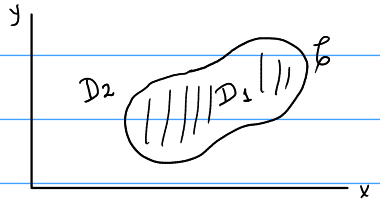
13/12/2021

Según un teorema clásico de G. Jordan, toda curva C suave a trozos simple y cerrado divide el plano complejo en dos subconjuntos D_1 y D_2, uno de los cuales es acotado y el otro no acotado. El subconjunto acotado lo llamaremos el *interior* de C y el subconjunto no acotado de *exterior* de C.

$\mathcal{C}$ es una curva de Jordan si es suave a trozos, cerrada y simple.

D_1: acotado

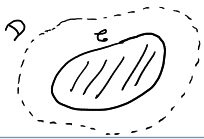
D_2: No acotado



D_1 interior de $\mathcal{C}$

D_2 exterior de $\mathcal{C}$

Teorema 1.2 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Sea C una curva suave a trozos cerrado y simple. Si f es una función analítica en el interior y sobre C, entonces*



$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{1.5}$$

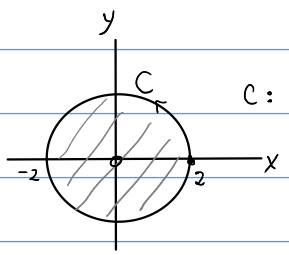
Ejemplo 1. Calcule $\int_C \operatorname{sen} z\, dz$ donde C es cualquier curva de Jordan

Sol: $f(z) = \operatorname{sen} z$. f es analítica en todo $\mathbb{C}$, entonces es analítica en el interior de C y sobre C. Por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_C \operatorname{sen} z\, dz = 0.$$

Ejemplo 2. Calcule $\int_C \frac{dz}{z^5}$, donde C es la circunferencia $|z|=2$ que se recorre en sentido antihorario.

Sol. $f(z) = \frac{1}{z^5}$. f es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$.



$C: z(t) = 2e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$

$z'(t) = 2ie^{it}$

Si $z(t) = 2e^{it}$ entonces $f(z(t)) = \frac{1}{(2e^{it})^5} = \frac{1}{32} e^{-5ti}$

Por tanto, $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{32} e^{-5it} \cdot 2e^{it} i\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{16} e^{-4ti}$$

$$= \frac{i}{16} \int_0^{2\pi} [\cos(4t) - i \operatorname{sen}(4t)]\, dt$$

$$= \frac{i}{16} \left[\frac{1}{4} \operatorname{sen}(4t) + \frac{i}{4} \cos(4t) \right]_0^{2\pi} = \frac{i}{16} \left[\frac{i}{4} \cos(8\pi) - \frac{i}{4} \cos(0) \right]$$

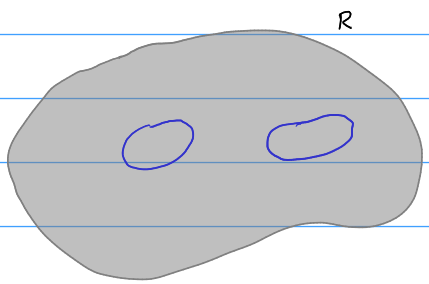
$$= \frac{i}{16} \left(\frac{i}{4} - \frac{i}{4} \right) = 0.$$

Nota: En el ejemplo 2 no se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues f no es analítica en el interior de C. (falla en $z=0$).

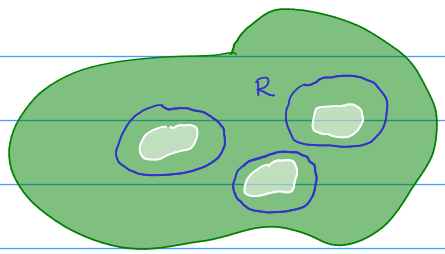
Regiones simple y múltiplemente conexos

Una región R se dice simplemente *conexa* si cualquier curva cerrada simple contenida en R encierra sólo puntos de R.

Una región que no es simplemente conexa se denomina *múltiplemente conexa*.



