18 de Noviembre.

Ejemplo. Exprese la aplicación lineal f como la composición de una rotación, una ampliación y una traslación. 08/11/2021

a) $f(z) = (3-2i)z + 12$

$= |3-2i| \cdot \underbrace{\frac{(3-2i)}{|3-2i|}}_{\text{Rotación}} \cdot z + 12$, $|3-2i| = \sqrt{13}$

$R(z) = \frac{3-2i}{|3-2i|} z \Rightarrow f(z) = \underbrace{\sqrt{13} \cdot R(z)}_{\text{Ampliación}} + 12$

$M(z) = \sqrt{13} \cdot z \Rightarrow f(z) = \underbrace{M(R(z)) + 12}_{\text{traslación}}$

$T(z) = z + 12 \Rightarrow f(z) = T[M(R(z))]$

$\Rightarrow f = T \circ M \circ R$.

b) $f(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - \sqrt{3}i$

$= \frac{1}{2}\underbrace{(-z)}_{R} + (1-\sqrt{3}i)$ $|-1| = 1$

$R(z) = -z$, $|-1| = 1 \Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{M} R(z) + (1-\sqrt{3}i)$

$M(z) = \frac{1}{2} \cdot z \Rightarrow f(z) = \underbrace{M(R(z)) + (1-\sqrt{3}i)}_{T}$

$T(z) = z + (1-\sqrt{3}i) \Rightarrow f(z) = T[M(R(z))] = (T \circ M \circ R)(z)$

Imagen de un punto mediante una aplicación lineal

$f(z) = az + b$, $a \neq 0$

$f(z) = (T \circ M \circ R)(z) = T(M(\underbrace{R(z)}))$

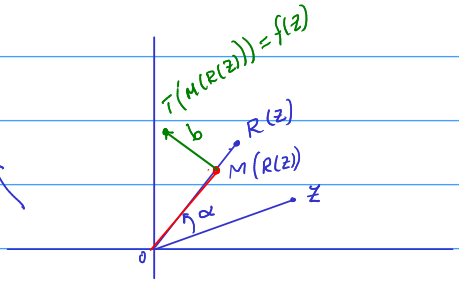
$R(z) = \frac{a}{|a|} \cdot z$, $\alpha = \arg(a)$, $M(z) = |a| \cdot z$, $T(z) = z + b$.

Si $w_0 = f(z_0)$ se dibuja en el mismo plano que z_0, entonces w_0 se obtiene de la sgte manera.

1°. Rotamos z un ángulo $\alpha = \arg(a)$.

2°. Ampliar $R(z)$ por $|a|$.

3°. Trasladar $M(R(z))$ a través de b.



Ejemplo 1. Encuentre la imagen del rectángulo S de vértices $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ y $(0,0)$ mediante la aplicación lineal $f(z) = (1-i)z + (2+i)$.

