27/09/2021

Ejemplo 5. Use la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3\theta)$ y $\operatorname{sen}(3\theta)$.

Solución. Sea $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Entonces

$$z^3 = [\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta]^3 = [\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)]. \quad (1)$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta\, i^2\operatorname{sen}^2\theta + i^3\operatorname{sen}^3\theta \\ &= \cos^3\theta + i3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) + (3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)\, i \quad (2) \end{aligned}$$

Por igualdad de números complejos, de (1) y (2) se tiene:

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\operatorname{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

Ejercicios

1. Simplificar la expresión.

$$E = \frac{(5+i)^8}{(1-5i)^7} + \frac{(2+3i)^{16}}{(3-2i)^{14}}.$$

Sol.

$$\frac{(5+i)}{1-5i} = \frac{(5+i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{(5-5)+i(25+1)}{1^2+5^2} = \frac{26i}{26} = i$$

$$\frac{2+3i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{(6-6)+i(4+9)}{3^2+2^2} = \frac{13i}{13} = i$$

Entonces

$$E = \left(\frac{5+i}{1-5i}\right)^7 \cdot (5+i) + \left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^{14} (2+3i)^2$$

$$\begin{aligned} &= i^7 \cdot (5+i) + i^{14}(2+3i)^2 && i^7 = i^3 = -i \\ &= -i(5+i) + (-1)(4+12i-9) && i^{14} = i^2 = -1 \\ &= -5i + 1 + 5 - 12i \end{aligned}$$

$$E = 6 - 17i.$$

2. Halle las soluciones reales de la ecuación

$$(2+3i)\,x + (i-1)\,y = 6-i$$

Sol.

$$2x + 3ix + iy - y = 6 - i$$

$$(2x-y) + (3x+y)i = 6 - i = 6 + (-1)i$$

$$2x - y = 6, \quad 3x + y = -1$$

$$x = 1, \quad y = -4.$$

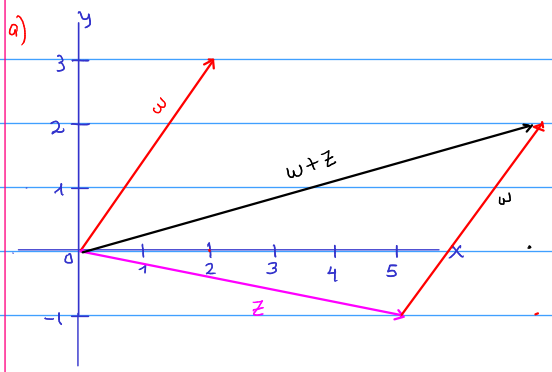
3. Representar geometricamente las sgtes operaciones

a) $(2+3i) + (5-i) = 7+2i$

b) $\left(2+\frac{2}{3}i\right) \cdot (3-2i)$

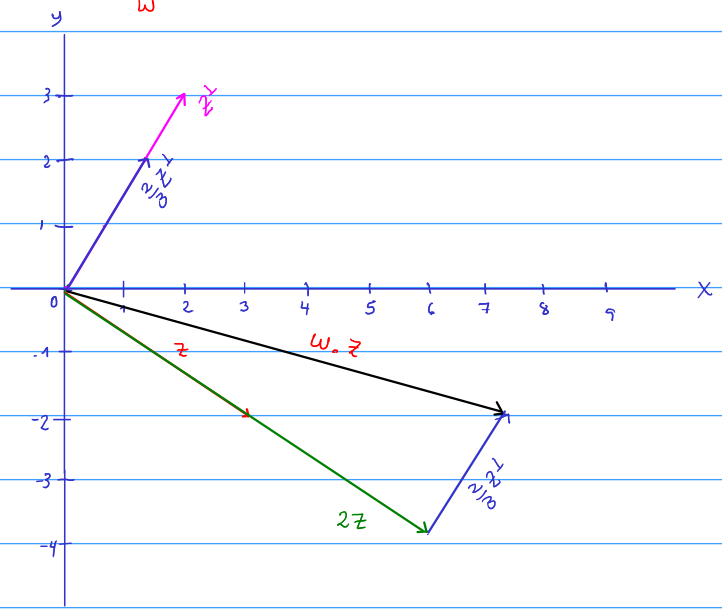
Solución

a)



$w = 2+3i$, $z = 5-i = (5,-1)$

b) $\underbrace{\left(2+\frac{2}{3}i\right)}_{w} \cdot \underbrace{(3-2i)}_{z} = 2\underbrace{(3-2i)}_{z} + \frac{2}{3}\underbrace{(2+3i)}_{z^{\perp}} = 2z + \frac{2}{3}z^{\perp} = w.z$



$z = 3-2i$

$w = 2 + \frac{2}{3}i$

4. Halle todos los números complejos z tales que $|z|=1$ y

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right|=1$$

Sol.

