Continuidad de funciones complejas

Def. Una función $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, es continua en $z_0 \in D$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

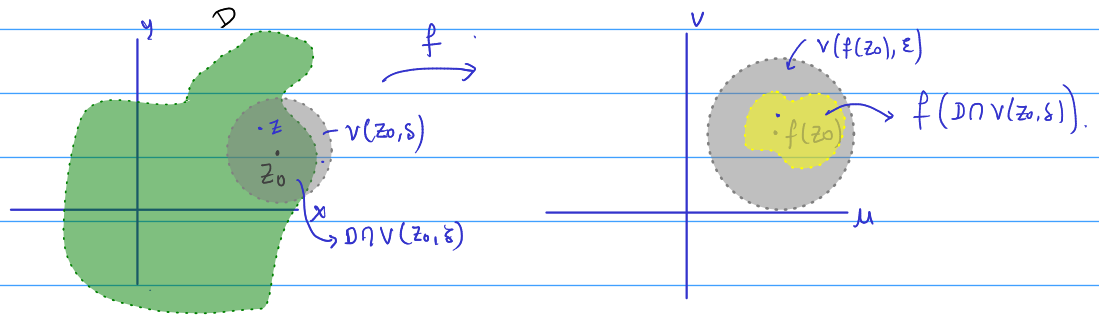
$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que } z \in D \text{ y } |z - z_0| < \delta.$$

Simbólicamente,

$$f \text{ es continua en } z_0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0;\ \forall z \in D,\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

En términos de vecindades

$$f \text{ es continua en } z_0 \iff \forall\, V(f(z_0), \varepsilon),\ \exists\, V(z_0, \delta);\ f(D \cap V(z_0, \delta)) \subset V(f(z_0), \varepsilon)$$



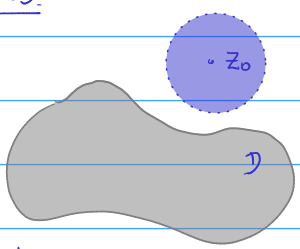
1) Si $z_0 \in D'$, entonces

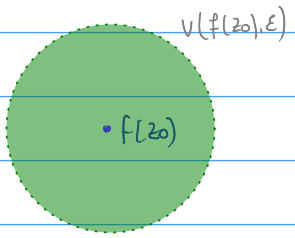
$$f \text{ continua en } z_0 \iff \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

2) Si $z_0 \notin D'$, es decir, z_0 es un punto aislado, entonces f es continua en z_0.

En efecto. Si z_0 es punto aislado de D, existe una $V(z_0, \delta)$ tq $V(z_0, \delta) \cap D = \{z_0\}$

$z_0 \in D$





Por tanto

$$\forall\, V(f(z_0), \varepsilon),\ \exists\, V(z_0, \delta);\quad f(D \cap V(z_0, \delta)) = f(\{z_0\}) \subset V(f(z_0), \varepsilon) \quad \checkmark$$

Así tenemos que f es continua en z_0.

Teorema 1. Si f y g son continuas en z_0, entonces $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ son también continuas en z_0, el último siempre que $g(z_0)\neq 0$.

Teorema 2. Si f es continua en z_0 y g es continua en $f(z_0)$, entonces $g\circ f$ es continua en z_0.

27/10/2021

Teorema 3. Sea $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ una región y $z_0 \in D$.

f es continua en $z_0 \iff \forall (z_n)$ en D, $\lim z_n = z_0 \Rightarrow \lim f(z_n) = f(z_0)$

Prueba.

$\Rightarrow$) Dado (z_n) una sucesión cualesquiera en D tq $\lim z_n = z_0$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualesquiera. Como f es continua en z_0, entonces para $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tq $\forall z \in D$,

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \qquad (\alpha)$$

Por otro lado, como $\lim z_n = z_0$, entonces para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \delta.$$
$$\Rightarrow |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$$

En resumen hemos demostrado

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Esto significa que $\lim f(z_n) = f(z_0)$.