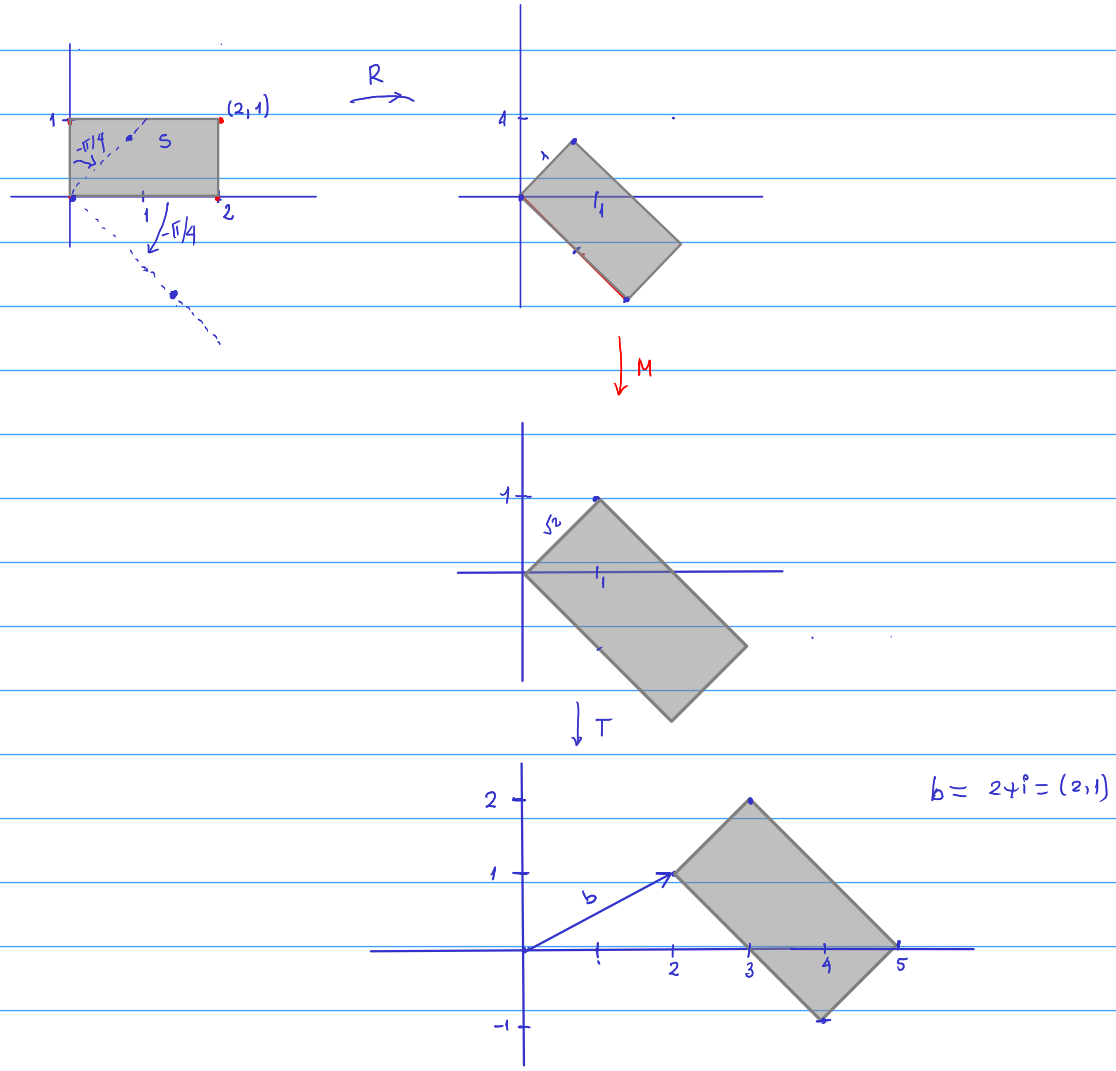
Solución. $f(z) = \sqrt{2}\cdot\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}z + (2+i)$ $\qquad |1-i| = \sqrt{2}$

$R(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)z$, $\qquad \alpha = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$M(z) = \sqrt{2}\,z$, $\sqrt{2} > 1$ (dilatación)

$T(z) = z + (2+i)$

$f(z) = (T \circ M \circ R)(z)$



$\therefore$ $f(S)$ = Rectángulo de vértices $(4,-1)$, $(5,0)$, $(3,2)$ y $(2,1)$.

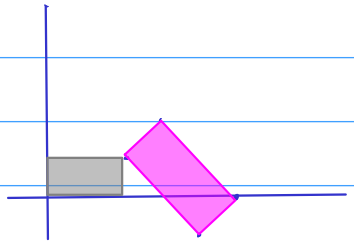
Comprobando

$f(2,0) = (1-i)2 + (2+i) = 4 - i = (4,-1)$

$f(2,1) = (1-i)(2+i) + (2+i) = 5 = (5,0)$

$f(0,1) = (1-i)(i) + (2+i) = 3 + 2i = (3,2)$

$f(0,0) = 2+i = (2,1)$



Ejemplo 2. Determine la aplicación lineal f tal que mapea el conjunto S en el conjunto S', en los sgtes casos.

a) S es el triángulo de vértices $0, 1$ y $1+i$, S' es el triángulo de vértices $2i$, $3i$ y $-1+3i$.