$|z|=1 \Rightarrow z=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$, $\bar{z}=\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta$.

Entonces

$$1=\left|\frac{z\,z}{\bar{z}.z}+\frac{\bar{z}\,\bar{z}}{z\,\bar{z}}\right|=\left|z^2+(\bar{z})^2\right| \qquad |z|=z.\bar{z}=1$$

$$=|\cos(2\theta)+i\,\text{sen}(2\theta)+\cos(2\theta)-i\,\text{sen}(2\theta)|$$

$$=|2\cos 2\theta|$$

$$1=2\,|\cos 2\theta)$$

$$|\cos 2\theta|=\frac{1}{2}$$

$$\cos 2\theta=\frac{1}{2} \quad \text{v} \quad \cos 2\theta=\frac{-1}{2}$$

Si $\cos 2\theta=\frac{1}{2}$, entonces

$$2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \qquad 2\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\theta=\underbrace{\frac{\pi}{6}+k\pi}, \qquad \theta=\underbrace{-\frac{\pi}{6}+k\pi}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\theta_1=\underset{k=0}{\frac{\pi}{6}}, \quad \theta_2=\frac{-5\pi}{6} \qquad \theta_3=\underbrace{-\frac{\pi}{6}}, \quad \theta_4=\frac{5}{6}\pi,$$

Si $\cos(2\theta)=-\frac{1}{2}$, entonces

$$2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad \text{v} \quad 2\theta=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \text{v} \quad \theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\theta_5=\frac{\pi}{3}, \quad \theta_6=\frac{-2\pi}{3} \quad \text{v} \quad \theta_7=-\frac{\pi}{3}, \quad \theta_8=\frac{2}{3}\pi.$$

Por tanto, la ecuación tiene 8 soluciones

$$z_k = \cos(\theta_k) + i\,\mathrm{sen}(\theta_k), \quad k = 1, \ldots, 8.$$

$$z_1 = \cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}.$$

$z_2 =$ $\quad =$

$z_3 =$

5) Graficar la curva determinada por la ecuación

$$\mathrm{Im}(\overline{\bar{z}^2 - \bar{z}}) = 2 + \mathrm{Im}(\bar{z})$$

sol. $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$$

$$\bar{z}^2 - \bar{z} = (x^2 - y^2 - 2xyi) - (x - iy)$$

$$= (x^2 - y^2 - x) + (-2xy + y)i$$

$$\overline{\bar{z}^2 - \bar{z}} = (x^2 - y^2 - x) - (-2xy + y)i$$

$$= (x^2 - y^2 - x) + (2xy - y)i$$

$$\mathrm{Im}(\overline{\bar{z}^2 - z}) = 2xy - y$$

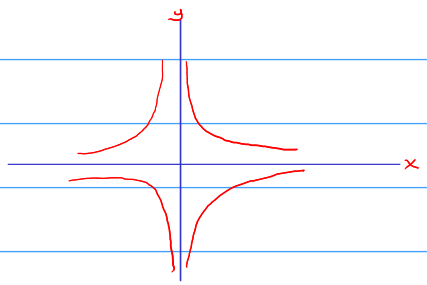
$$\mathrm{Im}(\bar{z}) = -y$$

Si $\mathrm{Im}(\overline{\bar{z}^2 - \bar{z}}) = 2 + \mathrm{Im}(\bar{z})$, entonces

$$2xy - y = 2 - y$$

$$2xy = 2$$

$$xy = 1$$



$xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$

6. Demuestre que

$$\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\theta}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\theta}\right)^n = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}(n\theta)}{1 - i\,\mathrm{tg}(n\theta)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$$

Yeno.

sol.