$\Leftarrow$) Por contradicción. Supongamos que f no es continua en z_0. Entonces

$$\exists \varepsilon > 0;\ \forall \delta > 0,\ \exists z \in D;\ |z - z_0| < \delta \wedge |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon.$$

En particular para

$$\delta = \tfrac{1}{n} > 0,\ \exists z_n \in D;\ |z_n - z_0| < \tfrac{1}{n} \wedge |f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon.$$

Si $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim |z_n - z_0| = 0$, por tanto, $\lim (z_n - z_0) = 0$, de donde $\lim z_n = z_0$.

Por otro lado, si $|\underbrace{f(z_n)}_{w_n} - \underbrace{f(z_0)}_{w_0}| \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim f(z_n) \neq f(z_0)$.

En resumen, hemos probado que

$$\exists\,(z_n) \text{ en } D \;;\; \lim z_n = z_0 \;\wedge\; \lim f(z_n) \neq f(z_0).$$

Def. Una función $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en D si es continua en todos los puntos de D.

Ejemplos

1. $f(z) = \bar{z}$ es continua en $\mathbb{C}$.

En efecto. Sea $z_0 = x_0 + i y_0$.

$$f(z) = \bar{z} = \underbrace{x}_{u} + i \underbrace{(-y)}_{v}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (-y) = x_0 + i(-y_0) = \bar{z}_0$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

$\Rightarrow$ f es continua en z_0. Como $z_0 \in \mathbb{C}$ es cualquiera, entonces f es continua en $\mathbb{C}$.

2. $f(z) = z^2$ es continua en $\mathbb{C}$. En general $f(z) = z^n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ es continua en $\mathbb{C}$.

En efecto, Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ cualesquiera.

$f_1(z) = z$ es continua en z_0 $\Rightarrow$ $f_1 \cdot f_1$ es continua en z_0

$$(f_1 \cdot f_1)(z) = f_1(z) \cdot f_1(z) = z^2 = f(z)$$

$\Rightarrow$ f es continua en z_0.

Como z_0 es cualquiera, f es continua en $\mathbb{C}$.

3. $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es continua en $\mathbb{C}$.

En efecto: la continuidad de f se sigue de los ejemplos 1 y 2; y del teorema 1.

4. $f(z) = \frac{1}{z}$ es continua $\mathbb{C} - \{0\}$.

En efecto: $f: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$

Dado $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ cualesquiera.

$f_1(z) = 1$ es continua en z_0
$f_2(z) = z$ es continua en z_0
$\Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(z) = \frac{1}{z}$ es continua en z_0 (Por teorema 1)

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z}$ es continua en z_0

Como $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ es cualesquiera, entonces f es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Otra forma:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

$z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0 \Rightarrow |z_0| = x_0^2 + y_0^2 > 0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{x}{x^2+y^2} + i \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} + i \left(\frac{-y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{z_0}$$

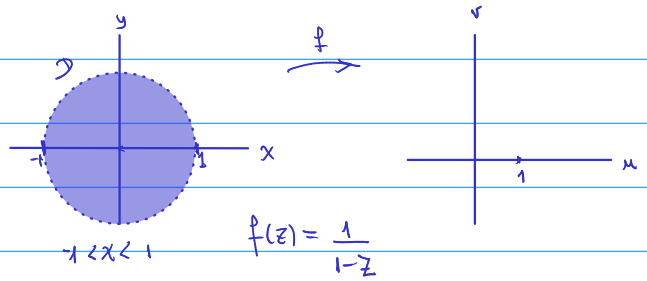
$$= f(z_0)$$

$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$\Rightarrow f$ es continua en z_0 y como $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ es cualesquiera, entonces f es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$.

4. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es continua para z tq $|z| < 1$.

En efecto: $D = \{z;\ |z| < 1\}$, $f: D \to \mathbb{C}$.



Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Entonces $|z_0| < 1$.

$$|z_0| < 1 \Rightarrow z_0 \neq 1.$$
$$\Rightarrow 1 - z_0 \neq 0.$$

Luego,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{1-z} = \frac{\lim_{z \to z_0} 1}{\lim_{z \to z_0} (1-z)} = \frac{1}{1-z_0} = f(z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

$\Rightarrow f$ continua en z_0.