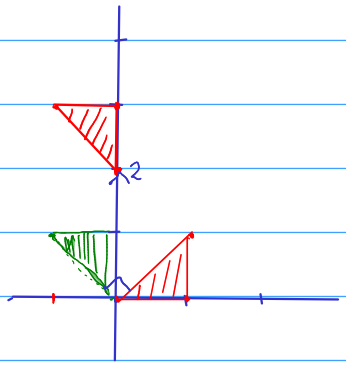
Sol. Sea $f(z) = az + b$.

$f(0) = b = 2i \rightarrow b = 2i$

$f(1) = a + b = 3i \rightarrow a = i$

$\therefore f(z) = iz + 2i$

Otra forma.



$R(z) = iz$ $\quad \alpha = \arg(i) = \pi/2$

$T(z) = z + 2i$ $\quad b = (0,2) = 2i$

$\Rightarrow f(z) = (T \circ R)(z)$

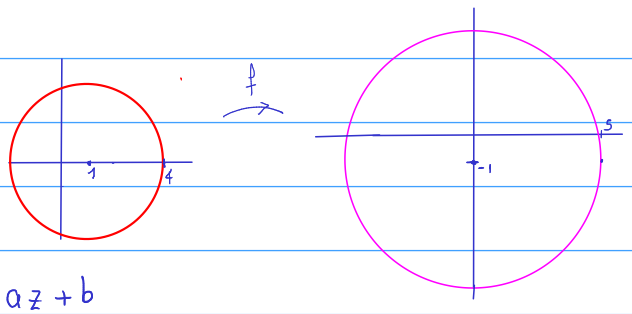
$= T(R(z))$

$= T(iz)$

$f(z) = iz + 2i$.

b) S es la circunferencia $|z-1| = 3$, S' es la circunferencia $|w+i| = 5$.

Solución.



$f(z) = az + b$

$f(1) = -i$ ✓ $\quad a + b = -i$

$f(4) = 5 - i \quad 4a + b = 5 - i$

$a + b = -i$

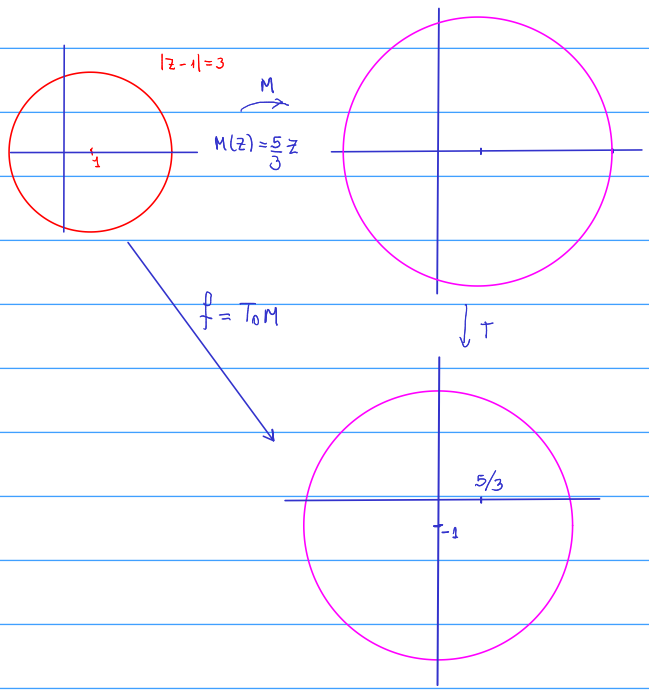
$4a + b = 5 - i$

$3a = 5 \rightarrow a = 5/3$

$\rightarrow b = -i - 5/3$

$\therefore f(z) = \frac{5}{3}z + \left(\frac{-5}{3} - i\right)$

Otra forma.