$$\left(\frac{1+i\,tg\theta}{1-i\,tg\theta}\right)^n = \left(\frac{1+i\,\frac{sen\theta}{cos\theta}}{1-i\,\frac{sen\theta}{cos\theta}}\right)^n = \left(\frac{\frac{cos\theta+i\,sen\theta}{cos\theta}}{\frac{cos\theta-i\,sen\theta}{cos\theta}}\right)^n = \frac{(cos\theta+i\,sen\theta)^n}{(cos\theta-i\,sen\theta)^n}$$

$$= \frac{cos(n\theta)+i\,sen(n\theta)}{cos(n\theta)-i\,sen(n\theta)} \cdot \frac{\frac{1}{cos n\theta}}{\frac{1}{cos(n\theta)}}$$

$$= \frac{1+i\,\frac{sen(n\theta)}{cos(n\theta)}}{1-i\,\frac{sen(n\theta)}{cos(n\theta)}} = \frac{1+i\,tg\theta}{1-i\,tg\theta}.$$

3. Radicación

El número complejo w es raíz n-ésima ($n\in\mathbb{N}$) de z si

$$w^n = z$$

y se escribe $\sqrt[n]{z}$.

Ejemplo: los números complejos $w_1=i$, $w_2=-i$ son raíces cuadradas ($n=2$) de $z=-1$ pues

$$w_i^2 = -1.$$

Teorema 3.1 Todo número complejo $z\neq 0$ admite n raíces distintas dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\,sen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k=0,\dots,n-1$; $r=|z|$, $\theta=arg(z)\in[0,2\pi\rangle$.

Dem. Sean $z=r(cos\theta+i\,sen\theta)$, $\theta=arg(z)\in[0,2\pi\rangle$, $r=|z|$. y

$$w=\rho(cos\varphi+i\,sen\varphi),\quad \rho=|w|,\quad \varphi\in[0,2\pi\rangle$$

Si w es una raíz n-ésima de z entonces

$$w^n = z$$

$$\rho^n(cos(n\varphi)+i\,sen(n\varphi)) = r(cos\theta+i\,sen\theta)$$

$$\rho^n = r \;\wedge\; n\varphi = \theta+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \;\wedge\; \varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n},\quad z\in\mathbb{Z}.$$

Si $\varphi\in[0,2\pi\rangle$ entonces

$$0 \le \frac{\theta+2k\pi}{n} < 2\pi$$

$$0 \le \theta + 2k\pi < 2\pi n \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

$$-\theta \le 2k\pi < 2\pi n - \theta \qquad 0 \le \frac{\theta}{2\pi} < 1$$

$$-1 < -\frac{\theta}{2\pi} \le k < n - \frac{\theta}{2\pi} \le n \qquad -1 < -\frac{\theta}{2\pi} \le 0$$

$$-1 < k < n, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad n-1 < n - \frac{\theta}{2\pi} \le n$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Por tanto, las n raíces distintas de z son:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Observación. 29/09/2021

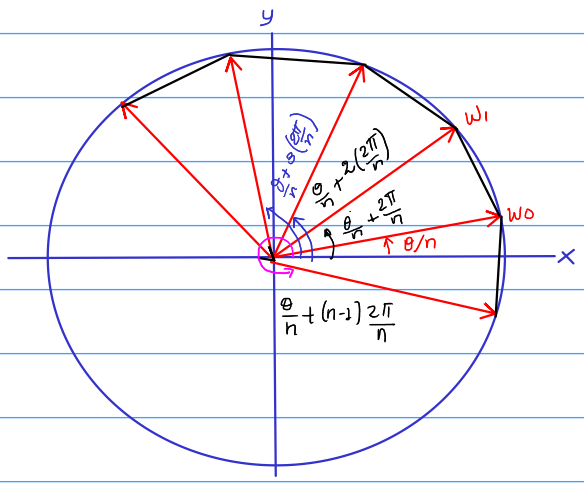
Las raíces n-ésimas de un número complejo $z \neq 0$ corresponde a los vértices de un polígono regular de n lados inscritos en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$, donde $r = |z|$.

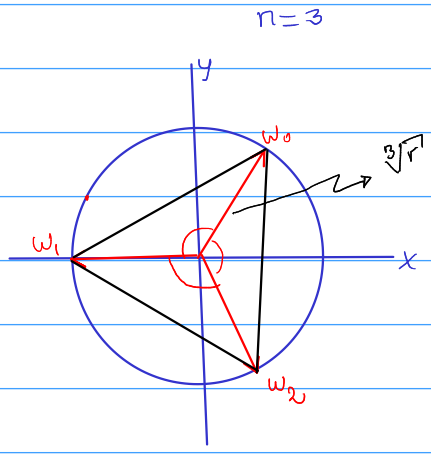
$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$w_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$



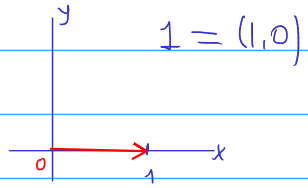


Ejemplo 1. Calcule y represente geométricamente $\sqrt[4]{1}$.