Otra forma: $|z_0| < 1 \Rightarrow z_0 \neq 1$

$f_1(z) = 1$ continua en z_0
$f_2(z) = 1 - z$ continua en z_0

$$\Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(z) = \frac{1}{1-z} \text{ es cont en } z_0$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ cont en } z_0.$$

5. $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & z \neq 1 \\ i & z = 1 \end{cases}$ ¿f es continua en $z_0 = 1$?

Solución: $f(1) = i$

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z^2 + 2z) = 1^2 + 2(1) = 3 \neq i = f(1)$$

$$\lim_{z \to 1} f(z) \neq f(1)$$

$\Rightarrow f$ no es continua en $z_0 = 1$.

28/10/2021

6. Dado $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}, & 0<|z|<1\\ 1, & z=0\end{cases}$

¿f es continua en $z=0$?

Solución: $D=\{z;\ |z|<1\}$ dominio de definición de f.

Sea (z_n) definida por $z_n=\frac{1}{n}+\frac{i}{n}$. Entonces,

(i) $\lim z_n = 0$.

ii) $\lim f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{i}{n}} = \lim \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i}\dfrac{(1-i)}{(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$

$= \frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

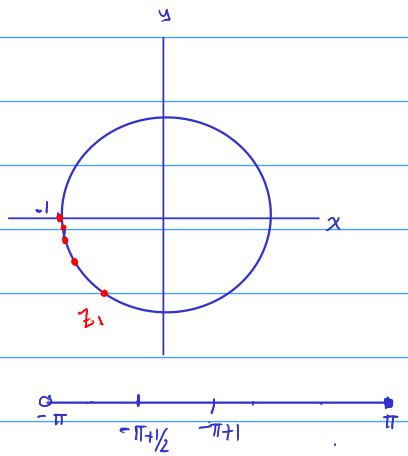
$\neq 1 = f(0)$

Por teorema 3, f no es continua en $z=0$.

7. $f(z)=z^{1/2}$ no es continua en $z=-1$, si $-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leq\pi$.

(Se considera $f(z)$ como el valor principal de $z^{1/2}$)

Solución. $D=\mathbb{C}$ dominio de definición.



$f(-1)=(-1)^{1/2}=i$

Sea (z_n) tq.

$|z_n|=1$ y $\mathrm{Arg}(z_n)=-\pi+\frac{1}{n}$

Entonces $\lim z_n = \lim e^{i(-\pi+\frac{1}{n})}$

$= \lim \cos\left(-\pi+\frac{1}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\pi+\frac{1}{n}\right)$

$= -1.$

Por otro lado,

$f(z_n)=(z_n)^{1/2}=|z_n|^{1/2}\cdot e^{i\,\mathrm{Arg}(z_n)/2} = \cos\left(\dfrac{-\pi+1/n}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{-\pi+1/n}{2}\right)$

$\to \lim f(z_n) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

$= -i \neq i = f(-1)$

Entonces f no es continua en $z_0=-1$.

Limites infinitos y al infinito

Consideremos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como el plano complejo extendido, donde ∞ puede ser considerado como un "número" satisfaciendo las reglas

$$\infty \pm z = \infty = z \pm \infty \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \ (z \neq \infty)$$

$$\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \quad \text{para} \quad z \neq 0$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad z \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{z}{0} = \infty, \quad z \neq 0.$$

Decir que $z \to \infty$ significa que z se aleja cada vez del origen, o es lo mismo que decir que $|z| \to +\infty$.

Def.

Límites infinitos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \forall M > 0;\ \exists \delta = \delta(M) > 0;\ \forall z \in D,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$$

Límites al infinito.

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists M = M(\varepsilon) > 0;\ \forall z \in D;\ |z| > M \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Ejemplos

1) $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \frac{1}{0} = \infty$

Tenemos que

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad z \to 0,$$

esto quiere decir que $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$.