$M(z) = az$

$|M(z) - M(1)| = 5$

$|az - a| = 5$

$a|z-1| = 5$

$a = \frac{5}{3}$

$M(1) = \frac{5}{3}$

$T(z) = z + b$

$T(5/3) = \frac{5}{3} + b = -i$

$\Rightarrow b = -i - \frac{5}{3}$

$T(z) = z + \left(-\frac{5}{3} - i\right)$

$$f(z) = (T \circ M)(z) = T\left(\frac{5}{3}z\right)$$

$$\therefore\ f(z) = \frac{5}{3}z + \left(-\frac{5}{3} - i\right).$$

Inversión

10/11/2021

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

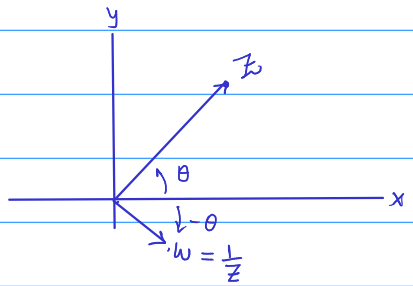
Propiedades

1) $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$

2) Si $z = re^{i\theta}$, entonces $f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = w$

$w = f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow |w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$ y $\arg(w) = -\theta = -\arg(z)$

$\Rightarrow$ $\boxed{|w| = \frac{1}{r} \text{ y } \arg(w) = -\arg(z).}$

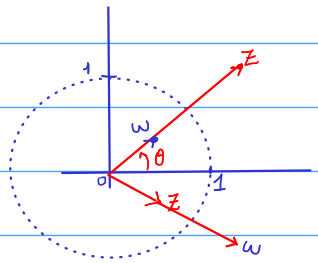


$$|w| = \frac{1}{|z|}, \quad \arg(w) = -\arg(z)$$

3) La inversión es la composición de una inversión en la circunferencia unitaria y una conjugación.

Inversión en la circunferencia unitaria: $w = g(z) = \frac{1}{r} e^{i\theta}$, $z = re^{i\theta}$

$$w = \frac{1}{r} e^{i\theta} \Rightarrow |w| = \frac{1}{r} \text{ y } \arg(w) = \arg(z).$$



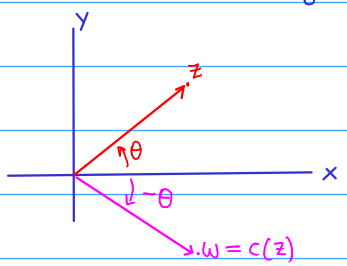
$|z| > 1 \Rightarrow |w| < 1$

$|z| < 1 \Rightarrow |w| > 1$

Conjugación: $c(z) = \bar{z}$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$w = c(z) = \bar{z} \Rightarrow |w| = r \text{ y } \arg(w) = -\theta = -\arg(z).$$