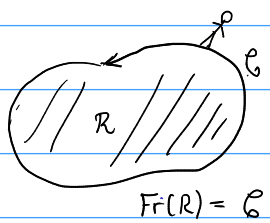
R simplemente conexa



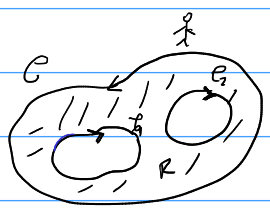
R múltiplemente conexa

Orientación positiva de la frontera de una región

Se dice que la frontera C de una región tiene orientación positiva si un observador al recorrerlo en sentido positivo a C y perpendicular al plano tiene la región a la izquierda



Fr(R) = C

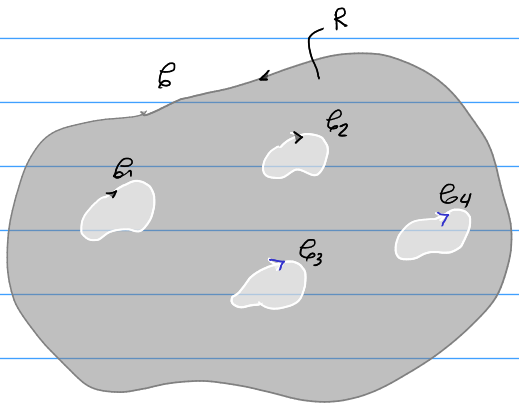


Fr(R) = F

F = C ∪ C1 ∪ C2

Teorema 1.3 (Teorema de Cauchy-Goursat para regiones multiplemente conexas-versión 1). *Sean C una curva cerrada y simple y sean C_1, C_2,...,C_n un número finito de curvas cerradas simples, interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común. Sea R la región múltiplemente conexa que es la intersección del interior de C y exteriores de los C_j cuya frontera orientada positivamente F es la unión de C, C_1, C_2,...,C_n . Si f es una función analítica en R y sobre su frontera, entonces*

$$\int_F f(z)dz = 0.$$



$F = C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

F es orientada positivamente

Ejemplo 3. Calcule $\int_F \frac{dz}{(z-5)(z^2-4)}$

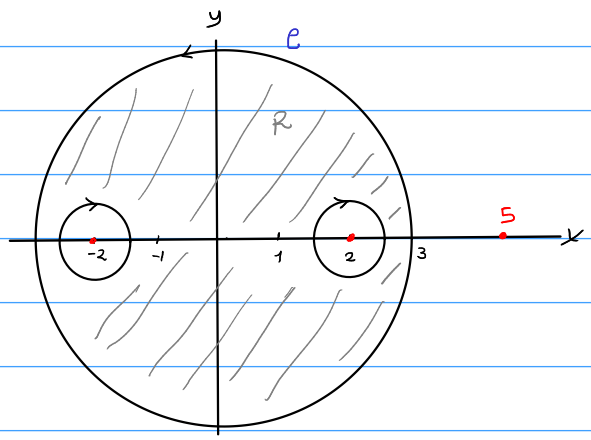
donde F consta de la circunferencia $C: |z|=3$ que está orientada positivamente.

y de la circunferencia $C_1: |z+2| = 1/2$ y $C_2: |z-2| = 1/2$ orientada negativamente.

Sol. $f(z) = \frac{1}{(z-5)(z^2-4)} = \frac{1}{(z-5)(z-2)(z+2)}$

f es analítica en $\mathbb{C} - \{5, 2, -2\}$.

$\Rightarrow$ f es analítica en R y sobre $F = F_r(R)$.



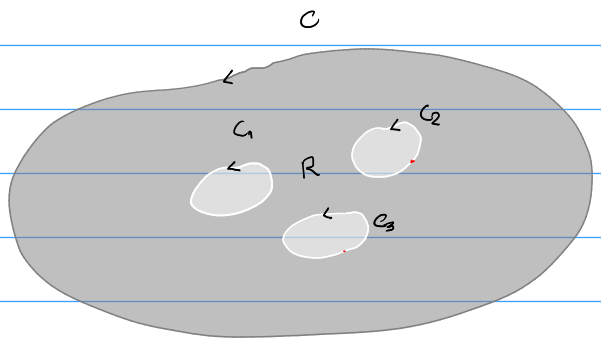
Por tanto, por el teorema de Cauchy-Goursat

$\int_F f(z)\,dz = 0.$

15/12/2021

Teorema 1.4 (Teorema de Cauchy-Goursat para regiones multiplemente conexas - versión 2). *Sea C una curva suave cerrada y simple orientada positivamente, y sean C_1, C_2,...,C_n un número finito de curvas suaves cerrados simples orientados positivamente, interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común. Sea R la región multiplemente conexa acotada por curvas C_1, C_2,...,C_n. Si f es una función analítica en R y sobre las curvas C, C_1, C_2,...,C_n, entonces*

