مثال/ حل المعادلة $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$

الحل/ لحل هذه المعادلة نكتبها اولا بدلالة المؤثر، وبالوضعية

$$(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$$

ثم نكتب هذه المعادلة بدلالة عواملها الجبرية

$$(D-2)(D+1)(D+3)y = 0$$

لقد حصلنا على هذه المعادلة عن طريق

$$D^3 + 2D^2 + D^2 - D^2 - 5D - 6 = 0$$
$$(D^3 + 3D^2) - (D^2 + 5D + 6) = 0$$
$$D^2(D+3) - [(D+3)(D+2)] = 0$$
$$(D+3)[D^2 - D - 2] = 0$$
$$(D+3)(D+1)(D-2) = 0$$

ثم نعوض $u = (D+1)(D+3)y$، وبالتعويض بالمعادلة الاصلية نحصل على معادلة من الرتبة الاولى

$$(D-2)u = 0$$
$$u' - 2u = 0$$

وحلها هو

$$ue^{-2x} = \int 0$$
$$u = k_1 e^{2x}$$

وبإرجاع التعويض عن u في $(D+1)(D+3)y$ تكون لدينا المعادلة

$$(D+1)(D+3)y = k_1 e^{2x}$$

نفرض ثانيه $Z = (D+3)y$، ونحصل على من هذه الفرضية على معادلة من الرتبة الاولى وهي

$$(D+1)Z = k_1 e^{2x}$$
$$Z' + Z = k_1 e^{2x}$$

ان عامل التكامل هو e^x وحلها هو

$$Ze^x = \frac{k_1}{3} e^{3x} + k_2$$
$$Z = \frac{k_1}{3} e^{2x} + k_2 e^{-x}$$

واخيرا نعوض عن Z بما يساويه وهو $(D+3)y$ يكون لدينا

$$(D+3)y = \frac{k_1}{3}e^{2x} + k_2 e^{-x}$$
$$y' + 3y = \frac{k_1}{3}e^{2x} + k_2 e^{-x}$$

وان عامل التكامل هو e^{3x} وحلها هو حل للمعادلة الاصلية هو

$$ye^{3x} = \frac{k_1}{15}e^{5x} + \frac{k_2}{2}e^{2x} + k_3$$

وهو الحل العام للمعادلة.

مما تقدم يمكن ان نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

وذللك بأن نكتب اولا المعادلة التفاضلية بدلالة المؤثر وبالصورة

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = f(x)$$

ومن ثم نكتب الجهة اليسرى لمؤثر متعدد الحدود بدلالة عواملها الجبرية

$$(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)y = f(x)$$

ثم نعوض $u_1 = (D-m_2)\cdots(D-m_n)y$ كما عملنا في المثالين السابقين أي تحويل المعادلة من الرتبة n الى معادلة خطية من الرتبة الاولى

$$(D-m_1)u_1 = f(x)$$
$$u_1' - m_1 u_1 = f(x)$$

وان $e^{-m_1(x)}$ عامل التكامل وحلها هو

$$u_1 = e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} f(x)dx$$

ثم نعوض عن u_1 بما يساويه وهو $(D-m_2)\cdots(D-m_n)y$

وتكون لدينا معادلة خطية من الرتبة $(n-1)$ وهي

$$(D-m_2)(D-m_3)\cdots(D-m_n)y = e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} f(x)dx$$

ثم نفرض $u_2 = (D-m_3)(D-m_4)\cdots(D-m_n)$

وبتعويضها بالمعادلة السابقة نحصل على معادلة خطية من الرتبة الاولى وهي

$$(D-m_2)u_2 = e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} f(x)dx$$

ان عامل التكامل لهذه المعادلة هو $e^{-m_2 x}$ وحلها هو

$$u_2 = e^{m_2 x}\int e^{-m_2 x} e^{m_1 x}\int e^{-mx} f(x)(dx)^2$$

ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة، حيث يمكن القول ان الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بصيغتها العامة هو

$$y = e^{m_n x}\int e^{-m_n x} e^{m_{n-1} x}\int \cdots\int e^{-m_1 x} f(x)(dx)^n$$

حيث يتم انجاز هذه التكاملات ممن الجهة اليمنى بصورة متتالية