Por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}$$

$$= c\left(\frac{1}{r} e^{i\theta}\right)$$

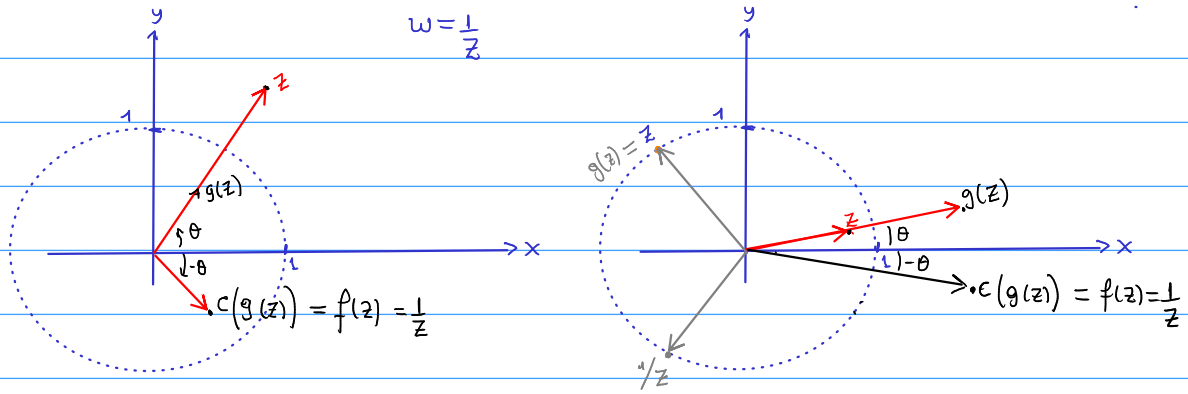
$$= c\left(g(z)\right)$$

$$f(z) = (c \circ g)(z)$$

Imagen de un punto bajo una inversión.

1º. Invertimos en la circunferencia unitaria (g)

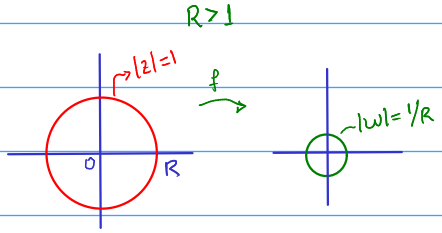
2º. Reflejar el resultado con respecto del eje real (conjugación c)



Teorema. La inversión aplica rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Algunos casos.

1) Consideremos la circunferencia $|z| = R$. $(R>0)$.

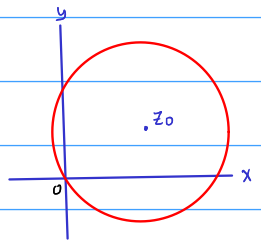


$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow |w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R} \Rightarrow |w| = \frac{1}{R}$$

$\therefore$ La imagen de la circunferencia $|z| = R$, es la circunferencia $|w| = \frac{1}{R}$.

2) Ahora, consideremos la circunferencia $|z - z_0| = R$, $R = |z_0|$.

Esta circunferencia pasa por el origen.



Si $w = \frac{1}{z}$ entonces

$$|z - z_0| = R \iff \left|\frac{1}{w} - z_0\right| = R$$

$$\iff \left|\frac{1 - z_0 w}{w}\right| = R$$

$$\iff |1 - z_0 w| = R\,|w| = |z_0|\,|w| = |z_0 w|$$

$$\iff |1 - z_0 w| = |z_0 w|$$

$$\iff |1 - z_0 w|^2 = |z_0 w|^2$$

$$\iff (1 - z_0 w)\overline{(1 - z_0 w)} = (z_0 w)\overline{(z_0 w)}$$

$$\iff (1 - z_0 w)(1 - \overline{z_0} \overline{w}) = (z_0 w)(\overline{z_0}\,\overline{w})$$

$$\Leftrightarrow 1 - (z_0 w + \overline{z_0 w}) + z_0 w \cdot \overline{(z_0 w)} = (z_0 w)\,\overline{(z_0 w)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\,\mathrm{Re}(z_0 w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Re}(z_0 w) = 1/2.}$$

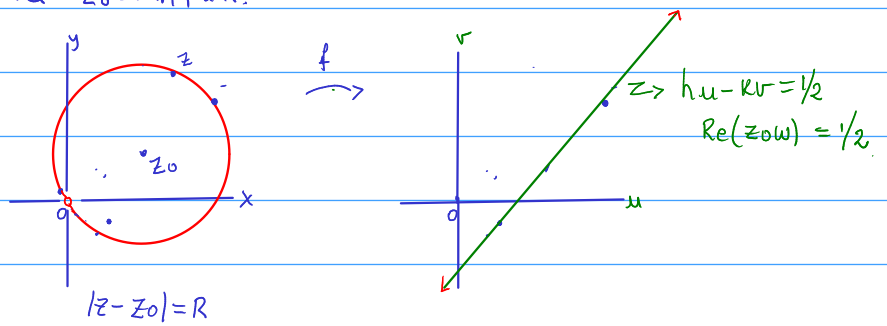
$w = u + iv$, $z_0 = h + ik$

$z_0 w = (hu - kv) + i(hv + uk)$

$\mathrm{Re}(z_0 w) = hu - kv$

$$\Leftrightarrow \boxed{hu - kv = 1/2.}$$ $\rightarrow$ Recta en el plano w.