2) $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = \frac{1}{\infty} = 0$

En efecto:

$z \to \infty$ significa que $|z| \longrightarrow +\infty$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{1}{|z|} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{z}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0.$$

3) $\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{0} = \infty.$

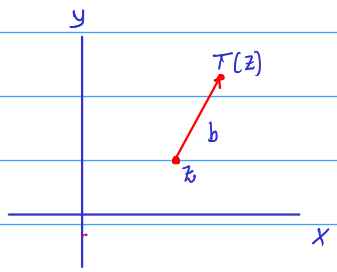
Transformaciones bilineal y aplicaciones

Aplicaciones básicas o mapeos lineales

1. Traslación. $T(z) = z + b, \quad b \neq 0$

$z = (x, y), \quad b = (x_0, y_0)$

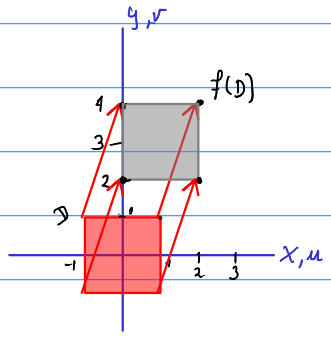
$T(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$



T traslada el punto z a lo largo del vector b al punto T(z). (z sería el punto inicial de b y T(z) el punto terminal).

Ejemplo 1. Encuentre la imagen del cuadrado D con vértices (1,1), (-1,1), (-1,-1) y (1,-1) bajo la aplicación lineal $f(z) = z + (1+3i)$.

Solución. $f(z) = z + (1+3i)$ es una traslación, donde $b = (1+3i)$.



$f(z) = (x+1, y+3)$

$f(1,1) = (2,4)$

$f(-1,1) = (0,4)$

$f(-1,-1) = (0,2)$

$f(1,-1) = (2,2)$.

Por tanto, $f(D)$ es un cuadrado de vértices (2,4), (0,4), (0,2) y (2,2).

2. Rotación $R(z) = az$, $|a| = 1$.

04/11/2021

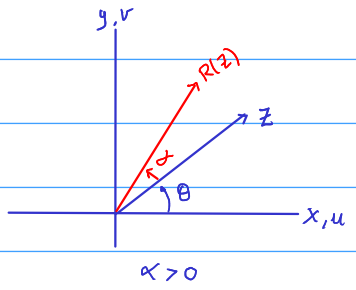
Supongamos que $\text{Arg}(a) = \alpha$. Si $|a| = 1$, entonces

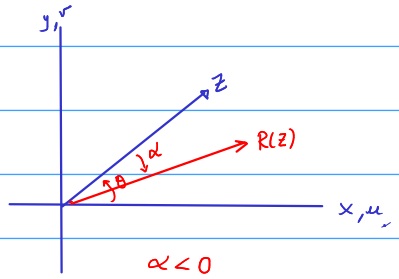
$$a = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$$

Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$R(z) = e^{i\alpha} \cdot re^{i\theta} = re^{i(\alpha+\theta)}$$

de aquí tenemos que $|R(z)| = r = |z|$ y $\arg(R(z)) = \alpha + \theta = \text{Arg}(z) + \alpha$



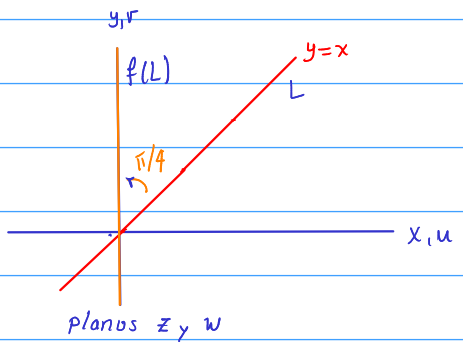


α se denomina ángulo de rotación

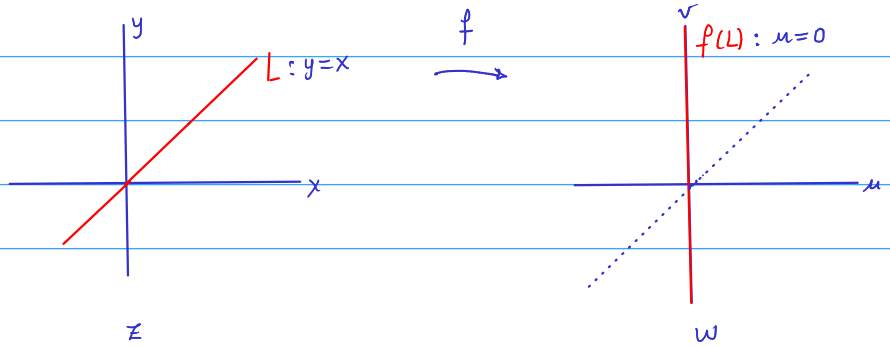
$R(z)$ es la rotación de z un ángulo α.