Sol. Sea $z=1$. Entonces $r=|z|=1$, $\theta=0$

Las raíces cuartas de $z=1$ son:

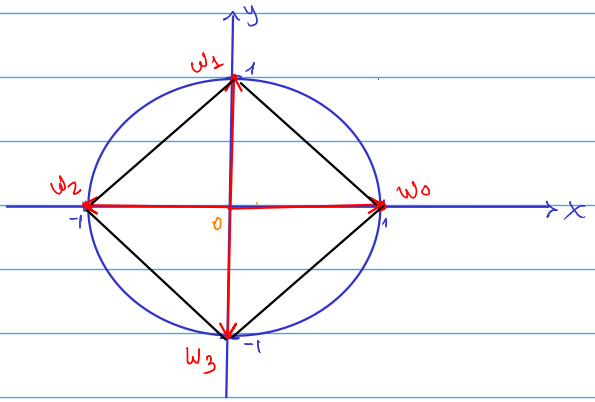
$$w_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)\right)$$



$$w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad k=0,1,2,3$$

Entonces

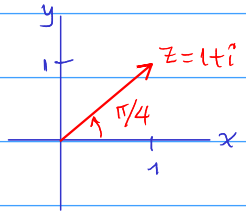
- $w_0 = \cos(0)+i\,\text{sen}(0) = 1 = (1,0)$
- $w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i = (0,1)$
- $w_2 = \cos(\pi)+i\,\text{sen}(\pi) = -1 = (-1,0)$
- $w_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i = (0,-1)$



Ejemplo 2. Calcule y represente geométricamente $\sqrt[3]{1+i}$.

Participación: Hasta 10:04 AM

Sol. $z = 1+i \Rightarrow r=|z|=\sqrt{2}$, $\theta = \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$



$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Las raíces cúbicas $(n=3)$ de $z=1+i$ son:

$$w_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right)$$

$k=0,1,2$

de donde

$$w_0 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) = 2^{1/6}\left(\cos(15°) + i\,\text{sen}(15°)\right)$$

$$= 2^{1/6}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right)$$

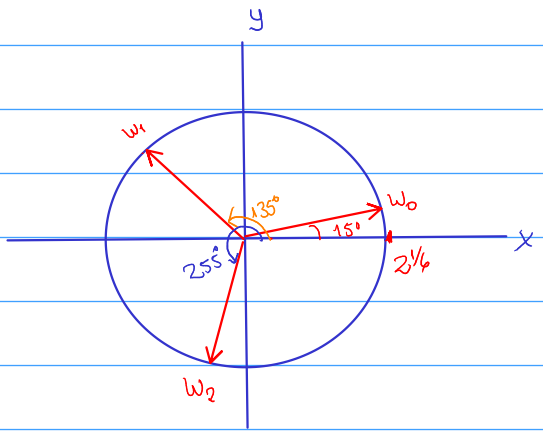
$$w_1 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{12}\right) = 2^{1/6}\left(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°\right)$$

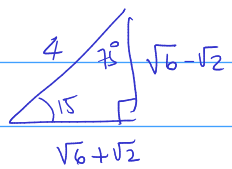
$$= 2^{1/6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$w_2 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right) = 2^{1/6}\left(\cos 255° + i\,\text{sen}\,255°\right)$$

$$-\cos(75°) - i\,\text{sen}(75°)$$

$$= 2^{1/6}\left(-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} - i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$





$$\frac{2\pi}{3} = 120°$$

Raíz n-ésima principal.

La raíz n-ésima principal de $z \neq 0$ es aquella raíz que se obtiene para $k=0$; es decir, es igual

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)$$

donde $r = |z|$.

Potencia racional.

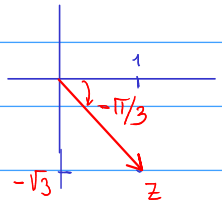
Sean m y n enteros positivos. La potencia racional de $z \neq 0$

$$z^{m/n} = (z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m.$$

Como $w^{1/n} = \sqrt[n]{w}$ tiene n valores, entonces $z^{m/n}$ tambien tiene n valores.

Ejemplo 3. Halle todos los valores de $(1-\sqrt{3}\,i)^{3/4}$.