∴ La imagen de $|z - z_0| = R$ con $R = |z_0|$ es la recta $hu - kv = 1/2$ donde $z_0 = h + ik$.



3) Consideremos la circunferencia $|z - z_0| = R$ con $R \neq |z_0|$.

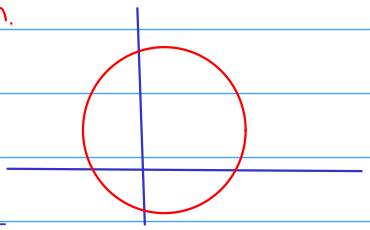
Esta circunferencia no pasa por el origen.

Si $w = 1/z$ entonces

(*) $|z - z_0| = R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - z_0\right| = R$

$$\Leftrightarrow \left|w - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}\right| = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$$

Es una circunferencia



$R \neq |z_0|$

$R^2 \neq |z_0|^2 \rightarrow |z_0|^2 - R^2 \neq 0$.

∴ La imagen de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia, es decir, la imagen de $|z - z_0| = R$ con $R \neq |z_0|$ es la circunferencia $\left|w - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}\right| = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$ en el plano w.

Ejercicio: Probar (*) Hasta 6:00 PM.

11/11/2021

Ejemplos. Determine la imagen bajo la aplicación inversa del conjunto S en los sgtes casos. $\left(f(z)=\frac{1}{z}\right)$

a) S es la circunferencia $|z|=5$

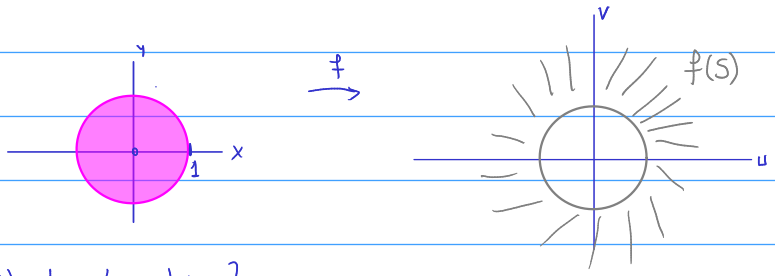
Sol. $w=\frac{1}{z} \Rightarrow |w|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{5} \Rightarrow |w|=1/5.$

$\therefore f(S)$ es la circunferencia $|w|=1/5$ en el plano w.

b) S es el disco $|z|\leq 1$

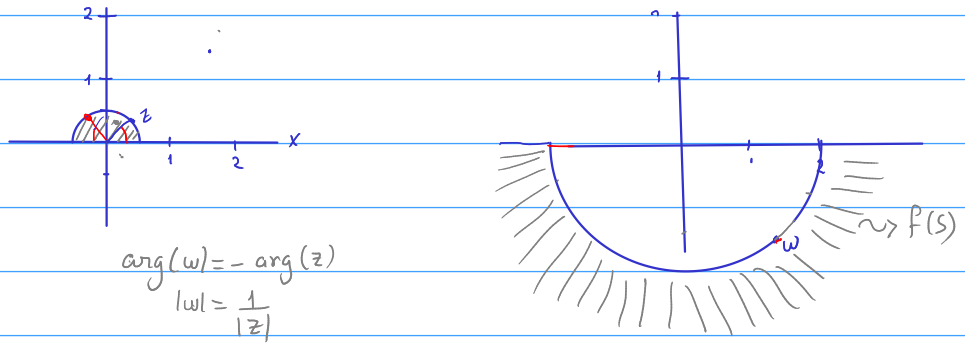
Sol. $w=\frac{1}{z} \Rightarrow |w|=\frac{1}{|z|}.$