Ejemplo 1. Encuentre la imagen de la recta $y = x$ del plano z en el plano w mediante la aplicación $f(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z$.

Sol. $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |a| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$. Entonces f es una rotación donde el ángulo de rotación es $\alpha = \text{Arg}(a) = \frac{\pi}{4}$.



$L: y = x \Rightarrow f(L): u = 0$



Comprobando. Si

$$u + iv = w = f(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x+iy) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - y + i(x+y)\right)$$

entonces

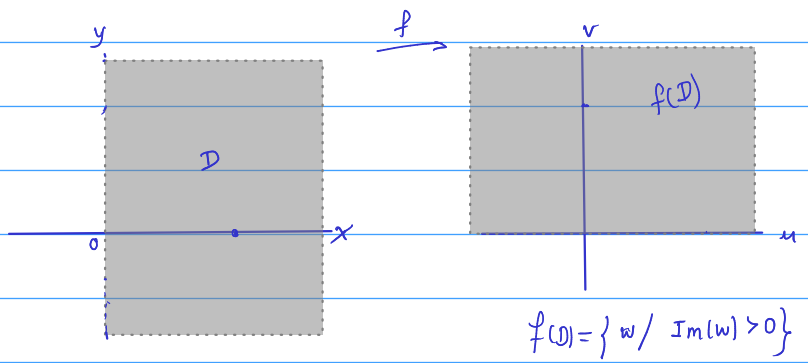
$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \quad \wedge \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y).$$

Si $y = x$, entonces $u = 0$. Por tanto, la imagen de la recta $y = x$, es la recta $u = 0$.

Ejemplo 2. Determine la imagen de la región $D = \{z \in \mathbb{C} / \ Re(z) > 0\}$ bajo la aplicación

$$f(z) = iz.$$

Sol. $a = i \Rightarrow |a| = 1$. Entonces f es una rotación, donde $\alpha = Arg(i) = \pi/2$.



$f(D) = \{w / \ Im(w) > 0\}$

$D = \{z / \ Re(z) > 0\}$

Comprobando. Sea $w \in f(D)$, entonces existe $z \in D$ tq

$$w = f(z) = iz$$

$$\Rightarrow u + iv = i(x+iy) = ix - y = (-y) + ix$$

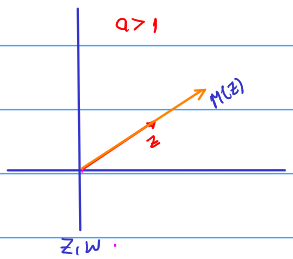
$$\Rightarrow \quad u = -y, \quad v = x.$$

Si $z \in D$, entonces $Re(z) = x > 0$. Por tanto, $Im(w) = v = x > 0$.

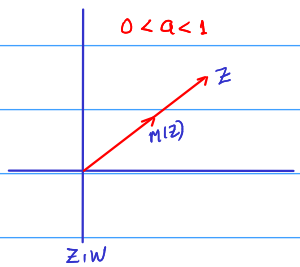
Así tenemos que $f(D) = \{w / \ Im(w) > 0\}$.

3. Ampliación. $M(z) = az$, donde $a > 0$.

Tenemos: $|M(z)| = |a.z| = a|z|$ y $Arg(M(z)) = Arg(z)$



M es una dilatación



M es una contracción

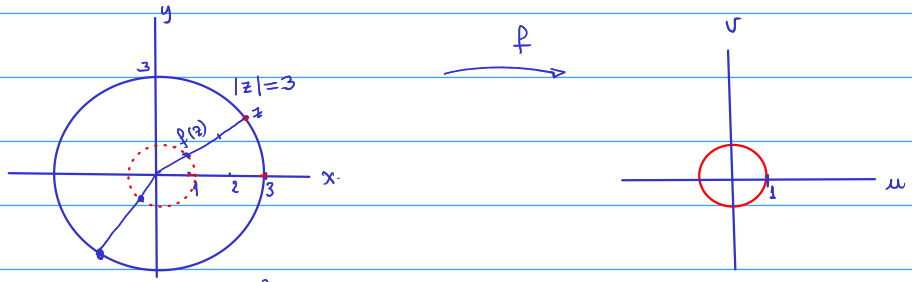
Ejemplo 1.