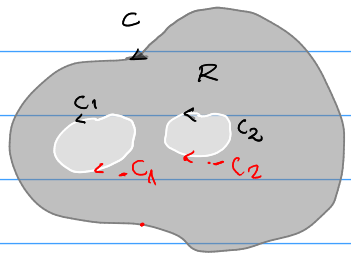
$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz.$$



$Fr(R) = C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Dem. Para $n=2$. Sea $F = C \cup (-C_1) \cup (-C_2) = Fr(R)$ orientada positivamente.

Por el teorema de Cauchy - Goursat (versión 1)



$$\int_F f(z)\,dz = 0$$

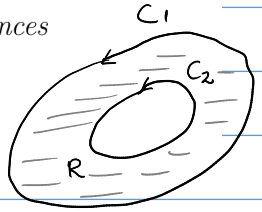
$$\int_C f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z) = 0$$

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz .$$

Corolario 1.1. *Sea C_1 y C_1 dos curvas cerradas, simples con orientación positiva en un dominio D tal que C_2 está en el interior de C_1. Si f es analítica en la región R cuya frontera son las curvas C_1 y C_2 y sobre las curvas C_1 y C_2 entonces*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$



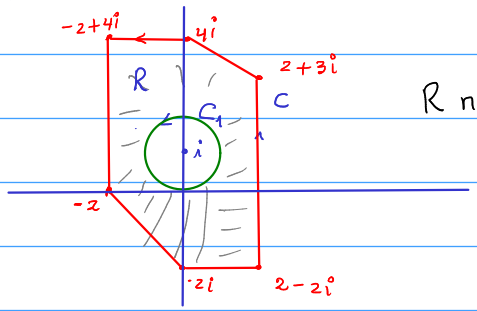
Ejemplo 4. Determine la integral $\int_C f(z)dz$ donde $f(z)=\frac{1}{z-i}$ y C es la curva cerrada que une los puntos $4i$, $-2+4i$, -2, $-2i$, $2-2i$, $2+3i$.

Sol. $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}-\{i\}$.

Consideremos la circunferencia $C_1: |z-i|=1$ orientada positivamente.

Sea R la región acotada por C y C_1.

Como $R \subset \mathbb{C}-\{i\}$, entonces f es analítica en R y sobre C y C_1.



R no contiene i

Entonces por corolario anterior

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} f(z(t)).\, z'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)-i}.\, z'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}.\, ie^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,dt$$

$$\int_C \frac{1}{z-i}dz = 2\pi i.$$

C_1: $z(t)-i = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$z(t) = i + e^{it}$

$z'(t) = ie^{it}$

Definición 1.3. *Si f y F' son funciones analíticas en un dominio D tal que $F'(z) = f(z)$ entonces F se llama primitiva de f.*

Ejemplo: $f(z) = \operatorname{sen}(z)$. $F(z) = -\cos(z)$ es una primitiva de f pues $F'(z) = f(z)$.

También $G(z) = -\cos(z) + c$ es una primitiva de f, ya que $G'(z) = f(z)$.

Obs. Una función f tiene infinitas primitivas que difieren de una constante.

Teorema 1.5. *Si f es una función analítica en una región simplemente conexa R y si F es una primitiva de f, entonces para todas las curvas suaves a trozos en R que unan dos puntos z_1 y z_2 se tiene*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big]_{z_1}^{z_2}$$



$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_C f(z)dz$ donde C es cualquier curva cuyo punto inicial es z_1 y punto final z_2.

Ejemplo 4. Calcule $\int_i^{2+i} (3z^2 - 4z)dz$

Sol. $f(z) = 3z^2 - 4z$. $F(z) = z^3 - 2z^2$

$F'(z) = 3z^2 - 4z = f(z)$

$\Rightarrow$ F es una primitiva de f.