$|z|\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|}\geq 1 \Rightarrow |w|\geq 1.$



$\therefore f(S)=\{w / |w|\geq 1\}$

c) $S=\{z;\ |z|\leq 1/2 \wedge 0\leq \arg(z)\leq \pi\}$



$|z|\leq 1/2 \Rightarrow \frac{1}{|z|}\geq 2 \Rightarrow |w|\geq 2.$

$0\leq \arg(z)\leq \pi \Rightarrow -\pi\leq -\arg(z)\leq 0$

$\Rightarrow -\pi\leq \arg(w)\leq 0.$

$\therefore f(S)=\{w;\ |w|\geq 2 \wedge -\pi\leq \arg(w)\leq 0\}$

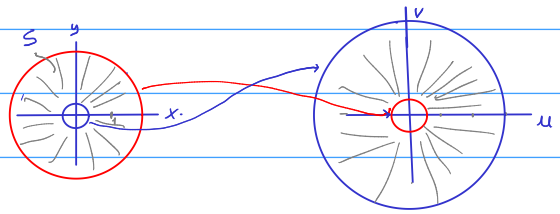
d) $S = \{z;\ \frac{1}{3} \le |z| \le 2\}$

Sol.

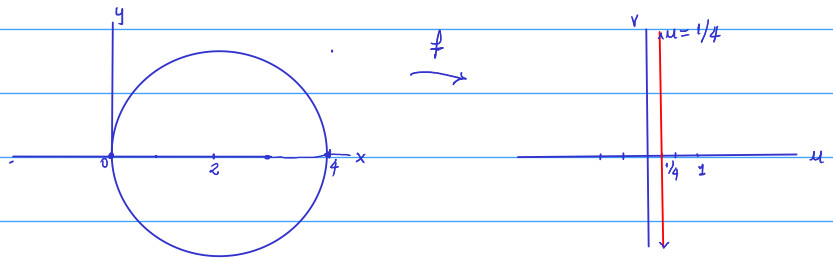
$$\frac{1}{3} \le |z| \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{|z|} \le 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le |w| \le 3$$

$$\Rightarrow f(S) = \{w / \frac{1}{2} \le |w| \le 3\}$$



e) S es la circunferencia $|z-2| = 2$



Sol: La circunferencia pasa por el origen, por tanto, su imagen es una recta.

La ecuación de está recta está dado por

$$hu - kv = 1/2.$$

donde $z_0 = h + ik$.

Aquí $z_0 = 2$, entonces $h = 2$, $k = 0$. Reemplazando tenemos

$$2u = 1/2$$

$$\boxed{u = 1/4}$$

∴ $f(S)$ es la recta $u = 1/4$ en el plano w.

Otra forma

Si $w = \frac{1}{z}$ entonces $\left|\frac{1}{w} - 2\right| = 2$

$$|1 - 2w|^2 = 4|w|^2$$

$$(1-2w)\overline{(1-2w)} = 4w\bar{w}$$

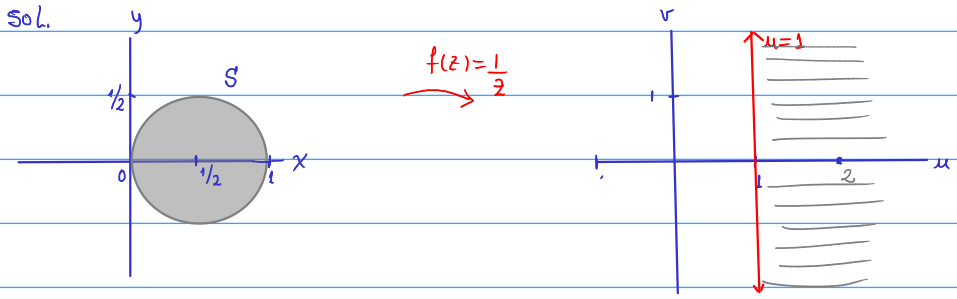
$$1 - 2(w+\bar{w}) + 4w\bar{w} = 4w\bar{w} \qquad , \ w = u+iv, \quad \bar{w} = u-iv$$

$$1 - 2(2u) = 0$$

$$u = 1/4$$

f) S es el círculo $|z-1/2| \leq 1/2$

Sol.