Sol. $z = 1-\sqrt{3}\,i \Rightarrow r = |z| = 2$, $\theta = \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$



$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z^3 = 2^3\left(\cos(-\pi) + i\,\text{sen}(-\pi)\right) = 8(-1) = -8$$

$$\left(\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)\right)$$

$$|z^3| = 8 \quad \text{y} \quad \text{Arg}(z^3) = \pi.$$

Si $z^{3/4} = (z^3)^{1/4}$ entonces los valores de $z^{3/4}$ son:

$$w_k = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right) \quad | \; k = 0,1,2,3.$$

$$w_0 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$$

$$w_1 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$$

$$w_2 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$$

$$w_3 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$$

Ejercicio: Halle todos los valores de $(1-\sqrt{3}\,i)^{3/4}$ usando la definición $z^{m/n} = [z^{1/n}]^m$

participación: Hasta 2:00 pm

Para $z = x+iy$, el exponencial de z denotado por e^z está dado por

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

De aquí tenemos: $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$.

Si $w = iy$, entonces

$$e^{iy} = e^0(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Por tanto, si $z = x+iy$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$\boxed{e^z = e^x \cdot e^{iy}}$$

Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, entonces

$\boxed{z = r \cdot e^{i\theta}}$ ⟶ Forma exponencial de z.

Ejemplo 1. Exprese en forma exponencial el número complejo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

Sol. $r = |z| = \sqrt{4+12} = 4$

$\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$z = 4(\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3))$

$$\boxed{z = 4e^{i\pi/3}}$$

Ejemplo 2. Pruebe que $z = e^{i\theta}$, entonces $|z| = 1$.

Prueba.

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

$$\Rightarrow |z| = 1.$$

Teorema 4.1 Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces

a) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

b) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

c) Si $z = x+iy$, entonces $|e^z| = e^x$ y $\arg(e^z) = y$.

d) $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Prueba

a) $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Entonces

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1), \quad e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)$$

Luego,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1} \cdot e^{x_2}\left[(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)\right] \\ &= e^{x_1 + x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)\right] \\ &= e^{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= e^{z_1 + z_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

d) si $z = x + iy$ entonces

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1$$

$$(e^x \cos y) + i(e^x \operatorname{sen} y) = 1 + i0$$

$$e^x \cos y = 1 \ \wedge \ e^x \operatorname{sen} y = 0$$

$$e^{2x} \cos^2 y = 1 \ \wedge \ e^{2x} \operatorname{sen}^2 y = 0$$

Sumando

$$\begin{aligned} e^{2x}\cos^2 y &= 1 \\ e^{2x}\operatorname{sen}^2 y &= 0 \\ \hline e^{2x}(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y) &= 1 \end{aligned}$$

$$e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Si $x = 0$, tenemos

$$\underbrace{\cos y = 1}_{y = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}} \ \wedge \ \underbrace{\operatorname{sen} y = 0}_{y = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}}$$

$$y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, $z = x + iy = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Recíprocamente, si $z = 2k\pi i$, entonces

$$e^z = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi) = 1$$

$$e^z = 1.$$

Teorema 4.2 (Operaciones en forma exponencial)

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

c) $z = r e^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$

Prueba.

a) $z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$.

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

Luego, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Ejemplo: Pruebe que $e^{z + 2k\pi i} = e^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Si $z = x + iy$ entonces

$$\begin{aligned} e^{z + 2k\pi i} &= e^{x + (y + 2k\pi) i} \\ &= e^x \left(\cos(y + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2k\pi) \right) \\ &= e^x \left(\cos(y) + i \operatorname{sen} y \right) \\ &= e^z \end{aligned}$$

$\therefore \; e^{z + 2k\pi i} = e^z$.

5. Logaritmo en $\mathbb{C}$

Sea $z \neq 0$. El logaritmo natural de z, denotado por $\ln z$, se define como

$$\boxed{\ln z = w \iff e^w = z}$$

Supongamos que $z = r e^{i\theta}$ y $w = u + iv$, entonces

$$e^w = z \Rightarrow e^u e^{iv} = r e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow e^u = r \wedge v = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow u = \ln(r) \wedge v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $e^w = z$, entonces

$$\ln z = w = \ln(r) + i\,(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\ln z = \ln(r) + i\,(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

ó

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$\ln|z|$: En $\mathbb{R}$

① Cuando $k=0$, el valor de $\ln z$ se denota por $\operatorname{Ln} z$, es decir,

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\theta \quad \text{ó} \quad \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

se denomina valor principal de $\ln z$.

