مبرهنة 7: أذا كان b عددا فأن

$$f(D^2)\sin bx = f(-b^2)\sin bx$$
$$f(D^2)\cos bx = f(-b^2)\cos bx$$

حيث أن $f(D^2)$ متعدد الحدود مع تبديل D في D^2

البرهان:

$$D(\sin bx) = b\cos bx$$
$$D^2(\sin bx) = -b^2\sin bx$$
$$D^4(\sin bx) = b^4\sin bx = (-b^2)^2\sin bx$$

ولما كان

$$f(D^2)\sin bx = (D^{2n} + a_1 D^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1}D^2 + a_n)\sin bx$$

وبالتعويض بالمؤثرات نحصل على

$$f(D^2)\sin bx = [(-b^2)^n + a_1(-b^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-b^2) + a_n]\sin bx$$

وبالطريقة نفسها يمكن ان نبرهن

$$f(D^2)\cos bx = f(-b^2)\cos bx$$

مثال/ جد $(D^4 + 3D^2 - 1)\sin 2x$

الحل/ $b=2$ و $f(D^2) = D^4 + 3D^2 - 1$

$$f(-2^2) = [(-2^2)^2 + 3(-2^2) - 1] = 16 - 12 - 1 = 3$$
$$(D^4 + 3D^2 - 1)\sin 2x = [(-2^2)^2 + 3(-2^2) - 1]\sin 2x = 3\sin 2x$$

مثال/ جد $(D^4 - 2D^2)\cos 2x$

الحل/ $b=2$ و $f(D^2) = D^4 - 2D^2$

$$f(-2^2) = [(-2^2)^2 - 2(-2^2)] = 16 + 8 = 24$$
$$(D^4 - 2D^2)\cos 2x = [(-2^2)^2 - 2(-2^2)]\cos 2x = 24\cos 2x$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية بتخفيضها للمرتبة الاولى:

ان واحدة من طرق حل المعادلة التفاضلية الخطية هو تخفيضها الى معادلة خطية من الرتبة الاولى التي درسناها، انه من المفيد قبل اعطاء هذه الطريقة بصورتها العامة، ينبغي ان نتناول بعض الامثلة التوضيحية.

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $y''-2y'-3y=5e^{-2x}$

الحل/ لحل هذه المعادلة نكتبها بدلالة المؤثر بالصورة

$$(D^2-2D-3)y=5e^{-2x}$$

ثم نكتب الجهة اليسرى للمعادلة بدلالة عواملها الجبرية فتصبح

$$(D+1)(D-3)y=5e^{-2x}$$

نفرض $u=(D-3)y$ ثم نعوضها بالمعادلة السابقة ونحصل على

$$(D+1)u=5e^{-2x}$$

وهذه معادلة خطية من الرتبة الاولى، فيها e^x عامل التكامل وحلها هو

$$ue^x=-5e^{-x}+c$$
$$u=-5e^{-2x}+ce^{-x}$$

وبإرجاع التعويض عن u بما يساوي وهو $(D-3)y$ ، تكون لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من التربة الاولى، وهي

$$(D-3)y=-5e^{-2x}+ce^{-x}$$
$$y'-3y=-5e^{-2x}+ce^{-x}$$

ويكون e^{-3x} عامل التكامل لها، وحلها الذي هو حل المعادلة الاصلية، وهو

$$ye^{-3x}=e^{-5x}-\frac{1}{4}ce^{-4x}+c_1$$
$$y=e^{-2x}-\frac{c}{4}e^{-x}+c_1e^{3x}$$

وهو الحل العام للمعادلة.