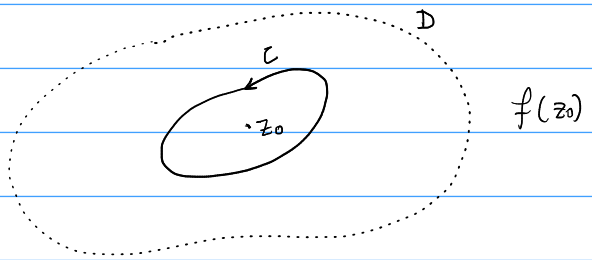
$$\Rightarrow \int_i^{2+i} (3z^2 - 4z)dz = \left[z^3 - 2z^2\right]_i^{2+i}$$

$$= \left[(2+i)^3 - 2(2+i)^2\right] - \left[i^3 - 2i^2\right]$$

$$= 9i - 6.$$

Teorema 1.6 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Si C es una curva suave a trozos, cerrada y simple contenida en D, entonces para cualquier z_0 en el interior de C ,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad z \in C$$



La fórmula integral de Cauchy también puede expresarse como

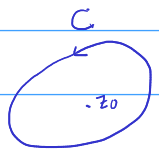
$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Esta forma es utilizada para calcular ciertos integrales a lo largo de una curva suave a trozos, cerrada y simple

Ejemplo 1. Determine $\int_C \frac{1}{z-z_0}dz$ donde C es una curva suave a trozos, cerrada y simple con z_0 en el interior de C.

Sol. Sea $f(z) = 1$. f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Entonces por la fórmula integral de Cauchy



$$\int_C \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i$$

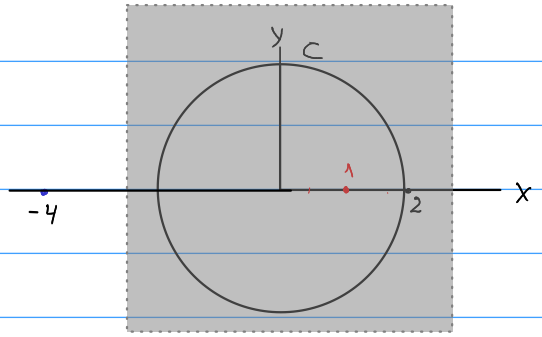
$$\int_C \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i, \quad \text{para } z_0 \text{ al interior de } C.$$

Ejemplo 2. Determine $\int_C \frac{z}{z^2+3z-4}dz$ donde C es la circunferencia $|z|=2$ orientada positivamente.

Sol. $z^2+3z-4 = (z+4)(z-1)$

$$\int_C \frac{z}{z^2+3z-4}\,dz = \int_C \frac{z}{(z+4)(z-1)}\,dz$$

$$= \int_C \frac{\frac{z}{z+4}}{z-1}\,dz$$



D: simplemente conexo

Hacemos $f(z) = \frac{z}{z+4}$. f es analítica en todo $\mathbb{C}-\{-4\}$. Por tanto es analítica en D.

Tenemos $z_0 = 1$ que está en el interior de C.

Entonces por la fórmula Integral de Cauchy,

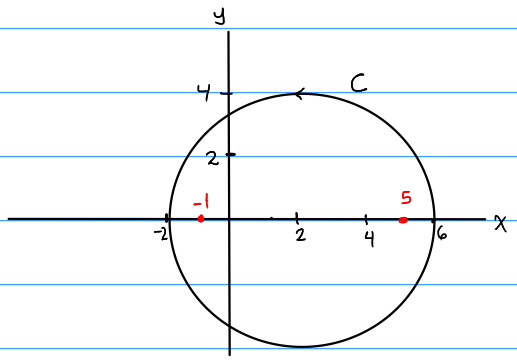
$$\int_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1)$$

$$\int_C \frac{\frac{z}{z+4}}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{5}$$

$$\int_C \frac{z}{z^2+3z-4}\,dz = \frac{2}{5}\pi i$$

Ejemplo 3. Calcule la integral $\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^2-4z-5}\,dz$ donde C es la circunferencia $|z-2|=4$ orientada positivamente.

Sol. $z^2-4z-5 = (z-5)(z+1) = 0 \rightarrow z=5,\ z=-1$



En este caso es imposible aplicar directamente la fórmula integral de Cauchy, porque los puntos $z=-1$ y $z=5$, los cuales anulan el denominador de la función integrando se encuentran en el interior de C.