② Cuando z es un real positivo, entonces

$$\operatorname{Ln} z = \ln r.$$

donde $r = |z| = z$.

Teorema 5.1 Si $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$ números complejos, entonces

1) $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$

2) $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$

Prueba

1) Sup. que $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Entonces

$$\ln z_1 = \ln r_1 + i\,(\theta_1 + 2m\pi), \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\ln z_2 = \ln r_2 + i\,(\theta_2 + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Sumando

$$\ln z_1 + \ln z_2 = [\ln r_1 + \ln r_2] + i\,[\theta_1 + \theta_2 + 2(m+n)\pi], \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$= \ln(r_1 \cdot r_2) + i\,[\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi], \quad k = m+n \in \mathbb{Z} \qquad \text{——(1)}$$

Por otro lado, si $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, entonces

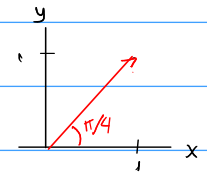
$$\ln(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + i\,(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \text{——(2)}$$

De (1) y (2)

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$

#

Ejemplo 1. Calcule $\ln(1+i)$ y represente geométricamente alguno de ellos en el plano complejo.



Solución. Sup. que $z = 1+i$. Entonces

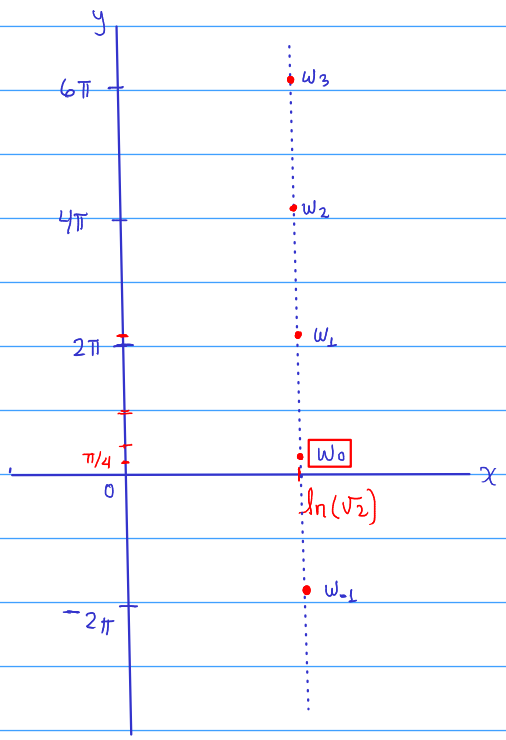
$$|z| = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg}(z) = \pi/4$$

Entonces

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

y el valor principal es:

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$



$$w_k = \ln(1+i) = \left(\ln\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$w_0 = \operatorname{Ln}(1+i) = \left(\ln\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$w_1 = \left(\ln\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$$

$$w_2 = \left(\ln\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 4\pi\right)$$

Ejemplo 2. Igual que 1) para $z = e$.

Solución. Sea $z = e = e + i\cdot 0$. Entonces

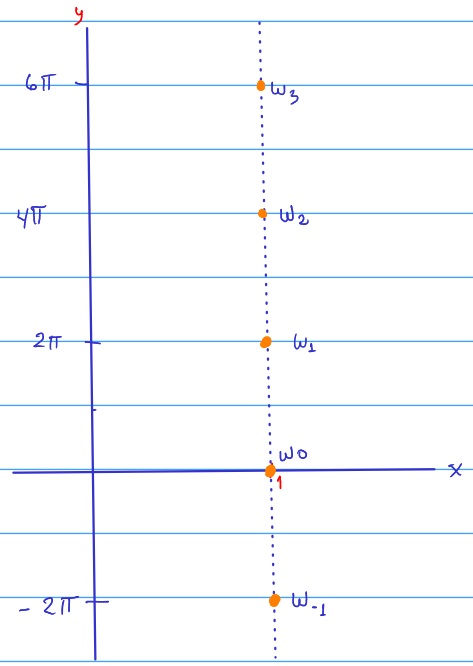
$$|z| = e \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg}(z) = 0.$$

Luego,

$$\ln z = \ln e + i(0 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln z = 1 + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ln} z = 1.$$



$$\ln z = 1 + i\,2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ln} z = 1.$$

$\omega_k = \ln z = (1, 2k\pi)$

$\omega_0 = \operatorname{Ln} z = (1, 0)$