a) $f(z)=\frac{1}{2}z$ es una contracción $(a=\frac{1}{2}<1)$

b) $f(z)=\sqrt{2}z$ es una dilatación $(a=\sqrt{2}>1)$

Ejemplo 2. Determine $f(D)$ donde $D=\{z;\ |z|=3\}$ mediante la aplicación $f(z)=\frac{1}{3}z$.

Sol. f es una contracción con $a=\frac{1}{3}$.



$D=\{z/\ |z|=3\}$ $\qquad f(D)=\{w/\ |w|=1\}$

Comprobando.

$$|z|=3 \Rightarrow |w|=|f(z)|=\frac{1}{3}|z|=\frac{1}{3}(3)=1$$

$$\Rightarrow |w|=1$$

$$\therefore\ f(D)=\{w/\ |w|=1\}$$

Función lineal. $f(z)=az+b$, a y b son constantes en $\mathbb{C}$ con $a\neq 0$.

f tiene las sgtes propiedades

a) f es la composición de una traslación, una rotación y una ampliación.

En efecto:

$$f(z)=az+b=T(az) \quad \text{donde} \quad T(z)=z+b$$

$$=T\left(|a|\cdot\frac{a}{|a|}z\right)$$

$$=T\left(M\left(\frac{a}{|a|}z\right)\right), \qquad M(z)=|a|z$$

$$=T\left(M\left(R(z)\right)\right), \qquad R(z)=\frac{a}{|a|}\cdot z$$

$$f(z)=(T\circ M\circ R)(z)$$

$$\therefore\ f=T\circ M\circ R$$

otra forma: $f(z) = |a| \cdot \underbrace{\frac{a}{|a|}}_{R(z)} \cdot z + b$

$$f(z) = \underbrace{|a|\, R(z)}_{M(R(z))} + b, \qquad R(z) = \frac{a}{|a|} z$$

$$f(z) = M(R(z)) + b, \qquad M(z) = |a| z$$

$$f(z) = T(M(R(z))), \qquad T(z) = z + b$$

$$f(z) = (T \circ M \circ R)(z).$$

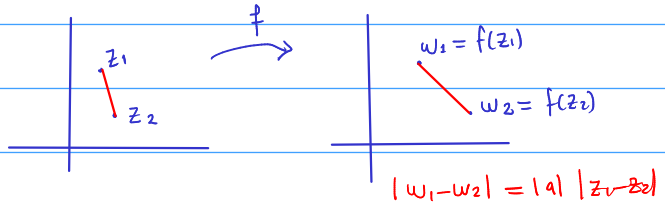
$\therefore f = T \circ M \circ R.$

b) La distancia entre los puntos $w_1 = f(z_1)$ y $w_2 = f(z_2)$ en el plano w, es igual a la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en el plano z multiplicada por $|a|$.

En efecto:

$$|w_1 - w_2| = |f(z_1) - f(z_2)|$$
$$= |a z_1 + b - (a z_2 + b)|$$
$$= |a z_1 - a z_2|$$
$$= |a \cdot (z_1 - z_2)|$$

$\therefore |w_1 - w_2| = |a| \cdot |z_1 - z_2|$



c) La imagen de una recta en el plano z es también una recta en el plano w mediante la aplicación lineal f. De forma análoga, la imagen de un círculo en el plano z es otro círculo en el plano w.

En efecto: Sea L_1 la recta en el plano z.

$$L_1: z = z_0 + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $z \in L_1$, entonces

$$f(z) = az + b = a(z_0 + tv) + b = (az_0 + b) + t(av)$$
$$f(z) = f(z_0) + t(av)$$

Por tanto, $f(L_1)$ es la recta de ecuación $w = f(z_0) + t(av)$, $t \in \mathbb{R}$.