Tenemos

$$\frac{1}{z^2-4z-5} = \frac{1}{(z+1)(z-5)} = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{z+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-5}$$

Entonces

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^2-4z-5}\,dz = -\frac{1}{6}\int_C \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(\pi z/2)}^{=f(z)}}{\underbrace{z+1}_{z_0=-1}}\,dz + \frac{1}{6}\int_C \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(\pi z/2)}^{=f(z)}}{\underbrace{z-5}_{z_0=5}}\,dz \qquad f \text{ es analítica en } \mathbb{C}=D$$

$$= -\frac{1}{6}\,2\pi i\, f(-1) + \frac{1}{6}\cdot 2\pi i\, f(5)$$

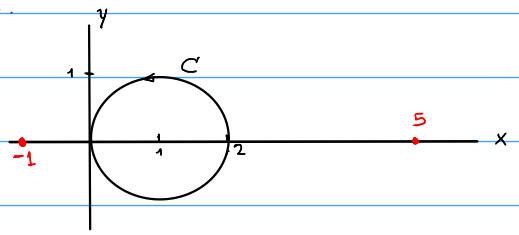
$$= -\frac{1}{6}\,2\pi i\,\operatorname{sen}(-\pi/2) + \frac{1}{6}\,2\pi i\cdot\operatorname{sen}(5\pi/2)$$

$$= -\frac{1}{6}\,2\pi i\,(-1) + \frac{1}{6}\,2\pi i\cdot(1)$$

$$= \frac{2}{3}\pi i \quad \#$$

Ejemplo 4. Calcule la integral $\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^2-4z-5}\,dz$ donde C es la circunferencia $|z-1|=1$ orientada positivamente.

sol.



$$z^2-4z-5 = (z-5)(z+1) = 0$$
$$z=5, \quad z=-1$$

En este caso, no se puede usar la fórmula integral de Cauchy, pues ni $z=5$, ni $z=-1$ están en el interior de C.

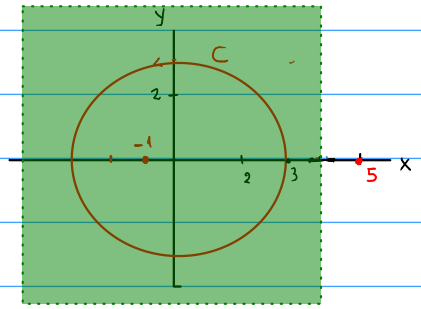
Si $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^2-4z-5}$, entonces ella es analítica en $\mathbb{C}-\{5,-1\}$.

Por tanto, f es analítica en el interior de C y sobre C.

Entonces por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^4-4z-5}\,dz = 0.$$

Ejemplo 5. Calcule la integral $\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^2-4z-5}\,dz$ donde C es la circunferencia $|z|=3$ orientada positivamente.



D simplemente conexo

$C \subset D$

$z_0 = -1$

$z^2-4z-5 = (z+1)(z-5)$

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{(z+1)(z-5)}\,dz = \int_C \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z-5}}{z+1}\,dz$$

$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z-5}$ es analítica en D.

Entonces por la formula integral de Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\, f(-1)$$

$$\int_C \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z-5}}{z+1}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{-1-5}$$

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)}{z^2-4z-5}\,dz = \frac{\pi}{3} i$$

Teorema 1.7. *Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Si C es una curva suave a trozos, cerrada y simple contenida en D, entonces para cualquier z_0 en el interior de C los valores de la derivada en este punto están dadas por*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \tag{1.7}$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \tag{1.8}$$

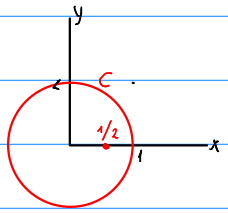
y, en general

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0)$$

Ejemplo: Calcule $\int_C \frac{z^5+z}{(z-1/2)^3}\,dz$, $C: |z|=1$ orientada positivamente. ($z^5+z = f(z)$)

Sol. $f(z) = z^5+z$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ y $z_0 = 1/2$ está en el interior de C.



Por tanto,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1/2)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1/2) = \pi i\, f''(1/2), \quad n=2.$$

$$= \pi i \left(\frac{5}{2}\right) \qquad (*)$$

Derivando f.

$$f(z) = z^5 + z$$

$$f'(z) = 5z^4 + 1$$

$$f''(z) = 20z^3 \implies f''(1/2) = 20\,(1/2)^3 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Entonces de $(*)$

$$\int_C \frac{z^5 + z}{(z-1/2)^3}\,dz = \frac{5\pi i}{2}$$

($z^5 + z = f(z)$)