x)=6x^2-7$ وهي متعدد حدود من الدرجة الثانية لذا نفرض لهذا الحل متعددة حدود من الدرجة الثانية و هي $y=ax^2+bx+c$ ولكي نجد المعاملات a,b,c نحتاج ثلاث معادلات يمكن التوصل لها بالتعويض عن y'',y',y بالمعادلة الاصلية وذلك بأن نجد أولا y'',y' من الفرضية

$$y'=2ax+b$$
$$y''=2a$$

وبالتعويض عن y'',y',y بالمعادلة , نجد أن

$$3.2a-5(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)=6x^2-7$$

حيث أنها صحيحة لجميع قيم x ولغرض أن نجد a,b,c نحاول أن نساوي معاملات قوى x وبالطريقة التالية

معامل x^2 : $-2a=6$ ومنها نحصل على $a=-3$

معامل x : $-10a-2b$ ومنها نحصل على $b=15$

الحد الخالي من x : $6a-5b-2c=-7$ ومنها نحصل على $c=-43$

أن الحل الخاص هو

$$I(x)=-3x^2+15x-43$$

و أن الحل العام للمعادلة هو

$$Y=C(x)+I(x)$$
$$Y=c_1e^{2x}+c_2e^{(-\frac{1}{3})x}-3x^2+15x-43$$