- La circunferencia $|z-1/2|=1/2$ pasa por el origen, entonces su imagen es una recta.

$z_0 = 1/2 = h+ik \Rightarrow h=1/2 \wedge k=0$

Reemplazando en $hu-kv=1/2$ tenemos:

$$\frac{1}{2}u = 1/2$$

$$u = 1.$$

- Elijamos $z=1/2$. Entonces $f(1/2)=2$. Por tanto $f(S)=\{w/\ Re(w)\geq 1\}$

Otra forma.

$|z-1/2| \leq 1/2$

$w=1/2 \Rightarrow \left|\frac{1}{w}-\frac{1}{2}\right| \leq 1/2$

$$\left|\frac{2-w}{2w}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$|2-w| \leq |w|$$

$$|2-w|^2 \leq |w|^2 \quad , \ w=u+iv$$

$$|(2-u)+iv|^2 \leq |u+iv|^2$$

$$(2-u)^2+v^2 \leq u^2+v^2$$

$$\cancel{u^2}-4u+4+\cancel{v^2} \leq \cancel{u^2}+\cancel{v^2}$$

$$1 \leq u = Re(w)$$

$\therefore f(S)=\{w/\ Re(w)\geq 1\}$

g) S es la circunferencia $|z-(1+i)| = \sqrt{2} = R$.

Sol.

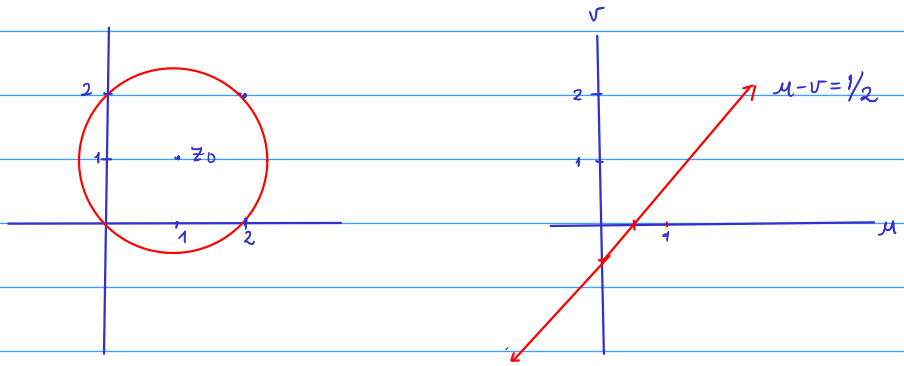
$z_0 = 1+i \Rightarrow |z_0| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow |z-(1+i)| = \sqrt{2}$ pasa por el origen.

$\Rightarrow f(S)$ es una recta.

$f(S)$: $hu - kv = 1/2$, $z_0 = h+iv = 1+i \Rightarrow h=1, k=1$

$u - v = 1/2$.



∴ $f(S)$ es la recta $u-v=1/2$ en el plano w.

h) $S = \{z / |z-(1+i)| > \sqrt{2}\}$

Aplicación fraccional lineal o bilineal

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

donde a y b son constantes complejas tq $ad-bc \neq 0$.

El Dominio de definición de f es $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ si $c \neq 0$. Si $c=0$, el dominio es todo $\mathbb{C}$.

- $c=0 \Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{d} = \left(\frac{a}{d}\right)z + \left(\frac{b}{d}\right)$ es lineal

- $a=d=0$, $b=c \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z}$ inversión

- La condición $ad-bc \neq 0$ garantiza que f no sea una función constante.

  Es decir,

  $ad-bc=0 \Rightarrow f(z) = cte.$